Capitolo 15

GRUPPI CLASSICI

In questo capitolo studiamo una classe notevolissima di gruppi topologici: i gruppi classici di matrici, che hanno origine in Algebra Lineare, ma sono fondamentali nella Fisica moderna (sia relativistica che quantistica). Anche se i concetti introdotti saranno elementari (potrebbero svilupparsi con i soli strumenti forniti dall'Algebra Lineare e dalla Topologia elementare) useremo la teoria generale dei gruppi topologici del capitolo precedente, in particolare quando discuteremo i gruppi semplicemente connessi e i gruppi *spin*. Nel paragrafo finale introdurremo il concetto di varietà differenziabile, motivato dagli esempi dati dai gruppi classici.

15.1 Gruppi di matrici.

Gli esempi più importanti di gruppi topologici localmente compatti probabilmente si trovano fra i gruppi di matrici: l'insieme ($n > 0$)

$$GL_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$$

è un gruppo rispetto al prodotto di matrici, ed è topologico visto che è un aperto in $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. Ovviamente il prodotto di matrici è continuo[1]. Più intrinsecamente, se V è uno spazio vettoriale topologico, il gruppo $\operatorname{Aut} V$ degli endomorfismi invertibili di V è un gruppo topologico, sottospazio di $\operatorname{End} V$. Il gruppo $GL(V)$ si dice *gruppo lineare generale* dello spazio vettoriale V. Ovviamente la definizione può darsi nel caso complesso. Si noti che $GL_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (che è uno spazio topologico non connesso) mentre $GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (che è uno spazio topologico connesso). Notiamo che, ancora più in generale, se $\mathcal{A}$ è un'algebra associativa di dimensione finita, l'insieme $\mathcal{A}^{-1}$ dei suoi elementi invertibili è un gruppo topologico che generalizza $GL_n(\mathbb{R})$.

[1] Le entrate della matrice prodotto AB sono polinomi nelle entrate di A e B: quindi il prodotto è addirittura una funzione analitica!

Si noti che $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ come spazi vettoriali reali: tuttavia

$$GL_n(\mathbb{C}) \subsetneq GL_n(\mathbb{R})$$

Infatti il gruppo lineare generale complesso "preserva la struttura complessa" di $\mathbb{C}^n$, cioè la moltiplicazione per i, ovvero la decomposizione di ogni matrice complessa A in $A = B + iC$ con B, C matrici reali: in altri termini

$$GL_n(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \middle| A, B \in GL_n(\mathbb{R}) \right\}$$

Un altro esempio è il *gruppo lineare speciale*

$$SL_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$

che è un sottogruppo topologico di $GL_n(\mathbb{R})$. Osserviamo che si tratta di un chiuso in $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ poiché i suoi elementi sono gli zeri della funzione continua $\det A - 1$. Non si tratta però di un gruppo compatto: per vederlo consideriamo una qualsiasi norma sullo spazio $M_n(\mathbb{R})$ (che essendo uno spazio vettoriale topologico di dimensione finita è normato e su di esso tutte le norme sono equivalenti), ad esempio

$$||A|| := n \max_{1 \le i,j \le n} |a_{ij}|$$

è immediato che, rispetto a questa norma, $M_n(\mathbb{R})$ è un'algebra di Banach; ora una matrice della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$$

appartiene a $SL_n(\mathbb{R})$ per ogni $\varepsilon \neq 0$, e quindi il gruppo contiene elementi di norma arbitrariamente grande. Ragionamenti del tutto analoghi possono svolgersi per il gruppo $SL_n(\mathbb{C})$.

Dato che l'algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, se $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, è l'algebra delle matrici, il gruppo unitario $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ diviene un gruppo di matrici: il *gruppo unitario*

$$U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid AA^* = I\}$$

(ove $A^* = \overline{A^T}$ è la matrice trasposta coniugata). Questo gruppo dipende dalla presenza di un prodotto hermitiano su $\mathbb{C}^n$, ad esempio

$$(v, w) = \sum_i v_i \overline{w_i}$$

Si tratta di un gruppo compatto: è chiuso per continuità delle funzioni $A^*A - I$ (che sono funzioni nelle entrate delle matrici), ed è compatto perché se $A \in U(n)$ allora $|\det A| = 1$ e quindi, se $((a_{ij})) = A$:

$$|a_{ij}|^2 = a_{ij}\overline{a_{ij}} \le \sum_k a_{ik}\overline{a_{ik}} = 1$$

(dato che $AA^* = I$).

Notiamo che il determinante di una matrice unitaria è un numero complesso di modulo 1: le matrici unitarie che hanno effettivamente determinante 1 sono un sottogruppo, che si dice *gruppo unitario speciale*

$$SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\} = U(n) \cap SL_n(\mathbb{C})$$

Ovviamente $SU(n)$ è compatto, dato che è chiuso in $U(n)$. Si noti inoltre che

$$U(1) = \mathbb{T} = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = SU(1)$$

e che $U(n) = U(1) \times SU(n)$.

Osserviamo che $U(n)$ è un *sottogruppo compatto massimale in* $GL_n(\mathbb{C})$; infatti se K fosse un sottogruppo compatto contenente $U(n)$ allora la rappresentazione $K \hookrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ sarebbe unitaria (per compattezza di K) e quindi $K \subset U(n)$. In particolare, *ogni sottogruppo compatto massimale di* $GL_n(\mathbb{C})$ *è coniugato a* $U(n)$.

Consideriamo ora oggetti analoghi per il caso reale: sia cioè V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita dotato di prodotto scalare, ad esempio

$$(v, w) = \sum_i v_i w_i$$

Il *gruppo ortogonale* è allora il gruppo delle matrici che preservano questo prodotto: $(Av, Aw) = (v, w)$, cioè

$$O(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = I\}$$

Ovviamente $O(n)$ è chiuso; per vedere che è compatto di nuovo si ragiona in modo analogo a quanto fatto per $U(n)$: in effetti una matrice ortogonale A è tale che $|\det A| = 1$, quindi $\det A = \pm 1$.

15.1.1 Esempio *$O(2)$ è il gruppo delle matrici $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tali che $a^2 + b^2 = 1 = c^2 + d^2$ e $ac + bc = 0$: in altri termini*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \qquad \textit{oppure} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$$

Il sottogruppo delle matrici di $O(n)$ con determinante 1 è il *gruppo ortogonale speciale*

$$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\} = O(n) \cap SL_n(\mathbb{R})$$

Ovviamente $SO(n)$ è compatto, dato che è chiuso in $O(n)$. Si noti inoltre che

$$SO(2) = \{e^{2\pi it}\}_{t\in\mathbb{R}} = S^1 = SU(1)$$

e che $O(2) = \{\pm 1\} \times SO(2)$.

Osserviamo che i gruppi $U(n)$ e $O(n)$ sono stati definiti considerando forme bilineari definite positive e simmetriche sugli spazi vettoriali di dimensione finita reali e complessi: in effetti basta considerare forme non degeneri per avere dei gruppi di matrici. Una forma bilineare simmetrica non degenere è sempre riconducibile (teorema di Sylvester) alla

$$(v, w)_k = \sum_{i=1}^{k} v_i w_i - \sum_{i=k+1}^{n} v_i w_i$$

Il gruppo che preserva questa forma è

$$O(k, n-k) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid (Av, Aw)_k = (v, w)\}$$

Ad esempio il gruppo $O(1, 3)$ si dice *gruppo di Lorentz*, perché preserva le trasformazioni di Lorentz nello spazio di Minkowski: questi gruppi non sono compatti. Anche qui possiamo considerare i sottogruppi speciali

$$SO(k, n-k) = O(k, n-k) \cap SL_n(\mathbb{R})$$

Notiamo che $SO(k, n-k) = SO(n-k, k)$.

Infine consideriamo una forma bilineare non degenere ed antisimmetrica: intanto osserviamo che uno spazio possiede una tale forma solo se è di dimensione pari: infatti se $\langle , \rangle$ è una forma bilineare tale che

$$\langle v, w\rangle = -\langle w, v\rangle$$

allora $\langle v, v\rangle = 0$ e quindi, se la forma e non degenere, fissata una base $(e_1, ..., e_k)$, la matrice A della forma $\langle , \rangle$ nella base è tale che

$$A = -A^T \qquad \text{e} \qquad \det A \neq 0$$

cioè $\det A = \det -A^T = (-1)^k \det A$ da cui k deve essere pari.

Una tale forma è sempre riconducibile (teorema di Darboux) alla

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{k} (v_i w_{i+k} - w_i v_{i+k})$$

Il gruppo che preserva questa forma è il *gruppo simplettico*[2]:

$$Sp_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid \langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle\}$$

Osserviamo che $Sp_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{C}) \subset GL_{2n}(\mathbb{R})$. Precisamente, le matrici di $Sp_n(\mathbb{R})$ sono le matrici $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ tali che

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

ove $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ è la matrice della forma simplettica nella base standard.

È possibile considerare il *gruppo simplettico complesso*, se lo spazio ove si considera la forma simplettica è complesso (e.g. $\mathbb{C}^{2n}$):

$$Sp_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_{2n}(\mathbb{C}) \mid \langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle\}$$

Questi gruppi simplettici non sono compatti: un argomento analogo alla decomposizione polare mostra in effetti che sono, topologicamente, il prodotto di $U(n)$ per $\mathbb{R}^N$; è invece compatto il gruppo

$$Sp(n) = Sp_n(\mathbb{C}) \cap U(2n)$$

Il gruppo $Sp(n)$ può definirsi come gruppo di matrici su uno spazio vettoriale quaternionico: ricordiamo che i quaternioni (cfr. esempio 5.5.9) $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2$ formano un corpo e quindi possiamo considerare spazi vettoriali su di essi, e quindi i gruppi $GL_n(\mathbb{H})$ e $SL_n(\mathbb{H})$: notiamo che $GL_n(\mathbb{H}) \subset GL_{2n}(\mathbb{C})$ (inclusione propria) è il sottogruppo di $GL_{2n}(\mathbb{C})$ delle matrici che preservano la struttura quaternionica, cioè delle matrici della forma

$$\begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{pmatrix}$$

con $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Allora il gruppo simplettico è l'equivalente del gruppo unitario nel caso quaternionico:

$$Sp(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{H}) \mid AA^* = I\}$$

ed è formato dalle matrici A a coefficienti quaternionici che preservano la forma hermitiana

$$(v, u) = \sum_k u_i \overline{v_i}$$

[2]Il termine, dovuto a H.Weyl, è la versione greca di "complesso".

ove se $u = a1 + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$, il suo coniugato è $\overline{u} = a1 - bi - cj - dk$. Si tratta di un gruppo compatto, che è l'analogo di $U(n)$ e $O(n)$ per gli spazi quaternionici: non esiste un gruppo simplettico speciale, dato che si dimostra che $Sp(n)$ è già speciale:

$$Sp(n) \subset SL_n(\mathbb{H})$$

I gruppi che abbiamo fin qui introdotti si dicono, nella terminologia di H.Weyl, *gruppi classici*.

Studiamo ora le proprietà topologiche dei gruppi classici: riassumiamo quanto fin qui detto con il

15.1.2 Teorema *I gruppi $U(n)$, $O(n)$, $Sp(n)$, $SO(n)$ e $SU(n)$ sono compatti; i gruppi $GL_n(\mathbb{K})$, $SL_n(\mathbb{K})$ non sono compatti, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.*

Notiamo che è definita per ogni gruppo classico G una mappa

$$\det : G \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

In particolare, la mappa $\det : O(n) \longrightarrow \{\pm 1\}$ è continua e suriettiva, quindi *il gruppo $O(n)$ non è connesso.*

15.1.3 Teorema *$O(n)$ ha due componenti connesse: $SO(n)$ e $-I \cdot SO(n)$.*

Per dimostrarlo è sufficiente mostrare che $SO(n)$ è connesso; lo dimostreremo fra breve: intanto notiamo il

15.1.4 Corollario *$GL_n(\mathbb{R})$ ha due componenti connesse: $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A > 0\}$ e $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A < 0\}$.*

Dimostrazione: Basta usare la decomposizione polare: ogni matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ si scrive come $A = |A|B$ con $|A|$ matrice simmetrica definita positiva e $B \in O(n)$: allora, dato che l'insieme delle matrici simmetriche definite positive è convesso, $(tA + (1-t)A$ è simmetrica definita positiva se lo è A, al variare di t) è connesso: quindi le componenti connesse di $GL_n(\mathbb{R})$ corrispondono a quelle di $O(n)$.

QED

Osserviamo che questi risultati sono falsi nei casi complesso e quaternionico: in altri termini

15.1.5 Teorema *I gruppi $GL_n(\mathbb{C})$ e $GL_n(\mathbb{H})$ sono connessi.*

Questo seguirà dal seguente risultato

15.1.6 Teorema *I gruppi $SO(n)$, $U(n)$ e $Sp(n)$ sono connessi.*

e dalle decomposizioni polari per i gruppi lineari generali complesso e quaternionico che sono del tutto analoghe a quella reale.

La dimostrazione della connessione di $U(n)$, $SO(n)$ e $Sp(n)$ può svolgersi considerando l'importante concetto di *toro massimale* in un gruppo di matrici.

Ricordiamo che il *toro n-dimensionale* è il gruppo topologico commutativo compatto (connesso) $\mathbb{T}^n = S^1 \times ... \times S^1$. Ogni gruppo classico possiede dei tori massimali che si definiscono come segue.

In $U(n)$ un toro massimale è semplicemente il sottogruppo delle matrici diagonali con elementi di modulo 1:

$$T^n = \left\{ A \in U(n) \,\middle|\, A = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & z_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & z_n \end{pmatrix} \right\}_{z_1,...,z_n \in \mathbb{T}}$$

In $Sp(n)$ un toro massimale è semplicemente

$$T^n = \left\{ A \in Sp(n) \,\middle|\, A = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & c_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & c_n \end{pmatrix} \right\}$$

ove $c_i = \begin{pmatrix} z_i & 0 \\ 0 & \overline{z_i} \end{pmatrix} \in U(2)$ e $z_i \in \mathbb{T}$. Anche in $SO(2n)$ e $SO(2n+1)$ c'è un toro massimale standard della forma

$$T^n = \left\{ A \in SO(2n) \,\middle|\, A = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & R_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & R_n \end{pmatrix} \right\}$$

ove $R_i = \begin{pmatrix} \cos t_i & \sin t_i \\ -\sin t_i & \cos t_i \end{pmatrix}$ ed in $SO(2n+1)$:

$$T^n = \left\{ A \in SO(2n+1) \,\middle|\, A = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & R_n & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & I \end{pmatrix} \right\}$$

Ora sia G è uno dei gruppi $SO(2n)$, $SO(2n+1)$, $U(n)$ o $Sp(n)$: scriviamo A^* in luogo di A^T per i gruppi ortogonali e $\overline{A^T}$ per i gruppi unitari e simplettici.

Osserviamo che se $A \in G$ allora è normale:

$$A^*A = A^{-1}A = I = AA^{-1} = AA^*$$

Possiamo allora usare il teorema spettrale nel caso di dimensione finita per dedurre il seguente teorema dovuto (in una forma più intrinseca) ad Èlie Cartan:

15.1.7 Teorema *Se G è uno dei gruppi classici compatti $SO(2n)$, $SO(2n+1)$, $U(n)$ ovvero $Sp(n)$ allora per ogni suo toro massimale:*

$$G = \bigcup_{g \in G} gT^n g^{-1}$$

Cioè G è unione dei coniugati del toro massimale T^n.

Ora, dato che $\mathbb{T}^n$ è connesso (è un prodotto di spazi connessi S^1) abbiamo scritto G come unione di connessi $gT^n g^{-1}$ che hanno un punto in comune e: quindi

15.1.8 Corollario *I gruppi $SO(n)$, $U(n)$ e $Sp(n)$ sono connessi.*

Segnaliamo che i tori massimali nei gruppi classici giocano un ruolo decisivo nella descrizione di questi gruppi: ad esempio, considerando $T^n \subset G$ e il normalizzatore $N(T^n)$ (cioè il più grande sottogruppo di G che ammetta T^n come sottogruppo normale), il quoziente $N(T^n)/T^n$ si dice *gruppo di Weyl* $W(G)$: il gruppo di Weyl agisce su T^n come (denotiamo con $[n]$ la classe di $n \in N(T^n)$)

$$([n], t) \longmapsto ntn^{-1}$$

Questa azione è ben definita (non dipende dal rappresentante n ma solo dalla classe) e consente di dimostrare il seguente teorema, per il quale si rimanda ai testi specialistici (ad esempio [26], [3] o [21]):

15.1.9 Teorema *Il gruppo di Weyl è finito ed agisce senza punti fissi sul toro massimale.*

15.2 Semplice connessione e Spin

Vogliamo qui discutere un'altra proprietà topologica che i gruppi di matrici possono avere: la semplice connessione. Ad esempio ricordiamo che $S^1 = \mathbb{T} = U(1)$ non è semplicemente connesso: il suo gruppo fondamentale è $\mathbb{Z}$ (cfr. 2.5.14).

Prima di procedere osserviamo che basta limitarsi ai gruppi classici compatti $SO(n)$, $U(n)$ e $Sp(n)$: infatti

15.2.1 Teorema *Il gruppo $GL_n^+(\mathbb{R})$ (rispettivamente $GL_n(\mathbb{C})$, $GL_n(\mathbb{H})$) ha lo stesso gruppo fondamentale di $SO(n)$ (rispettivamente $U(n)$, $Sp(n)$).*

DIMOSTRAZIONE: Basta ricordare la decomposizione polare:

$$GL_n^+(\mathbb{R}) = SO(n) \times S(n)$$

ove $S(n)$ è lo spazio delle matrici simmetriche definite positive (risp. $GL_n(\mathbb{C}) = U(n) \times H(n)$ con $H(n)$ matrici hermitiane definite positive, $GL_n(\mathbb{H}) = Sp(n) \times Q(n)$ con $Q(n)$ matrici hermitiane quaternioniche definite positive). Ma lo spazio $S(n)$ (risp. $H(n)$, $Q(n)$) è convesso (infatti se $t \in [0,1]$ a $A \in S(n)$ anche $tA + (1-t)A \in S(n)$) e quindi contraibile. Ne segue che

$$\pi_1(GL_n(\mathbb{R})) = \pi_1(O(n) \times S(n)) = \pi_1(O(n))$$

QED

Osserviamo che abbiamo considerato $GL_n^+(\mathbb{R})$ perché $GL_n(\mathbb{R})$ non è connesso, e quindi non ha senso considerare il gruppo fondamentale, ma solo i gruppi fondamentali delle componenti connesse, che in questo caso sappiamo essere due ed omeomorfe fra loro(tramite la $A \longmapsto -A$); basta quindi limitarsi ad una di esse, ad esempio quella contenente l'identità I cioè $GL_n^+(\mathbb{R})$.

Calcoleremo i gruppi fondamentali dei gruppi classici compatti usando il loro legame con le sfere. Sappiamo già che

$$U(1) = SO(2) = S^1$$

ha gruppo fondamentale $\mathbb{Z}$.

15.2.2 Teorema *Il gruppo $SU(2)$ è omeomorfo come spazio topologico alla sfera S^3 a tre dimensioni.*

DIMOSTRAZIONE: Basta scrivere in modo opportuno le matrici unitarie: un elemento di $SU(2)$ è una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tale che $A^*A = I$ e $\det A = 1$, cioè $a\overline{a} + b\overline{b} = 1 = c\overline{c} + d\overline{d}$, $a\overline{c} + b\overline{d} = 0 = c\overline{a} + d\overline{b}$ e $ad = bc + 1$. Quindi $a = \overline{d}$ e $b = -\overline{d}$ e $|a|^2 + |b|^2 = 1$; con le posizioni

$$x_1 = \frac{a + \overline{a}}{2} \qquad x_2 = \frac{a - \overline{a}}{2} \qquad x_3 = \frac{b + \overline{b}}{2} \qquad x_4 = \frac{b - \overline{b}}{2}$$

definiamo un omeomorfismo $A \leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)$ fra $SU(2)$ e la sfera di centro l'origine e raggio 1 in $\mathbb{R}^4$.

QED

Il seguente risultato è intuitivamente ovvio: un cammino chiuso su una sfera di dimensione maggiore o uguale a due è contraibile.

15.2.3 Teorema *Per $n > 1$ la sfera S^n è semplicemente connessa.*

Dimostrazione: Consideriamo la sfera S^n come compattificazione di Alexandroff dello spazio $\mathbb{R}^n$: sia $c : [0,1] \longrightarrow S^n$ un cammino in S^n con $c(0) = c(1) = x_0$. Allora, se y_0 è un punto tale che non esiste $t \in [0,1]$ per cui $c(t) = y_0$ (un tale punto esiste sempre, dato che l'immagine di $[0,1]$ tramite c non può essere l'intera S^n), considerando $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{y_0\}$ (compattificazione di Alexandroff) il cammino c è contenuto in $\mathbb{R}^n$ e quindi si contrae al punto x_0 perché $\mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso.

QED

15.2.4 Corollario *$SU(2) = Sp(1)$ è semplicemente connesso.*

Discutiamo ora il più semplice caso nel quale si manifesta il fenomeno dello *spin*: il gruppo $SO(3)$; per farlo realizziamo la sfera $S^3 = SU(2)$ come sfera di raggio 1 in $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ (corpo dei quaternioni): in altri termini realizziamo $SU(2)$ come le unità dei quaternioni, i.e. i quaternioni q tali che $\overline{q} = q^{-1}$.

Ora consideriamo lo spazio dei quaternioni puramente immaginari:

$$\mathbb{H}_0 = \{q \in \mathbb{H} \,|\, q = -\overline{q}\} = \{bi + cj + dk \,|\, , c, d \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$$

Ovviamente la forma bilineare

$$(q_1, q_2) = q_1\overline{q_2}$$

rende $\mathbb{H}_0$ uno spazio euclideo, isomorfo a $\mathbb{R}^3$ col prodotto standard. Ora, la mappa

$$\Phi : SU(2) \longrightarrow GL(\mathbb{H}_0)$$

definita come (rappresentiamo gli elementi di $SU(2)$ come quaternioni)

$$\Phi(A)(q) = AqA^{-1}$$

(prodotto nel corpo dei quaternioni) è lineare e preserva il prodotto scalare in $\mathbb{H}_0$:

$$\begin{aligned}(\Phi(A)q_1, \Phi(A)q_2) &= Aq_1A^{-1}\overline{Aq_2A^{-1}} = Aq_1A^{-1}\overline{A^{-1}}\,\overline{q_2}\,\overline{A} \\ &= Aq_1\overline{q_2}\,\overline{A} = -q_1A(-\overline{A}\,\overline{q_2}) = q_1\overline{q_2}\end{aligned}$$

(dato che $\overline{A} = A^{-1}$, $\overline{q_i} = -q_i$ e, per ogni coppia di quaternioni q, p si ha $\overline{qp} = \overline{p}\,\overline{q}$).Quindi $\Phi(A) \in O(3)$; ovviamente Φ è suriettiva e continua, quindi, dato che $SU(2)$ è connesso, l'immagine di Φ è connessa: questa immagine è $SO(3)$. Inoltre il nucleo della mappa Φ è formato dagli elementi $\pm I$ di $SU(2)$: infatti se $\Phi(A)(q) = q$ per ogni $q \in \mathbb{H}_0$ allora $AqA^{-1} = q$, cioè $Aq = qA$; questo accade solo se il quaternione è reale (cioè se ha nulle le coordinate i, j, k): ma gli elementi di $\mathbb{H}_0$ hanno nulla la componente reale e $\overline{q} = -q$, e quindi $A = \pm I$.

In definitiva abbiamo l'isomorfismo di gruppi topologici:

$$SU(2)/\{\pm I\} \cong SO(3)$$

o, se si vuole, la successione esatta di gruppi

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow SU(2) \longrightarrow SO(3) \longrightarrow 1$$

In particolare, dato che lo spazio proiettivo si ottiene dalla sfera identificandone coppie di punti (antipodali):

15.2.5 Teorema *$SO(3)$ è omeomorfo allo spazio proiettivo reale tridimensionale $\mathbb{P}^3$.*

Dal punto di vista geometrico l'isomorfismo $SU(2)/\{\pm 1\} = SO(3)$ può descriversi come segue: alla matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$ associamo la trasformazione lineare fratta

$$z \longmapsto \frac{az + b}{-\overline{b}z + \overline{a}}$$

della retta proiettiva complessa $\mathbb{CP}^1$ in sé. Ma, per tramite della proiezione stereografica, $\mathbb{CP}^1$ si identifica alla sfera S^2, della quale le trasformazioni lineari fratte divengono le rotazioni. Si ottiene così di nuovo la mappa $SU(2) \longrightarrow SO(3)$: evidentemente due trasformazioni lineari fratte inducono la medesima rotazione se e solo se differiscono per il segno.

Abbiamo visto come i gruppi unitari speciali in dimensione 1 e 2 siano delle sfere; in generale non sarà vero che ogni gruppo unitario è una sfera, ma possiamo stabilire un risultato, valido per i gruppi classici compatti, che lega questi oggetti alle sfere di dimensione qualsiasi. Consideriamo le sfere S^{n-1} come le sfere di centro l'origine e raggio 1 in $\mathbb{R}^n$.

15.2.6 Teorema *Il gruppo $SO(n)$ (rispettivamente $SU(n)$, $Sp(n)$) agisce in modo transitivo sulla sfera S^{n-1} (rispettivamente S^{2n-1}, S^{4n-1}), lo stabilizzatore nel punto $e = (1, 0, ..., 0) \in S^n$ è il sottogruppo $I \times SO(n-1)$ (rispettivamente $I \times U(n-1)$, $I \times Sp(n-1)$). Hanno quindi luogo gli omeomorfismi*

$$SO(n)/SO(n-1) = S^{n-1}, \qquad SU(n)/SU(n-1) = S^{2n-1},$$
$$Sp(n)/Sp(n-1) = S^{4n-1}$$

DIMOSTRAZIONE: Facciamo la dimostrazione per $SO(n)$: negli altri casi procede in modo del tutto analogo. Consideriamo quindi l'azione di $SO(n)$ su $\mathbb{R}^n$ data dal prodotto di una matrice per un vettore Av: ovviamente

$$v \in S^{n-1} \Rightarrow Av \in S^{n-1}$$

(dato che $||Av||^2 = (Av, Av) = ||v||^2$). Questa azione è transitiva, dato che ogni punto $v \in S^{n-1}$ viene spostato in e da un elemento di A: infatti un elemento $v \in S^{n-1}$ per definizione è tale che $||v||^2 = 1$; possiamo quindi completare il vettore $\{v\}$ ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$: $(v, v_2, ..., v_n)$. Allora la matrice $A = (v, v_2, ..., v_n)$ le cui colonne sono i vettori della base è in $SO(n)$ ed è tale che $Av = e$. Dunque, dato che l'azione è transitiva, abbiamo che

$$S^{n-1} = SO(n)/G_e$$

ove G_e è lo stabilizzatore di e: ma

$$G_e = \{A \in SO(n) \,|\, Ae = e\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \,\Big|\, A \in SO(n-1) \right\} = I \times SO(n-1)$$

e quindi abbiamo l'omeomorfismo cercato.

QED

Ad esempio, nel caso di $SO(3)$, l'omeomorfismo $SO(3)/SO(2) = S^2$ è la *fibrazione di Hopf*

$$S^3 \longrightarrow S^2$$

cioè una mappa suriettiva di S^3 in S^2 le cui controimmagini (le "fibre") sono isomorfe a S^1.

Per calcolare i gruppi fondamentali dei gruppi classici compatti di dimensione qualsiasi, dobbiamo svolgere qualche considerazione sui gruppi semplicemente connessi. Sappiamo che esistono gruppi non semplicemente connessi, $U(1)$ ad esempio; tuttavia $U(1) = S^1$ è quoziente di uno spazio semplicemente connesso $\mathbb{R}$, e la mappa $p : t \longmapsto e^{it}$ che realizza questo quoziente è un omeomorfismo locale.

15.2.7 Definizione *Un* rivestimento *di uno spazio topologico X è una mappa continua suriettiva $E \xrightarrow{p} X$ a uno spazio topologico E in X tale che*

- *per ogni $x \in X$ la controimmagine $p^{-1}(x)$ sia un insieme discreto;*
- *p sia un omeomorfismo locale;*
- *la topologia di X sia la topologia quoziente indotta dalla mappa p.*

L'esempio $\mathbb{R} \xrightarrow{p} S^1$ è quello fondamentale: in questo caso $\mathbb{R}$ soddisfa anche la definizione seguente

15.2.8 Definizione *Un rivestimento* $E \xrightarrow{p} X$ *si dice* universale *se* E *è semplicemente connesso.*

Ovviamente, se esiste, il rivestimento universale è unico: due tali rivestimenti $E_1 \xrightarrow{p_1} X$ e $E_2 \xrightarrow{p_2} X$ danno luogo a rivestimenti $E_1 \xrightarrow{p_2^{-1}p_1} E_2$ e $E_2 \xrightarrow{p_1^{-1}p_2} E_1$ che sono omeomorfismi: questo segue dal

15.2.9 Lemma *Se* $E \xrightarrow{p} X$ *è un rivestimento,* $x_0 \in X$ *e* $e_0 \in p^{-1}(x)$ *allora per ogni mappa continua* $f : Y \longrightarrow X$ *da uno spazio connesso* Y *tale che* $f(y_0) = x_0$ *esiste un unica mappa* $f' : Y \longrightarrow E$ *tale che* $f'(y_0) = e_0$ *e* $pf' = f$*.*

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo che $f'' : Y \longrightarrow E$ soddisfi la tesi del lemma e siano

$$A = \{y \in Y \mid f'(y) = f''(y)\} \qquad \text{e} \qquad B = \{y \in Y \mid f'(y) \neq f''(y)\}$$

Allora $Y = A \cup B$ e $y_0 \in A$. Mostreremo che sia A che B sono aperti, il che è assurdo, dato che Y è connesso ($A \cap B = \emptyset$).

Sia $y_1 \in Y$ e U un intorno di $f(y_1)$ tale che $p^{-1}(U)$ sia unione disgiunta di intorni a lui omeomorfi; se $y_1 \in A$ allora $f'(y-1) = f''(y-1)$ appartiene a qualche componente connessa C di $p^{-1}(U)$ e quindi $f'^{-1}(C) \cap f''^{-1}(C)$ è un aperto contenente y_1 e contenuto in A; dunque A contiene con ogni suo punto un intorno aperto di questo punto ed è pertanto aperto. Se invece $y_1 \in B$ allora $f'(y_1)$ appartiene a qualche componente connessa C di $p^{-1}(U)$ e $f''(y_1)$ appartiene a qualche componente connessa $D \neq C$ di $p^{-1}(U)$, da cui $f'^{-1}(C) \cap f''^{-1}(D)$ è un intorno aperto di y_1 contenuto in D. Quindi anche D è aperto.

QED

Osserviamo che non è affatto garantita l'esistenza di un rivestimento universale: infatti, se $\widetilde{X}$ è un rivestimento universale, dato che è localmente omeomorfo a X, ed è semplicemente connesso, X deve essere *localmente semplicemente connesso*, cioè ogni suo punto deve possedere un intorno aperto semplicemente connesso. Questa condizione è pure sufficiente:

15.2.10 Teorema *Se* X *è uno spazio topologico connesso, localmente connesso e localmente semplicemente connesso allora possiede un rivestimento universale.*

DIMOSTRAZIONE: Diamo solo l'idea della dimostrazione, rimandando a [3], [26] o [27], per una trattazione completa.

Sia $x_0 \in X$ e consideriamo l'insieme $\mathfrak{C}(x_0)$ dei cammini in X con punto iniziale x_0: se $c, c' : [0,1] \longrightarrow X$ sono due tali cammini, diciamo che sono equivalenti ($c \sim c'$) se $c(1) = c'(1)$ e sono omotopi. Poniamo

$$\widetilde{X} = \mathfrak{C}(x_0)/\sim$$

e definiamo $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ come

$$p[c] = c(1)$$

Ora rendiamo X uno spazio topologico in modo che $\widetilde{X} \xrightarrow{p} X$ sia un rivestimento universale. La topologia si definisce considerando come base in $\widetilde{X}$, la famiglia degli insiemi

$$A(V,c) := \{[cc'] \mid c' \in \mathfrak{C}(x_0)\, c'(0) = c(1)\, c'([0,1]) \subset V\}_{c\in\mathfrak{C}(x_0),\, V \text{ intorno aperto di } p[c]}$$

Si vede facilmente che si tratta di una base di intorni per una topologia e che rende continua la mappa p: inoltre, se $V \subset X$ è un intorno connesso semplicemente connesso di un punto $x \in X$, allora $p^{-1}(x)$ è unione disgiunta degli $A(V,c)$ tali che $p[c] \in V$, e $p(A(V,c)) = V$: quindi p è un omeomorfismo locale. Non è difficile verificare che $\widetilde{X}$ è connesso, mentre la semplice connessione segue quasi per definizione.

QED

Il caso che ci interessa è quello di un gruppo topologico.

15.2.11 Teorema *Se G è un gruppo topologico connesso, localmente connesso e localmente semplicemente connesso allora il suo rivestimento universale $\widetilde{G} \xrightarrow{p} G$ è in modo unico un gruppo topologico con elemento neutro $e_0 \in p^{-1}(e)$ (e è l'elemento neutro in G) e p è un omomorfismo di gruppi topologici.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo la mappa $m : G \times G \longrightarrow G$ definita come

$$m(x,y) = xy^{-1}$$

Se $\widetilde{G} \xrightarrow{p} G$ è il rivestimento universale di G, in $\widetilde{G} \times \widetilde{G} \xrightarrow{p\times p} G \times G$ possiamo sollevare unicamente m, ottenendo così la struttura di gruppo topologico voluta: l'unicità del sollevamento implica la validità delle proprietà gruppali.

QED

15.2.12 Lemma *Se G è un gruppo topologico connesso, H un suo sottogruppo chiuso connesso e semplicemente connesso e se il quoziente G/H è semplicemente connesso allora anche G è semplicemente connesso.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo il rivestimento universale $\widetilde{G} \xrightarrow{p} G$ di G ed il suo sottogruppo $\widetilde{H} := p^{-1}(H)$ che è chiuso per continuità della p (ed è un sottogruppo perché p è un omomorfismo di gruppi). Dato che un rivestimento è un omeomorfismo locale e che G/H e $\widetilde{G}/\widetilde{H}$ sono semplicemente connessi p induce l'omeomorfismo

$$\widetilde{G}/\widetilde{H} \cong G/H$$

Ma notiamo che, essendo H semplicemente connesso e $\widetilde{H} \xrightarrow{p|_{\widetilde{H}}} H$ il suo rivestimento universale, deve essere $H = \widetilde{H}$, sicché $\widetilde{G}/H = G/H$ e quindi la mappa $G \longrightarrow G/H$ che si solleva unicamente a $G \longrightarrow \widetilde{G}/H$ e viene a coincidere con $\widetilde{G} \longrightarrow \widetilde{G}/\widetilde{H} = \widetilde{G}/H$: dunque $\widetilde{G} \cong G$. Ne segue che G è semplicemente connesso.

QED

Siamo ora in grado di calcolare i gruppi fondamentali dei gruppi classici compatti:

15.2.13 Teorema *Per ogni $n \geq 1$ $SU(n)$ e $Sp(n)$ sono semplicemente connessi, mentre $\pi_1(SO(2)) = \pi_1(U(n)) = \mathbb{Z}$ e $\pi_1(SO(n+2)) = \mathbb{Z}_2$.*

DIMOSTRAZIONE: Usiamo il fatto che

$$S^{n-1} = SO(n)/SO(n-1)\,, \qquad S^{2n-1} = SU(n)/SU(n-1)\,,$$
$$S^{4n-1} = Sp(n)/Sp(n-1)$$

ed il fatto che le sfere sono semplicemente connesse. Nel caso di $SU(n)$ e $Sp(n)$ si procede per induzione applicando il lemma: per $n = 1$ abbiamo $\pi_1(SU(1)) = \pi_1(SO(2)) = \mathbb{Z}$ mentre $\pi_1(Sp(1)) = \pi_1(SU(2)) = \pi_1(S^3) = 0$; quindi, applicando il lemma, otteniamo che $SU(n+1)$ e $Sp(n)$ sono semplicemente connessi perché lo sono le sfere e $SU(n)$ e $Sp(n-1)$ per $n > 1$, per induzione.

Per quel che riguarda $SO(n)$ non possiamo applicare il lemma; tuttavia notiamo che le immersioni $\iota_n : SO(n-1) \hookrightarrow SO(n)$ inducono degli epimorfismi di gruppi

$$\pi_1(SO(n)) \xrightarrow{\iota_{n*}} \pi_1(SO(n-1)) \longrightarrow 1$$

i cui nuclei sono i gruppi $\pi_1(S^{n-1})$; infatti l'epimorfismo assegna ad una classe $[\sigma]$ di cammini in $SO(n)$ la classe $[\sigma \circ \iota]$, e quindi $\iota_{n*}([\sigma]) = 0$ se e solo se il cammino σ ha immagine in $SO(n)/SO(n-1)$; ma in questo caso è contraibile a un punto, per la semplice connessione di S^{n-1}, e quindi ι_{n*} sono isomorfismi:

$$\mathbb{Z}_2 = \pi_1(SO(3)) = \pi_1(SO(4)) = ... = \pi_1(SO(n)) = ...$$

QED

Dato che i gruppi ortogonali $SO(n)$, per $n \geq 3$ non sono semplicemente connessi (ma si noti che "lo sono quasi": il loro gruppo fondamentale è il più piccolo gruppo non banale che esista!) ha senso dare la seguente

15.2.14 Definizione *Se $n \geq 3$ si dice* gruppo spinoriale *$Spin(n)$ il rivestimento universale di $SO(n)$.*

15.2.15 Esempio $Spin(3) = SU(2)$.

In generale è possibile realizzare ogni gruppo spinoriale come sottogruppo di un opportuno gruppo unitario. Vediamo qualche altro esempio.

15.2.16 Proposizione *$Spin(4) = Spin(3) \times Spin(3)$.*

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo che se $u, u' \in SU(2) = Spin(3)$ sono due quaternioni unitari, la mappa

$$q \longmapsto uqu'$$

è una isometria di $\mathbb{H}$ in sé, dato che

$$|uq\overline{u'}| = |u|\,|q|\,|\overline{u'}| = |q|$$

Abbiamo quindi una mappa continua

$$\Phi : Spin(3) \times Spin(3) \longrightarrow SO(4)$$

che è un omomorfismo di gruppi:

$$u(vq\overline{v'})\overline{u'} = (uv)q\overline{u'v'}$$

Il nucleo di Φ è formato solo da $(1,1)$ e $(-1,-1)$, mentre l'immagine coincide con $SO(4)$. Quindi si tratta del rivestimento universale di $SO(4)$.

QED

Seguendo questa linea si può dimostrare che (cfr. ad esempio [27])

15.2.17 Teorema *$Spin(5) = Sp(2)$ e $Spin(6) = SU(4)$.*

15.3 Esponenziale di matrici

In questa sezione facciamo una digressione sull'esponenziale di matrici, che è lo strumento fondamentale col quale, ad esempio, viene formulata la teoria dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie.

Consideriamo dunque una matrice qualsiasi $X \in M_n(\mathbb{R})$, e poniamo

$$e^X := 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \ldots$$

cioè la serie esponenziale classica. Questa è una scrittura che ha formalmente senso perché coinvolge solo somme e prodotti di matrici, e, perché definisca una matrice, dobbiamo trovarne un dominio di convergenza.

15.3.1 Lemma *Per ogni matrice X la serie e^X converge.*

DIMOSTRAZIONE: Usiamo il criterio di Cauchy tramite la disuguaglianza triangolare della norma di matrici

$$\left|\left|\frac{X^m}{m!}+\frac{X^{m+1}}{(m+1)!}+...+\frac{X^{m+k-1}}{(m+k-1)!}\right|\right|<\frac{||X||^m}{m!}+...+\frac{||X||^{m+k-1}}{(m+k-1)!}$$

Ma la serie numerica $e^{||X||}$ converge per ogni X e quindi le somme parziali di e^X costituiscono una successione di Cauchy nella norma delle matrici il che dimostra la convergenza della serie.

QED

Notiamo alcune proprietà immediate dell'esponenziale di matrici: intanto è ovvio che

$$\left(e^A\right)^T = e^{A^T}$$

Inoltre, se $B \in GL_n(\mathbb{R})$, dato che per ogni $m \in \mathbb{N}$: $BA^mB^{-1} = (BAB^{-1})^m$ allora

$$Be^AB^{-1} = e^{BAB^{-1}}$$

Se la matrice A è triangolare superiore, cioè della forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

allora, dato che gli elementi diagonali delle matrici (triangolari) A^m sono $\{a_{ii}^m\}$ e quindi anche e^A è triangolare con elementi diagonali $\{e^{a_{ii}}\}$. In particolare

15.3.2 Proposizione $\forall A \in M_n(\mathbb{R}) \quad \det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$

DIMOSTRAZIONE: Infatti per ogni $A \in M_n(\mathbb{R})$ esiste una matrice $B \in GL_n(\mathbb{R})$ tale che BAB^{-1} è triangolare superiore (con coefficienti in generale complessi) e quindi, dato che $\operatorname{tr} BAB^{-1} = \operatorname{tr} A$ si ha la tesi.

QED

15.3.3 Corollario *Per ogni* $A \in M_n(\mathbb{R})$, $e^A \in GL_n^+(\mathbb{R})$.

Quindi ogni matrice esponenziale è invertibile con determinante positivo: non è però vero che ogni matrice $A \in GL_n^+(\mathbb{R})$ sia l'esponenziale di qualche matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$: ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R})$$

non lo è: il motivo è ovvio, e risiede nel fatto che non è definito il logaritmo di un numero negativo. Nel caso di matrici complesse, la mappa esponenziale è invece suriettiva, ed il motivo risiede proprio nell'esistenza delle determinazioni del logaritmo complesso.

15.3.4 Proposizione *Se A e B sono matrici che commutano, cioè $AB = BA$ allora*

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B$$

Dimostrazione: Per l'ipotesi fatta su A e B otteniamo:

$$e^A \cdot e^B = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right)\left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{B^h}{h!}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(\sum_{h+k=m} \frac{m!}{k!h!} A^k B^h\right)$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(A+B)^m = e^{A+B}$$

Infatti se A e B commutano, vale la formula del binomiale per calcolare $(A+B)^n$ esattamente come per gli scalari.

QED

15.3.5 Corollario $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ *e* $e^0 = I$.

In generale $e^A e^B \neq e^B e^A$: invece di produrre un controesempio (cosa peraltro semplicissima) produciamone un'intera classe: scriviamo

$$[A, B] = AB - BA$$

per il *commutatore delle matrici* A e B (che quindi commutano se e solo se $[A, B] = 0$). Ricordiamo che, ovviamente $[A, B] = -[B, A]$, e che lo spazio $M_n(\mathbb{R})$ è un'algebra di Lie rispetto al commutatore, cioè che vale l'identità di Jacobi:

$$[[A, B], C] + [[C, A], B] + [[B, C], A] = 0$$

15.3.6 Teorema (Weyl) *Se A e B sono matrici tali che*

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$$

allora

$$e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]} e^A e^B$$

Dimostrazione: (*Glauber*) Consideriamo la funzione

$$F(t) = e^{tA} e^{tB}$$

Allora

$$\frac{d}{dt} F(t) = (A + e^{tA} B e^{-tA}) F(t)$$

$(e^{-tA} = (e^{tA})^{-1})$. Ma le ipotesi su A e B sono che

$$[A,[A,B]]AAB - 2ABA + BAA = 0 \Rightarrow AAB + BAA = 2ABA$$

quindi $[B, A^2] = BAA - AAB = BAA + AAB - 2AAB = 2ABA - 2AAB = 2A[B, A]$. Per induzione:

$$[B, A^m] = mA^{m-1}[B, A]$$

e per conseguenza:

$$[B, e^{-tA}] = \sum_m \frac{(-t)^m}{m!}[B, A^m] = -te^{-tA}[B, A]$$

L'equazione differenziale precedente si scrive quindi come

$$\frac{d}{dt}F(t) = (A + B + t[A, B])F(t)$$

che, con la condizione $F(0) = I$, ammette la soluzione (tenendo conto del fatto che A e $[A, B]$ commutano e B e $[A, B]$ commutano):

$$F(t) = e^{t(A+B)+\frac{1}{2}t^2[A,B]} = e^{t(A+B)}e^{\frac{1}{2}t^2[A,B]}$$

Ma allora, per l'unicità delle soluzioni di un'equazione differenziale ordinaria con coefficienti analitici:

$$e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}e^{\frac{1}{2}t^2[A,B]}$$

e, in $t = 1$, la tesi del teorema.

QED

15.3.7 Corollario *Se* $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ *allora*

$$e^A e^B = e^{[A,B]}e^B e^A$$

DIMOSTRAZIONE: Per il teorema, abbiamo:

$$e^{-\frac{1}{2}[A,B]}e^A e^B = e^{A+B} = e^{B+A} = e^{-\frac{1}{2}[B,A]}e^B e^A$$

Ma, per l'identità di Jacobi:

$$[[A, B], [B, A]] = -[[[B, A], A], B] - [[B, [B, A]], A] = 0$$

(per le ipotesi su A e B). Dunque

$$e^{[A,B]}e^{-[B,A]} = e^{[A,B]-[B,A]} = e^{2[A,B]}$$

e quindi

$$e^A e^B = e^{\frac{1}{2}[A,B]}e^{-\frac{1}{2}[B,A]}e^B e^A = e^{[A,B]}e^B e^A$$

QED

Il teorema precedente ci permette di esprimere, nelle ipotesi $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$, il prodotto di matrici esponenziali in termini della somma e del commutatore degli esponenti.

Abbiamo osservato che non ogni matrice invertibile è l'esponenziale di una matrice: consideriamo quindi delle condizioni affinché lo sia.

15.3.8 Proposizione *La mappa $e : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ è un diffeomorfismo locale.*

Dimostrazione: Dobbiamo dimostrare che esistono degli intorni V di $0 \in M_n(\mathbb{R})$ e U di I in $GL_n(\mathbb{R})$ tali che e ristretta a V sia un diffeomorfismo, cioè un omeomorfismo differenziabile con inverso differenziabile: dimostreremo addirittura che è analitico.

Ovviamente e è una mappa analitica da $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ nell'aperto (denso) $GL_n(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$, visto che è determinata da una serie di potenze. Per dimostrare il nostro enunciato basterà dimostrare che, nel punto $0 \in M_n$, lo jacobiano di e è diverso da zero, ed invocare quindi il teorema della funzione inversa.

Ora, se $X = ((x_{ij}))$ e $e^X = A = ((a_{ij}))$, allora

$$\frac{\partial a_{kl}}{\partial x_{ij}} = \delta_{ki}\delta_{lj} + \cdots$$

dove i puntini indicano i termini che si annulanno in $X = 0$. Quindi la matrice jacobiana della mappa esponenziale ha la forma

$$\left(\left(\frac{\partial a_{kl}}{\partial x_{ij}}\right)\right) = ((\delta_{ki}\delta_{lj}))$$

che è una matrice unitaria di rango massimo, il che dimostra la tesi.

QED

Questo risultato fondamentale può essere ulteriormente precisato: possiamo cioè cercare di stimare gli intorni U e V nei quali e è un diffeomorfismo: per farlo scriviamo esplicitamente un inverso locale dell'esponenziale di matrici.

Ispirandoci al caso $n = 1$, consideriamo la serie logaritmica

$$(A - I) - \frac{(A - I)^2}{2} + ... + (-1)^{m+1}\frac{(A - E)^m}{m} + \cdots$$

Dato che la corrispondente serie numerica $\sum_m (-1)^{m+1} z^m/m$ converge per $|1 - z| < 1$, la serie logaritmica della matrice A converge assolutamente per $||A - I|| < 1$: osserviamo quindi che si ha convergenza nell'intorno U dell'I in $GL_n(\mathbb{R})$ individuato dal lemma 9.1.9. Quindi, se $A \in U$ possiamo definire $\ln A$ come la somma della serie logaritmica di A. Un calcolo del tutto analogo a quello per gli esponenziali mostra le proprietà elementari del logaritmo di matrici:

15.3.9 Proposizione *Se* $A, B \in U$ *e* $AB = BA$ *allora* $\ln(AB) = \ln A + \ln B$.

Ora notiamo che, se $A \in U$ allora ha senso considerare $e^{\ln A}$: si tratta proprio di A (basta sostituire formalmente le serie l'una nell'altra):

$$e^{\ln A} = A$$

Viceversa, se $||A|| < \ln 2$

$$\ln e^A = A$$

Il perché di questa limitazione è semplice: l'equazione $\ln e^A = A$ può infatti essere falsa anche se $||e^A - I|| < 1$; ad esempio se

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

allora ($A^{2n} = \begin{pmatrix} -t^{2n} & 0 \\ 0 & -t^{2n} \end{pmatrix}$ e $A^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & t^{2n+1} & 0 \\ -t^{2n+1} & 0 \end{pmatrix}$):

$$e^A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

e quindi, per $t = 2\pi$: $e^A = I$, per cui $\ln e^A = 0 \neq A$. Il raggio di convergenza della serie $\ln e^A$ è $\ln 2$.

Osserviamo ora che la mappa esponenziale è suriettiva sullo spazio delle matrici complesse:

15.3.10 Teorema *Se* $X \in GL_n(\mathbb{C})$ *esiste una* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *tale che* $e^A = X$.

DIMOSTRAZIONE: Naturalmente, se X è diagonale a blocchi

$$X = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & D_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & D_m \end{pmatrix}$$

allora $e^X = \prod_k e^{D_k}$. Ora rammentiamo che ogni matrice si decompone in blocchi diagonali di Jordan:

$$X = \begin{pmatrix} C(\lambda_1) & 0 & ... & 0 \\ 0 & C(\lambda_2) & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & C(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

ove

$$C(\lambda_k) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_k & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_k & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

è una matrice $k \times k$ con l'autovalore λ_k di X sulla diagonale.

Supponiamo quindi che $X = C(\lambda)$ con $\lambda \neq 0$ (altrimenti $\det X = 0$). Quindi $X = \lambda I + Y = \lambda(I + \lambda^{-1}Y)$ ove Y ha non nulli solo gli elementi della i-sima riga e $(i-1)$-sima colonna uguali a λ; dato che Y è nilpotente ($Y^k = 0$) (quindi lo è $\lambda^{-1}Y$), pertanto la serie esponenziale è un polinomio, dunque possiamo definire

$$B = \ln(I + \lambda^{-1}Y)$$

e quindi

$$X = \lambda I + Y = \lambda e^B$$

Dato che $\lambda \neq 0$ esiste μ tale che $\lambda = e^\mu$, cioè

$$X = e^\mu I e^B = e^{\mu I + B}$$

e dunque $A = \mu I + B$ è la matrice cercata.

QED

Il calcolo delle matrici esponenziali è fondamentale nella teoria delle equazioni differenziali ordinarie: infatti un sistema di equazioni differenziali ordinarie può scriversi come:

$$\dot{y} = Ay + b$$

ove y è una funzione vettoriale e A una matrice. Allora la soluzione del sistema omogeneo associato $\dot{y} = Ay$ si ottiene per $y(t) = e^{tA}y_0$ ove y_0 rappresenta il vettore che contiene i dati iniziali. Infatti

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt}e^{tA}y_0 = Ae^{tA}y_0 = Ay(t)$$

Sappiamo che la mappa

$$t \longmapsto e^{tA}$$

è un gruppo ad un parametro, e sappiamo che tutti i gruppi ad un parametro sono di questo tipo (teorema di Stone 14.3.6) nel caso di matrici simmetriche ($A^T =$

A). Possiamo comunque utilizzare le proprietà dell'esponenziale in dimensione finita[3] per dimostrare il teorema di Stone in questo caso:

15.3.11 Teorema *Se $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ è un gruppo ad un parametro, esiste un'unica matrice A tale che per ogni $t \in \mathbb{R}$ $\rho(t) = e^{tA}$.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo un intorno V di 0 in $M_n(\mathbb{R})$ ed un intorno U di I in $GL_n(\mathbb{R})$ in modo che la mappa esponenziale ristretta a V sia un diffeomorfismo fra V ed U. Definiamo poi:

$$\psi(t) := \ln(\rho(t))$$

per quei $t \in \mathbb{R}$ tali che $\rho(t) \in U$ (l'insieme di questi t starà in un intorno T dello zero in $\mathbb{R}$). Allora, se $t \in T$ e $s \in T$ sono tali che $\rho(t+s) \in U$ si ha

$$\psi(t+s) = \ln(\rho(t+s)) = \ln(\rho(t)\rho(s)) = \ln(\rho(t)) + \ln(\rho(s)) = \psi(t) + \psi(s)$$

Dunque ψ è una funzione lineare in t e quindi è della forma

$$\psi(t) = tA$$

per una determinata matrice A, sicché

$$e^{\psi(t)} = \rho(t) = e^{tA}$$

per ogni $t \in T$.

Per ottenere il risultato per qualsiasi $t \in \mathbb{R}$ scriviamo un qualsiasi numero $x \in \mathbb{R}$ come $x = nt$ ove $t \in T$ e $n \in \mathbb{Z}$. Allora

$$\rho(x) = \rho(t)^n = (e^{tA})^n = e^{xA}$$

QED

15.4 Coordinate canoniche sui gruppi classici

Diamo una prima interessante applicazione dell'esponenziale di matrici, per determinare su ogni gruppo di matrici delle coordinate come nel caso del teorema 15.3.8.

Osserviamo intanto che i gruppi di matrici posseggono delle "coordinate" naturali per mezzo delle quali parametrizzare i loro elementi: le entrate delle

[3] Anche definendo in modo opportuno il concetto di "differenziabilità" nell'ambito infinito-dimensionale, può mostrarsi che la mappa esponenziale non è in quel caso un diffeomorfismo locale.

matrici stesse: a X associamo le coordinate $((x_{ij}))$; in altri termini abbiamo delle funzioni continue

$$x_{ij} : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

che all'elemento $X \in G$ associano l'elemento $x_{ij}(X)$ che figura nella sua i-sima riga e j-sima colonna. In generale l'insieme completo delle coordinate $\{x_{ij}\}$ sarà ridondante, poiché esistono delle relazioni che legano queste coordinate, espresse dalle equazioni che definiscono il gruppo: ad esempio, se il gruppo è $GL_n(\mathbb{R})$ abbiamo la relazione $\det X \neq 0$; nel caso di $O(n)$ abbiamo le relazioni $\sum_k x_{ik}x_{jk} = \delta_{ij}$: se possiamo estrarre dalle coordinate $\{x_{ij}\}$ un sottoinsieme di funzioni indipendenti allora otteniamo un *sistema di coordinate locali* nel senso proprio del termine; va precisato, ovviamente, il concetto di "indipendenza" di funzioni. In generale si può adottare la seguente definizione:

15.4.1 Definizione *Se X è uno spazio topologico, $x_0 \in X$ e $U \subset X$ è un aperto di X contenente il punto x_0, un insieme di funzioni $\{x_1, ..., x_n\}$:*

$$x_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

continue si dice sistema di coordinate locali *se la mappa $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$:*

$$u \longmapsto (x_1(u), ..., x_n(u))$$

è un omeomorfismo di U su un intorno aperto di 0 *in $\mathbb{R}^n$. In questo caso, la coppia $(U, x = (x_1, ..., x_n))$ si dice* carta locale *o* sistema di coordinate locali *di dimensione n.*

Le *coordinate* di un punto $u \in U$ sono $(x_1(u), ..., x_n(u))$. Naturalmente, su un gruppo topologico G, basta avere una carta locale (U, x) intorno all'elemento neutro e per averne una intorno ad ogni altro $g \in G$: se $L_g(h) = gh$ è la traslazione basti considerare $(L_g(U), x \circ L_{g^{-1}})$.

15.4.2 Esempio

- *Se $G = \mathbb{R}^n$ abbiamo ovviamente le coordinate vettoriali $(x_1, ..., x_n)$ associate ad una base fissata $(e_1, ..., e_n)$. Si noti che G può essere visto come gruppo di matrici: basta considerare le matrici diagonali in $M_n(\mathbb{R})$ i cui elementi siano gli esponenziali delle coordinate degli elementi di $\mathbb{R}^n$: precisamente, all'elemento $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $x_i(v) = v_i$, i.e. $v = \sum_i v_i e_i$, associamo la matrice*

$$\begin{pmatrix} e^{v_i} & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{v_2} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & e^{v_n} \end{pmatrix}$$

Allora, se A è una tale matrice, ponendo $x_i(A) = v_i$ otteniamo delle coordinate che realizzano un omeomorfismo di G con $\mathbb{R}^n$: in altri termini (G, x) stesso è una carta locale. In questo caso il prodotto di elementi di G è tale che

$$x_i(AB) = x_i(A) + x_i(b)$$

- *Il gruppo abeliano $\mathbb{T}^n = S^1 \times ... \times S^1$ si può parametrizzare con degli angoli $(t_1, ..., t_n)$, dato che i suoi elementi sono prodotti di numeri complessi della forma $e^{it_k} = \cos t_k + i \sin t_k$: ovviamente questa parametrizzazione è omeomorfa solo localmente, per intorni di un punto (in $\mathbb{R}^n$) di raggio minore di 2π, dato che $e^{i\sum_k t_k} = \prod_k e^{i(2\pi+t_k)}$. Consideriamo comunque n gruppi ad un parametro*

$$\gamma_1 : \mathbb{R} \longrightarrow U(1) \quad ... \quad \gamma_n : \mathbb{R} \longrightarrow U(1)$$

cioè curve continue tali che $\gamma_k(t + s) = \gamma_k(t)\gamma_k(s)$; sappiamo (teorema di Stone 14.3.6 oppure il fatto che $\widehat{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$) che tali gruppi sono della forma

$$\gamma_k(t) = e^{a_k t}$$

Quindi il prodotto del gruppo $\mathbb{T}^n$ determina ed è determinato dalla somma di vettori $(a_1, ..., a_n)$ in $\mathbb{R}^n$. Osserviamo che in questo caso non abbiamo delle coordinate globali, cioè l'aperto U nel quale sono definite non può coincidere con tutto G (questo caso si ha ovviamente solo se G è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$).

Vogliamo estendere la costruzione dell'ultimo esempio al caso di gruppi qualsiasi: in questo caso la non commutatività del gruppo rende insufficiente la sola somma in $\mathbb{R}^n$ nel descrivere il prodotto del gruppo: possiamo comunque utilizzare la topologia che i gruppi di matrici ereditano da $M_n(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^{n^2}$.

Consideriamo quindi l'algebra delle matrici $M_n(\mathbb{R})$: sappiamo che rispetto ad ogni norma è uno spazio di Banach: in particolare, rispetto alla norma

$$||A|| := n \max_{i,j} |a_{ij}|$$

è un'algebra di Banach: in particolare possiamo considerare in $M_n(\mathbb{R})$ la convergenza delle serie. Rammentiamo il lemma 9.1.9 che possiamo formulare come

15.4.3 Lemma *Se $X \in M_n(\mathbb{R})$ e $||X|| < 1$, allora la matrice $A = I + X$ è invertibile, cioè appartiene a $GL_n(\mathbb{R})$.*

Cioè le matrici A che verificano la condizione

$$||A - I|| < 1$$

per il lemma formano un intorno U della matrice I in $GL_n(\mathbb{R})$. A questo punto, per avere un intorno di una qualsiasi altra matrice $B \in GL_n(\mathbb{R})$ basta considerare $B \cdot U$ che è un intorno di B in quanto la moltiplicazione di matrici è C^∞. In questo modo abbiamo le coordinate locali sul gruppo: scriviamole in concreto. Sia B la matrice intorno alla quale vogliamo le coordinate. Allora, se $C = B^{-1} = ((c_{ij}))$ si pone:

$$\begin{cases} x_{ij}(A) & = \sum_{k=1}^n c_{ik} a_{kj} - \delta_{ij} \\ x_{ij}(B) & = 0 \end{cases}$$

Le coordinate $\{x_{ij}\}$ sono valide per ogni matrice A tale che

$$||A - B|| < ||B||$$

Abbiamo quindi determinato per il gruppo $GL_n(\mathbb{R})$ delle coordinate del tutto simili a quelle di $\mathbb{R}^n$, in un suo intorno U di I:

$$x_1, ..., x_{n^2} : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

date dalle entrate delle matrici $\ln A$ al variare di $A \in U$: $(U, \ln)$ risulta quindi una carta locale di dimensione n^2 per il gruppo $GL_n(\mathbb{R})$.

Vogliamo ora trovare delle carte locali per i gruppi classici: basta, per questo, determinare degli intorni di I in essi diffeomorfi, per tramite del logaritmo di matrici, a degli intorni di 0 in *qualche sottospazio di* $M_n(\mathbb{R})$: dobbiamo cioè determinare dei sottospazi vettoriali di $M_n(\mathbb{R})$ le cui coordinate parametrizzeranno i punti dei gruppi classici.

Fissiamo intanto l'intorno U di I in $GL_n(\mathbb{R})$ tale che ln sia un diffeomorfismo di U su un intorno V dello zero in $M_n(\mathbb{R})$.

15.4.4 Teorema *Se $U' = U \cap SL_n(\mathbb{R})$ allora* ln *è un diffeomorfismo fra U' e un intorno dello zero nello spazio delle matrici a traccia nulla.*

DIMOSTRAZIONE: Se $\mathrm{tr}(X) = 0$, consideriamo la curva

$$A(t) = e^{tX}$$

che è un gruppo a un parametro $(A(t+s) = A(t)A(s))$ e quindi, se $d(t) := \det A(t)$ si ha

$$d(t+s) = d(t)d(s)$$

sicché la funzione d è un gruppo a un parametro in $\mathbb{R}$, per cui deve esistere una costante c tale che $d(t) = e^{ct}$. Dimostriamo che $c = 0$. In effetti è

$$d(t) = \det e^{tX} = \det(1 + tX + o(t)) = t \,\mathrm{tr}\, X + o(t)$$

ove $o(t)$ è una matrice tale che $\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{o(t)}{t}=0$. Allora l'ipotesi che $\operatorname{tr} X=0$ implica che

$$c=\left(\frac{df}{dt}\right)_{t=0}$$

il che dimostra la tesi.

QED

Abbiamo quindi determinato una carta locale di $SL_n(\mathbb{R})$ data dalle coordinate dello spazio vettoriale

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})=\{A\in M_n(\mathbb{R})\mid \operatorname{tr} A=0\}$$

che ha dimensione n^2-1.

15.4.5 Teorema *Se $U''=U\cap O(n)$ (rispettivamente $U''=U\cap U(n)$, $U''=U\cap Sp(n)$) allora* ln *è un diffeomorfismo fra U'' e un intorno dello zero nello spazio delle matrici antisimmetriche (rispettivamente antihermitiane, antihermitiane quaternioniche). Per i gruppi speciali $SO(n)$, $SU(n)$ vale lo stesso enunciato rispetto alle matrici antisimmetriche speciali e antihermitiane speciali.*

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamolo solo nel caso di $O(n)$: negli altri due la dimostrazione è la stessa. Osserviamo che se X è antisimmetrica, i.e. $X+X^T=0$ allora X e X^T commutano, e quindi

$$(e^X)^T e^X=e^{X^T+X}=e^0=I$$

cioè $e^X\in O(n)$.

QED

Gli spazi delle matrici antisimmetriche, antihermitiane e antihermitiane quaternioniche si denotano con

$$\mathfrak{so}(n)\,,\qquad \mathfrak{su}(n)\,,\qquad \mathfrak{sp}(n)$$

Consideriamo di nuovo l'esempio del gruppo $\mathbb{T}^n$ considerato in precedenza: possiamo realizzarlo come toro massimale T^n in ciascuno dei gruppi classici compatto $SO(n)$, $SU(n)$ e $Sp(n)$; allora è ovvio che su T^n la mappa esponenziale è suriettiva (ogni suo elemento è un esponenziale di un numero reale) e non iniettiva: in effetti la mappa esponenziale da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{T}^n$ è esattamente la mappa che realizza il quoziente

$$\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n=\mathbb{T}^n$$

Ma ogni elemento di un gruppo classico compatto è coniugato ad un elemento di un suo toro massimale, quindi

15.4.6 Teorema *La mappa esponenziale è suriettiva dallo spazio* $\mathfrak{so}(n)$ *delle matrici antisimmetriche (rispettivamente* $\mathfrak{su}(n)$, $\mathfrak{sp}(n)$*) nel gruppo* $SO(n)$ *(rispettivamente* $SU(n)$, $Sp(n)$*).*

Abbiamo fin qui considerato gruppi di matrici, ed abbiamo mostrato come, nei nostri esempi, questi gruppi possiedano oltre alla struttura di gruppo topologico, anche una struttura "localmente euclidea": infatti abbiamo determinato delle carte locali su essi, quindi degli omeomorfismi locali con $\mathbb{R}^n$. Abbiamo inoltre visto il legame esistente fra le coordinate e il prodotto nel gruppo, per tramite della mappa esponenziale.

In generale, se G è un gruppo di matrici che possiede per ogni suo punto delle coordinate (basta che le possieda intorno all'I) le sue *coordinate canoniche* sono le coordinate $(x_1, ..., x_m)$ definite come segue: consideriamo la mappa esponenziale ed un intorno U di I diffeomorfo tramite essa ad un intorno V di 0 in un sottospazio $\mathfrak{g}$ (di dimensione m) dello spazio delle matrici $M_n(\mathbb{R})$. Se $(e_1, ..., e_m)$ è una base dello spazio vettoriale $\mathfrak{g}$, possiamo scrivere, per ogni $A \in \mathfrak{g}$:

$$A = \sum_{k=1}^{m} a_k e_k$$

Se $g \in U$, $\ln g \in V$ e scriviamo

$$\ln g = \sum_{k=1}^{m} x_k(g) e_k$$

In questo modo determiniamo delle coordinate x_i su G che si dicono canoniche. Viceversa, se consideriamo un elemento $A \in \mathfrak{g}$ qualsiasi, esisterà certo un $t > 0$ tale che $tA \in V$. Quindi $e^{tA} \in U \subset G$. Se $A, B \in \mathfrak{g}$, possiamo moltiplicare e^{tA} e e^{tB} rispetto al prodotto in G: dato che il prodotto è continuo, possiamo scrivere

$$e^{tA} e^{tB} = e^{tC}$$

Naturalmente C dipende da A e B, e riuscendo ad esprimerlo in termini di A e B otterremmo un legame completo fra le coordinate ed il prodotto: per il calcolo effettivo di C per mezzo della serie di Campbell–Hausdorff, si rimanda a [26], [27] o [22]. Limitiamoci qui a dare delle approssimazioni per questo elemento C.

15.4.7 Proposizione *Se* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *allora*

$$e^{A+B} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{n}A} e^{\frac{1}{n}B} \right)^n \tag{1}$$

$$e^{[A,B]} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{n}A} e^{\frac{1}{n}B} e^{-\frac{1}{n}A} e^{-\frac{1}{n}B} \right)^{n^2} \tag{2}$$

DIMOSTRAZIONE: Utilizziamo l'identità di Weyl 15.3.6 e il suo corollario. Notiamo infatti che, per ogni A, B:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}[\frac{1}{n}A,[\frac{1}{n}A,\frac{1}{n}B]] = \lim_{n\longrightarrow\infty}[\frac{1}{n}B,[\frac{1}{n}A,\frac{1}{n}B]] = 0$$

e dunque le ipotesi per applicare queste formule sono verificate al limite per $n \longrightarrow \infty$. Quindi:

$$e^{A+B} = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(e^{\frac{A}{n}+\frac{B}{n}}\right)^n = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(e^{-\frac{1}{2}[\frac{A}{n},\frac{B}{n}]}e^{\frac{A}{n}}e^{\frac{B}{n}}\right)^n = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(e^{\frac{A}{n}}e^{\frac{B}{n}}\right)^n$$

dato che $-\frac{1}{2n^2}[A,B]$ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\frac{A}{n}$ e $\frac{B}{n}$), il che prova la (1). Per la (2) si noti che, per il corollario all'identità di Weyl:

$$e^{[A,B]} = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(e^{[\frac{A}{n},\frac{B}{n}]}\right)^{n^2} = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(e^{\frac{A}{n}}e^{\frac{B}{n}}e^{-\frac{A}{n}}e^{-\frac{B}{n}}\right)^{n^2}$$

cioè la (2).

QED

Usando questa proposizione possiamo scrivere

$$e^{tA}e^{tB} = e^{tA+tB+\frac{1}{2}t^2[A,B]+O(t^3)}$$

ed ottenere così una approssimazione al secondo ordine per la funzione C.

15.5 Varietà differenziabili

La presenza di carte locali intorno ad ogni punto di uno spazio topologico rende quest'ultimo un oggetto geometrico sul quale è possibile sviluppare il calcolo differenziale: non ci addentreremo in questi sviluppi, ma diamo, motivati dagli esempi dei gruppi classici, una fondamentale

15.5.1 Definizione *Una* varietà differenziabile *è uno spazio topologico tale che ogni suo punto possieda una carta locale (U,x) di dimensione n (cioè un omeomorfismo x di U su un aperto di $\mathbb{R}^n$) in modo che, se (U,x) e (V,y) sono carte locali e $U \cap V \neq \emptyset$ allora la funzione definita da un aperto di $\mathbb{R}^n$ ed a valori in $\mathbb{R}^n$*

$$y \circ x^{-1} : x(U\cap V) \longrightarrow y(U\cap V)$$

*è infinitamente differenziabile (*condizione di compatibilità per carte locali*).*

In altri termini una varietà differenziabile non solo è localmente omeomorfa a $\mathbb{R}^n$, ma i "cambiamenti di coordinate" fra una carta e l'altra sono effettuati da funzioni differenziabili.

Il numero n si dice *dimensione della varietà*. Ovviamente l'insieme degli intorni U dati dalle carte locali è un ricoprimento della varietà: quindi se la varietà, come spazio topologico, è compatta, possiamo considerare sempre un insieme finito di carte su essa.

Gli esempi di varietà pervadono la Matematica moderna e non possiamo dare qui nemmeno i rudimenti della teoria: ci limitiamo a citare i più ovvi. Intanto $\mathbb{R}^n$ con le coordinate vettoriali è una varietà differenziabile[4], come pure lo sono $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{H}^n$.

15.5.2 Esempio

- *Ovviamente $\mathbb{R}^n$ rispetto alla singola carta data dalla mappa identica $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è una varietà differenziabile.*
- *Un aperto U di una varietà differenziabile V è ancora una varietà differenziabile rispetto alla carta identica $U \longrightarrow U$. Ad esempio, dato che $M_n(\mathbb{R})$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^{n^2}$ è una varietà per l'esempio (1), come pure è una varietà $GL_n(\mathbb{R})$ che è l'aperto $\{\det(A) \neq 0\}$ in $M_n(\mathbb{R})$.*
- *Un modo diretto di notare che $GL_n(\mathbb{R})$ è una varietà è rammentare il teorema 15.3.8: esiste un intorno dell'origine nello spazio vettoriale M_n tale che, ristretta a questo intorno, e è un diffeomorfismo su un intorno dell'identità di $GL_n(\mathbb{R})$. Quindi il suo inverso costituisce una carta intorno all'identità della varietà $GL_n(\mathbb{R})$, e questo introduce delle coordinate privilegiate su $GL_n(\mathbb{R})$ che si dicono canoniche.*
- *I teoremi 15.4.4 e 15.4.5 ci dicono che $SL_n(\mathbb{R})$, $O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$, $SO(n)$ e $SU(n)$ sono varietà differenziabili: infatti queste proposizioni forniscono delle carte locali intorno agli elementi neutri di questi gruppi, e, per moltiplicazione, queste carte danno luogo a carte locali intorno ad ogni elemento del gruppo.*

Diamo ora due classi di esempi non banali di varietà (che contengono i casi $U(1) = S^1$, $SU(2) = S^3$ e $SO(3) = \mathbb{RP}^3$):

15.5.3 Esempio *Le sfere*

$$S^n = \{(x_0, x_1, ..., x_n) \,|\, x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

sono varietà differenziabili. Consideriamo il punto $N = (1, 0, ..., 0)$ (il "polo nord"); se $P = (p_0, p_1, ..., p_n) \in S^n$ è un qualsiasi altro punto allora possiamo

[4] Notiamo che uno spazio vettoriale di dimensione infinita non è una varietà secondo la nostra definizione.

considerare la retta per P e N, le cui equazioni cartesiane sono

$$\frac{x_0 - 1}{p_0 - 1} = \frac{x_1}{p_1} = \cdots = \frac{x_n}{p_n}$$

Questa retta interseca il piano $x_0 = 0$ nel punto $f(P)$ di coordinate

$$f(P) = (0, \frac{p_1}{1-p_0}, \frac{p_2}{1-p_0}, ..., \frac{p_n}{1-p_0})$$

(proiezione stereografica di P). Questa funzione $f : S^n \setminus \{N\} \longrightarrow \{x_0 = 0\}$ risulta essere un omeomorfismo dall'aperto $S^n \setminus \{N\} \subset S^n$ allo spazio cartesiano $(n-1)$-dimensionale $\{x_0 = 0\} = \{(0, x_1, ..., x_n)\} \cong \in\mathbb{R}^{n-1}$.

In modo analogo, se togliamo a S^n il "polo nord" $S = (-1, 0, ..., 0)$, possiamo costruire un altro omeomorfismo $g : S^n \setminus \{S\} \longrightarrow \{x_0 = 0\}$:

$$g(P) = (0, \frac{p_1}{1+p_0}, \frac{p_2}{1+p_0}, ..., \frac{p_n}{1+p_0})$$

Sull'intersezione $S^n \setminus \{N, S\}$ entrambe le funzioni f e g sono definite e sono omeomorfismi sull'aperto $\{x_0 = 0\} \setminus \{(0, 0, ..., 0)\}$; calcoliamo allora

$$g \circ f^{-1}(0, t_1, ..., t_n) = g(p_0, p_1, ..., p_n)$$

dove $(p_0, p_1, ..., p_n)$ si ottiene intersecando la retta per N e $(0, t_1, ..., t_n)$ con la sfera S^n:

$$1 - p_0 = \frac{p_1}{t_1} = \cdots = \frac{p_1}{t_1}, \qquad p_0^2 + p_1^2 + \cdots + p_n^2 = 1$$

Se poniamo $\alpha := p_1^2 + \cdots + p_n^2$ troviamo allora

$$p_0^2(1 + \alpha) - 2p_0\alpha + (\alpha - 1) = 0$$

quindi (la soluzione $p_0 = 0$ viene ovviamente scartata):

$$p_0 = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}, p_1 = \frac{2t_1}{1+\alpha}, \dots, p_n = \frac{2t_n}{1+\alpha}$$

Quindi la funzione $g \circ f^{-1}$ vale su un punto di $\{x_0 = 0\} \setminus \{(0, 0)\}$:

$$\begin{aligned} g \circ f^{-1}(0, t_1, ..., t_n) &= g(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}, \frac{2t_1}{1+\alpha}, ..., \frac{2t_n}{1+\alpha}) \\ &= (0, \frac{t_1}{\alpha}, ..., \frac{t_n}{\alpha}) \end{aligned}$$

ed è dunque un omeomorfismo infinitamente differenziabile.

15.5.4 Esempio *Lo spazio proiettivo $\mathbb{RP}^n$ è una varietà differenziabile: rammentiamo che si tratta dell'insieme delle rette per l'origine di $\mathbb{R}^{n+1}$. Possiamo rappresentare un punto $p \in \mathbb{RP}^n$ con le sue coordinate omogenee $p = [p_0 : p_1 : \cdots : p_n]$ dove non tutti i numeri reali $p_0, p_1, ..., p_n$ sono nulli.*

Definiamo per ogni $i = 0, ..., n$ gli aperti

$$U_n = \{p \in \mathbb{RP}^n \,|\, p_i \neq 0\}$$

e le funzioni $f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definite come

$$f_i(p) = (\frac{p_0}{p_i}, ..., \frac{p_{i-1}}{p_i}, \frac{p_{i+1}}{p_i}, ..., \frac{p_n}{p_i})$$

È ovvio che si tratta di carte locali: dimostriamo che su $U_i \cap U_j$ vale la condizione di compatibilità, precisamente calcoliamo

$$f_i \circ f_j^{-1}(p_1, ..., p_n)$$

dove $(p_1, ..., p_n) \in f_j(U_i \cap U_j)$: quest'ultimo è l'insieme dei punti $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tali che $x_j \neq 0$. Allora

$$\begin{aligned} f_i \circ f_j^{-1}(p) &= f_i([p_1 : \cdots : p_{j-1} : 1 : p_{j+1} : \cdots : p_n]) \\ &= \begin{cases} (\frac{p_1}{p_i}, ..., \frac{p_{i-1}}{p_i}, \frac{p_{i+1}}{p_i}, ..., \frac{p_{j-1}}{p_i}, \frac{p_{j+1}}{p_i} ..., \frac{p_n}{p_i}) & \text{se } i < j \\ (\frac{p_1}{p_i}, ..., \frac{p_{j-1}}{p_i}, \frac{p_{j+1}}{p_i}, ..., \frac{p_{i-1}}{p_i}, \frac{p_{i+1}}{p_i} ..., \frac{p_n}{p_i}) & \text{se } i \geq j \end{cases} \end{aligned}$$

e quindi $f_i \circ f_j^{-1}$ è un omeomorfismo differenziabile.

Dato che le coordinate locali sono omeomorfismi locali con $\mathbb{R}^n$, le proprietà locali di $\mathbb{R}^n$ sono godute anche dalle varietà differenziabili:

15.5.5 Teorema *Una varietà differenziabile è localmente compatta, localmente connessa e localmente semplicemente connessa. In particolare ammette compattificazione di Alexandroff e, se è connessa, un unico rivestimento universale.*

Non è invece detto che una varietà sia paracompatta: è comunque una condizione molto naturale e utile da imporre, dato che implica l'esistenza di partizioni dell'unità (cfr. teorema 2.3.5) differenziabili, per mezzo delle quali molte costruzioni fondamentali non potrebbero effettuarsi (ad esempio i tensori metrici).

Per una varietà, la paracompattezza equivale a proprietà topologiche molto importanti.

15.5.6 Teorema *Se M è una varietà differenziabile di Hausdorff allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- *M è paracompatta.*
- *M è σ-compatta (è unione di una famiglia numerabile di compatti).*
- *M è di Lindelöf (ogni ricoprimento aperto possiede un sottoricoprimento numerabile).*
- *Esiste una funzione propria continua $\varphi : M \longrightarrow (0, \infty)$.*
- *M è a base numerabile.*

DIMOSTRAZIONE: L'equivalenza delle (1)–(4) segue dall'essere M localmente compatta di Hausdorff e dal lemma 2.3.8. D'altronde ogni spazio topologico a base numerabile è di Lindelöf, quindi non resta che dimostrare il viceversa. Dato che M è una varietà possiede un ricoprimento di carte locali, dal quale se ne può estrarre uno numerabile: ma ogni elemento di questo ricoprimento numerabile è un intorno U omeomorfo a un intorno di $\mathbb{R}^n$, quindi possiede una base numerabile. L'unione numerabile dell'unione numerabile degli elementi di questa base è la base numerabile di M cercata.

QED

15.5.7 Esempio *Consideriamo la* varietà di Calabi–Rosenlicht*: si tratta dell'insieme*

$$X = \{x = 0\} \cup \{z = 0\} \cup \bigcup_{a \in \mathbb{R}} U_a \qquad \text{ove } U_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \neq 0 \text{ oppure } y = a\}$$

(unione dei piani Oyz, Oxy e del piano Oxy cui sia stata rimossa la retta $\{x = 0\}$ ed aggiunta la retta $\{x = 0,\ y = a\} \subset \mathbb{R}^3$.)

Definiamo le funzioni $f_a : U_a \longrightarrow \mathbb{R}^2$ come

$$f_a(x, y, z) = \begin{cases} (x, \frac{y-a}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ (0, z) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Si tratta ovviamente di un omeomorfismo su $\mathbb{R}^2$; verifichiamo ora la condizione di compatibilità su $U_a \cap U_b$:

$$f_a \circ f_b^{-1}(t, s) = (t, s + \frac{b-a}{t})$$

che è ovviamente differenziabile.

La varietà così costruita è, come spazio topologico, di Hausdorff e connesso, ma non paracompatto: infatti non soddisfa nessuna delle proprietà del teorema precedente: ad esempio non è σ-compatta, come si vede facilmente.

Nel teorema precedente abbiamo supposto che M sia di Hausdorff perché questo non è vero in generale per una varietà: comunque gli esempi di varietà non di Hausdorff sono poco interessanti.

15.5.8 Esempio *Nel piano $\mathbb{R}^2$ consideriamo l'insieme $(\mathbb{R}\setminus\{0\})\cup\{(0,1),(0,-1)\}$, ed i suoi sottoinsiemi aperti $U=(\mathbb{R}\setminus\{0\})\cup\{(0,1)\}$ e $V=(\mathbb{R}\setminus\{0\})\cup\{(0,1)\}$, con le funzioni $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ e $g:V\longrightarrow\mathbb{R}$ definite come*

$$f(x,y)=\begin{cases} x & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}\qquad g(x,y)=\begin{cases} x & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

Evidentemente si tratta di due carte locali e, se $t\in f(U\cap V)=\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$ e $s\in g(U\cap V)=\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$ troviamo

$$g\circ f^{-1}(x)=g(x,0)=x\qquad e\qquad f\circ g^{-1}(x)=f(x,0)=x$$

quindi la condizione di compatibilità è verificata. Comunque la varietà così ottenuta non è di Hausdorff, dato che $(0,1)$ e $(0,-1)$ non possono essere separati da nessuna coppia di intorni disgiunti.

La morale della discussione precedente è: *supporremo che le nostre varietà siano di Hausdorff paracompatte.*

15.5.9 Definizione *Se M e N sono varietà differenziabili di dimensioni m e n, una funzione $f:M\longrightarrow N$ si dice* differenziabile *se, per ogni carta locale (U,x) in M e (V,y) in N la funzione*

$$y\circ f\circ x^{-1}:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^n$$

è differenziabile. L'insieme delle funzioni differenziabili da M in N si denota $C^\infty(M,N)$; se $N=\mathbb{R}$ si scrive semplicemente $C^\infty(M)$.

Una funzione differenziabile è in particolare continua. Ad esempio una carta locale è una funzione differenziabile per definizione.

Rispetto alle funzioni differenziabili le varietà formano ovviamente una categoria, i cui isomorfismi si dicono *diffeomorfismi* (sono cioè le funzioni biunivoche differenziabili con inversa differenziabile).

Osserviamo che due varietà possono essere omeomorfe ma non diffeomorfe: cioè possono esistere strutture distinte di varietà differenziabile sul medesimo spazio topologico[5].

[5] Un famoso risultato di J. Milnor mostra l'esistenza di strutture differenziabili "alternative" sulla sfera S^7: risultati più recenti e spettacolari mostrano l'esistenza di strutture differenziabili "esotiche" sullo spazio $\mathbb{R}^4$, cfr Donaldson–Kronheimer *The Geometry of 4-manifolds*, Oxford.