Saggio di interpetrazione della geometria non-euclidea

Eugenio Beltrami

Giornale di Matematiche, VI (1868), pp.284-322.*

In questi ultimi tempi il pubblico matematico ha incominciato ad occuparsi di alcuni nuovi concetti i quali sembrano destinati, in caso che prevalgano, a mutare profondamente tutto l'ordito della classica geometria.

Questi concetti non sono di data recente. Il sommo Gauss li aveva abbracciati fino dai suoi primi passi nella carriera delle scienze, e benché nessuno dei suoi scritti ne contenga l'esplicita esposizione, le sue lettere fanno fede della predilezione con cui li ha sempre coltivati e attestano la piena adesione che ha data alla dottrina di Lobatschewsky.

Siffatti tentativi di rinnovamento radicale dei principî si incontrano non di rado nella storia dello scibile. Oggi poi essi sono un portato naturale dello spirito critico cui a buon diritto si vanno sempre più informando tutte le indagini scientifiche. Quando questi tentativi si presentano come frutto di investigazioni coscienziose e di convinzioni sincere, quando essi trovano il patrocinio di un'autorità imponente e fin qui indisputata, il dovere degli uomini di scienza è di discuterli con animo sereno, tenendosi lontani egualmente dall'entusiasmo e dal disprezzo. D'altronde nella scienza matematica il trionfo dei concetti nuovi non può mai infirmare le verità già acquisite: esso può soltanto mutarne il posto o la ragion logica, e crescerne o scemarne il pregio e l'uso. Né la critica profonda dei principî può mai nuocere alla solidità dell'edificio scientifico, quando pure non conduca a scoprirne e riconoscerne meglio le basi vere e proprie.

Mossi da questi intendimenti noi abbiamo cercato, per quanto le nostre forze lo consentivano, di dar ragione a noi stessi dei risultati a cui conduce la dottrina di Lobatschewsky; e, seguendo un processo che ci sembra in tutto conforme alle buone tradizioni della ricerca scientifica, abbiamo tentato di trovare un substrato reale a quella dottrina, prima di ammettere per essa la necessità di un nuovo ordine di enti e di concetti. Crediamo d'aver raggiunto questo intento per la parte planimetrica di quella dottrina, ma crediamo impossibile raggiungerlo in quanto al resto.

Il presente scritto è destinato principalmente a svolgere la prima di queste tesi; della seconda non daremo che un cenno sommario alla fine, solo perché si possa più rettamente giudicare del significato inerente alla proposta interpetrazione.

Per non interrompere troppo spesso la nostra esposizione, abbiamo rimandato a note speciali, poste in fine, le dichiarazioni relative a certi risultati analitici sui quali dobbiamo appoggiarci.

Il criterio fondamentale di dimostrazione della geometria elementare è la *sovrapponibilità delle figure eguali.*

Questo criterio non è applicabile soltanto al piano, ma a tutte quelle superficie su cui possono esistere figure eguali in differenti posizioni, cioè a tutte quelle superficie di cui una porzione qualunque può essere adagiata esattamente, per via di una semplice flessione, sopra una qualunque altra porzione della superficie stessa. Ognun vede infatti che la rigidezza delle superficie sulle quali le figure si concepiscono non è una condizione essenziale dell'applicazione di quel criterio, talché p. es. non nuocerebbe all'esattezza delle dimostrazioni della geometria piana euclidea il concepirne le figure come esistenti sulla superficie di un cilindro o di un cono, anziché su quella di un piano.

Le superficie per le quali si avvera incondizionatamente la proprietà anzidetta sono, in virtù di un celebre teorema di Gauss, tutte quelle cha hanno costante in ogni punto il prodotto dei due raggi di curvatura principale, ossia tutte quelle la cui curvatura sferica è costante. Le altre superficie non ammettono l'applicazione incondizionata del principio di sovrapposizione al confronto delle figure tracciate sovr'esse, e quindi queste figure non possono avere una struttura affatto indipendente dalla loro posizione.

L'elemento più essenziale delle figure e delle costruzioni della geometria elementare è la linea retta. Il carattere specifico di questa è d'essere completamente determinata da due soli dei suoi punti, ralché due rette non possono passare per due dati punti dello spazio senza coincidere in tutta la loro estensione. Però nella geometria piana questo carattere non viene esaurito in tutta la sua latitudine, perché, a ben guardare, la retta non è introdotta nelle considerazioni della planimetria che mercé il seguente *postulato:* facendo combaciare due piani su ciascuno dei quali esiste una retta, basta che le due rette si sovrappongano in due punti, perché riescano sovrapposte in tutta la loro estensione.

Ora questo carattere, così circoscritto, non è peculiare alle linee rette rapporto al piano; esso sussiste eziandio (in generale) per le linee geodetiche di una superficie di curvatura costante rapporto a questa superficie. Una linea geodetica ha già sopra qualsivoglia superficie la proprietà di essere (generalmente parlando) determinata senza ambiguità da due suoi punti. Ma per le superficie di curvatura costante, e per queste sole, sussiste integralmente la proprietà analoga a quella della retta nel piano, cioè: se si hanno due superficie, la cui curvatura sia costante in ogni punto ed eguale in entrambe, e se su ciascuna di esse esiste una linea geodetica, facendo combaciare le due superficie in modo che le geodetiche si sovrappongano in due punti, esse riescono sovrapposte (generalmente) in tutta la loro estensione.

Ne consegue che, salvi quei casi nei quali questa proprietà va soggetta ad eccezioni, i teoremi che la planimetria dimostra, col mezzo del principio di sovrapposizione e del postulato della retta, per le figure formate sul piano da linee rette, sussistono altresì per le figure formate analogamente sopra una superficie di curvatura costante da linee geodetiche.

In ciò si fondano le molteplici analogie della geometria della sfera con quella del piano (alle rette di questo corrispondendo le geodetiche, cioè i cerchi massimi, di quella) analogie che i geometri hanno già notate da lungo tempo. Se altre analogie, di specie diversa ma di eguale origine, non sono state del pari notate prima d'ora, lo si deve ascrivere a ciò che il concetto di superficie flessibili ed applicabili le une sulle altre, non è diventato familiare che in questi ultimi tempi.

Abbiamo fatta allusione ad eccezioni che possono interrompere o limitare l'analogia ora discorsa. Queste eccezioni esistono realmente. Sulla superficie sferica p. es., due punti cessano di determinare senza ambiguità un cerchio massimo quando sono diametralmente opposti. Questa è la ragione per cui alcuni teoremi della planimetria non hanno i loro analoghi sulla sfera, come p. es. il seguente: due rette perpendicolari ad una terza non possono incontrarsi.

Queste riflessioni sono state il punto di partenza delle nostre presenti ricerche. Abbiamo incominciato col notare che le conseguenze di una dimostrazione abbracciano necessariamente l'intera categoria degli enti nei quali esistono tutte le condizioni necessarie alla sua legittimità. Se la dimostrazione è stata concepita in vista di una determinata categoria di enti, senza che in essa sieno state effettivamente introdotte quelle determinazioni che individuano la categoria stessa in confronto di una categoria più estesa, è chiaro che le conseguenze della dimostrazione acquistano una generalità più grande di quella che si cercava. In questo caso può benissimo succedere che alcune di tali conseguenze sembrino inconciliabili colla natura degli enti specialmente contemplati, in quanto che certe proprietà che sussistono generalmente per una data categoria di enti possono modificarsi notabilmente od anche scomparire affatto per alcuni di essi in particolare. Se ciò avviene, i risultati della fatta investigazione presentano delle apparenti incongruenze, di cui la mente non può rendersi capace, se prima non siasi resa conscia della base troppo generale data alla sua investigazione.

Ciò premesso, consideriamo quelle dimostrazioni della planimetria che si fondano unicamente sull'uso del principio di sovrapposizione e sul postulato della retta, quali sono appunto quelle della planimetria non-euclidea. I risultati di queste dimostrazioni valgono incondizionatamente in tutti questi casi nei quali sussistono quel principio e quel postulato. Questi casi sono tutti necessariamente compresi, per quanto si è veduto, nella dottrina delle superficie di curvatura costante, ma non possono verificarsi che per quelle fra queste superficie, in cui non ha luogo alcuna eccezione alle ipotesi di quelle dimostrazioni. La sussistenza del principio di sovrapposizione non patisce eccezione per alcuna delle dette superficie. Ma rispetto al postulato della retta (o per meglio dire della geodetica) abbiamo già notato che si incontrano delle eccezioni sulla sfera, e per conseguenza su tutte le superficie di curvatura costante positiva. Ora queste eccezioni esistono anche sulle superficie di curvatura costante negativa? Vale a dire, può egli darsi il caso, su queste ultime superficie, che due punti non determinino una sola ed individuata linea geodetica?

Questa quistione non è, per quel ch'io sappia, ancora stata esaminata. Se si può provare che tali eccezioni non sono possibili, diventa evidente *a priori* che i teoremi della planimetria non-euclidea sussistono incondizionatamente per tutte le superficie di curvatura costante negativa. Allora certi risultati che sembravano incompatibili coll'ipotesi del piano possono diventar conciliabili con quella di una superficie della specia anzidetta, e ricevere da essa una spiegazione non meno semplice che soddisfacente. In pari tempo le determinazioni che producono il passaggio dalla planimetria non-euclidea alla euclidea possono spiegarsi con quelle che individuano la superficie di curvatura nulla nella serie delle superficie di curvatura costante negativa.

Tali sono le considerazioni che ci hanno servito di guida nelle ricerche seguenti.

La formola

$$ds^2 = R^2 \frac{(a^2 - v^2)\, du^2 + 2uv\, du\, dv + (a^2 - u^2)\, dv^2}{(a^2 - u^2 - v^2)^2} \tag{1}$$

rappresenta il quadrato dell'elemento lineare di una superficie la cui curvatura sferica è dovunque costante, negativa ed eguale a $-\frac{1}{R^2}$. La forma di quest'espressione, benché meno semplice di quella d'altre espressioni equivalenti che si potrebbero ottenere introducendo altre variabili, ha il particolare vantaggio (assai rilevante per lo scopo nostro) che ogni equazione lineare rispetto ad u, v rappresenta una linea geodetica, e che, reciprocamente, ogni linea geodetica è rappresentata da un'equazione lineare fra quelle variabili (Veggasi la Nota I in fine).

In particolare anche i due sistemi coordinati $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ sono formati di linee geodetiche, delle quali è facile riconoscere la mutua disposizione. Infatti chiamando θ l'angolo delle due curve coordinate nel punto (u, v), si ha

$$(2) \qquad \cos\theta = \frac{uv}{\sqrt{(a^2 - u^2)(a^2 - v^2)}}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{a\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}}{\sqrt{(a^2 - u^2)(a^2 - v^2)}},$$

quindi tanto per $u = 0$, quanto per $v = 0$ si ha $\theta = 90°$. Dunque le geodetiche componenti il sistema $u = \text{cost.}$ sono tutte ortogonali alla geodetica $v = 0$ dell'altro sistema, e le geodetiche del sistema $v = \text{cost.}$ sono tutte ortogonali alla geodetica $u = 0$ dell'altro sistema. Vale a dire: nel punto $(u = v = 0)$ concorrono due geodetiche ortogonali fra loro $u = 0$, $v = 0$, che diremo *fondamentali,* e ciascun punto della superficie viene individuato come intersezione di due geodetiche condotte per esso perpendicolarmente alle due fondamentali; ciò che costituisce una evidente generalizzazione dell'ordinario metodo cartesiano.

Le formole (2) fanno vedere che i valori ammissibili per le variabili u, v sono limitati dalla relazione

$$(3) \qquad u^2 + v^2 \leq a^2.$$

Entro questi limiti le funzioni E, F, G sono reali, monodrome, continue e finite, e le E, G, $EG - F^2$ sono inoltre positive e differenti da zero. Dunque, per quel che abbiamo stabilito al principio della Memoria *Delle variabili complesse in una superficie qualunque*[1], la porzione di superficie terminata al contorno d'equazione

$$(4) \qquad u^2 + v^2 = a^2,$$

è semplicemente connessa, ed il reticolo formato su di essa dalle geodetiche coordinate presenta intorno a ciascun punto il carattere di quello formato da due sistemi di rette parallele su di un piano, cioè: due geodetiche di egual sistema non hanno mai alcun punto comune, e due geodetiche di sistema diverso

[1] Annali di Matematica (seconda serie), t. I (1867), pag. 329.

non sono mai fra loro tangenti. Ne consegue che, sulla regione considerata, a ciascuna coppia di valori reali delle u, v soddisfacenti alla condizione (3) corrisponde un punto reale, unico e determinato; e, reciprocamente, a ciascun punto corrisponde una sola e determinata coppia di valori reali delle u, v soddisfacenti alla condizione anzidetta.

Quindi se indichiamo con x, y le coordinate rettangolari dei punti di un piano ausiliare, le equazioni

$$x = u, \quad y = v$$

stabiliscono una rappresentazione della regione considerata, rappresentazione nella quale a ciascun punto di quella regione corrisponde un punto unico e determinato del piano e reciprocamente; e tutta la regione trovasi rappresentata dentro un cerchio di raggio a col centro nell'origine delle coordinate, che chiamiamo *cerchio limite*. In questa rappresentazione le geodetiche della superficie sono rappresentate dalle corde del cerchio limite, ed in particolare le geodetiche coordinate sono rappresentate dalle corde parallele ai due assi coordinati.

Vediamo ora come sia limitata, sopra la superficie, la regione alla quale si applicano le precedenti considerazioni.

Una linea geodetica uscente dal punto $(u = 0, v = 0)$ può essere rappresentata colle equazioni

$$u = r \cos \mu, \qquad v = r \operatorname{sen} \mu, \tag{5}$$

dove r e μ sono le coordinate polari del punto corrispondente al punto (u, v) sulla retta che rappresenta (nel piano ausiliare) la geodetica considerata. Per tali valori si ricava dalla (1), essendo μ costante,

$$d\rho = R \frac{a\, dr}{a^2 - r^2},$$

donde

$$\rho = \frac{R}{2} \log \frac{a + r}{a - r},$$

dove ρ è l'arco della geodetica, contato dal punto $(u = v = 0)$. Si può scrivere anche

$$\rho = \frac{R}{2} \log \frac{a + \sqrt{u^2 + v^2}}{a - \sqrt{u^2 + v^2}} \tag{6}$$

u, v essendo le coordinate del secondo termine dell'arco ρ: il radicale $\sqrt{u^2 + v^2}$ deve prendersi qui positivamente, affine di ottenere il valore assoluto della distanza ρ.

Questo valore è nullo per $r = 0$, va crescendo indefinitamente col crescere di r, ossia di $\sqrt{u^2 + v^2}$, da 0 ad a, diventa infinito per $r = a$, ossia per quei valori di u, v che soddisfano alla (4), ed è immaginario quando $r > a$. È chiaro dunque che il contorno espresso dall'equazione (4) e rappresentato nel piano ausiliare dal cerchio limite, non è altro che il luogo dei punti all'infinito della superficie, luogo che può considerarsi come un cerchio geodetico descritto col centro nel punto ($u = v = 0$) e con un raggio (geodetico) infinitamente grande. Al di là di questo cerchio geodetico di raggio infinito non esistono che le regioni immaginarie od ideali della superficie, talché la regione dianzi considerata di estende indefinitamente e continuamente in ogni senso ed abbraccia la totalità dei punti reali della superficie. In tal guisa dentro il cerchio limite viene a rappresentarsi tutta la regione reale della nostra superficie, e propriamente in modo che, mentre lo stesso cerchio limite corrisponde alla linea dei suoi punti all'infinito, i cerchi concentrici ed interni ad esso corrispondono ai cerchi geodetici della superficie col centro nel punto ($u = v = 0$).

Se nelle equazioni (5) si riguarda r come costante, μ come variabile, quelle equazioni convengono ad un cerchio geodetico, e la formola (1) dà

$$\sigma = \frac{Rr\mu}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \tag{7}$$

dove σ è l'arco di cerchio geodetico rappresentato nel piano ausiliare dall'arco circolare il cui raggio è r e l'angolo al centro μ. Essendo σ proporzionale a μ qualunque sia r, si vede facilmente che le geodetiche ρ fanno tra loro, nell'origine comune, angoli eguali ai raggi che loro corrispondono nel piano ausiliare; e che la piccolissima porzione di superficie immediatamente circostante al punto ($u = v = 0$) è simile alla sua rappresentazione piana, proprietà che non si verifica per alcun altro punto.

Dalla (6) si trae

$$r = \sqrt{u^2 + v^2} = a \operatorname{tgh} \frac{\rho}{R}, \qquad \cosh \frac{\rho}{R} = \frac{a}{w}, \tag{7'}$$

dove w indica il valore positivo del radicale $\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}$. In virtù del precedente valore di r la (7) può scriversi

$$\sigma = \mu R \operatorname{senh} \frac{\rho}{R}, \tag{8}$$

cosicché il semiperimetro della circonferenza geodetica di raggio ρ è dato da

$$\pi R \operatorname{senh} \frac{\rho}{R}, \tag{8}$$

ossia

$$\frac{1}{2}\pi R \left(e^{\frac{\rho}{R}} - e^{-\frac{\rho}{R}} \right).$$

Dalle cose precedenti risulta che le geodetiche della superficie sono rappresentate nel loro totale sviluppo (reale), dalle corde del cerchio limite, mentre i prolungamenti di queste corde fuori del cerchio stesso sono destituiti d'ogni rappresentanza (reale). D'altronde due punti reali della superficie sono rappresentati da due punti, parimenti reali, interni al cerchio limite, i quali individuano *una* corda del cerchio stesso. Si vede dunque che due punti reali della superficie, *scelti in modo qualunque,* individuano sempre *una sola e determinata linea geodetica,* che è rappresentata nel piano ausiliare dalla corda passante pei loro punti corrispondenti.

Così le superficie di curvatura costante negativa *non* vanno soggette a quelle eccezioni che si verificano sotto questo rapporto in quelle di curvatura costante positiva, epperò sono ad esse applicabili i teoremi della planimetria non-euclidea. Anzi questi teoremi non sono in gran parte suscettibili di concreta interpetrazione, se non vengono riferiti precisamente a queste superficie anziché al piano, come ora procediamo a diffusamente dimostrare. Per evitare circonlocuzioni ci permettiamo di denominare *pseudosferiche* le superficie di curvatura costante negativa, e di conservare il nome *raggio* alla costante R da cui dipende il valore della loro curvatura.

Cerchiamo primieramente la relazione generale che sussiste fra l'angolo di due linee geodetiche e l'angolo delle corde che le rappresentano.

Sia (u, v) un punto della superficie, (U, V) un punto qualunque di una delle geodetiche uscenti da esso. Le equazioni di due fra queste geodetiche siano

$$V - v = m(U - u), \quad V - v = n(U - u).$$

Chiamando α l'angolo delle geodetiche nel punto (u, v) si ha, da una formola nota,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(n-m)\sqrt{EG - F^2}}{E + (n+m)F + mnG},$$

ossia, pei valori attuali di E, F, G,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a(n-m)w}{(1+mn)a^2 - (v-\mu)(v-\nu)}.$$

Indicando con α' l'angolo delle due corde e con μ, ν gli angoli formati da esse coll'asse delle x, si ha $m = \operatorname{tg}\mu$, $n = \operatorname{tg}\nu$, $\alpha' = v - \mu$, e quindi

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{aw \operatorname{sen} \alpha'}{a^2 \cos \alpha' - (v \cos \mu - u \operatorname{sen} \mu)(v \cos \nu - u \operatorname{sen} \nu)}.$$

Il denominatore del secondo membro si mantiene sempre finito in ogni punto reale della superficie, quindi l'angolo α non può essere nullo che quando è nullo il numeratore. Ma $\operatorname{sen} \alpha'$ non è nullo finché le due corde si intersecano dentro il cerchio limite e non coincidono in una sola retta: dunque α non è nullo che per $w = 0$, cioè quando il punto in cui s'incontrano le due geodetiche è all'infinito.

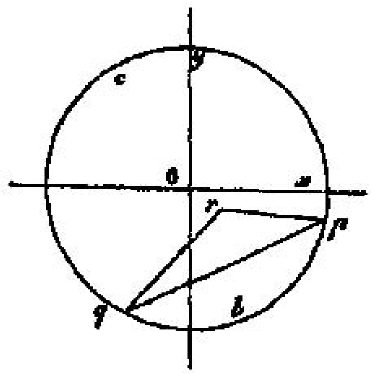
Conseguentemente possiamo formulare le regole seguenti:

I. A due corde distinte che s'intersecano dentro il cerchio limite corrispondono due geodetiche che si intersecano in un punto a distanza finita sotto un angolo differente da 0° e da 180°.

II. A due corde distinte che s'intersecano sulla periferia del cerchio limite corrispondono due geodetiche che concorrono verso uno stesso punto a distanza infinita e che fanno in esso un angolo nullo.

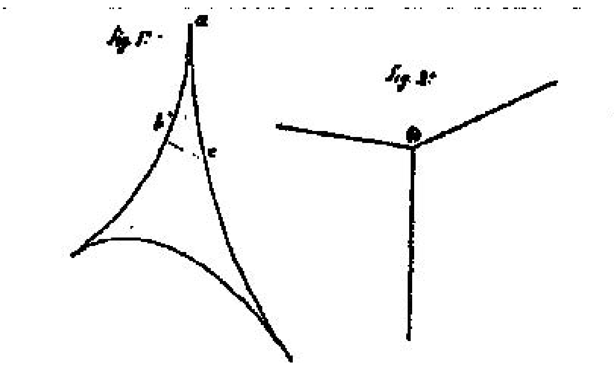
III. E finalmente a due corde distinte che s'intersecano fuori dal cerchio limite, o che sono parallele, corrispondono due geodetiche che non hanno alcun punto in comune su tutta l'estensione (reale) della superficie.

Sia ora pq una corda qualunque del cerchio limite, r un punto interno al cerchio



ma esterno alla corda. A questa corda corrisponde sulla superficie una geodetica $p'q'$, diretta verso i punti all'infinito p', q' (corrispondenti a p, q); al punto r corrisponde un punto r', situato a distanza finita ed esterno alla geodetica $p'q'$. Da questo punto si possono spiccare infinite geodetiche, delle quali alcune incontrano la geodetica $p'q'$, le altre non la incontrano. Le prime sono rappresentate dalle rette che vanno dal punto r ai varii punti dell'arco pbq ($< 180°$), le altre sono rappresentate da quelle che vanno dallo stesso punto ai varii punti pcq ($> 180°$). Due geodetiche speciali formano il trapassao da quelle dell'una schiera a quelle dell'altra: sono quelle rappresentate dalle rette rp, rq, ossia sono le due geodetiche che partono da r' e concorrono all'infinito colla $p'q'$, l'una da una parte, l'altra dall'altra. Siccome gli angoli rettilinei rqp, rpq hanno i loro vertici sulla periferia del cerchio limite, così (II) i corrispondenti angoli geodetici $r'q'p'$, $r'p'q'$ sono nulli, benché i primi sieno finiti. All'incontro, essendo r interno al detto cerchio ed esterno alla corda pq, l'angolo prq è differente da 0° e da 180° e quindi (I) le geodetiche corrispondenti $r'p'$, $r'q'$ formano in r' un angolo pure differente da 0° e da 180°. Dunque se le geodetiche $r'p'$, $r'q'$ si dicono *parallele* alla $p'q'$, in quanto segnano il trapasso dalla schiera di quelle che intersecano la $p'q'$ alla schiera di quelle che non la intersecano, si può enunciare il risultato dicendo che: da ogni punto (reale) della superficie si possono sempre condurre *due* geodetiche (reali) parallele ad una medesima geodetica (reale) che non passi per quel punto, e queste due geodetiche fanno tra loro un angolo differente tanto 0° quanto da 180°.

Questo risultato s'accorda, salva la diversità delle espressioni, con quello che forma il cardine della geometria non-euclidea. Per iscorgere subito, nella geometria pseudosferica, l'interpetrazione di qualche altra affermazione della geometria non-euclidea, consideriamo un triangolo geodetico. Ognuno sa che quando si studiano figure esistenti sopra una superficie la quale non sia sviluppabile sopra un piano, riesce spesso opportuno, per la più facile intelligenza, di delineare in piano un'altra figura, la quale, senza essere ricavata dalla prima secondo una determinata legge geometrica, serva tuttavia ad *indicarne* approssimativamente la disposizione generale, riproducendone le più sostanziali relazioni di sito. Perché la figura indicativa adempia a tale condizione, bisogna che tutte le grandezze, sì lineari che angolari, della figura data, vi si trovino sostituite da grandezze di eguale specie (rispettivamente); bisogna inoltre che le lunghezze di due linee corrispondenti, e i seni di due angoli corrispondenti abbiano sempre fra loro un rapporto finito, poco importando poi che tale rapporto varii arbitrariamente da una parte all'altra della figura, purché non diventi mai né nullo né infinito. È ovvio del resto che, in tanta latitudine di scelta, conviene far sì che nella figura indicativa il rapporto anzidetto non presenti eccessive deviazioni da un certo valor medio. Ciò posto, se il triangolo geodetico testé immaginato ha tutti i suoi vertici a distanza finita, è chiaro che ogni triangolo piano può servire ad indicarlo. Questo triangolo piano potrebbe essere lo stesso triangolo rettilineo che ne forma la rappresentazione nel piano ausiliare, triangolo che sarebbe totalmente interno al cerchio limite. Si potrebbe ancora, secondo le circostanze, preferire un triangolo curvilineo, i cui angoli fossero p. es. eguali a quelli del triangolo geodetico. Ma se si suppone che i vertici del triangolo geodetico vadano allontanandosi indefinitamente e passino a distanza infinita, è chiaro che, mentre il triangolo stesso continua ad essere una figura esistente sulla superficie, con tutti i suoi punti, tranne i vertici, a distanza finita, la figura indicativa non potrebbe essere finita in ogni senso senza violare in qualche parte le condizioni che abbiamo formulato. Per es. il triangolo rettilineo reppresentante il triangolo geodetico sul piano ausiliare avrebbe i suoi angoli finiti, mentre quelli del triangolo geodetico sarebbero nulli. E un triangolo curvilineo coi lati tra loro tangenti nei vertici violerebbe del pari le condizioni anzidette in ciò che, prendendo due punti b, c sui lati che concorrono in un vertice a, si otterrebbero degli intervalli ab, bc il cui rapporto sarebbe finito nel triangolo indicativo, infinito nel geodetico (fig. 1ª). Per togliere questa discordanza bisognerebbe che tutti gli intervalli analoghi a bc fossero nulli nella figura indicativa, il che non potrebbe



ottenersi altrimenti che dando ad essa la disposizione (fig. 2ª, dove il punto O concentra in se stesso la rappresentanza di tutti i punti posti a distanza finita nel triangolo geodetico. Una tale figura potrebbe concepirsi come risultante dall'osservare il triangolo geodetico con una lente dotata della proprietà (fittizia) di produrre un impiccolimento infinito. Infatti, in tale ipotesi, tutti gli intervalli finiti apparirebbero come nulli e gli infiniti come finiti.

Ciò concorda sostanzialmente con quello che ha notato GAUSS nella sua lettera del 12 luglio 1831 e SCHUMACHER[2] nella quale è detto che il semiperimetro del cerchio non-euclideo di raggio ρ ha per valore

$$\frac{1}{2}\pi k \left(e^{\frac{\rho}{k}} - e^{-\frac{\rho}{k}}\right)$$

dove k è una costante. Questa costante, che GAUSS dice esserci offerta dall'esperienza come estremamente grande rapporto a tutto ciò che noi possiamo misurare, non è altro, secondo l'attual punto di vista ed in base alla formola (8), che il raggio di quella superficie pseudosferica che noi introduciamo inconsapevolmente nella planimetria al posto del piano euclideo, ogni volta che le nostre considerazioni si appoggiano a quelle sole premesse che sono vere tanto per il piano quanto per tutte le superficie della detta classe.

Volendo ora procedere a mostrare in modo più concreto l'accordo della geometria pseudosferica colla planimetria non-euclidea, si rende necessario di

[2] Veggasi l'appendice alle *Études géométriques sur la thèorie des parallèles* di LOBATSCHEWSKY (trad. HÖUEL), Paris, 1866.

esaminare attentamente l'espressione analitica che abbiamo usata per rappresentare l'elemento lineare della superficie pseudosferica. E innanzi tutto si affaccia la seguente quistione: le due geodetiche che abbiamo chiamate fondamentali debbono essere scelte in qualche modo particolare perché l'elemento abbia la forma anzidetta? Veramente sembrerebbe che esse potessero essere scelte ad arbitrio, poiché se ogni pezzo di superficie è sovrapponibile in modo qualunque alla superficie stessa, chiaro è che due qualsivogliano geodetiche ortogonali esistenti in quel pezzo si possono far coincidere con due altre qualsivogliano, purché ortogonali del pari. Siccome però la quistione che abbiamo sollevata è essenziale per lo scopo nostro, così abbiamo creduto di dedicare ad essa la Nota II, nella quale, dimostrandosi direttamente che le geodetiche fondamentali sono arbitrarie, risulta al tempo stesso provato, senza bisogno di ammettere preliminari conoscenze in proposito, che ogni pezzo di superficie è applicabile in modo qualunque alla superficie stessa.

In conseguenza di questo fatto e delle ragioni già esposte, i teoremi della planimetria non-euclidea relativi alle figure rettilinee piane diventano necessariamente validi per le analoghe figure geodetiche esistenti sulle superficie pseudosferiche. Tali sono per esempio quelli dei n[i] 3-10, 16-24, 29-30, ecc. delle *Études géométriques...* di LOBATSCHEWSKY.

Prendiamo ora a considerare le due geodetiche spiccate da un punto dato, parallelamente ad una geodetica data. Sia δ la lunghezza della normale geodetica condotta dal punto a questa geodetica. Questa normale divide per metà l'angolo delle due parallele. Infatti staccando la striscia di superficie compresa fra la geodetica normale, una delle parallele e la corrispondente metà della geodetica data, invertendola, ed applicandola di nuovo alla superficie, in modo che la normale coincida con se stessa, mentre la metà della geodetica data si sovrapponga sull'altra metà, è chiaro che la parallela limitante la striscia si deve sovrapporre all'altra parallela, senza di che dal punto dato si potrebbero condurre più di due parallele alla geodetica data. Chiamiamo *angolo di pararallelismo* l'angolo formato da ciascuna delle parallele colla normale e denotiamolo con Δ. Per calcolare questo angolo, facciamo uso della nostra solita analisi, ponendo l'origine ($u = v = 0$) nel punto dato e dirigendo la geodetica fondamentale $v = 0$ normalmente alla geodetica data; talché quest'ultima risulta rappresentata dall'equazione

$$u = a \operatorname{tgh} \frac{\delta}{R},$$

come facilmente si rileva dalle formole (7').

A questa geodetica corrisponde nel piano ausiliare una corda perpendicolare all'asse delle x, bisecata da questo asse, uno dei cui termini ha per ordinata la quantità $\frac{a}{\cosh \frac{\delta}{R}}$. Questo punto del cerchio limite determina il raggio d'equazione

$$y = \frac{x}{\operatorname{senh}\frac{\delta}{R}},$$

al quale corrisponde sulla superficie una delle parallele considerate; e poiché gli angoli intorno all'origine sono eguali sulla superficie e sul punto ausiliare, si deve evidentemente avere

$$\operatorname{tg}\Delta \operatorname{senh}\frac{\delta}{R} = 1, \tag{9}$$

formola che contiene la relazione cercata fra la distanza normale δ e l'angolo di parallelismo Δ. Essa coincide con quella trovata dal sig. Battaglini[3]. Per confrontarla con quella di Lobatschewsky basta scriverla sotto la forma

$$e^{-\frac{\alpha\delta}{R}} + 2e^{-\frac{\delta}{R}}\cot\Delta - 1 = 0,$$

e dedurne

$$e^{-\frac{\delta}{R}} = \frac{-\cos\Delta \pm 1}{\operatorname{sen}\Delta}.$$

Il segno inferiore è inammissibile perché $\frac{\delta}{R}$ è una quantità reale, quindi

$$\operatorname{tg}\frac{\Delta}{2} = e^{-\frac{\delta}{R}},$$

la quale è appunto la formola di Lobatschewsky (l.c., n° 38), salva la differenza dei simboli e quella che proviene dalla scelta dell'unità.

Indicando, come fa Lobatschewsky (n° 16), con $\Pi(z)$ l'angolo di parallelismo relativo alla distanza normale z, si ga dalla (9)

$$\cosh\frac{z}{R} = \frac{1}{\operatorname{sen}\Pi(z)}, \quad \operatorname{senh}\frac{z}{R} = \cot\Pi(z) \tag{10}$$

Ora, per una osservazione del sig. Minding[4], sviluppata dal sig. Codazzi[5], è noto che le ordinarie formole relative ai triangoli sferici si convertono in quelle relative ai triangoli geodetici delle superficie di curvatura costante negativa, apponendo il fattore $\sqrt{-1}$ ai rapporti dei lati col raggio e lasciando inalterati gli angoli, ciò che equivale a mutare le funzioni circolari dei lati in funzioni iperboliche. P. es. la prima formola della trigonometria sferica

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \operatorname{sen}\frac{b}{R}\operatorname{sen}\frac{c}{R}\cos A$$

[3]Giornale di Matematiche, vol. V (1867), pag.225.

[4]Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. XX (1840), pag.323.

[5]Annali di Scienze fisiche e matematiche (del Tortolini), t. VIII (1857), pag. 346.

diventa
$$\cosh\frac{a}{R}=\cosh\frac{b}{R}\cosh\frac{c}{R}-\operatorname{senh}\frac{b}{R}\operatorname{senh}\frac{c}{R}\cos A.$$
Introducendo invece dei lati a, b, c i corrispondenti angoli di parallelismo mediante le formole (10), questa relazione si converte nella seguente:

$$\cos A\,\cos\Pi(b)\,\cos\Pi(c)+\frac{\operatorname{sen}\Pi(b)\,\operatorname{sen}\Pi(c)}{\operatorname{sen}\Pi(a)}=1,$$

e questa è una delle equazioni fondamentali della planimetria non-euclidea[6]. Analogamente si possono ottenere le altre. (Il passaggio inverso da queste equazioni a quelle della trigonometria sferica è stato indicato da LOBATSCHEWSKY, alla pag. 34, ma come un semplice fatto analitico).

I risultati precedenti ci sembrano manifestare pienamente la corrispondenza vigente fra planimetria non-euclidea e la geometria pseudosferica. Per verificare la stessa cosa da un altro punto di vista, vogliamo ancora stabilire direttamente, colla nostra analisi, il teorema relativo alla somma dei tre angoli di un triangolo.

Consideriamo il triangolo rettangolo formato dalla geodetica fondamentale $v=0$, da una delle geodetiche perpendicolari $u=$ cost., e dalla geodetica uscente dall'origine sotto l'angolo μ, la cui equazione è

$$v=u\operatorname{tg}\mu.$$

Chiamiamo μ' il terzo angolo di questo triangolo. L'angolo corrispondente ad esso, nel piano ausiliare è $90^\circ-\mu$, epperò la relazione stabilita precedentemente fra gli angoli corrispondenti nella superficie e nel piano dà

$$\operatorname{tg}\mu'=\frac{w\cos\mu}{a\operatorname{sen}\mu},$$

donde si scorge che quando μ è un angolo acuto, lo è pure μ'. Essendo $v=u\operatorname{tg}\mu$, questa formola può scriversi, prendendo il radicale positivamente,

$$\operatorname{tg}\mu'=\frac{\sqrt{a^2cos^2\mu-u^2}}{a\operatorname{sen}\mu},$$

donde
$$d\mu'=-\frac{a\operatorname{sen}\mu\,u\,du}{(a^2-u^2)\sqrt{a^2\cos^2\mu-u^2}},$$

[6] LOBATSCHEWSKY, l.c., n° 37.

espressione dell'incremento che riceve μ' quando, rimanendo costante μ, si sposta il cateto opposto a quest'angolo. Ciò posto, se dell'elemento superficiale

$$\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = R^2 a \frac{du\, dv}{(a^2 - u^2 - v^2)^{-\frac{3}{2}}}$$

si prende l'integrale rispetto a v, fra $v = 0$ e $v = u \operatorname{tg} \mu$, che si trova essere

$$\frac{r^2 a \operatorname{sen} \mu\, u\, du}{(s^2 - u^2)\sqrt{a^2 \cos^2 \mu - u^2}},$$

ossia

$$-R^2\, d\mu',$$

si ha l'incremento che riceve l'area del triangolo considerato, quando si sposta il cateto opposto all'angolo μ. Integrando di nuovo fra $\mu' = 90° - \mu$ e $\mu' = \mu$ (dei quali valori il primo evidentemente corrisponde ad $u = 0$), si ottiene

$$R^2 \left(\frac{\pi}{2} - \mu - \mu' \right),$$

espressione dell'area totale del triangolo rettangolo. Da questa si passa tosto a quella di un triangolo geodetico qualunque ABC, dividendo in due triangoli rettangoli con una geodetica condotta da un vertice normalmente al lato opposto, e si trova

$$R^2(\pi - A - B - C).$$

Questa espressione, dovendo riuscire positiva, manifesta che la somma dei tre angoli di un triangolo geodetico qualunque non può mai eccedere 180°. Se essa fosse eguale a 180° in un solo triangolo, di dimensioni finite, bisognerebbe che fosse $R = \infty$, ed allora in ogni altro triangolo finito si avrebbe parimente $A + B + C = \pi$. Ma per $R = \infty$ la (9) dà $\Delta = \frac{\pi}{2}$, quindi l'angolo di parallelismo sarebbe necessariamente retto; e reciprocamente. Queste sono pure le conclusioni cui giunge la geometria non-euclidea.

Il triangolo formato da una geodetica e dalle due geodetiche ad essa parallele condotte per un punto esterno, ha due angoli nulli ed il terzo eguale a 2Δ; quindi la sua area è finita e data da

$$R^2(\pi - 2\Delta),$$

ossia, per la (9), da

$$2R^2 \operatorname{arctg} \left(\operatorname{senh} \frac{\delta}{R} \right),$$

dove δ è la distanza dal punto alla geodetica. Per R molto grande questa quantità è prossimamente eguale a $2\delta R$, ed è quindi infinita per il piano, come è noto, ma non lo è che in questo caso.

Un triangolo geodetico i cui vertici sono tutti all'infinito ha un'area finita e determinata, il cui valore πR^2 è indipendente dalla sua forma.

Un poligono geodetico di n lati, cogli angoli interni $A, B, C, ...$ ha l'area

$$R^2[(n-1)\pi - A - B - C - \cdots].$$

Se il poligono ha tutti i vertici all'infinito, la sua area, che non cessa d'essere finita, si riduce a $(n-2)\pi R^2$ ed è quindi indipendente dalla sua forma.

Passiamo ora ad esaminare quelle curve che abbiamo chiamate, secondo un uso già adottato, circonferenze geodetiche.

Alla fine della Nota II abbiamo trovato che la circonferenza geodetica col centro nel punto qualunque (u_0, v_0) e col raggio geodetico ρ è rappresentata dall'equazione

$$\frac{a^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{(a^2-u^2-v^2)(a^2-u_0^2-v_0^2)}} = \cosh\frac{\rho}{R}. \tag{11}$$

Quest'equazione generale ci divienta utile in seguito, ma ora possiamo approfittare delle semplificazioni che risultano dal supporre collocata l'origine $(u = v = 0)$ nel centro della circonferenza considerata. Dando all'espressione dell'elemento lineare (come nella Nota II) la forma

$$ds^2 = R^2\frac{w^2(du^2+dv^2)+(u\,du+v\,dv)^2}{w^4},$$

e ponendo

$$u = r\cos\varphi, \quad v = r\operatorname{sen}\varphi,$$

se ne deduce tosto l'espressione equivalente

$$ds^2 = R^2\left[\left(\frac{a\,dr}{a^2-r^2}\right)^2 + \frac{r^2\,d\varphi^2}{a^2-r^2}\right].$$

Ma chiamando ρ la distanza geodetica del punto (u, v) ossia (r, φ) dall'origine, si ha, come sappiamo,

$$\frac{a\,dr}{a^2-r^2} = \frac{d\rho}{R}, \quad \frac{r^2}{a^2-r^2} = \operatorname{senh}^2\frac{\rho}{R},$$

dunque

$$ds^2 = d\rho^2 + \left(R \operatorname{senh} \frac{\rho}{R}\right)^2 d\varphi^2, \tag{12}$$

espressione già conosciuta dell'elemento lineare della superficie pseudosferica.

Quest'espressione rientra nella forma canonica dell'elemento lineare di una superficie di rotazione. Ma bisogna osservare che nel caso attuale non si potrebbe applicare effettivamente sopra una superficie di rotazione la calotta pseudosferica circostante al punto ($u = v = 0$), senza alterarne la continuità per mezzo di qualche taglio operato in essa partendo dal punto stesso. Infatti la supposta superficie di rotazione, se esistesse senza tale condizione, incontrerebbe il proprio asse nel centro comune ($\rho = 0$) di tutte le circonferenze geodetiche $\rho =$ cost. ed avrebbe quindi in questo punto le sue due curvature di egual senso, il che non può essere, perché una superficie pseudosferica ha tutti i suoi punti *iperbolici.* La stessa impossibilità risulta dal considerare che, quando non si volesse eseguire il taglio anzidetto, la variabile φ rappresenterebbe la longitudine del meridiano variabile, epperò il raggio del parallelo corrispondente all'arco meridiano sarebbe $R \operatorname{senh} \frac{\rho}{R}$. La variazione di questo raggio sarebbe quindi uguale a $\cosh \frac{\rho}{R}\, d\rho$, cioè maggiode i $d\rho$, il che è assurdo, poiché la variazione anzidetta eguaglia la projezione di $d\rho$ sul piano del parallelo.

L'espressione (12) dell'elemento lineare, benché priva dei vantaggi inerenti all'uso delle nostre variabili u, v, può essere utile talvolta per la sua semplicità. Essa si presta p. es. alla determinazione della curvatura tangenziale delle circonferenze geodetiche, la quale, per la circonferenza di raggio ρ, ha il valore $\frac{1}{R \operatorname{tgh} \frac{\rho}{R}}$; questa curvatura è adunque costante lungo tutta la periferia del cerchio geodetico e non dipende che dal raggio. Questa proprietà riesca manifesta anche *a priori,* osservando che il pezzo di superficie terminato da un cerchio geodetico si può applicare in modo qualunque sulla superficie medesima, senza che il suo lembo cessi mai di essere un cerchio geodetico col centro nel punto su cui si applica il suo centro primitivo.

Il teorema che "le geodetiche erette normalmente nei punti medî delle corde di una circonferenza geodetica concorrono tutte nel suo centro " si dimostra come il corrispondente teorema della planimetria ordinaria, e se ne conclude che la costruzione del centro della circonferenza passante per tre punti non situati sopra una stessa geodetica è affatto analoga all'ordinaria, talché tale circonferenza è sempre unica e determinata.

Ma qui sorge una difficoltà. Scelti ad arbitrio tre punti sulla superficie, può accadere che le geodetiche perpendicolari nei punti medii delle loro congiungenti non si intersechino in alcun punto *reale* della superficie, e quindi, se si restringe la denominazione di circonferenze geodetiche alle curve descritte dall'estremità di un arco geodetico invariabile che gira intorno ad un punto *reale* della superficie, bisogna necessariamente ammettere che non sempre si può dar passare una circonferenza geodetica per tre punti della superficie *scelti in modo qualunque.* Anche questo, *mutatis mutandis,* è d'accordo coi principii di LOBATSCHEWSKY (l.c., n° 29).

Nondimeno, poiché le geodetiche della superficie sono sempre rappresentate dalle corde del cerchio limite, se più corde sono tali che prolungate si incontrino in uno stesso punto esterno al cerchio, è lecito risguardare le geodetiche corrispondenti come aventi in comune un punto *ideale,* e le loro trajettorie ortogonali come alcunché di analogo alle circonferenze geodetiche propriamente dette.

Cerchiamo direttamente l'equazione di queste trajettorie.

L'equazione

$$v - v_0 = k(u - u_0)$$

rappresenta il sistema delle geodetiche uscenti dal punto (u_0, v_0), reale od ideale secondo che $u_0^2 + v_0^2$ è minore o maggiore di a^2. L'equazione differenziale dello stesso sistema è

$$\frac{du}{u - u_0} = \frac{dv}{v - v_0},$$

epperò quella del sistema ortogonale è

$$[E(u - u_0) + F(v - v_0)]\,du + [F(u - u_0) + G(v - v_0)]\,dv = 0,$$

cioè, pei valori attuali di E, F, G,

$$d\frac{a^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} = 0.$$

Quindi

$$\frac{a^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} = C \tag{13}$$

è l'equazione finita delle circonferenze geodetiche concepite nel senso più generale, cioè qualunque ne sia il centro (u_0, v_0), reale od ideale.

Quando questo centro è reale, la sua distanza dalla curva è costante, in virtù di un teorema notissimo; ed infatti, denominando ρ questa distanza, si ha, dal confronto coll'equazione (11),

$$\cosh\frac{\rho}{R} = \frac{C}{\sqrt{a^2 - u_0^2 - v_0^2}}$$

In questo caso è chiaro che fra i valori ammissibili per la costante C non è compreso il valor *zero,* poiché il luogo corrispondente a questa ipotesi, essendo rappresentato nel piano ausiliare da una retta esterna al cerchio limite, cade tutto nelle regioni ideali della superficie.

Quando invece il centro è ideale, la nozione del raggio geodetico manca, ma la costante C può ricevere il valor *zero,* perché l'equazione risultante

$$a^2 - uu_0 - vv_0 = 0$$

rappresenta, sul piano ausiliare, una corda del cerchio limite e precisamente la polare del punto esterno (u_0, v_0). Quest'equazione definisce una geodetica reale della superficie: possiamo dunque concludere che fra le infinite circonferenze geodetiche aventi lo stesso centro ideale esiste sempre una (ed una sola) geodetica reale, talché le circonferenze geodetiche a centro ideale si possono anche definire come curve parallele (geodeticamente) alle geodetiche reali. Quest'ultima proprietà venne notata già dal sig. Battaglini, con diverso linguaggio[7]. Si vede dunque che mentre sulla superficie sferica i due concetti di "circonferenza geodetica" e di "curva parallela ad una linea geodetica" coincidono perfettamente fra loro, sulla superficie pseudosferica invece presentano una differenza, procedente dalla realità od idealità del centro.

Poiché ogni circonferenza geodetica a centro ideale è equidistante in tutti i suoi punti da una geodetica determinata, supponiamo che questa sia la stessa $v = 0$, ciò che è sempre lecito, e chiamiamo ξ la distanza geodetica del punto (u, v) da questa fondamentale. Questa distanza è misurata sopra una delle geodetiche del sistema $u =$ cost. ed è data dalla formola

$$\xi = \frac{R}{2} \log \frac{\sqrt{a^2 - u^2} + v}{\sqrt{a^2 - u^2} - v}.$$

Supponendo ξ costante, si ha di qui l'equazione fra u e v di una qualunque delle circonferenze geodetiche che hanno il centro nel punto ideale di concorso di tutte le geodetiche normali alla $v = 0$.

Chiamiamo η l'arco della geodetica $v = 0$ compreso fra l'origine e la normale ξ: il suo valore è dato da

$$\eta = \frac{R}{2} \log \frac{a + u}{a - u}.$$

Dalle due equazioni qui scritte si trae

$$u = a \operatorname{tgh} \frac{\eta}{R}, \quad v = \frac{a \operatorname{tgh} \frac{\xi}{R}}{\cosh \frac{\eta}{R}},$$

[7]Giornale di Matematiche, vol. V (1867), pag.228.

donde

$$w^2 = a^2 - u^2 - v^2 = \frac{a^2}{\cosh^2\frac{\xi}{R}\cosh^2\frac{\eta}{R}}.$$

Trasformando dalle variabili u, v alle ξ, η l'espressione (1), si trova

$$ds^2 = d\xi^2 + \cosh^2\frac{\xi}{R}\,d\eta^2, \tag{14}$$

espressione che conviene ad una superficie di rotazione.

Designando con r_0 il raggio del parallelo minimo di questa superficie, che corrisponde evidentemente a $\xi = 0$, con r quello del parallelo ξ, si ha

$$r = r_0 \cosh\frac{\xi}{R},$$

e quindi

$$\frac{dr}{d\xi} = \frac{r_0}{R}\operatorname{senh}\frac{\xi}{R}.$$

Dunque la zona di superficie pseudosferica che può essere realmente conformata a superficie di rotazione è definita dalla condizione

$$\left(\frac{r_0}{R}\operatorname{senh}\frac{\xi}{R}\right)^2 < 1,$$

ossia è racchiusa fra due circonferenze geodetiche equidistanti dalla geodetica $\xi = 0$, la quale si dispone secondo il parallelo minimo. La larghezza di questa zona dipende dal raggio che si vuole assegnare al parallelo minimo, ed è tanto maggiore quanto questo è minore. La lunghezza della zona stessa è indefinita, epperò essa si ravvolge infinite volte sulla superficie di rotazione, nel che è da osservare che i punti i quali si sovrappongono in tal modo l'uno all'altro devono sempre concepirsi come distinti, senza di che cesserebbe d'esser vero il teorema che per due punti della superficie passi una sola geodetica: in altre parole, si deve concepire la superficie di rotazione come il limite di un elicoide il cui passo converge verso zero. I due paralleli estremi hanno il raggio uguale a $\sqrt{R^2 + r_0^2}$, e i loro piani sono tangenti circolarmente alla superficie.

Fra le circonferenze geodetiche a centro reale e quelle a centro ideale si trovano, come ente intermedio, le circonferenze geodetiche che hanno il centro a distanza infinita, le quali meritano di essere considerate a cagione delle loro notabilissime proprietà.

L'equazione generale di queste circonferenze conserva la forma (13), poiché il processo che ci ha condotto a questa vale per ogni posizione del centro; ma se tale equazione si confronta colla (11), in cui la quantità $\sqrt{a^2 - u_0^2 - v_0^2}$, ossia w_0, converge verso zero quando il centro passa all'infinito, mentre nella stessa ipotesi il secondo membro cresce indefinitamente, si vede che il prodotto $w_0 \cosh \frac{\rho}{R}$ converge verso un valore finito, al quale converge del pari, evidentemente, il prodotto $\frac{1}{2} w_0 e^{\frac{\rho}{R}}$. Ora se in luogo di ρ si pone $\rho' - \rho$, la (11) può scriversi

$$\frac{a^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} = \frac{w_0}{2} e^{\frac{\rho'}{R}} e^{-\frac{\rho^2}{R}} + \frac{w_0}{2} e^{\frac{-\rho'}{R}} e^{\frac{\rho}{R}},$$

quindi, mantenendo ρ finito e facendo crescere indefinitamente ρ', mentre w_0 converge verso zero, si ha, al limite,

$$\frac{a^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} = k e^{-\frac{\rho}{R}},$$

dove k è una costante. Rappresentando in questo modo il sistema delle circonferenze geodetiche col centro all'infinito, nel punto (u_0, v_0), il parametro ρ esprime l'intervallo costante fra una qualunque di queste circonferenze ed una determinata fra esse, e cresce positivamente da questa verso il centro all'infinito. Ponendo $k = a$, la circonferenza $\rho = 0$ diventa quella che passa per il punto $(u = v = 0)$.

Se coll'equazione così ottenuta

$$\frac{a^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} = a e^{-\frac{\rho}{R}}, \tag{15}$$

si combina quest'altra

$$\frac{u_0 v - u v_0}{a^2 - uu_0 - vv_0} = \frac{\sigma}{R}, \tag{16}$$

e si tien conto della relazione $u_0^2 + v_0^2 = a^2$, si trova che l'elemento lineare (1) assume la forma

$$ds^2 = d\rho^2 + e^{-\frac{2\rho}{R}} d\sigma^2, \tag{17}$$

la quale conviene di nuovo ad una superficie di rotazione.

Indicando con r_0 il raggio del parallelo $\rho = 0$, di cui σ è l'arco, con r quello del parallelo ρ, si ha

$$r = r_0 e^{-\frac{\rho}{R}},$$

e quindi la superficie di rotazione non è reale che dentro i limiti determinati dalla relazione $\rho > R \log \frac{r_0}{R}$, talché la circonferenza $\rho = 0$ non può diventare realmente un parallelo se non si prende $r_0 \leq R$. Il parallelo massimo ha il raggio R e corrisponde al valore $\rho = R \log \frac{r_0}{R}$; quindi con una opportuna determinazione di r_0 esso può essere occupato da una qualunque delle circonferenze considerate; p. es. facendo $r_0 = R$ si ha la stessa circonferenza iniziale $\rho = 0$. Il parallelo minimo corrisponde a $\rho = \infty$ ed ha il raggio nullo, cosicché la superficie di rotazione si avvicina asintoticamente al suo asse da una sola parte, mentre dall'altra è limitata dal piano del parallelo massimo col quale si accorda tangenzialmente. Su questa superficie si ravvolge infinite volte la superficie pseudosferica, terminata alla linea $\rho = 0$, se $r_0 = R$.

La curvatura tangenziale di un parallelo qualunque si trova essere $\frac{1}{R}$, cioè eguale per tutti. Ora il raggio della curvatura tangenziale di un parallelo non è altro che la porzione di tangente al meridiano compresa fra il punto di contatto (sul parallelo considerato) e l'asse. Dunque per l'attuale superficie di rotazione questa porzione di tangente è costante, la curva meridiana e la nota *linea delle tangenti costanti,* e la superficie generata è quella che si suole riguardare come tipo delle superficie di curvatura costante negativa[8].

D'altra parte le circonferenze geodetiche col centro all'infinito corrispondono manifestamente agli *oricicli* della geometria di LOBATSCHEWSKY (l.c. n[i] 31 e 32). Conservando questa denominazione noi possiamo dunque dire che un sistema di oricicli concentrici si trasforma, mediante una flessione opportuna della superficie, nel sistema dei paralleli della superficie di rotazione generata dalla linea delle tangenti costanti.

Per avere una riprova della corrispondenza dei nostri oricicli con quelli di LOBATSCHEWSKY, osserviamo che all'angolo diedro $\frac{\sigma}{R}$ di due piani meridiani corrispondono sui paralleli ρ_1 e ρ_2 i due archi s_1, s_2 dati da

$$s_1 = \sigma e^{-\frac{\rho_1}{R}}, \quad s_2 = \sigma e^{-\frac{\rho_2}{R}},$$

donde, chiamando τ la distanza $\rho_2 - \rho_1$, si trae

$$s_2 = s_1 e^{-\frac{\tau}{R}},$$

formola che coincide con quella di LOBATSCHEWSKY (n° 33), salva la solita differenza nella scelta dell'unità.

L'espressione (17) dell'elemento lineare è indipendente dalle coordinate (u_0, v_0) del centro degli oricicli considerati; inoltre abbiamo veduto che ciascuno degli oricicli di un dato sistema può prendere il posto del parallelo massimo. Possiamo dunque concludere che due oricicli qualisivogliano della superficie possono sempre essere sovrapposti l'uno sull'altro.

Per due punti della superficie pseudosferica passano sempre due oricicli, che sono determinati conducendo pel punto medio della loro congiungente

[8]LIOUVILLE nella nota IV alla *Application de l'Analyse à la Gèomètrie* di MONGE, Paris, 1850.

geodetica una geodetica perpendicolare, i cui due punti all'infinito sono i centri degli oricicli cercati. Gli archi di questi oricicli, compresi fra i punti dati, hanno una stessa grandezza, che dipende unicamente dalla distanza geodetica dei due punti. Chiamando ρ questa distanza e σ la lunghezza di quegli archi, si trova agevolmente col mezzo delle equazioni (15), (16) (dove ρ ha però un significato diverso)

$$\sigma = 2R \operatorname{senh} \frac{\rho}{2R},$$

formola che presenta una singolare analogia con quella notissima che dà la corda in funzione dell'arco sotteso nel cerchio di raggio R [9].

Da quanto precede ci sembra confermata in ogni parte l'annunciata interpetrazione della planimetria non-euclidea per mezzo delle superficie di curvatura costante negativa.

La natura stessa di questa interpetrazione lascia facilmente prevedere che non ne può esistere una analoga, egualmente reale, per la stereometria non-euclidea. Infatti per conseguire l'interpetrazione testé esposta si è dovuto sostituire al piano una superficie che è con esso irriducibile, cioè il cui elemento lineare non può in alcun modo essere ridotto alla forma

$$\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

che caratterizza essenzialmente il piano stesso. Se quindi ci mancasse la nozione delle superficie non applicabili sul piano, ci sarebbe impossibile attribuire un vero significato geometrico alla costruzione fin qui svolta. Ora l'analogia porta naturalmente a credere che, se può esistere una costruzione consimile per la stereometria non-euclidea, essa deve attingersi alla considerazione di uno spazio il cui elemento lineare *non* sia riducibile alla forma

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

che caratterizza essenzialmente lo spazio euclideo. E poiché finora la nozione di uno spazio diverso da questo sembra mancarci, od almeno sembra trascendere il dominio dell'ordinaria geometria, è ragionevole supporre che quand'anche le considerazioni analitiche alle quali si appoggiano le precedenti costruzioni sieno suscettive d'essere estese dal campo di due variabili a quello di tre,

[9] Veggasi Battaglini, l.c. pag.229, ed anche la nostra Nota *Intorno ad alcune proprietà delle superficie di rivoluzione,* Annali di Matematica pura ed applicata, t. VI (1864), pag. 271.

i risultati ottenuti in quest'ultimo caso non possano tuttavia essere costruiti coll'ordinaria geometria.

Questa congettura acquista un grado di probabilità molto vicino alla certezza quando s'imprende effettivamente ad estendere l'analisi precedente al caso di tre variabili. Infatti ponendo

$$\text{(18)}\quad \begin{cases} ds^2 = \dfrac{R^2}{a^2 - t^2 - u^2 - v^2}\big[(a^2 - u^2 - v^2)\,dt^2 + (a^2 - v^2 - t^2)\,du^2 \\ \qquad + (a^2 - t^2 - u^2)\,dv^2 + 2uv\,du\,dv + 2vt\,dv\,dt + 2tu\,dt\,du\big], \end{cases}$$

formola la cui composizione *a priori* con tre variabili t, u, v è suggerita dall'ispezione di quella della (1) colle due variabili u, v, si verifica agevolmente che le deduzioni analitiche cui dava luogo l'espressione (1) sussistono integralmente per la nuova, e che il valore di ds dato da essa è effettivamente quello dell'elemento lineare di uno spazio in cui la stereometria non-euclidea trova un'interpetrazione altrettanto completa, *analiticamente* parlando, quanto quella data per la planimetria.

Ma se alle variabili t, u, v se ne sostituiscono tre nuove ρ, ρ_1, ρ_2 ponendo

$$t = r\cos\rho_1, \quad u = r\,\text{sen}\,\rho_1\cos\rho_2, \quad u = r\,\text{sen}\,\rho_1\,\text{sen}\,\rho_2, \quad \frac{Ra\,dr}{a^2 - r^2} = d\rho,$$

si trova

$$ds^2 = d\rho^2 + \left(R\,\text{senh}\,\frac{\rho}{R}\right)^2 (d\rho_1^2 + \text{sen}^2\rho_1\,d\rho_2^2),$$

formola la quale mostra essere ρ, ρ_1, ρ_2 coordinate curvilinee ortogonali dello spazio considerato. Ora il sig. Lamé ha dimostrato[10] che assumendo come coordinate curvilinee dei punti dello spazio i parametri ρ, ρ_1, ρ_2 di tre famiglie di superficie ortogonali, nel qual caso il quadrato della distanza di due punti infinitamente vicini è rappresentato da un'espressione della forma

$$ds^2 = H^2\,d\rho^2 + H_1^2\,d\rho_1^2 + H_2^2\,d\rho_2^2,$$

le tre funzioni di H, H_1, H_2 di ρ, ρ_1, ρ_2 che figurano in quest'espressione sono necessariamente soggette a soddisfare due distinte terne di equazioni a derivate parziali, che hanno a tipo le due seguenti:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial\rho_1\partial\rho_2} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H}{\partial\rho_1}\frac{\partial H_1}{\partial\rho_2} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H}{\partial\rho_2}\frac{\partial H_2}{\partial\rho_2},$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial\rho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\rho_2}\right) + \frac{1}{H^2}\frac{\partial H_1}{\partial\rho}\frac{\partial H_2}{\partial\rho} = 0.$$

[10] *Leçons sur les coordonnées curvilignes,* pag. 76, 78 (Paris, 1859).

Nel nostro caso $H = 1$, $H_1 = R \operatorname{senh} \frac{\rho}{R}$, $H_2 = R \operatorname{senh} \frac{\rho}{R} \operatorname{sen} \rho_1$, e per questi valori le prime tre equazioni riescono identicamente soddisfatte, ma le seconde lo sono solamente nel caso di $R = \infty$. Dunque l'espressione (18) non può appartenere all'elemento lineare dell'ordinario spazio euclideo e le formole appoggiate ad essa non possono essere costruita cogli enti forniti dall'ordinaria geometria.

Per completare la dimostrazione dell'impossibilità di conseguire una costruzione della stereometria non-euclidea, senza uscire dal campo della geometria ordinaria, bisognerebbe poter escludere la possibilità di attingerla altrove che in una estensione del metodo seguito per la planimetria. Noi non pretendiamo di provare che ciò non si possa assolutamente fare: diciamo solo che la cosa ci sembra molto improbabile.

Abbiamo detto di passaggio che l'espressione (18) serve di base ad una completa interpetrazione analitica della stereometria non-euclidea. Questa interpetrazione viene da noi indicata altrove[11]. Qui facciamo solamente osservare che ponendo nella (18) $t =$ cost. si ottiene l'espressione dell'elemento lineare di una superficie reale di curvatura costante negativa; talché quella superficie sulla quale abbiamo veduto verificarsi i teoremi della planimetria non-euclidea, può considerarsi come esistente tanto nello spazio ordinario, quanto nello spazio non-euclideo.

NOTA 1.

La riduzione dell'elemento lineare di una superficie di curvatura costante negativa alla forma sotto la quale esso viene usato nelle presenti ricerche, si fonda sopra i risultati di una nostra Memoria col titolo di *Risoluzione del problema: riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette* [12].

Il principio che ha servito a risolvere questo problema è il seguente. Quando i punti di una superficie si fanno corrispondenre, secondo una legge qualunque, con quelli di un piano, si possono sempre prendere per le due variabili indipendenti u, v che devono individuare i punti della superficie le stesse coordinate rettangolari x, y dei punti corrispondenti del piano. Ciò ammesso, se

[11] In uno scritto che deve comparire sugli Annali si Matematica pura ed applicata [serie 2$^{\text{a}}$, t.II (1868-69), pag.232], dove i principii più generali della geometria non-euclidea sono considerati indipendentemente dalle loro possibili relazioni cogli ordinari enti geometrici.

Col presente lavoro abbiamo avuto principalmente in animo di attirare qualche interesse sopra tali ricerche, offrendo lo sviluppo di un caso nel quale la geometria astratta trova riscontro nella concreta; ma non vogliamo omettere di dichiarare che la validità del nuovo ordine di concetti non è punto subordinata alla possibilità o meno di cosiffatto riscontro.

[12] Annali di Matematica pura ed applicata, t.VII (1865), pag.185.

la rappresentazione dev'essere tale che alle geodetiche della superficie corrispondano le rette del piano, bisogna che l'equazione differenziale di 2° ordine delle linee geodetiche abbia per suo integrale completo un'equazione lineare fra u e v, e quindi bisogna che la detta equazione differenziale si riduca semplicemente a questa

$$du\, d^2v - dv\, d^2u = 0.$$

Ora dalla forma generale dell'anzidetta equazione differenziale si ricava che ciò succede solamente quando le funzioni E, F, G componenti dell'elemento lineare

$$ds = \sqrt{E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2}$$

soddisfano a quattro relazioni, le quali insegnano che all'elemento stesso si può sempre dare la forma

$$ds = R\frac{\sqrt{(a^2+v^2), du^2 - 2uv\, du\, dv + (a^2+u^2)\, dv^2}}{a^2+u^2+v^2},$$

dove R ed a sono costanti arbitrarie. Per riconoscere la natura delle superficie contenute in questa forma si è calcolata l'espressione della curvatura sferica (prodotto inverso dei due raggi di curvatura principale) e si è trovato per essa il valore $\frac{1}{R^2}$, donde si è concluso che le superficie in discorso hanno la loro rappresentazione piana colla condizione prescritta.

Nella citata Memoria si sono supposte reali le costanti R ed a, perché lo scopo in vista del quale quelle ricerche erano state instituite dava speciale rilievo a questa ipotesi. Ed è appunto per ciò che si è osservato che quell'elemento conviene in particolare ad una superficie sferica di raggio R, tangente al piano figurativo nell'origine delle coordinate e rappresentata sul piano stesso per mezzo della projezione centrale; nel qual caso le variabili u, v sono precisamente le coordinate rettangolari della projezione del punto a cui quelle variabili si riferiscono.

Ma siccome i valori delle costanti R ed a sono realmente arbitrari, così è lecito supporli anche immaginarî, se conviene. Ed infatti cambiando quelle costanti in $R\sqrt{-1}$, $a\sqrt{-1}$, l'elemento lineare risultante corrisponde ad una superficie di curvatura costante negativa $-\frac{1}{R^2}$, le cui linee geodetiche non cessano di essere, come nel caso precedente, rappresentate nel piano da linee rette, e quindi date da equazioni lineari rispetto ad u, v. Questo è il modo in cui si passa dalle formole della Memoria citata a quelle del presente scritto. La sola differenza essenziale fra i due casi è che in quelle le variabili u, v possono ricevere tutti i valori reali, mentre in queste esse sono contenute entro certi limiti, che vengono facilmente assegnati.

NOTA 2.

Scrivendo l'espressione dell'elemento lineare sotto la forma

$$ds^2 = R^2 \frac{w^2(du^2 + dv^2) + (u\,du + v\,dv)^2}{w^4}, \tag{1}$$

si vede subito che per passare dalle primitive geodetiche fondamentali a due altre passanti per la medesima origine ed ortogonali fra loro, servono le solite formole della trasformazione delle coordinate rettangole in un piano, quando l'origine è comune, cioè

$$u = u' \cos\mu - v' \operatorname{sen}\mu,$$
$$v = u' \operatorname{sen}\mu - v' \cos\mu,$$

u', v' essendo le nuove coordinate e μ l'angolo che la nuova fondamentale $v' = 0$ fa colla primitiva $v = 0$. Infatti da queste formole si trae

$$u^2 + v^2 = u'^2 + v'^2, \quad du^2 + dv^2 = du'^2 + dv'^2,$$

e quindi la (1) diventa

$$ds^2 = R^2 \frac{w'^2(du'^2 + dv'^2) + (u'\,du' + v'\,dv')^2)}{w'^4}, \tag{1'}$$

conservando la primitiva sua forma. [Di qui si vede che le geodetiche ortogonali a quelle che divergono dall'origine sono rappresentate dalle corde del cerchio limite perpendicolari ai diametri che rappresentano queste ultime. Reciprocamente, affinché due geodetiche intersecantisi ortogonalmente nel punto (u, v) siano rappresentate nel piano ausiliare da due rette ortogonali, bisogna che l'una o l'altra di quelle geodetiche passi per l'origine $(u = v = 0)$, come facilmente si rivela dalla formola data nel resto per la trasformazione degli angoli. Questa proprietà diventa evidente nella projezione centrale della sfera]. Anche la lunghezza di un arco geodetico uscente dall'origine conserva nel *secondo* sistema la forma che aveva nel *primo*, essendo data da

$$\rho = \frac{R}{2} \log \frac{a + \sqrt{u'^2 + v'^2}}{a - \sqrt{u'^2 + v'^2}}. \tag{2}$$

Vediamo ora l'effetto di un cambiamento d'origine.

Per tal uopo prendiamo un punto qualunque (u_0, v_0) e supponiamo che la fondamentale $v' = 0$ del secondo sistema passi per esso, cioè supponiamo $\cos\mu = \frac{u_0}{r_0}$, $\operatorname{sen}\mu = \frac{v_0}{r_0}$ e quindi

$$u = \frac{u_0 u' - v_0 v'}{r_0}, \quad v = \frac{v_0 u' + u_0 v'}{r_0}, \tag{3}$$

dove $r_0 = \sqrt{u_0^2 + v_0^2}$. Indi formiamo un *terzo* sistema, colle coordinate u'', v'', avente per fondamentali la geodetica $v' = 0$ e l'altra geodetica condotta normalmente a questa per il punto (u_0, v_0).

Conduciamo dal punto (u', v') qualunque una geodetica perpendicolare alla $v' = 0$ e chiamiamone q la lunghezza, p la distanza dalla primitiva origine (misurata sulla $v' = 0$). La (2) dà tosto

$$p = \frac{R}{2} \log \frac{a + u'}{a - u'}, \tag{4}$$

mentre dalla (1') di deduce agevolmente, ponendo $du' = 0$,

$$q = \frac{R}{2} \log \frac{\sqrt{a^2 - u'^2} + v'}{\sqrt{a^2 - u'^2} - v'}. \tag{5}$$

La distanza geodetica p_0 dalle due origini $(u = v = 0)$, (u_0, v_0) ha per valore

$$p_0 = \frac{R}{2} \log \frac{a + r_0}{a - r_0},$$

talché l'arco geodetico compreso sulla geodetica fondamentale $v'' = 0$ del terzo sistema (che è la stessa cosa della $v' = 0$), fra il punto (u_0, v_0) e la normale q, è data da

$$p - p_0 = \frac{R}{2} \log \frac{(a + u')(a - r_0)}{(a - u')(a + r_0)}. \tag{6}$$

Ma chiamando e_0 la costante analoga ad a nel terzo sistema, ed osservando che in questo sistema le proprietà analoghe alle p, q del secondo sono $p - p_0$ e q, è chiaro che in analogia colle (4), (5) si deve avere

$$p - p_0 = \frac{R}{2} \log \frac{a_0 + u''}{a_0 - u''}, \quad q = \frac{R}{2} \log \frac{\sqrt{a_0^2 - u''^2} + v''}{\sqrt{a_0^2 - u''^2} - v''}.$$

Eguagliando queste espressioni con quelle date dalle (6), (5) si ottengono due relazioni le quali forniscono

$$u'' = \frac{a a_0 (u' - r_0)}{a^2 - r_0 u'}, \quad v'' = \frac{a_0 w_0 v'}{a^2 - r_0 u'}, \qquad (w_0 = \sqrt{a^2 - r_0^2}). \tag{7}$$

La costante a_0 rimane propriamente indeterminata, perché non si possono avere che equazioni fra i rapporti $\frac{u'}{a}$, $\frac{v'}{a}$ ed i rapporti $\frac{u''}{a_0}$, $\frac{v''}{a_0}$. Sembra però conveniente determinare a_0 colla condizione che per $u'' = 0$, cioè $u' = r_0$, si abbia $v' = v''$, ed allora si trova $a_0 = w_0 = \sqrt{a^2 - u_0^2 - v_0^2}$. Ritenuto questo valore le formole precedenti dànno

$$u' = \frac{a(a_0 r_0 + au'')}{aa_0 + r_0 u''}, \quad v' = \frac{aa_0 v''}{aa_0 + r_0 u''},$$

e questi valori, sostituiti nella (1'), dànno

$$ds^2 = R^2 \frac{(a_0^2 - v''^2)\, du''^2 + 2u''v''\, du''\, dv'' + (a_0^2 - u''^2)\, dv''^2}{(a_0^2 - u''^2 - v''^2)^2}.$$

Dunque anche il trasporto dell'origine non altera la forma dell'elemento lineare, il quale non differisce dal primitivo che per la sostituzione della a_0 alla a, cambiamento che non è punto essenziale.

Per ottenere finalmente un *quarto* sistema affatto scevro da legami col primo, surroghiamo le due fondamentali $u'' = 0$, $v'' = 0$ con due nuove geodetiche ortogonali aventi la stessa origine (u_0, v_0), il che sappiamo farsi ponendo

$$u'' = u''' \cos\nu - v''' \operatorname{sen}\nu, \quad v'' = u''' \operatorname{sen}\nu + v''' \cos\nu,$$

e sappiamo pure che tale sostituzione non cambia punto la forma dell'elemento. Vediamo così che la forma ammessa primitivamente per l'elemento lineare non è punto peculiare ad una determinata coppia di geodetiche fondamentali: il punto $(u = v = 0)$ può all'incontro essere uno qualunque della superficie, e la geodetica fondamentale $v = 0$ può essere una qualunque tra quelle uscenti da questo punto.

Tenendo conto delle relazioni trovate fra le coordinate dei successivi sistemi, e ponendo per brevità:

$$\begin{aligned}
p &= \frac{au_0}{a_0 r_0} \cos\nu - \frac{v_0}{r_0} \operatorname{sen}\nu, & p_1 &= \frac{au_0}{a_0 r_0} \operatorname{sen}\nu + \frac{v_0}{r_0} \cos\nu, \\
q &= \frac{av_0}{a_0 r_0} \cos\nu + \frac{u_0}{r_0} \operatorname{sen}\nu, & q_1 &= \frac{av_0}{a_0 r_0} \operatorname{sen}\nu - \frac{u_0}{r_0} \cos\nu, \\
r &= \frac{r_0}{aa_0} \cos\nu, & r_1 &= \frac{r_0}{aa_0} \operatorname{sen}\nu
\end{aligned}$$

si trovano le seguenti relazioni finali fra le u, v e le u''', v'''

$$u = \frac{u_0 + pu''' - p_1 v'''}{1 + ru''' - r_1 v'''}, \quad u = \frac{v_0 + qu''' - q_1 v'''}{1 + ru''' - r_1 v'''}.$$

Considerando tanto le u, v quanto le u''', v''' come coordinate rettangole dei punti corrispondenti di due piani, queste formole esprimono una dipendenza omografica fra i piani stessi, la circostanza di cui si è parlato nella Memoria citata nella Nota 1.

Se si confronta la primitiva espressione dell'elemento lineare in funzione delle u, v con quella finale in funzione delle u''', v''', si trova che esse si possono far coincidere ponendo

$$\frac{u}{a} = \pm\frac{u'''}{a_0}, \quad \frac{v}{a} = \pm\frac{v'''}{a_0},$$

od anche

$$\frac{u}{a} = \pm\frac{v'''}{a_0}, \quad \frac{v}{a} = \pm\frac{u'''}{a_0},$$

la scelta del segno essendo arbitraria in ciascuna formola. Ciò dimostra che la superficie pseudosferica, considerata come flessibile ed inestendibile, si può sovrapporre a sé medesima in modo che uno qualunque dei suoi punti (u_0, v_0) passi ad occupare la posizione di un qualunque altro punto $(u = v = 0)$, e che una qualunque delle geodetiche uscenti dal primo punto (p. es. la $v''' = 0$) coincida in tutta la sua estensione con una qualunque di quelle uscenti dal secondo (p. es. colla $v = 0$). Anzi la duplicità dei segni fa vedere che la sovrapposizione di due angoli geodetici di egual grandezza formati intorno a quei due punti si può operare tanto direttamente quanto inversamente. Per es. l'angolo retto delle geodetiche $u''' = 0$, $v''' = 0$ può essere applicato su quello delle $u = 0$, $v = 0$, tanto facendo coincidere $u''' = 0$ con $u = 0$ e $v''' = 0$ con $v = 0$, quanto facendo coincidere $u''' = 0$ con $v = 0$ e $v''' = 0$ con $u = 0$. Dunque ogni pezzo di superficie può essere sovrapposto, tanto direttamente quanto inversamente, su qualunque parte della superficie stessa; epperò se in quel pezzo esistesse una figura (p. es. un triangolo geodetico) essa potrebbe ricevere sulla superficie tutti quegli spostamenti che una figura piana può ricevere nel suo piano, senza mai cessare d'essere eguale a se stessa. Naturalmente quest'eguaglianza non si deve riferire che alle lunghezze delle linee ed all'ampiezza degli angoli, giacché la curvatura *assoluta* delle linee non entra qui in considerazione[13].

La proprietà ora dimostrata era già nota, ma la dimostrazione precedente ci sembra possedere quel rigore che la natura del nostro soggetto richiede. Del resto il teorema di Gauss stabilisce che se la proprietà del discorso può competere a qualche superficie, questa superficie è necessariamente fra quelle la cui curvatura sferica è costante.

Non tralasciamo di notare un risultato utile che si deduce facilmente da alcune delle formole precedenti. Il cerchio geodetico col centro nel punto (u_0, v_0)

[13]L'eguaglianza *relativa* di cui si parla sarebbe eguaglianza *assoluta* per un essere i cui concetti geometrici non eccedessero il campo a due dimensioni della superficie considerata, come i nostri non eccedono quello a tre dimensioni dell'ordinario spazio.

e col raggio ρ è rappresentato, nel terzo sistema, dall'equazione

$$u''^2 + v''^2 = a^2 \operatorname{tgh}^2 \frac{\rho}{R},$$

come risulta dalla formola (6) del testo. Ma dalle (7) di questa Nota, per essere $a_0 = w_0 = \sqrt{a^2 - r_0^2}$ si trae

$$u''^2 + v''^2 = \left(\frac{a_0}{a^2 - r_0 u'} \right)^2 \left\{ a^2 \left[(u' - r_0)^2 + v'^2 \right] - (r_0 v')^2 \right\},$$

e dalle (3) si ha pure

$$u' = \frac{u u_0 + v v_0}{r_0}, \quad v' = \frac{u_0 v - u v_0}{r_0},$$

donde

$$u' - r_0 = \frac{u_0(u - u_0) + v_0(v - v_0)}{r_0}, \quad v' = \frac{u_0(v - v_0) - v_0(u - u_0)}{r_0},$$

dunque finalmente

$$\frac{a^2 \left[(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \right] - (u_0 v - u v_0)^2}{(a^2 - u u_0 - v v_0)^2} = \operatorname{tgh}^2 \frac{\rho}{R}.$$

Quest'equazione fornisce la distanza geodetica ρ di due punti qualunque (u, v), (u_0, v_0). Quando questi punti sono infinitamente vicini essa riconduce immediatamente all'espressione dell'elemento lineare da cui siamo partiti.

Sostituendo il cosh alla tgh la precedente equazione assume la forma più elegante

$$\frac{a^2 - u u_0 - v v_0}{\sqrt{(a^2 - u^2 - v^2)(a^2 - u_0^2 - v_0^2)}} = \cosh^2 \frac{\rho}{R}.$$