Funzioni viste in diagonale

ovvero

Perché ci sono più funzioni di quante non se ne potranno mai calcolare...

Paolo Caressa

Roma, gennaio 2007

Il concetto di funzione è così fondamentale in matematica (e nelle sue applicazioni scientifiche, ingegneristiche, economiche, ecc.) che pare strano sia stato capito in modo esatto solo in tempi recenti, vale a dire nella metà dell'Ottocento. A dire il vero Isaac Newton già lo aveva introdotto, sotto il nome di *fluente*, nei geniali lavori in cui introdusse il calcolo differenziale, ed i matematici del Settecento avevano certo chiara una idea intuitiva del concetto di funzione. Ma la *teoria delle funzioni* propriamente detta si ebbe sono nell'Ottocento, quando, a partire dalle celeberrime lezioni di analisi di Augustin Cauchy, si chiarì la confusione fra il concetto di funzione e quello di espressione impiegata per valutarla.

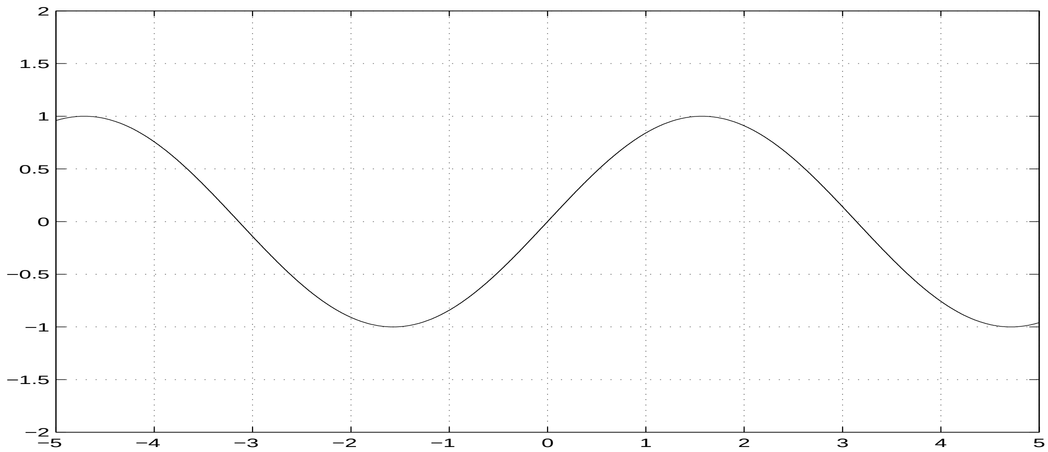
Fissati due insiemi X e Y, una funzione, leggiamo oggi in qualsiasi libro introduttivo di analisi, è una legge f che associa ad ogni elemento x di X *al più* un elemento y di Y. Dato che, se f associa un valore a x, ne associa uno solo, questo valore dipende solo da f e da x, e lo denotiamo (visto che è unico merita un nome proprio) con $f(x)$, scrittura che si legge "f di x". Si noti che, invece, f può assegnare a diversi x uno stesso valore. Per capire questa definizione, immaginiamo una funzione come l'atto di scagliare una freccia: X è l'insieme delle frecce nella nostra faretra e Y è il bersaglio. Possiamo, scagliando una freccia, colpire al più un punto del bersaglio (se non centriamo il bersaglio non ne colpiamo nessuno), mentre con più frecce, come Robin Hood insegna, possiamo colpire lo stesso bersaglio. Invece, nemmeno Robin Hood potrebbe, con un sol tiro, colpire due bersagli distinti...

Quasi a corroborare questa mia metafora, si scrive solitamente $f : X \to Y$ per significare che f è una funzione da X a Y. In analisi X e Y sono di solito intervalli dell'insieme dei numeri reali, ma in questa nostra discussione sulle funzioni vogliamo renderci la vita semplice, e considereremo solo funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definite ed a valori nell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$.

Per definire una funzione è necessario specificare tutti i possibili valori $f(x)$ che può assumere al variare di ogni x possibile in X: se X è un insieme finito, questo può essere fatto con una tabella. Ad esempio la funzione che in un negozio associa a ciascun oggetto in vendita il suo prezzo può convenientemente essere definita da una tabella dove alle x (gli oggetti) si fanno corrispondere le y (i prezzi):

Oggetto	**Prezzo**
Pantaloni	59€
Maglione	45€
Camicia	35€
⋮	⋮

Un altro modo di descrivere una funzione è di tracciarne il grafico: si tratta, in questo caso, di disegnare in un piano cartesiano i valori della funzione $y = f(x)$ in corrispondenza dei valori dell'argomento x: ad esempio, nel caso della funzione $y = \operatorname{sen} x$ della trigonometria (in questo caso X è l'insieme di tutti i numeri reali e Y è l'insieme dei numeri compresi fra -1 e 1, estremi inclusi), il grafico è mostrato nella figura seguente:



Naturalmente il grafico non ci dice in modo preciso quanto vale una funzione su un certo punto, ma ci dà un'idea del suo comportamento globale, del suo andamento, etc. Nelle scienze è comunissimo rappresentare graficamente le funzioni per rendersi conto di come variano certe grandezze.

Infine, ed è il più felice dei casi (ma spesso il più raro nella pratica), è possibile dare per una funzione una espressione che ne permetta di calcolare il valore: ad esempio la funzione

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

è definita dando una regola per calcolare i suoi valori $f(x)$ quale che sia x.

È sempre possibile trovare una regola di questo tipo, o, come si dice spesso, una *formula chiusa*, per calcolare una funzione data? In questa nota mostrerò come ciò non sia sempre possibile in generale. Precisamente *esibirò una funzione che non è possibile calcolare per mezzo di nessuna formula chiusa.*

Limitiamoci, come ho detto più sopra, a considerare le funzioni del tipo $f(n) = m$ dove n e m sono numeri interi non negativi, cioè numeri naturali, sui quali possiamo operare con le solite operazioni aritmetiche, anche se con alcune limitazioni: ad esempio $3 - 4$ non dà luogo ad un numero naturale, bensì al numero intero -1, e $3/4$ non dà luogo nemmemo ad un numero intero, ma al numero decimale 0,75. Ma, malgrado queste limitazioni, con i numeri naturali possiamo calcolare molte cose: basti pensare che i calcolatori elettronici rappresentano qualsiasi altra grandezza, un numero con segno, uno con la virgola o anche un carattere testuale, per mezzo di numeri naturali.

Non è quindi una questione oziosa la domanda: è possibile calcolare qualsiasi funzione fra i numeri naturali? Facciamo un esempio, abusatissimo. Consideriamo la funzione $s(n)$ che ad numero n associa la somma di tutti i numeri minori o uguali a n. Ad esempio

$$s(0) = 0, \quad s(1) = 0 + 1 = 1, \quad s(2) = 0 + 1 + 2, ...$$

In generale $s(n) = 0 + 1 + 2 + \cdots + n$. Quest'ultima formula non sembra molto precisa, per via dei puntini di sospensione: è una scoperta che risale agli antichi Egizi che

$$s(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Pertanto una funzione apparentemente complicata è espressa da una semplice formula chiusa[1].

[1] Circola un aneddoto attorno a questa formula, che coinvolge il più grande matematico dei tempi moderni, Karl Friedrich Gauss, quando era alle elementari: il Maestro Buttner, diede come compito in classe quello di trovare la somma dei primi cento numeri, certo di impegnare gli alunni per un bel po' di tempo; dopo pochi minuti, Gauss si presentò con la soluzione. Anziché calcolare la somma, aveva inventato un algoritmo alternativo per calcolarla, precisamente questo: scrivendo $1 + 2 + \cdots + 49 + 50 + 51 + \cdots + 100$ per la proprietà commutativa della somma come $1 + 100 + 2 + 99 + 3 + 98 + \cdots + 50 + 51$ ha notato che in questo modo ciascuna coppia di numeri consecutivi dava come somma $101 = 1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \cdots = 50 + 51$; dato che queste coppie sono 50 il risultato totale è $101 \cdot 50 = 5050$.

Veniamo ora al punto di questa nota, che vuole illustrare un geniale ed elegante argomento scoperto nella seconda metà dell'Ottocento dal matematico tedesco Georg Cantor, e che gli ha permesso di dimostrare molti risultati sorprendenti sui numeri interi e reali: l'*argomento diagonale*.

Partiamo dalla baldanzosa ipotesi: *per ogni funzione possibile* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *esiste una formula in grado di calcolarla*. Ma che cos'è una formula? Pensando anche a come le scriviamo nei calcolatori, possiamo dire che una formula è una sequenza ordinata (un informatico direbbe una *stringa*) di simboli, anche ripetuti, che possono essere interpretati come l'espressione di un calcolo.

Ovviamente sia la lunghezza della stringa che l'insieme di simboli utilizzato per scriverla debbono essere finiti: ad esempio potremmo assumere come insieme di simboli possibili le dieci cifre decimali (che messe in sequenza consentono di esprimere qualsiasi numero naturale), il simbolo n per denotare la variabile argomento della funzione, le parentesi per esprimere la priorità delle operazioni (ad esempio $n \times 2 + 3$ è diverso da $n \times (2 + 3)$) e quanti simboli vogliamo per denotare operazioni fra numeri, come la somma, il prodotto, la sottrazione, etc. Potremmo anche convenire di introdurre simboli per denotare delle funzioni da usare nelle nostre formule: ad esempio il simbolo s per la funzione descritta più sopra, etc.

Notiamo, a questo punto, come l'insieme di tutte le possibili formule si possa enumerare, cioè esse possano essere disposte in una lista (infinita) indicizzata proprio dai numeri naturali:

$$f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots$$

Per rendersi conto di come ciò sia possibile basterà procedere come segue: per prima cosa elenchiamo in qualche ordine (ad esempio in quello alfabetico) tutte le formule (sensate) formate da un solo simbolo, come 0, n e così via. Poi enumeriamo di seguito tutte le formule formate da due simboli, come 10, $2n$ e così via. Poi quelle formate da tre simboli, e via di seguito. Non è difficile rendersi conto che in questo modo possiamo enumerare qualsiasi formula.

Torniamo ora alla nostra ardita ipotesi: *per ogni funzione possibile* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *esiste una formula in grado di calcolarla*. Questa ipotesi implica immediatamente che l'enumerazione dell'insieme di tutte le formule fornisce anche una enumerazione dell'insieme di tutte le funzioni[2]. Definiamo ora una funzione $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ come

$$d(n) = f_n(n) + 1$$

[2] Con una precisazione tecnica: ci sono infinite formule che calcolano la medesima funzione, come 1, $1+0$, $1+0+0$, etc. Dovremmo quindi sfoltire la lista delle formule eliminando quelle ridondanti o ammettere di avere ciascuna funzione ripetuta infinite volte nella lista.

Si tratta indubitabilmente di una funzione, in quanto lo è f_n, e quindi, in virtù della nostra ipotesi baldanzosa, d compare da qualche parte nell'elenco di tutte le funzioni: diciamo che compare al posto m-esimo, vale a dire, per ogni n,

$$d(n) = f_m(n)$$

Ora attenzione: calcoliamo il valore di d proprio sul numero m:

$$d(m) = f_m(m) + 1$$

Ma abbiamo, per definizione di m, che $d(m) = f_m(m)$, quindi $f_m(m) = f_m(m) + 1$ che implica, elidendo $f_m(m)$: $0 = 1$. Un assurdo!!! Questa assurdità è nata dall'aver supposto che la funzione f fosse calcolabile da qualche formula.

Quindi abbiamo esibito una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che non è calcolabile, perché non sta nell'elenco, mostrando come la nostra baldanzosa ipotesi è falsa!!!

Un ragionamento analogo, ma più profondo e tecnicamente più complicato ha condotto il grande logico Kurt Gödel, nel 1931, a dimostrare il suo celebre teorema di incompletezza, esibendo una proposizione che dice "io non sono dimostrabile" e facendo vedere che è vera. Ma questa è un'altra storia.