Alcuni cenni di geometria simplettica

Paolo Caressa

Novembre 2002

Questa opera è distribuita con licenza *Creative Commons Attribuzione-Non commerciale 3.0 Unported.*
This work is licensed under a *Creative Commons Attribution-Non Commercial 3.0* Unported License.

1 Strutture simplettiche

Ricordiamo che una *varietà simplettica* è una coppia (S, ω) dove S è una varietà differenziabile e ω è una 2-forma non degenere e chiusa, che si dice *struttura simplettica*.

L'esistenza di una 2-forma non degenere vuol dire che il fibrato strutturale di S si riduce al gruppo simplettico, mentre il fatto che la 2-forma sia chiusa è una condizione di integrabilità: conseguenze di questa definizione sono ad esempio

(a) La varietà ha dimensione pari.
(b) La varietà è orientabile.
(c) Se la varietà è compatta, i suoi numeri di betti pari sono positivi.

Tanto per dirne una, non ci sono strutture simplettiche sulla sfera S^4, altrimenti avremmo una 2-forma chiusa ω che darebbe luogo ad una classe $[\omega] \in H^2(S^4) = 0$; quindi $\omega = d\alpha$ per qualche 1-forma α, e ne potremmo dedurre, usando il teorema di Stokes, che

$$\int_{S^4} \omega \wedge \omega = \int_{S^4} d\alpha \wedge \omega = \int_{S^4} d(\alpha \wedge \omega) = \int_{\partial S^4} \alpha \wedge \omega = 0$$

(perché $d\omega = 0$ e $\partial S^4 = \emptyset$).

La 2-forma induce un isomorfismo di fibrati vettoriali $\omega^\flat \colon TS \to T^*S$, in modo ovvio: $\omega^\flat(X)(Y) = \omega(X, Y)$, il cui inverso $\omega^\# \colon T^*S \to TS$ consente di associare campi a funzioni differenziabili:

$$X_f = \omega^\# df$$

Il campo X_f associato alla funzione $f \in C^\infty(S)$ si dice *campo hamiltoniano*.

In particolare i campi hamiltoniani possono essere interpretati come trasformazioni infinitesimali che preservano la struttura simplettica:

Definizione 1.1 *Se (S_1, ω_1) e (S_2, ω_2) sono varietà simplettiche, una mappa differenziabile $F\colon S_1 \to S_2$ si dice* trasformazione canonica *o* simplettica *se*

$$F^*\omega_2 = \omega_1$$

Si noti che, dato che il pull-back è compatibile col prodotto di forme, una trasformazione canonica deve preservare il volume indotto dalle forme simplettiche e quindi, se le varietà hanno la stessa dimensione, dato che una tale trasformazione ha in coordinate jacobiana di determinante 1, una trasformazione canonica è un diffeomorfismo locale.

Definizione 1.2 *Un* simplettomorfismo *fra due varietà simplettiche è un diffeomorfismo che sia una trasformazione canonica.*

Ora se X_f è un campo hamiltoniano, allora

$$\mathcal{L}_{X_f}\omega = di_{X_f}\omega = d\omega^\flat X_f = d\omega^\flat \omega^\# df = ddf = 0$$

dove $\mathcal{L}_X$ denota la derivata di Lie rispetto al campo X. Questa condizione equivale alla

$$\varphi_t^*\omega = 0$$

dove φ_t è il flusso locale di diffeomorfismi associato al campo X_f: cioè il flusso di un campo hamiltoniano è canonico.

In generale un campo il cui flusso sia canonico non è necessariamente hamiltoniano.

Definizione 1.3 *Un* campo simplettico *o* campo localmente hamiltoniano *su una varietà simplettica (S, ω) è un campo vettoriale X su S tale che*

$$\mathcal{L}_X\omega = 0$$

Questi campi formano un'algebra di Lie che possiede come ideale lo spazio dei campi hamiltoniani.

Proposizione 1.4 *Per tramite dell'isomorfismo $\omega^\flat\colon TS \to T^*S$ l'immagine dello spazio dei campi simplettici è lo spazio delle forme chiuse, e l'immagine dello spazio dei campi hamiltoniani è lo spazio delle forme esatte.*

DIMOSTRAZIONE: Per definizione abbiamo che $\omega^\flat X(Y) = \omega(X, Y)$, quindi, essendo ω chiusa,

$$\mathcal{L}_X\omega = d\imath_X\omega = d\omega^\flat X$$

sicché X è simplettico se e solo se $\omega^\flat X$ è esatta; ancor più semplicemente $\omega^\flat X = df \iff X = \omega^\# df = X_f$.

QED

Gli esempi principali di varietà simplettiche sono i fibrati cotangenti delle varietà differenziabili e le varietà kähleriane (e quindi le varietà proiettive non singolari).

Esempio 1.5 *L'esempio più elementare di varietà simplettica è $\mathbb{R}^{2n}$ rispetto alla 2-forma che in coordinate canoniche è rappresentata dalla matrice*

$$\omega_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

In termini di forme differenziali, fissate le coordinate $(x_1, ..., x_{2n})$ la struttura simplettica standard su $\mathbb{R}^{2n}$ è data dalla

$$\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dx_{n+i}$$

Identificando $\mathbb{R}^{2n}$ con $\mathbb{C}^n$, ad esempio introducendo le coordinate complesse $z_i = x_i + \sqrt{-1}x_{n+i}$, troviamo la struttura simplettica

$$\kappa_0 = -i\sum_i dz_i \wedge d\overline{z_i}$$

In altre parole, se h denota il prodotto hermitiano canonico su $\mathbb{C}^n$ allora $\kappa_0 = -\operatorname{Im} h$.

In generale, se $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert allora la parte immaginaria del suo prodotto hilbertiano definisce una struttura simplettica.

2 Il fibrato cotangente

Per capire bene l'esempio del fibrato cotangente, analizziamo prima il caso lineare: consideriamo cioè uno spazio vettoriale simplettico, che si costruisce sempre in questo modo: partiamo da uno spazio vettoriale qualsiasi[1] V e

[1] Anche di dimensione infinita: nel caso di spazi vettoriali topologici i prodotti, duali etc. vanno considerati nella categoria giusta, ad esempio "applicazione lineare" vuol dire "lineare e continua".

formiamo la somma diretta $S = V \oplus V^*$. S possiede una 2-forma canonica (costante), che è la seguente:

$$\kappa_0(v \oplus \varphi, w \oplus \psi) := \psi(v) - \varphi(w)$$

Il teorema lineare di Darboux afferma che una forma simplettica lineare su uno spazio vettoriale è sempre simplettomorfa a questa.

Teorema 2.1 *Se S è uno spazio vettoriale e ω una forma bilineare antisimmetrica non degenere allora esiste un isomorfismo $F\colon V \oplus V^* \to S$ tale che $F^*\omega = \kappa_0$.*

DIMOSTRAZIONE: Per induzione sulla dimensione di S (in dimensione infinita si usa il teorema di Hahn–Banach). Dato che ω è non degenere, esistono almeno due vettori $v_1, w_1 \in S$ tali che $\omega(v_1, w_1) = 1$. Ora consideriamo il sottospazio $\tilde{S} = \langle v_1, w_1\rangle^\omega$ ω-ortogonale al sottospazio $\langle v_1, w_1\rangle$ generato da v_1, w_1; evidentemente $\dim \tilde{S} < \dim S$, e la forma ω si restringe su $\tilde{S}$ ad una forma $\tilde{\omega}$ che è ancora antisimmetrica e non degenere; per ipotesi induttiva esiste allora un isomorfismo $\tilde{F}\colon \tilde{V} \oplus \tilde{V}^* \to \tilde{S}$ tale che $\tilde{F}^*\omega = \tilde{\kappa}_0$, dove $\tilde{\kappa}_0$ è la forma standard su $\tilde{V} \oplus \tilde{V}^*$.

Ora basta definire $V = \langle v_1\rangle \oplus V$ e $V^* = \langle \varphi_1\rangle \oplus \tilde{V}^*$, dove $\varphi_1(v) = \omega(v_1, v)$ ed estendere $\tilde{F}$ a $V \oplus V^*$ come $F(v_1 \oplus v, \varphi_1 \oplus \varphi) = v_1 + w_1 + \tilde{F}(v, \varphi)$ e $\tilde{\kappa}_0$. Allora

$$F^*\omega(av_1 \oplus \varphi_1 + v \oplus \varphi, bv_1 \oplus \varphi_1 + w \oplus \psi) =$$

$$= \kappa_0(av_1 + aw_1 + \tilde{F}(v \oplus \varphi), bv_1 + bw_1 + \tilde{F}(w \oplus \psi))$$

$$= a\kappa_0(v_1 + w_1, \tilde{F}(w \oplus \psi)) - b\kappa_0(v_1 + w_1, \tilde{F}(v \oplus \varphi)) + \kappa_0(\tilde{F}(v \oplus \varphi), \tilde{F}(w \oplus \psi))$$

$$= a\,(\psi(v_1) - \varphi_1(w)) + b\,(\varphi_1(v) - \varphi(v_1)) + \psi(v) - \varphi(w)$$

$$= \kappa_0(av_1 \oplus \varphi_1 + v \oplus \varphi, bv_1 \oplus \varphi_1 + w \oplus \psi)$$

QED

Ora vogliamo interpretare la forma κ_0 su $S = V \oplus V^*$ come forma differenziale: per prima cosa consideriamo la 1-forma di Liouville ϑ definita come

$$\vartheta_{u\oplus\chi}(v \oplus \varphi) = \chi(v)$$

nel punto $u \oplus \chi \in S$.

Proposizione 2.2 $d\vartheta = -\kappa_0$.

DIMOSTRAZIONE: Fissiamo delle coordinate su $S = V \oplus V^*$: $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ dove le p_i sono coordinate duali delle q_i. Queste coordinate inducono una base dei campi vettoriali su S, che denotiamo ovviamente con

$$\frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{\partial}{\partial q_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial q_n}, \frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial p_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial p_n}$$

ed una base delle 1-forme su S, che denotiamo altrettanto ovviamente con

$$dq_1, \ dq_2, \cdots, \ dq_n, \ dp_1, \ dp_2, \cdots, \ dp_n$$

Ora consideriamo $v \oplus \psi, w \oplus \psi \in S$, e scriviamoli in coordinate come

$$v \oplus \varphi = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial q_i} \oplus \sum_i \varphi_i \frac{\partial}{\partial p_i}, \qquad w \oplus \psi = \sum_i w_i \frac{\partial}{\partial q_i} \oplus \sum_i \psi_i \frac{\partial}{\partial p_i}$$

e calcoliamo κ_0 su questi due elementi

$$\begin{aligned}\kappa_0(v \oplus \varphi, w \oplus \psi) = \psi(v) - \varphi(w) &= \sum_i (\psi_i v_i - \varphi_i w_i) \\ &= \sum_i (dq_i(v,\varphi)dp_i(w,\psi) - dp_i(v,\varphi)dq_i(w,\psi)) \\ &= \sum_i dq_i \wedge dp_i(v \oplus \varphi, w \oplus \psi)\end{aligned}$$

Quindi $\kappa_0 = \sum_i dq_i \wedge dp_i$. Ora notiamo che

$$\left(\sum_i p_i dqi\right)_{u \oplus \chi} (v \oplus \varphi) = \sum_i (\chi_i dq_i(v \oplus \varphi)) = \sum_i \chi_i v_i = \vartheta_{u \oplus \chi}(v \oplus \varphi)$$

dunque

$$\vartheta = \sum_i p_i dq_i$$

da cui deduciamo che

$$\kappa_0 = \sum_i dq_i \wedge dp_i = -\sum_i d(p_i dq_i) = -d\vartheta$$

QED

Ora consideriamo il caso di una varietà V e del suo fibrato cotangente T^*V: possiamo definire una forma di Liouville anche in questo caso: deve essere una 1-forma sul fibrato cotangente; consideriamo la proiezione $\pi\colon T^*V \to V$ e la sua mappa tangente $T\pi\colon TT^*V \to TV$; allora la forma che vogliamo definire possiamo valutarla su $X \in T_\alpha T^*V$ in un punto $\alpha \in T^*V$, e definirla come

$$\vartheta_\alpha(X) = \alpha(T\pi(X))$$

Lo stesso calcolo della proposizione precedente ci informa che $\kappa = -d\vartheta$ è una struttura simplettica su T^*V; precisamente, possiamo considerare un punto $p \in V$ e una banalizzazione $U \times T_p^*U$ di T^*V intorno a p; in questo caso $(q_1, ..., q_n)$ sono le coordinate in U e $(p_1, ..., p_n)$ sono le corrispondenti coordinate sullo spazio cotangente nel punto p; la forma simplettica si scrive allora come

$$\kappa((v, \varphi), (w, \psi)) = \psi(v) - \varphi(w)$$

con $(v, \varphi), (w, \psi) \in T_pU \times T_p^*U$.

3 Lo spazio proiettivo complesso

Consideriamo uno spazio di Hilbert complesso $\mathcal{H}$: la parte immaginaria del prodotto hilbertiano $\kappa(v, w) = -\operatorname{Im}\langle v, w\rangle$ è una struttura simplettica su $\mathcal{H}$, che possiamo usare per indurne una sul proiettificato $\mathbb{P}\mathcal{H}$ di $\mathcal{H}$. Svolgiamo il ragionamento per $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, anche se è valido per uno spazio di Hilbert qualsiasi.

Sia $\pi\colon \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^n$ la proiezione canonica: lo spazio tangente a $[v] \in \mathbb{CP}^n$ è isomorfo a $\mathbb{C}^{n+1}/\mathbb{C}\langle v\rangle$, e il nucleo della mappa tangente $T_v\pi\colon T_v\mathbb{C}^{n+1} \to T_{[v]}\mathbb{CP}^n$ è $\mathbb{C}\langle v\rangle$, quindi la restrizione di $T_v\pi$ a $\mathbb{C}\langle v\rangle^\perp$ è un isomorfismo lineare complesso fra $\mathbb{C}\langle v\rangle^\perp$ e $T_{[v]}\mathbb{CP}^n$ (che dipende dalla scelta del rappresentante di $[v]$). Come ben noto, una trasformazione unitaria $U\colon \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ induce una mappa biolomorfa $U^*\colon \mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^n$ definita come $U^*[v] = [U(v)]$.

Vogliamo ora scrivere una metrica kähleriana su $\mathbb{CP}^n$, la metrica di Fubini-Study. Consideriamo un rappresentante v di un punto $[v] \in \mathbb{CP}^n$: per definire la metrica in $[v]$ dobbiamo dire quanto vale su due vettori tangenti $X_{[v]}, Y_{[v]} \in T_{[v]}\mathbb{CP}^n \cong \mathbb{C}\langle v\rangle^\perp$ (che possiamo quindi identificare con due elementi $T_v\pi(u)$, $T_v\pi(w) \in \mathbb{C}^{n+1}$ ortogonali a v):

$$g_{[v]}(X_{[v]}, Y_{[v]}) = \frac{\langle u, w\rangle}{||v||^2}$$

Per prima cosa bisogna dimostrare che questa definizione non dipende dal rappresentante v di $[v]$; ogni altro rappresentante di $[v]$ è del tipo av con

$a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$: allora calcoliamo

$$g_{[av]}(X_{[av]}, Y_{[av]}) = g_{[av]}(T_{av}\pi(au), T_{av}\pi(aw)) = \frac{\langle au, aw \rangle}{||av||^2} = \frac{\langle u, w \rangle}{||v||^2}$$
$$= g_{[v]}(X_{[v]}, Y_{[v]})$$

Abbiamo quindi un prodotto hermitiano (forte) sullo spazio di Hilbert $T_{[v]}\mathbb{CP}^n$; vogliamo ora notare che al variare di $[v] \in \mathbb{CP}^n$ questi prodotti variano in modo differenziabile nei corrispondenti spazi tangenti, e quindi che definiscono una metrica hermitiana su $\mathbb{CP}^n$.

Cominciamo col notare che, essendo $\mathbb{C}\langle v \rangle$ il nucleo di $T_v\pi$, se $u, w \in \mathbb{C}^{n+1}$ allora possiamo scriverli come somma di vettori ortogonali come

$$u = \frac{\langle u, v \rangle}{||v||^2} v + u' \qquad\qquad w = \frac{\langle w, v \rangle}{||v||^2} v + w'$$

con $\langle u', v \rangle = \langle w', v \rangle = 0$. In particolare

$$\langle u, w \rangle = \frac{\langle u, v \rangle}{||v||^2} \langle v, w \rangle + \langle u', w \rangle = \frac{\langle u, v \rangle}{||v||^2} \langle v, \frac{\langle w, v \rangle}{||v||^2} v + w' \rangle + \langle u', \frac{\langle w, v \rangle}{||v||^2} v + w' \rangle$$
$$= \frac{\langle u, v \rangle}{||v||^2} \langle v, w \rangle + \langle u', w' \rangle$$

Ovviamente, dato che il nucleo di $T_v\pi$ è $\mathbb{C}\langle v \rangle$, abbiamo che $T_v\pi(u) = T_v\pi(u')$ e $T_v\pi(w) = T_v\pi(w')$, possiamo scrivere la metrica di Fubini-Study come segue:

$$g_{[v]}(T_v\pi(u), T_v\pi(w)) = \frac{\langle u', w' \rangle}{||v||^2} = \frac{\langle u, w \rangle}{||v||^2} - \frac{\langle u, v \rangle}{||v||^4} \langle v, w \rangle$$

Da questa formula è chiaro che le metriche che abbiamo definito sugli spazi tangenti variano in modo differenziabile rispetto a v.

La parte reale della metrica di Fubini-Study è chiaramente una metrica riemanniana su $\mathbb{CP}^n$: mostriamo come la parte immaginaria definisca una struttura simplettica. Basterà scrivere esplicitamente questa forma:

$$\kappa_{[v]}(T_v\pi(u), T_v\pi(w)) = -\operatorname{Im} \frac{\langle u, w \rangle}{||v||^2}$$

per rendersi conto che è (fortemente) non degenere (dato che su $T_{[v]}\mathbb{CP}^n$ è esattamente la restrizione della forma simplettica indotta dal prodotto hilbertiano di $\langle v \rangle^\perp$).

Infine, dato che il pull-back di κ a $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ per tramite di π è proprio la forma simplettica standard di $\mathbb{C}^{n+1}$, e dato che il differenziale commuta col pull-back, anche κ è chiusa.

In generale lo spazio proiettivo associato ad uno spazio di Hilbert è una varietà kähleriana di dimensione infinita sulla quale il gruppo unitario dello spazio di Hilbert agisce per isometrie: questo esempio è rilevantissimo in Meccanica Quantistica.

4 Invarianti simplettici locali

Vogliamo discutere ora gli invarianti delle varietà simplettiche, o piuttosto la loro latitanza: è un fatto classico, dovuto a Darboux, che non ci sono invarianti locali di una varietà simplettica, e la dimostrazione moderna di questo fatto, l'elegante argomento di Moser, ne spiega in un certo senso la natura.

Definizione 4.1 *Sia (S,ω) una varietà simplettica: una* isotopia simplettica *è una famiglia differenziabile $\{\psi_t\}_{t\in[0,1]}$ a un parametro di simplettomorfismi tale che $\psi_0 = Id_S$.*

Una isotopia simplettica è indotta da una famiglia di campi vettoriali simplettici $\{X_t\}$ nel modo seguente

$$\frac{d}{dt}\psi_t = X_t \circ \psi_t$$

Se ciascuno di questi campi è hamiltoniano, l'isotopia si dice *isotopia hamiltoniana*.

Il teorema di Darboux afferma che ogni forma simplettica è localmente simplettomorfa alla forma simplettica standard di $\mathbb{R}^{2n}$.

Teorema 4.2 *Se (S,ω) è una varietà simplettica, allora per ogni $x \in S$ esiste un intorno aperto $U \ni x$ tale che la forma simplettica ω sia costante in U.*

DIMOSTRAZIONE: Il teorema è locale, quindi possiamo assumere $S = \mathbb{R}^{2n}$ e $x = 0$; consideriamo la forma costante $\omega_1 = \omega(0)$ e poniamo

$$\tilde{\omega} = \omega_1 - \omega$$

$$\omega_t = \omega + t\tilde{\omega}$$

($t \in [0,1]$). Ovviamente $\tilde{\omega}(0) = \omega(0)$ è non degenere per ogni $t \in [0,1]$, e quindi esiste un intorno di 0 nel quale è non degenere (dato che gli isomorfismi lineari sono aperti negli endomorfismi); possiamo assumere che questo intorno sia una palla, quindi per il lemma di Poincaré esiste una 1-forma α tale che $d\alpha = \tilde{\omega}$, e possiamo anche supporre che $\alpha(0) = 0$.

Dato che ω_t è non degenere, possiamo usarla per far corrispondere forme a campi, e quindi abbiamo un campo X_t corrispondente ad α, definito come $\alpha = \imath_{X_t}\omega_t$: ovviamente $X_t(0) = 0$, quindi a meno di restringere l'intorno che stiamo considerando, questo campo (dipendente dal parametro t) dà luogo ad una famiglia ad un parametro $\{\psi_t\}$ di diffeomorfismi locali per ogni $t \in [0,1]$, tali che $\psi_0 = \mathrm{Id}$. Ma allora

$$\frac{d}{dt}\left(\psi_t^*\omega_t\right) = \psi_t^*\left(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t\right) + \psi_t^*\frac{d}{dt}\omega_t = \psi_t^* d\imath_{X_t} + \psi_t^*\tilde{\omega} = \psi_t^*\left(d\alpha + \tilde{\omega}\right) = 0$$

Quindi $\psi_t^*\omega_t$ è costante, in particolare

$$\psi_1^*\omega_1 = \psi_0^*\omega_0 = \omega_0$$

e con ciò abbiamo dimostrato il teorema.

QED

Come corollario abbiamo immediatamente il teorema di Darboux, dato che su $\mathbb{R}^{2n}$ una struttura simplettica costante è simplettomorfa (per mezzo di un simplettomorfismo lineare!) alla struttura standard.

Questo naturalmente non implica che tutte le forme simplettiche su $\mathbb{R}^{2n}$ siano simplettomorfe alla forma standard: Gromov ha infatti dimostrato (cfr. [5]) l'esistenza di forme simplettiche esotiche, cioè tali che non esista nessuna immersione $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ il cui pull-back possa dare la forma standard. Ad esempio Bates e Peschke hanno costruito la seguente forma su $\mathbb{R}^4$: consideriamo

$$\sigma = \cos\rho_1^2(x_1dy_1 - y_1dx_1) + \cos\rho_2^2(x_2dy_2 - y_2dx_2)$$

dove (x_1, x_2, y_1, y_2) sono coordinate e $\rho_i^2 = x_i^2 + y_i^2$; si può dimostrare (cfr. [8, pp.424-425]) che la forma esatta

$$\omega = d\Bigg((\rho_1^2 + \rho_2^2 - \pi)\Bigg((2\cos\rho_1^2 - 2\rho_1^2\sin\rho_1^2)(x_2dy_2 - y_2dx_2)$$

$$+(2\cos\rho_2^2 - 2\rho_2^2\sin\rho_2^2)(x_1dy_1 - y_1dx_1)\Bigg) - \sigma\Bigg)$$

è simplettica e non può essere il pull-back della forma standard.

Una variante dell'argomento di Moser consente di dimostrare il seguente teorema di stabilità:

Teorema 4.3 *Se S è una varietà compatta senza bordo e se $\{\omega_t\}$ è una famiglia ad un parametro di strutture simplettiche coomologhe su S allora esiste una famiglia di diffeomorfismi $\psi_t\colon S \to S$ tali che $\psi_0 = Id_S$ e*

$$\psi_t^*\omega_t = \omega_0$$

DIMOSTRAZIONE: Costruiamo per l'intanto una famiglia di 1-forme σ_t tali che

$$d\sigma_t = \frac{d}{dt}\omega_t$$

Per farlo si può usare ad esempio la teoria di Hodge: fissiamo una metrica riemanniana su S e consideriamo l'operatore $d^*\colon \Omega^2(S) \to \Omega^1(S)$ L^2-aggiunto del differenziale $d\colon \Omega^1(S) \to \Omega^2(S)$ (rispetto alla metrica indotta sullo spazio delle forme).

La teoria di Hodge ci dice che (la restrizione di) d è un isomorfismo dall'immagine di d^* allo spazio delle 2-forme esatte; ora la forma $\omega_t - \omega_0$ è esatta (per ipotesi le ω_t sono coomologhe) e quindi anche la forma

$$\frac{d}{dt}\omega_t$$

lo è: quindi, esistono $\sigma_t \in \mathrm{Im} d^*$ tali che

$$d\sigma_t = \frac{d}{dt}\omega_t$$

Ora facciamo giocare alle forme σ_t il ruolo di α nella dimostrazione del teorema precedente: lo stesso argomento ci fornisce la famiglia di campi vettoriali X_t il cui flusso definito dalla

$$\frac{d}{dt}\psi_t = X_t \circ \psi_t$$

realizza il diffeomorfismo $\psi = \psi_1$ richiesto (ψ_t esiste in tutto l'intervallo $[0, 1]$ perché i campi X_t sono completi, essendo la varietà S compatta.)

QED

Questo teorema fallisce clamorosamente nel caso compatto: ad esempio su $\mathbb{R}^{2n}$ tutte le forme simplettiche compatibili con una fissata orientazione sono isotope, cioè è possibile trovare per due qualsiasi di esse ω_0 e ω_1 una famiglia di strutture simplettiche coomologhe $\{\omega_t\}$ che le connetta, mentre possono non essere simplettomorfe (tanto per dirne una il volume ω^n è un invariante, e forme siffatte possono benissimo avere volumi diversi).

Il significato di questi teoremi è ovviamente che l'unico invariante locale di una struttura simplettica è la classe di coomologia $[\omega]$ individuata dalla forma simplettica.

Diamo un'ultima applicazione dell'argomento di Moser alla dimostrazione di un teorema di estensione di isotopie simplettiche nel caso compatto: qui c'è una condizione di ostruzione, che è l'analogo omologico della condizione omotopica che porremo quando andremo alla ricerca di invarianti globali.

Teorema 4.4 *Se* (S, ω) *è una varietà simplettica compatta e* $K \subset S$ *è una sottovarietà compatta tale che* $H^2(S, K; \mathbb{R}) = 0$ *allora ogni isotopia simplettica* $\psi_t \colon U \to M$ *definita in un intorno aperto* U *di* K *si estende ad* S*, cioè esistono una isotopia simplettica* $\tilde{\psi}_t \colon S \to S$ *ed un intorno* V *di* K *contenuto in* U *tali che*

$$\tilde{\psi}_t|_V = \psi_t|_V$$

DIMOSTRAZIONE: Vogliamo giovarci dell'ipotesi coomologica: scegliamo dunque un intorno V di K contenuto in U che si ritragga su K; questo vuol dire che $H^*(V, K; \mathbb{R}) = 0$, quindi, se scriviamo la successione esatta in coomologia della tripla (K, V, S)

$$\cdots \to H^1(V, K; \mathbb{R}) \to H^2(S, V; \mathbb{R}) \to H^2(S, K; \mathbb{R}) \to H^2(V, K; \mathbb{R}) \to \cdots$$

troviamo che $H^2(S, V; \mathbb{R}) \cong H^2(S, K; \mathbb{R}) = 0$. Una isotopia qualsiasi da una sottovarietà compatta si può sempre estendere ad una isotopia della varietà, quindi esiste $\rho_t \colon S \to S$ (definita per ogni $t \in [0, 1]$ per compattezza di S).

Se ora definiamo le 2-forme $\omega_t := \rho_t^* \omega$, possiamo constatare come, ristrette a V, coincidano tutte con ω; quindi le forme $\frac{d}{dt}\omega_t$ si annullano in V, e definiscono dunque, essendo chiuse in S, classi di coomologia relative in $H^2(S, V) = 0$; applicando la teoria di Hodge, come nella dimostrazione del teorema di stabilità (bisognerà applicare la versione della teoria di Hodge relativa alla sottovarietà compatta $S \setminus \mathrm{int}(V)$) possiamo trovare delle 1-forme σ_t (che si annullano su V) tali che

$$d\sigma_t = \frac{d}{dt}\omega_t$$

A questo punto possiamo far scattare l'argomento di Moser e trovare una famiglia ad un parametro di diffeomorfismi $\chi_t \colon S \to S$ (i cui campi vettoriali associati corrispondano alle 1-forme σ_t per mezzo dell'isomorfismo fra campi e forme indotto da ω) che siano l'identità se ristretti a V, e tali che $\chi_t^* \omega_t = \omega_0 = \omega$; allora la composizione $\psi_t := \rho_t \circ \chi_t$ dà luogo alla famiglia richiesta dalla tesi del teorema.

QED

Menzioniamo soltanto che l'argomento di Moser può essere utilizzato per dimostrare ad esempio il lemma di Poincaré ed il lemma di Morse (cfr. [2]).

5 Sottovarietà lagrangiane

Torniamo un momento all'esempio del fibrato cotangente ad una varietà V; supponiamo che per due varietà V_1 e V_2 esista un simplettomorfismo $F\colon T^*V_1 \to T^*V_2$; in coordinate locali, possiamo descrivere questa funzione come

$$F(q_i, p_i) = (q_i'(q_i, p_i), p_i'(q_i, p_i))$$

Supponiamo inoltre di avere una funzione $\Gamma\colon V_1 \times V_2 \to T^*V_1 \times T^*V_2$ la cui immagine sia il grafico della funzione F; allora, se ϑ_1 e ϑ_2 sono le forme di Liouville su T^*V_1 e T^*V_2, abbiamo che

$$d(\vartheta_1 - F^*\vartheta_2) = 0$$

(F è simplettico!), vale a dire

$$\Gamma^*(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 0$$

e quindi, (lemma di Poincaré) deve esistere una funzione S tale che

$$\Gamma^*(\vartheta_1 - \vartheta_2) = dS$$

In coordinate:

$$\sum_i (p_i dq_i - p_i' dq_i') = \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial S}{\partial p_i'} dp_i'$$

cioè

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial S}{\partial q_i} \\ q_i = -\dfrac{\partial S}{\partial p_i'} \end{cases}$$

La funzione $S(q, p')$ si dice *funzione generatrice* del simplettomorfismo.

È naturale chiedersi quando esista una mappa che svolga il ruolo di Γ: per vederlo geometricamente introduciamo alcune definizioni.

Definizione 5.1 *Se (S, ω) è una varietà simplettica e $\imath\colon L \hookrightarrow S$ una immersione, diciamo che è* isotropa *se $\imath^*\omega = 0$. Una immersione $\imath\colon L \hookrightarrow S$ è* lagrangiana *se è isotropa e $\dim L = \frac{1}{2}\dim S$.*

Proposizione 5.2 *Consideriamo una 1-forma φ su una varietà V, ed il suo grafico $L = \{(v, \varphi(v)) \in T^*V \mid v \in V\}$. Allora*

$$L \subset T^*V \text{ è lagrangiana se e solo se } d\varphi = 0$$

DIMOSTRAZIONE: L è una sottovarietà della stessa dimensione di V, dunque della dimensione giusta per essere lagrangiana; basta quindi mostrare che la chiusura di φ equivale alla isotropia dell'immersione.

Consideriamo la forma di Liouville ϑ su T^*V, che, ricordiamolo, è definita come

$$\vartheta_\alpha(X) = \alpha(T\pi(X))$$

per ogni 1-forma α su V; φ è una sezione del fibrato cotangente di V, cioè una mappa $\varphi\colon V \to T^*V$, quindi possiamo calcolare il pull-back di ϑ per tramite di φ, su un vettore X_v tangente a $v \in V$, ottenendo

$$\varphi^*\vartheta_v(X_v) = \vartheta_{\varphi(v)}T_v\varphi(X_v) = \varphi(v)\left(T_v\pi T_v\varphi(X_v)\right) = \varphi(v)T_v(\pi\circ\varphi)(X_v)$$
$$= \varphi(v)(X_v)$$

(ricordiamo che φ è una sezione di $\pi\colon T^*V \to V$) cioè $\varphi^*\vartheta = \varphi$. A questo punto abbiamo che

$$d\varphi = \varphi^* d\vartheta = -\varphi^*\kappa$$

Quindi φ è chiusa se e solo se $\alpha^*\kappa = 0$, ovvero L è isotropa.

QED

In particolare la sezione nulla, cioè V, è lagrangiana. Si noti che una varietà lagrangiana indotta da una 1-forma possiede localmente una funzione generatrice S tale che $dS = \varphi$.

Possiamo dire in generale qualcosa sul legame fra simplettomorfismi e sottovarietà lagrangiane; se (S_1, ω_1) e (S_2, ω_2) sono varietà simplettiche allora definiamo il *prodotto simplettico* come la varietà $S_1 \times S_2$ con la struttura

$$\omega_{1,2} = \pi_1^*\omega_1 - \pi_2^*\omega_2$$

dove $\pi_i\colon S_1 \times S_2 \to S_i$ è la proiezione canonica.

Proposizione 5.3 *Se $F\colon (S_1, \omega_1) \to (S_2, \omega_2)$ è un diffeomorfismo fra varietà simplettiche, allora F è un simplettomorfismo se e solo se il grafico di F*

$$\Gamma(F) = \{(v, F(v)) \in V \times V \mid v \in V\}$$

è una sottovarietà lagrangiana del prodotto simplettico di S_1 per S_2.

DIMOSTRAZIONE: Infatti, $\pi_1 \circ \imath_F$ è la proiezione ristretta a $\Gamma(F)$, e $\pi_2 \circ \imath_F = F \circ \pi_1$ su $\Gamma(F)$, sicché

$$\imath_F^*\omega_{1,2} = \imath_F^*\pi_1^*\omega_1 - \imath_F^*\pi_2^*\omega_2 = (\pi_1\circ\imath_F)^*\omega_1 - (\pi_2\circ\imath_F)^*\omega_2$$

$$= \pi_1|^*_{\Gamma(F)}\omega_1 - (F\circ\pi_1)^*\omega_2 = \pi_1|^*_{\Gamma(F)}\omega_1 - \pi_1|^*_{\Gamma(F)}F^*\omega_2$$
$$= \pi_1|^*_{\Gamma(F)}(\omega_1 - F^*\omega_2)$$

La restrizione della forma $\omega_{1,2}$ a $\Gamma(F)$ è zero, e $\Gamma(F)$ ha ovviamente dimensione che è la metà della dimensione di $S_1 \times S_2$.

QED

Se possiamo scegliere una 1-forma ϑ tale che $\kappa = -d\vartheta$ allora $\imath_F^*\kappa = -d\imath_F^*\vartheta = 0$, quindi, localmente, esiste una funzione $S \in C^\infty(\Gamma(F))$ tale che

$$\imath_F^*\vartheta = dS$$

che è la funzione generatrice della trasformazione canonica F.

Lo stesso argomento di Moser utilizzato nella dimostrazione del teorema di Darboux consente di dimostrare il seguente teorema di stabilità per sottovarietà lagrangiane, dovuto a Weinstein, che in sostanza afferma che l'unico invariante locale di una sottovarietà lagrangiana è la sua classe di diffeomorfismo.

Teorema 5.4 *Sia (S,ω) una varietà simplettica e $L \subset S$ una sottovarietà lagrangiana compatta; allora esistono un intorno $U \subset T^*L$ della sezione nulla L_0, un intorno $V \subset M$ di L ed un diffeomorfismo $\varphi\colon U \to V$ tale che $\varphi|_L = Id|_L$ e*

$$\varphi^*\omega = -d\vartheta$$

dove ϑ è la 1-forma di Liouville di T^*L.

Per una dimostrazione si vedano [2, §5.3], [8, §3.3].

6 Invarianti globali e curve olomorfe

Il fatto che non esistano invarianti locali per una struttura simplettica fa assomigliare la geometria simplettica alla topologia: in effetti la ricerca di invarianti globali delle varietà simplettiche ha dato i suoi frutti, essenzialmente dopo che Gromov ha introdotto metodi complessi(cfr. [5]).

Cominciamo con una osservazione banale: il volume ω^n di una varietà simplettica (S,ω) è ovviamente un invariante simplettico globale. Ad esempio due sfere simplettiche in $\mathbb{R}^{2n}$ non possono essere simplettomorfe se hanno volumi distinti.

Comunque il volume non è un invariante molto raffinato: ad esempio se abbiamo due aperti $U, V \subset \mathbb{R}^{2n}$ e se $\mathrm{vol}(U) < \mathrm{vol}(V)$ possiamo sempre immergere U in V preservandone la forma di volume.

Questo non è sempre possibile nella categoria simplettica, anzi Gromov ha dimostrato che una palla in $\mathbb{R}^{2n}$ non può essere sempre immersa in un cilindro (che ha volume infinito!); il punto è che lo spessore del cilindro può impedire questa immersione.

Teorema 6.1 *Se la palla $B_R^{2n+2} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$ si immerge simpletticamente nel cilindro $B_r^2 \times \mathbb{R}^{2n}$ allora deve aversi $R \leq r$.*

Per dimostrare questo teorema Gromov ha introdotto metodi complessi in geometria simplettica, motivato dal fatto che una classe notevolissima di varietà simplettiche è data, come abbiamo detto, dalle varietà kähleriane; queste ultime sono tutte complesse, e per studiarle, e definirne degli invarianti globali, ci si può giovare della struttura complessa che possiedono.

Rammentiamo che una *varietà quasi complessa* è una coppia (V, J) dove V è una varietà differenziabile e $J\colon M \to \mathrm{End}(TM)$ è una sezione del fibrato $\mathrm{End}(TM)$ tale che $J^2 = -\mathrm{Id}$; questo vuol dire che il gruppo strutturale della varietà si riduce al gruppo complesso $GL_n(\mathbb{C}) \subset Gl_{2n}(\mathbb{R})$; in particolare una tale varietà è sempre orientabile.

Una *varietà complessa* è una varietà quasi complessa la cui struttura quasi complessa J soddisfa la condizione di integrabilità di Newlander–Nirenberg $N_J(X, Y) = 0$ dove N_J è il tensore di Nijenhuis indotto dalla struttura quasi complessa (cfr. [6] per una discussione completa).

Una mappa $F\colon (V_1, J_1) \to (V_2, J_2)$ è *olomorfa* se la sua mappa tangente commuta con le strutture complesse: $TF \circ J_1 = J_2 \circ TF$. In particolare hanno interesse le funzioni olomorfe $f\colon (V, J) \to \mathbb{C}$ (su $\mathbb{C}$ si pone sempre la struttura complessa standard J_0 che corrisponde alla moltiplicazione per $\sqrt{-1}$) cioè tali che

$$(df) \circ JX = \sqrt{-1}\, df(X)$$

Più funzioni olomorfe possiede, più la struttura quasi complessa tende ad essere complessa (intuitivamente le funzioni olomorfe locali possono essere usate per costruire coordinate complesse).

Disgraziatamente possono esserci pochissime funzioni olomorfe per una data struttura quasi complessa; invece esistono sempre molte curve olomorfe, un concetto in qualche senso duale a quello di funzione.

Definizione 6.2 *Una* curva olomorfa *in una varietà quasi complessa (V, J) è una mappa olomorfa $\gamma\colon (\Sigma, j) \to (V, J)$ dove (Σ, j) è una superficie di Riemann.*

Cioè γ è una curva olomorfa se

$$T\gamma \circ j = J \circ T\gamma$$

L'osservazione fondamentale di Gromov è che ha senso parlare di curve olomorfe in una qualsiasi varietà simplettica, anche non kähleriana.

Cominciamo col notare che una varietà simplettica (S,ω) è sempre quasi complessa: basta fissare una metrica riemanniana g per determinare una struttura quasi complessa $J = g^{\#} \circ \omega^{\flat}$.

Definizione 6.3 *Se (S,ω) è una forma simplettica, una struttura quasi complessa J su S si dice* ω-calibrata *se il tensore*

$$g(X,Y) = \omega(JX,Y)$$

è una metrica riemanniana definita positiva.

Ad esempio (e questa è l'ispirazione), la struttura complessa di una varietà kähleriana calibra la sua forma simplettica.

Teorema 6.4 *Lo spazio $\mathcal{J}(S,\omega)$ delle strutture quasi complesse ω-calibrate su una varietà simplettica (S,ω) è non vuoto e contraibile.*

Per una dimostrazione si vedano [1] o [8].

Possiamo quindi sempre considerare curve olomorfe su una varietà simplettica, una volta che si sia fissato un elemento $J \in \mathcal{J}(S,\omega)$; per questo, più precisamente, parliamo di curve J-omolorfe.

Tanto per capire quante possano essere le curve olomorfe in una varietà simplettica, proviamo a scrivere in coordinate locali la condizione di olomorfia: fissiamo un intorno U con delle coordinate $(q_1,...,q_n,p_1,...,p_n)$; allora una curva olomorfa possiamo pensarla come una funzione $\gamma\colon \mathbb{C} \to U$ data da $\gamma(z) = (\gamma_1(z),...,\gamma_{2n}(z))$, e la condizione di olomorfia diviene (al solito $z = x + \sqrt{-1}\,y$)

$$\frac{\partial\gamma_i}{\partial y} = \sum_{k=1}^{2n} J_{ik}\left(\gamma(z)\right)\frac{\partial\gamma_k}{\partial x}$$

(si rammenti che $\frac{d}{dz} = \frac{\partial}{\partial x}$ e che la struttura complessa su $\mathbb{C}$ porta $\frac{\partial}{\partial x}$ in $\frac{\partial}{\partial y}$).

Abbiamo quindi un sistema di $2n$ equazioni a derivate parziali con $2n$ funzioni incognite: dato che è un sistema quasi-lineare (lineare nelle derivate parziali) ed ellittico, possiede sempre soluzioni classiche locali (basti pensare che il sistema linearizzato è proprio quello di Cauchy–Riemann, che è ellittico!)

Morale: le curve olomorfe hanne le belle proprietà di regolarità delle soluzioni dei sistemi ellittici.

Torniamo al teorema di Gromov: la dimostrazione poggia sul seguente lemma

Lemma 6.5 *Se (S, ω) è una varietà simplettica compatta tale che $\pi_2(S) = 0$, e se J è una struttura quasi complessa che calibra la forma simplettica $\kappa + \omega$ su $\mathbb{CP}^1 \times S$ allora ogni punto $(p, s) \in \mathbb{CP}^1 \times S$ è contenuto esattamente una J-sfera nella classe di omologia della fibra $\mathbb{CP}^1 \times \{s\}$.*

Lo schema della dimostrazione è il seguente: si considera lo spazio $\mathcal{C}$ delle coppie (Σ, J) dove J è una struttura quasi complessa che calibra $\kappa + \omega$ e Σ è una J-sfera nella classe di omologia della fibra $\mathbb{CP}^1 \times \{s\}$; questo spazio è una varietà di Sobolev.

Consideriamo ora la proiezione $p \colon \mathcal{C} \to \mathcal{J}$ sullo spazio delle strutture quasi complesse calibrate: il lemma afferma che questa mappa è suriettiva.

Per vederlo si sfrutta il fatto che $\mathcal{J}$ è connesso e quindi "basta" mostrare che l'immagine di p è non vuota, aperta e chiusa. Che sia non vuota è facile a vedersi: basterà considerare una struttura J prodotto di strutture quasi complesse calibrate su $\mathbb{CP}^1$ e su S, col che, per ogni $\Sigma = \mathbb{CP}^1 \times \{s\}$ si ha $p(\Sigma, J) = J$.

La chiusura e l'apertura di questa immagine richiedono invece strumenti analitici per essere dimostrate, cfr. [5].

L'idea della dimostrazione del teorema di Gromov consiste nel supporre che esista una immersione simplettica $\varphi \colon B_r^{2n+2} \hookrightarrow B_r^2 \times \mathbb{R}^{2n}$ e ricondursi all'ipotesi del lemma; per farlo consideriamo una palla chiusa $\overline{B_s^{2n+2}} \subset B_R^{2n+2}$ e, dato che $\varphi(\overline{B_s^{2n+2}})$ è compatta, possiamo trovare un $a > 0$ abbastanza grande in modo che

$$\varphi(\overline{B_s^{2n+2}}) \subset B_r^2 \times \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]^{2n}$$

Quindi possiamo considerare al posto del cilindro $B_r^2 \times \mathbb{R}^{2n}$ l'insieme $B_r^2 \times \mathbb{T}^{2n}$ (la forma simplettica su $\mathbb{R}^{2n}$ è invariante per traslazioni, quindi ne induce una sul toro).

Infine, notando che il disco B_r^2 è simplettomorfo al complementare di un punto in una sfera (con lo stesso volume), possiamo munire $\mathbb{CP}^1$ della forma simplettica κ il cui volume sia $r\pi$ e considerare l'immersione simplettica $B_r^2 \to \mathbb{CP}^1$, e quindi $B_R^{2n+2} \subset \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{T}^{2n}$

Ora possiamo applicare il lemma con $S = \mathbb{T}^{2n}$ e trovare una curva olomorfa omologa a $\mathbb{CP}^1 \times \{p\}$ passante per $\varphi(0)$: l'idea è di tirare indietro questa curva a $\mathbb{R}^{2n+2}$, sfruttarne le stime sul volume ed usare il fatto che una curva olomorfa in una varietà kähleriana è minimale per ottenere una maggiorazione su R, precisamente r (cfr. [5]).

La possibilità di usare le curve olomorfe risiede nelle proprietà dello spazio dei moduli da esse formate; una discussione precisa di queste proprietà richiede del lavoro analitico che non possiamo qui fare; comunque possiamo provare a discutere qualche idea.

Sia (S, ω) la solita varietà simplettica e $J \in \mathcal{J}(S, \omega)$: possiamo considerare lo spazio delle curve J-olomorfe in S. Una tale curva $\gamma \colon \Sigma \to S$ definisce una classe di omologia $\gamma_*[\Sigma] \in H_2(S, \mathbb{Z})$.

Per essere precisi dovremmo parlare di *curve parametrizzate*: non è la stessa cosa; per rendersene conto basterà considerare il piano proiettivo complesso e scegliere un generatore $L \in H_2(\mathbb{CP}^2, \mathbb{Z})$; le curve olomorfe che rappresentano questa classe sono curve algebriche di grado uno, cioè rette proiettive, e quindi si parametrizzano con le applicazioni lineari (proiettificate) $\gamma \colon \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^2$. Lo spazio di queste mappe ha dimensione cinque (una tale mappa è data da tre polinomi omogenei di grado uno a meno di un fattore scalare). D'altro canto lo spazio delle curve (non parametrizzate) in $\mathbb{CP}^2$ è lo spazio delle rette proiettive, che ha dimensione due (essendo la grassmanniana $G_2(\mathbb{C}^3)$). La differenza $3 = 5 - 2$ è esattamente la dimensione di $PGL_2(\mathbb{C})$, che è proprio il gruppo le cui trasformazioni riparametrizzano una stessa curva parametrizzata.

Lo spazio dei moduli che ci interessa è quello delle curve non parametrizzate; in generale non è uno spazio compatto, ma è possibile costruirne una compattificazione liscia.

Vediamo come la condizione di "assenza di sfere" che entra nel teorema di Gromov sia pervasiva in questo genere di questioni.

Consideriamo una varietà simplettica (S, ω) e fissiamo una varietà lagrangiana $L \subset S$.

Lemma 6.6 *Se $\pi_2(S, L) = 0$ allora non esistono curve olomorfe $\gamma \colon D \to S$ (dal disco del piano complesso (D, j_0) in S) tali che*

$$\gamma(\partial D) \subset L$$

DIMOSTRAZIONE: Dato che γ è olomorfa:

$$d\gamma \circ j_0 = J \circ d\gamma$$

abbiamo che, se $X \in TD$ è non nullo:

$$\gamma^*\omega(j_0X, X) = \omega(d\gamma(j_0X), d\gamma(X)) = \omega(Jd\gamma(X), d\gamma(X)) > 0$$

Quindi

$$\int_D \gamma^*\omega > 0$$

Ma allora γ darebbe luogo ad una classe di omotopia non banale in $\pi_2(S, L)$ il che è escluso per ipotesi.

QED

Supponiamo ora che $\pi_2(S, L) \neq 0$: allora possiamo fissare una classe di omotopia $\beta \in \pi_2(S, L)$ e definire il seguente spazio dei moduli: consideriamo l'insieme delle coppie (γ, z) dove $\gamma\colon D \to S$ è un disco olomorfo in S e $Z \in \mathbb{C}^n$ tali che

(1) $\gamma(\partial D) \subset L$;
(2) $[\gamma] = \beta$;
(3) $z = (z_0, ..., z_k)$ e $z_0, ..., z_k \in \partial D$ sono ordinate ciclicamente sulla circonferenza ∂D.

Diciamo che due tali coppie (γ, z) e (γ', z') sono equivalenti se esiste un biolomorfismo $\varphi\colon D \to D$ tale che $\gamma' = \varphi^*\gamma$ e $z_i = \varphi(z'_i)$.

L'insieme quoziente di tali coppie modulo la relazione testé definita è lo spazio dei moduli $\mathcal{M}_{k+1}(L, \beta)$.

Per questi spazi di moduli si possono costruire delle compattificazioni (che siano delle varietà), calcolarne le dimensioni introducendo un opportuno indice di Maslov $\mu\colon \pi_2(S, L) \to \mathbb{Z}$, e mostrare che questi spazi parametrizzano delle deformazioni, usando la nozione di struttura di Kuranishi: questo programma è diluito nelle prime 150 pagine del preprint [4].

Bibliografia

[1] M. Audin, J. Lafontaine (ed.), *Holomorphic curves in symplectic geometry,* Birkhäuser, 1994.

[2] R. Abraham, J. Marsden, *Foundations of Mechanics,* Addison–Wesley, 1978.

[3] N. Bourbaki, *Algèbre commutative, Chapitre 2, Graduations, filtrations et topologies,* Hermann, 1967.

[4] K. Fukaya, Y.G. Oh, H. Ohta, K. Ono, *Lagrangian intersections, Floer Homology, Anomalies and Obstructions,* preprint, 2000.

[5] M. Gromov, *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds,* Invent. Math. **82** (1985), pp.307–347.

[6] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, II,* Wiley, 1962.

[7] J. Marsden, T. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Simmetry,* Springer, 1996.

[8] D. McDuff, D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology,* Oxford, 1998.

This work is licensed under a *Creative Commons Attribution-Non Commercial 3.0 Unported License.*