Il teorema di Borel–Weil–Bott

Paolo Caressa

1998

1 Notazioni

Ricordiamo le usuali notazioni della teoria dei gruppi semisemplici (cfr. [6]). Sia G un gruppo di Lie complesso semisemplice e $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie: possiamo allora decomporla come

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

ove $\mathfrak{h}$ è una sottoalgebra di Cartan (abeliana massimale che agisce in modo diagonale su $\mathfrak{g}$) ed Δ il sistema di radici associato. Scegliendo un ordinamento in Δ, e quindi decomponendolo come $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$, possiamo definire la sottoalgebra di Borel (risolubile massimale che contiene $\mathfrak{h}$) come

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

Un gruppo $B \subset G$ che integri la sottoalgebra $\mathfrak{b}$ è un sottogruppo chiuso ed il quoziente G/B è compatto: tali gruppi si dicono *di Borel*.

Nel caso dei gruppi classici otteniamo in questo modo le varietà delle bandiere: ad esempio se $G = SL_n(\mathbb{C})$ allora B è il sottogruppo delle matrici (unimodulari) triangolari superiori, cioè delle matrici che rappresentano gli operatori che preservano una bandiera (completa) di sottospazi e quindi G/B è esattamente la varietà delle bandiere

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{C}^n$$

ove $\dim V_i = i$.

Più in generale si considerano i *sottogruppi parabolici* (che corrispondono alle sottoalgebre intermedie fra $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{b}$) $P \subset G$ che possiamo pensare come i sottogruppi per i quali il quoziente G/P è una varietà complessa (proiettiva) compatta e, per tramite del teorema del punto fisso di Borel, possiamo dedurne che se $B \subset G$ è un sottogruppo di Borel e $P \subset G$ un sottogruppo parabolico deve esistere $g \in G$ tale che

$$B \subset gPg^{-1}$$

Possiamo cioè, dato un parabolico P, sempre assumere che in esso sia contenuto un Borel $B \subset P$ (possiamo anzi vedere i sottogruppi di Borel come parabolici minimali): è ben noto che i sottogruppi parabolici sono in corrispondenza biunivoca con i sottoinsiemi dell'insieme delle radici semplici, cioè con i sottoinsiemi dell'insieme dei nodi del diagramma di Dynkin dell'algebra.

Ad esempio, se consideriamo in $G = SL_n(\mathbb{C})$ il sottogruppo parabolico (massimale) P delle matrici

$$\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & * \\ * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

corrisponde a scegliere nel diagramma di Dynkin tutti i nodi meno uno:

$$\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \cdots\cdots \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$$

Il corrispondente quoziente è allora lo spazio proiettivo $G/P = \mathbb{P}^{n-1}$ (in generale si tratta di una grassmanniana).

Possiamo considerare una incarnazione dello spazio omogeneo G/P legata alla teoria delle rappresentazioni, come segue: consideriamo G semplice, e V_λ una rappresentazione irriducibile di peso dominante λ di G; ricordiamo che un vettore $v \in V$ (non nullo) in una rappresentazione di $\mathfrak{g}$ è un *vettore di peso dominante* se è un autovettore per l'azione dell'algebra di Cartan $\mathfrak{h}$ e se per ogni radice positiva $\alpha \in \Delta^+$ si ha che $\mathfrak{g}_\alpha \cdot v = 0$. In altri termini l'azione dell'algebra di Borel è determinata banalmente da quella della Cartan. È ben noto che una rappresentazione irriducibile ammette (a meno di fattori scalari) un unico vettore di peso dominante e che questo è un vettore ciclico per la rappresentazione. L'autovalore λ rispetto all'azione di $\mathfrak{h}$: $h \cdot v = \lambda(h)v$ si dice *peso dominante* della rappresentazione (cfr. [6]).

Ora, l'azione lineare di G su V_λ induce una azione di G sul proiettificato $\mathbb{P}V_\lambda$. I punti di $\mathbb{P}V_\lambda$ sono le rette (per l'origine) in V_λ, e se consideriamo la retta r_λ che sia l'autospazio di autovalore λ, la G-orbita $\mathcal{O}_\lambda$ del punto $[r_\lambda] \in \mathbb{P}V_\lambda$ è l'unica orbita chiusa dell'azione di G su $\mathbb{P}V_\lambda$: infatti $[r_\lambda]$ è un punto fisso per l'azione del Borel $B \subset P$ e quindi lo stabilizzatore di $[r_\lambda]$ è un parabolico P_λ, dunque $\mathcal{O}_\lambda = G/P_\lambda$ è compatta; l'unicità segue dal teorema del punto fisso di Borel (in questo caso il punto fisso è $[r_\lambda]$ ovviamente).

Dunque possiamo raffinare la corrispondenza precedente fra sottogruppi parabolici e sottoinsiemi delle radici semplici nel modo seguente: un parabolico corrisponde all'insieme delle radici semplici ortogonali al peso λ, vale a dire alle facce della camera di Weyl intersezione degli iperpiani ortogonali a tutte queste radici semplici. Altrimenti detto, possiamo recuperare P da V_λ come il parabolico corrispondente alla faccia aperta della camera di Weyl contenente λ.

G/P è una varietà proiettiva (chiuso in uno spazio proiettivo) ed esiste un naturale fibrato lineare $L \to G/P$ che possiamo considerare, semplicemente restringendo il fibrato tautologico su $\mathbb{P}V_\lambda$: a questo punto possiamo recuperare V_λ da L e G/P come spazio delle sue sezioni (olomorfe); in realtà questo processo è più ricco perché possiamo spostare il fibrato da G/P a G/B e ritrovare lo spazio della rappresentazione nella coomologia di G/B a valori in L. Questa è l'idea della teoria di Borel–Weil.

Notiamo, prima di addentrarci nei dettagli che, come al solito (Weyl *docet*), possiamo trasferire la nostra discussione per i gruppi semisemplici complessi ai gruppi compatti: in questo caso, dato G compatto, basterà applicare quanto più sopra detto al suo complessificato $G_\mathbb{C}$: la teoria geometrica soggiacente è la stessa perché gli spazi omogenei di G (visti come varietà algebriche) corrispondono in modo biunivoco agli spazi omogenei di $G_\mathbb{C}$ (visti come varietà kähleriane), precisamente $G/T = G_\mathbb{C}/B$ se $T \subset B$ è un toro massimale.

2 Motivazione

Ciò che si nasconde dietro al teorema di Borel–Weil, nella versione datagli da Bott, è una generalizzazione del teorema di Frobenius sulle rappresentazioni indotte: supponiamo che G sia un gruppo finito; allora se $H \subset G$ è un sottogruppo, certamente un G-modulo V induce, per restrizione, un H-modulo $V|_H$, nel modo ovvio. Frobenius ha cercato di invertire questa operazione di restrizione, definendo un funtore

$$Ind_G^H : \{H\text{-moduli}\} \to \{G\text{-moduli}\}$$

nel modo seguente: se V è un H-modulo, $Ind_G^H(V)$ è lo spazio vettoriale

$$Ind_G^H(V) = \{f : G \to V \,|\, \forall g \in G \ \forall h \in H \quad f(gh) = h^{-1}f(g)\}$$

Questo è chiaramente un G-modulo rispetto all'azione

$$(g \cdot f)(v) = f(g^{-1}v)$$

e Frobenius ha dimostrato la seguente notevole proprietà del modulo $Ind_G^H(V)$

Teorema (FROBENIUS). *$Hom_G(W, Ind_G^H(V)) = Hom_H(W|_H, V)$ per ogni G-modulo W.*

Se i moduli sono spazi vettoriali sui complessi, il teorema di Maške (l'algebra di gruppo $\mathbb{C}[G]$ è semisemplice) ed il lemma di Schur ci dicono che

$$Ind_G^H(V) = \sum_{W \in \widehat{G}} W \bigotimes Hom_H(W|_H, V)$$

ove $\widehat{G}$ è l'insieme della rappresentazioni irriducibili di G.

Bott generalizza questa costruzione al caso dei gruppi di Lie complessi, sotto le seguenti ipotesi:

Ipotesi di Bott. *$H \to G \to G/H$ è un fibrato principale ove $H \subset G$ è un sottogruppo (di Lie) chiuso, il quoziente G/H è compatto e $\pi_0(G) = \pi_1(G/H) = 0$.*

Con questa ipotesi Bott dimostra che per ogni H-modulo *olomorfo* V e per ogni G-modulo *olomorfo* W considerando il fibrato vettoriale $V \to G/H$ associato a $G \times V \to G/H$ si ha

$$Hom_B(W, H^\bullet(G/H, E)) = H^\bullet(\mathfrak{h}, \mathfrak{t}, Hom(W, V))$$

ove $\mathfrak{h} = Lie(H)$, $G/H = B/T$, $\mathfrak{t} = Lie(T)$ (identificando la base del fibrato principale al quoziente di un sottogruppo di Borel per il toro massimale in esso contenuto) e dove al secondo membro dell'equazione figura la coomologia relativa dell'algebra di Lie $\mathfrak{h}$ rispetto alla sotto-algebra di Lie $\mathfrak{t}$ a coefficienti nella rappresentazione $Hom(W, V)$.

Dato che il gruppo G è riduttivo (essendo semisemplice) possiamo decomporre la coomologia dello spazio omogeneo G/H a coefficienti nelle sezioni del fibrato associato come

$$H^\bullet(G/H, V) = \sum_{W \in \widehat{G}} W \bigotimes H^\bullet(\mathfrak{h}, \mathfrak{t}, Hom(W, V))$$

In grado zero otteniamo

$$H^0(G/H, V) = \sum_{W \in \widehat{G}} W \bigotimes Hom_{\mathfrak{h}}(W, V))$$

Questo è il teorema di Borel–Weil.

Il teorema di Borel–Weil non è mai stato pubblicato dai suoi “genitori: pare che Weil ne abbia dato la versione per E_6 (!) e Borel quella generale; la prima esposizione di questo risultato la si deve a Serre (cfr. [7]). Una discussione generale della geometria algebrica che ruota attorno a questo risultato si trova nel seminario diretto da Chevalley (cfr. [3]).

3 Il teorema di Borel–Weil

Consideriamo un gruppo semisemplice complesso connesso G, un suo il toro massimale T, un sottogruppo Borel B contenente T, ed il gruppo dei caratteri $X(T)$. Se $r : B \to GL(V)$ è una rappresentazione olomorfa (di dimensione finita) del Borel, possiamo associarle un fibrato vettoriale $\tilde{V}$ olomorfo sulla varietà complessa compatta G/B come segue: si considera il prodotto $G \times V$ e lo si passa al quoziente per mezzo della relazione di equivalenza

$$(g \cdot b, v) \sim (g, r(b)v)$$

($g \in G$, $b \in B$ e $v \in V$). Otteniamo in questo modo un insieme $\tilde{V} = G \times_B V$ che è infatti una varietà complessa. Questa varietà si presenta in modo naturale come un fibrato su G/B: consideriamo il diagramma seguente:

$$\begin{tikzcd} G \times V \arrow[r, "p_V"] \arrow[d, "p_G"'] & G \arrow[d, "p_B"] \\ G \times_B V \arrow[r, "p"'] & G/B \end{tikzcd}$$

La mappa p si definisce come quella che fa commutare il diagramma: preso $[(g, v)] \in G \times_B V$ si considera la classe $p_G^{-1}[(g, v)]$ e la sua immagine per tramite di $p_B \circ p_V$ in G/B: questa definizione non dipende che dalla classe di (g, v) ed è semplicemente la funzione

$$p[(g, v)] = gB$$

Ovviamente è una funzione olomorfa, e definisce una struttura di fibrato vettoriale su $G \times_B V$.

Consideriamo ora $\lambda \in X(T)$, un carattere del toro massimale: questo determina in modo unico una rappresentazione olomorfa di dimensione 1 $\lambda : B \to \mathbb{C}^*$ e quindi induce un fibrato lineare olomorfo

$$\mathcal{L}_\lambda = G \times_B \mathbb{C}_\lambda \to G/B$$

Chiaramente possiamo fare agire G su $\mathcal{L}_\lambda$ come

$$g \cdot [(h, z)] = [(gh, z)]$$

Si tratta di una azione ben definita, che induce ovviamente una azione sullo spazio delle sezioni olomorfe $\Gamma(\mathcal{L}_\lambda)$ del fibrato:

$$g \cdot \sigma(hB) = \sigma(ghB)$$

La bellezza di questa costruzione sta nel fatto che esaurisce le rappresentazioni irriducibili del gruppo:

Teorema di Borel–Weil. *Se $\mathcal{L}_\lambda \to G/B$ è il fibrato associato al carattere $\lambda \in X(T)$ e $\Gamma(\mathcal{L}_\lambda)$ è il suo spazio delle sezioni globali olomorfe allora le rappresentazioni irriducibili di peso dominante λ sono esattamente gli spazi delle sezioni globali olomorfe dei fibrati lineari $\mathcal{L}_{-\lambda}$ su G/B.*

DIMOSTRAZIONE: Lo spazio delle sezioni $\Gamma(\mathcal{L}_{-\lambda})$ è una rappresentazione del gruppo, come abbiamo già osservato, perché il gruppo G agisce sul fibrato lineare $\mathcal{L}_{-\lambda}$: si noti che è una rappresentazione di dimensione finita perché lo spazio delle sezioni olomorfe globali di un fibrato lineare può, ad esempio, essere visto come il gruppo di coomologia in grado zero della varietà compatta G/B a coefficienti nel fibrato lineare medesimo, che è di dimensione finita (se si vuole le sezioni in questione sono lo spazio $L(D)$ del divisore D corrispondente al fibrato lineare $\mathcal{L}_{-\lambda}$). Poiché il nostro gruppo è riduttivo questa rappresentazione si spezza in somma diretta di rappresentazioni irriducibili:

$$\Gamma(\mathcal{L}_{-\lambda}) = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k \tag{$*$}$$

Ciascuna componente irriducibile V_i contiene un elemento di peso *minimale* unico a meno di scalari[1] (si faccia attenzione al fatto che il peso λ è dominante ma il fibrato lineare è quello associato al peso "antidominante $-\lambda$), e questo elemento è, se si vuole per definizione, invariante rispetto al sottogruppo U^- la cui algebra di Lie (nilpotente) è quella generata dai $\mathfrak{g}_\alpha$ per $\alpha < 0$; in effetti agendo con un elemento del gruppo U^- otteniamo un elemento di peso minore di quello dato, sicché se l'elemento di partenza ha peso più basso di tutti certo resta fissato da questa azione.

Dunque, secondo la decomposizione (*), esistono k elementi di peso minimale: chiaramente se mostriamo che $k = 1$ la rappresentazione $\Gamma(\mathcal{L}_{-\lambda})$ è irriducibile e quindi una implicazione del teorema è dimostrata.

Per assurdo supponiamo dunque $k > 1$, il che vuol dire che esistono almeno due elementi di $\Gamma(\mathcal{L}_{-\lambda})$ di peso minimale e linearmente indipendenti:

[1] I risultati per i pesi minimali sono analoghi ai risultati per i pesi dominanti: basta scambiare il ruolo di radici positive e negative.

supponiamo ad esempio che $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$ siano tali elementi. Abbiamo già notato come debba essere $U^- v_1 = v_1$ e $U^- v_2 = v_2$; ora osserviamo che U^- agisce sulla base G/B del fibrato, e che questa azione possiede un'orbita aperta e densa: un modo per vederlo è rammentare che G/B può essere identificato all'insieme dei sottogruppi di Borel di G (cfr. [6, p. 145]) e che i punti fissi dell'azione di un sottogruppo $H \subset G$ su G/B corrispondono ai Borel contenenti H; ma nel nostro caso $H = U^-$ non ha punti fissi ($U^- \cap B = \{e\}$), e, di più, se consideriamo l'orbita $U^- B$ del punto $B \in G/B$, troviamo che quest'orbita è un aperto di Zariski: infatti (cfr. [6, è.174]) il prodotto $U^- \times B$ è isomorfo ad un aperto in G che è poi è la gran cella della decomposizione di Bruhat.

Ora torniamo ai nostri vettori di peso minimale v_1 e v_2: si tratta pur sempre di sezioni olomorfe $G/B \to \mathcal{L}_{-\lambda}$, e possiamo quindi considerarne il quoziente v_1/v_2 che è una funzione meromorfa su G/B (stiamo sostanzialmente considerando il fibrato come un divisore). Ma allora questa funzione deve essere costante sull'orbita aperta, perché le sezioni sono U^--invarianti, e quindi, se gB sta nell'orbita di B e $u \in U^-$ allora

$$\frac{v_1}{v_2}(gB) = \frac{v_1(gB)}{v_2(gB)} = \frac{uv_1(gB)}{uv_2(gB)} = \frac{v_1(ugB)}{v_2(ugB)} = \frac{v_1}{v_2}(ugB)$$

Cioè la funzione v_1/v_2 è costante su un aperto denso (l'orbita di B), e quindi, per densità, è costante su tutto G/B: ne inferiamo che v_1 e v_2 sono l'uno multiplo dell'altro come sezioni globali del fibrato. Ma due pesi minimali che siano l'uno multiplo dell'altro sono relativi alla stessa rappresentazione irriducibile, il che dimostra che nella decomposizione (*) si ha $k = 1$ e quindi la rappresentazione $\Gamma(\mathcal{L}_{-\lambda})$ è irriducibile.

Mostriamo ora il viceversa: una rappresentazione irriducibile del gruppo si presenta sempre come spazio delle sezioni di un fibrato lineare associato ad un peso dominante.

Sia quindi V una rappresentazione irriducibile di G e consideriamo lo spazio duale V^* ed il suo proiettificato $\mathbb{P}V^*$: vogliamo per prima cosa mostrare che esiste una retta per l'origine $r \subset V^*$ invariante per l'azione del gruppo di Borel. Per farlo basta considerare un vettore di peso dominante nella rappresentazione duale V^*: in effetti, se φ è un tale vettore, il gruppo di Borel (che aumenta il peso di un vettore) non può che fissare φ, e quindi il sottospazio generato da φ stesso è quello cercato; questo sottospazio definisce un elemento $[\varphi] \in \mathbb{P}V^*$.

Ora possiamo definire una mappa $f : G/B \to \mathbb{P}V^*$ come

$$f(gB) = [g\varphi]$$

Si tratta di una mappa ben definita dato che se $gB = g'B$ allora

$$f(gB) = [g\varphi] = [gg^{-1}g'\varphi] = [g'\varphi]$$

dato che la retta generata da φ è invariante per l'azione del Borel. Questa mappa è, per definizione, olomorfa: mostriamo come da essa possiamo costruire un fibrato le cui sezioni siano esattamente lo spazio della rappresentazione V.

Il fibrato si definisce nel modo ovvio: $\mathcal{L}_f^* \to G/B$ per definizione ha come fibra la retta $f(gB)$ sul punto gB; questo fibrato è quindi un sottospazio del prodotto $G/B \times V^*$ e, considerando la proiezione $p : G/B \times V^* \to V^*$ e restringendola a $\mathcal{L}_f^*$ otteniamo una mappa lineare in ciascuna fibra (per definizione!).

Ora, se $v \in V^{**} = V$ allora possiamo definire

$$v \circ p : \mathcal{L}_f^* \to \mathbb{C}$$

Si tratta di una mappa olomorfa perché lo sono v e p.

Inoltre $v \circ p$ è una sezione del fibrato lineare duale a $\mathcal{L}_f^*$, che denotiamo $\mathcal{L}_f$: infatti possiamo interpretare un elemento $v \circ p$ come una sezione $G/B \to \mathcal{L}_f \subset G/B \times \mathbb{C}$ definendo

$$(v \circ p)(gB) = (gB, \varphi(gv))$$

In altri termini abbiamo una mappa

$$p^* : V \to \Gamma(\mathcal{L}_f)$$

che a v associa $v \circ p$ e che ora mostreremo essere un isomorfismo. Che sia lineare è ovvio:

$$p^*(v + w) = (v + w) \circ p = v \circ p + w \circ p$$

Che sia iniettiva segue dall'irriducibilità di V come rappresentazione: infatti il nucleo è certamente G-invariante; se $p_*(v) = 0$ allora (vista $v \circ p$ come una sezione di $\mathcal{L}_f$) $\varphi(gv) = 0$ per ogni $gB \in G/B$, e quindi

$$\forall gB, hB \in G/B \quad \varphi(hgv) = h\varphi(gv) = 0$$

(le sezioni sono una rappresentazione come $g\sigma(hB) = \sigma(ghB)$), cioè $\ker p_*$ è una sottorappresentazione quindi coincide con V (il che è escluso perché $p_* \neq 0$) oppure è zero. La suriettività segue dall'essere φ dominante e quindi ciclico per la rappresentazione V^*: dato che ogni elemento di V^* è ottenuto a partire da φ, ogni elemento di V si ottiene a partire da un elemento v_φ corrispondente tramite la dualità degli spazi V e V^*, e quindi viene da un elemento duale a qualche $(gB, g\varphi)$ in L_f^*.

QED

4 Il teorema di Bott

La descrizione geometrica delle rappresentazioni fornita dal teorema di Borel–Weil è estremamente chiara, tuttavia un dubbio è lecito: chi (o cosa) ci assicura che gli spazi delle sezioni da noi così amorevolmente costruiti non si rivelino nulli? In soccorso ci viene il seguente teorema di Bott, che garantisce la coerenza della teoria fin qui svolta, e quindi dell'universo così come noi lo conosciamo[2].

Teorema di Bott. *Se $\mathcal{L}_\lambda \to G/B$ è il fibrato associato al carattere $\lambda \in X(T)$ e $\Gamma(\mathcal{L}_\lambda)$ è il suo spazio delle sezioni globali olomorfe allora $\Gamma(\mathcal{L}_{-\lambda}) \neq 0$ se e solo se λ è dominante*

Dimostrazione: Consideriamo l'insieme $\Gamma \subset \Delta$ delle radici di G relative al toro massimale T, e consideriamo le radici che appaiono nella decomposizione di B come le radici *negative*: è quasi superfluo ricordare che il gruppo di Weyl $W = N(T)/T$ è generato dalle riflessioni s_α ove α è una *radice positiva semplice*.

Ora possiamo, data una radice positiva semplice, considerare il parabolico P_α contenente B e che possieda α come unica radice positiva; al solito denotiamo con $\alpha^\vee \in \mathfrak{h}$ la coradice

$$\alpha^\vee = \frac{2}{\kappa(\alpha,\alpha)}\alpha$$

(κ è qui la forma di Killing). Ricordiamo che per ogni carattere $\chi \in X(T)$ abbiamo l'identità

$$s(\chi) = \chi - \langle \alpha^\vee, \chi\rangle\alpha$$

ove s è la riflessione relativa alla radice α.

Lemma 4.1 *Siano $r : B \to GL(V)$ è una rappresentazione del Borel e $\chi \in X(T)$ un carattere di B; se è possibile estendere r ad una rappresentazione di P_α in V e se $\langle\alpha^\vee, \chi\rangle = -1$ allora*

$$H^\bullet(G/B, \tilde{V} \bigotimes \mathcal{L}_\mu) = 0$$

ove $\tilde{V}$ è il fibrato vettoriale olomorfo indotto dalla rappresentazione V.

[2] I Fisici affermano che la combinatoria dei mondi possibili, quella che si chiama "Teoria delle Particelle Elementari, è la teoria delle rappresentazioni e dei caratteri dei gruppi di Lie semplici.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo la proiezione

$$G/B \to G/P_\alpha$$

Le fibre di questa proiezione sono dei $\mathbb{P}^1$: in effetti la fibrazione $G \to G/P_\alpha$ è localmente banale e $P_\alpha/B \cong C_\alpha/C_\alpha \cap B \cong \mathcal{P}^1$ ove C_α è il centralizzante di $\ker\alpha$ (cfr. [2]).

Se restringiamo a ciascuna di queste fibre il fibrato $\tilde{V} \bigotimes \mathcal{L}_\chi$ otteniamo il prodotto tensoriale di un fibrato banale (la restrizione di $\tilde{V}$ alla fibra) per un fibrato lineare di grado $\langle\alpha^\vee, \chi\rangle = -1$, quindi la sua coomologia è zero.

QED

Consideriamo ora una radice semplice α ed un carattere $\lambda \in X(T)$ tali che

$$\langle\alpha^\vee, \lambda\rangle \geq 0$$

I caratteri $\lambda, \lambda - \alpha, ..., s_\alpha(\lambda)$ sono autovalori relativi agli autospazi di dimensione uno $L_\lambda, L_{\lambda-\alpha}, ..., L_{s_\alpha(\lambda)}$ la cui somma diretta è una rappresentazione $V_{\lambda,\alpha}$ del toro T, quindi del Borel B; inoltre il B-modulo L_λ è un quoziente di $V_{\lambda,\alpha}$, cioè esiste la successione esatta di B-moduli (per un opportuno modulo K)

$$(S1) \qquad 0 \to K \to V_{\lambda,\alpha} \to L_\lambda \to 0$$

Ad esempio, se $\langle\alpha^\vee, \lambda\rangle = 0$ allora $K = 0$ e quindi $V_{\lambda,\alpha} = L_\lambda$, mentre se $\langle\alpha^\vee, \lambda\rangle = 1$ si ha $K = L_{s_\alpha(\lambda)}$. In modo analogo, se $\langle\alpha^\vee, \lambda\rangle \geq 2$ allora la successione

$$(S2) \qquad 0 \to L_{s_\alpha(\lambda)} \to K \to V_{\lambda-\alpha,\alpha} \to 0$$

è esatta.

A questo punto fissiamo $\rho \in X(T)$ tale che *per ogni radice semplice* α si abbia

$$\langle\alpha^\vee, \rho\rangle = 1$$

(ad esempio potremmo prendere la semi-somma di tutte le radici positive). Prendiamo quindi α semplice e $\lambda \in X(T)$ tale che

$$\langle\alpha^\vee, \lambda + \rho\rangle \geq 0$$

Le successioni esatte (S1) e (S2) di B-moduli inducono delle successioni esatte per i corrispondenti fibrati vettoriali associati

$$0 \to \mathcal{K} \to \tilde{V_{\lambda,\alpha}} \bigotimes \mathcal{L}_{-\rho} \to \mathcal{L}_\lambda \to 0$$

e

$$0 \to \mathcal{L}_{s_\alpha(\lambda+\rho)-\rho} \to \mathcal{K} \to \tilde{V}_{\lambda+\rho-\alpha,\alpha} \bigotimes \mathcal{L}_{-\rho} \to 0$$

Ora consideriamo le successioni esatte in coomologia per questi moduli, tenendo conto del lemma precedente, il che ci fornisce gli isomorfismi:

$$H^i(G/B, \mathcal{L}_\lambda) \xrightarrow{\cong} H^{i+1}(G/B, \mathcal{K})$$

$$H^{i+1}(G/B, \mathcal{L}_{s_\alpha(\lambda+\rho)-\rho}) \xrightarrow{\cong} H^{i+1}(G/B, \mathcal{K})$$

dai quali otteniamo gli isomorfismi di spazi vettoriali

$$(\dagger) \qquad H^i(G/B, \mathcal{L}_\lambda) \xrightarrow{\cong} H^{i+1}(G/B, \mathcal{L}_{s_\alpha(\lambda+\rho)-\rho})$$

per ogni $i \in \mathbb{N}$.

Ora usiamo questi isomorfismi (†) per concludere la dimostrazione: lo spazio delle sezioni globali del fibrato $\mathcal{L}_\lambda$ è infatti precisamente lo spazio $H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda)$ e quindi

$$\Gamma(\mathcal{L}_{-\lambda}) \cong H^1(G/B, \mathcal{L}_{s_\alpha(\rho-\lambda)-\rho})$$

Ora se $\mathcal{W}$ è il gruppo di Weyl di G e $\ell(w)$ la lunghezza di un elemento $w \in W$ abbiamo l'isomorfismo di G-moduli

$$(\ddagger) \qquad H^n(G/B, \mathcal{L}_\lambda) \cong H^{n+\ell(w)}(G/B, \mathcal{L}_{w(\lambda+\rho)-\rho})$$

Infatti, se $w = s_i$ allora

$$w(\lambda+\rho) - \rho = \lambda + \rho - \langle \alpha_i^\vee, \lambda+\rho \rangle \alpha_i - \rho = \lambda - (\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle + 1)\alpha_i$$

e quindi dalla (†) segue immediatamente la (‡); nel caso generale si ragiona ricorsivamente sulla lunghezza $\ell(w)$ decomponendo w come $w = s_\alpha w'$ dunque con $\ell(w') = \ell(w) - 1$; se poniamo $\lambda' = w'(\lambda+\rho) - \rho$ dobbiamo, per applicare l'isomorfismo †, avere che

$$\langle \alpha_i^\vee, \lambda' \rangle \geq -1$$

Ma

$$\langle \alpha_i^\vee, \lambda' \rangle = \langle \alpha_i^\vee, w'(\lambda+\rho) - \rho \rangle = \langle \alpha_i^\vee, w'(\lambda+\rho) \rangle - 1 = \langle w'^{-1}(\alpha_i)^\vee, \lambda+\rho \rangle - 1$$

In quest'ultima espressione abbiamo $\langle w'^{-1}(\alpha_i)^\vee, \lambda+\rho \rangle \geq 0$ dato che $w'^{-1}(\alpha_i)$ è ancora una radice positiva, quindi possiamo ancora applicare la (†) per ottenere la (‡) nel caso generale.

Ora dalla (‡) segue direttamente il teorema: per prima cosa notiamo che, non appena λ è tale che $\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle \geq 0$ per ogni radice semplice α, abbiamo che

$$H^k(G/B, \mathcal{L}_\lambda) = 0$$

per ogni $k > 0$: basta in effetti applicare la (‡) ad un elemento w di lunghezza massima $\ell(w) = \dim G/B$ e rammentare che la coomologia di una compatta svanisce in grado maggiore alla dimensione della varietà.

Ora possiamo chiederci quando (e solo quando) anche lo spazio delle sezioni è nullo. Notiamo che se $\alpha = w(\beta)$ con β semplice è tale che $\langle\alpha^\vee, \lambda + \rho\rangle = 0$ allora, per (‡)

$$H^k(G/B, \mathcal{L}_\lambda) = 0$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. Se il peso λ è antidominante questo è impossibile.

Se invece non possiamo trovare un tale α di nuovo la (‡) ci dice che solo per un k il gruppo $H^k(G/B, \mathcal{L}_\lambda)$ non è nullo: precisamente per $k = \ell(w)$ ove

$$\lambda = w(\mu + \rho) - \rho$$

e $\langle\alpha^\vee, \mu\rangle \geq 0$ per ogni radice semplice α. La (‡) implica in questo caso che il G-modulo $H^{\ell(w)}(G/B, \mathcal{L}_\lambda)$ è isomorfo allo spazio delle sezioni $\Gamma(\mathcal{L}_\mu)$.

QED

Bibliografia

[1] Bott R. *Homogeneous Vector Bundles*, Annals of Math. **66** (1975), 203–248.

[2] Borel A., Tits J. *Groupes réductifs*, I.H.E.S. **27**, PUF, 1965.

[3] Chevalley C. *Classification des groupes de Lie algébriques*, Séminaire 1956–58, Exp. 15–16.

[4] Demazure M. *Une démonstration algébrique d'un théorème de Bott*, Inventiones Math. **5** (1968), 349–356.

[5] Demazure M. *A Very Simple Proof of Bott's Theorem*, Inventiones Math. **33** (1976), 271–272.

[6] Humphreys J.E. *Linear Algebraic Groups*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York.

[7] Serre J.-P. *Séminaire Bourbaki* 1954, Exp. 100.