Capitolo 14

GRUPPI TOPOLOGICI

In questo capitolo discutiamo i gruppi topologici, che generalizzano da un lato i gruppi di matrici dell'Algebra Lineare, dall'altro la teoria delle serie e dell'integrale di Fourier, sviluppata nel capitolo **??**. L'intera teoria poggia sulla possibilità di definire un integrale per questi gruppi che generalizza l'integrale di Lebesgue sul gruppo additivo dei numeri reali.

14.1 Gruppi topologici e misure di Haar

L'analogia esistente fra la teoria di Fourier in $\mathbb{R}^n$ e la teoria delle serie di Fourier non è un caso: possiamo in effetti formulare una generalizzazione di queste teorie che metta in luce quali sono i loro caratteri comuni.

Osserviamo ad esempio che, nel definire le convoluzioni in $\mathbb{R}^n$, abbiamo in realtà usato solo due ingredienti essenziali: l'esistenza di una misura boreliana completa su $\mathbb{R}^n$ (la misura di Lebesgue), l'operazione di somma vettoriale in $\mathbb{R}^n$ che lo rende un gruppo commutativo e la compatibilità esistente fra queste due strutture espressa dall'invarianza della misura di Lebesgue per traslazioni. Nel caso delle serie di Fourier, pure gli unici ingredienti erano l'esistenza di una misura boreliana completa sulla circonferenza unitaria $\mathbb{T}$, l'esistenza di un prodotto commutativo fra gli elementi di $\mathbb{T}$ ($e^{it}e^{is} = e^{i(s+t)}$) e l'invarianza della misura per le traslazioni di questa struttura gruppale.

Possiamo quindi immaginare di generalizzare la teoria di Fourier al caso di un gruppo G commutativo sul quale esista una misura boreliana completa invariante per la moltiplicazione del gruppo. Naturalmente una misura boreliana presuppone l'esistenza di una topologia, e questa topologia dovrà necessariamente essere compatibile con la struttura gruppale, cioè l'operazione di moltiplicazione del gruppo dovrà essere continua. Si arriva in questo modo alla

14.1.1 Definizione *Un* gruppo topologico *è un insieme G che sia al tempo stesso un gruppo rispetto ad una operazione $\cdot$ ed uno spazio topologico rispetto* *ad una topologia $\mathcal{T}$ in modo che la funzione*

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto g \cdot h^{-1} \end{aligned}$$

sia continua (su $G \times G$ si considera la topologia prodotto).

Si osservi che non è richiesta la commutatività.

14.1.2 Esempio

- *Uno spazio vettoriale topologico V, rispetto alla sua topologia ed all'operazione di somma di vettori è un gruppo topologico commutativo.*
- *Ogni gruppo finito è un gruppo topologico rispetto alla topologia discreta (il che fornisce esempi di gruppi non commutativi).*
- *Dato che il prodotto di compatti è compatto, un prodotto infinito di gruppi finiti è un gruppo compatto (rispetto alla struttura gruppale di prodotto diretto e topologica di prodotto topologico) non discreto (ovviamente un gruppo discreto compatto è finito!): un esempio è il prodotto numerabile di copie di $\mathbb{Z}_2$ (il gruppo moltiplicativo $\{-1, +1\}$) che risulta quindi essere un gruppo topologico compatto non discreto.*
- *Il gruppo $\mathbb{Z}$ come sottogruppo topologico di $\mathbb{R}$ è un gruppo topologico localmente compatto; inoltre, dato che il quoziente di gruppi è un gruppo, il gruppo $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (toro unidimensionale ovvero circonferenza unitaria in $\mathbb{R}^2$) è un gruppo topologico rispetto alla topologia quoziente: dato che si identifica con la circonferenza $\{z \in \mathbb{C} | \; |z| = 1\}$ è compatto.*
- *Il gruppo $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ degli operatori unitari di uno spazio di Hilbert è pure un gruppo topologico (cfr. il lemma 9.1.9).*

14.1.3 Proposizione *Un gruppo topologico è T_1 se e solo se è T_2.*

DIMOSTRAZIONE: Se è T_2 è *a fortiori* T_1; viceversa, se è T_1 la diagonale $\Delta \subset G \times G$ è la controimmagine $m^{-1}(e)$ dell'insieme chiuso $\{e\}$ per la mappa continua $m(x, y) := x^{-1}y$, e quindi è chiusa.

QED

Non ogni gruppo dotato di una topologia è necessariamente topologico: ad esempio $\mathbb{R}$ con la topologia di Zariski (gli aperti sono i complementari degli insiemi finiti) non è un gruppo topologico, dato che, come spazio, è T_1 (i punti sono chiusi) ma non T_2 (ogni aperto è denso!) e quindi per la proposizione precedente non può essere un gruppo topologico.

14.1.4 Esempio *Una classe notevole di gruppi topologici è data dai gruppi di matrici come il* gruppo lineare generale reale

$$GL(n,\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$$

(ed il suo analogo complesso); il prodotto in $GL(n,\mathbb{R})$ è il prodotto di matrici e la sua topologia è quella indotta da $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ del quale è un aperto (in quanto è il complementare dell'insieme $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 0\}$ che è il luogo degli zeri di una funzione continua, quindi un chiuso). Poiché il prodotto di matrici AB dipende in modo polinomiale dalle entrate delle matrici A e B, l'operazione di gruppo è continua e quindi il gruppo lineare generale è un gruppo topologico non commutativo, ma localmente compatto (lo è $\mathbb{R}^{n^2}$).

14.1.5 Definizione *Una* misura di Haar sinistra *(rispettivamente* misura di Haar destra*) su un gruppo topologico è una misura boreliana regolare positiva μ invariante a sinistra (rispettivamente a destra) per la moltiplicazione del gruppo, cioè tale che*

$$\forall f \in L^1(G) \qquad \int f(g'g)d\mu(g) = \int f(g)d\mu(g)$$

Se una misura di Haar è invariante sia a sinistra che a destra, si dice misura di Haar biinvariante *e si parla di "misura di Haar" senza altre specifiche.*

Consideriamo un gruppo topologico localmente compatto: esiste il seguente teorema, per il quale si rimanda ad esempio ai classici [32] o [26], oppure a [30]:

Teorema (HAAR). *Se G è un gruppo topologico localmente compatto allora*

- *G possiede una misura di Haar sinistra (rispettivamente destra) unica a meno di un fattore moltiplicativo.*

- *La misura di Haar sinistra e la misura di Haar destra sono assolutamente continue l'una rispetto all'altra.*

- *Se G è compatto allora la misura di Haar sinistra e la misura di Haar destra coincidono e sono finite.*

Dimostreremo questo teorema solo nel caso commutativo e, più avanti, per i gruppi di Lie; l'esistenza della misura di Haar è un fatto cruciale nella teoria dei gruppi topologici, perché, ad esempio, consente di sviluppare la teoria delle rappresentazioni. Questo spiega perché i gruppi che si considerano sono localmente compatti: solo per essi si può dare una misura di Haar[1].

[1] Una domanda che è legittimo porsi è se non si possa dare un concetto di "gruppo misurabile" indipendente dalla topologia: se quello che realmente conta nella teoria è l'esistenza della misura di Haar, *a priori* non è necessario che il gruppo sia topologico; si dimostra comunque che se un gruppo possiede una misura invariante allora è denso in un gruppo topologico localmente compatto (teorema di Weil, cfr. [32]

14.1.6 Esempio *Un gruppo non localmente compatto è il gruppo additivo di uno spazio vettoriale topologico di dimensione infinita.*

Osserviamo che, per il teorema di Riesz–Markov 9.2.2, il teorema di Haar equivale all'esistenza di un funzionale lineare positivo invariante a sinistra (risp. a destra):

$$I : C_c(G) \longrightarrow \mathbb{R}$$

ove $I : C_c(G)$ è lo spazio delle funzioni complesse a supporto compatto su G.

14.1.7 Definizione *La derivata di Radon–Nikodym*

$$\Delta = \frac{d\mu_L}{d\mu_R}$$

delle misure di Haar sinistra e destra si dice funzione unimodulare *del gruppo topologico G; se $\Delta = 1$ il gruppo stesso di dice* unimodulare.

14.1.8 Esempio

- *Un gruppo topologico localmente compatto e commutativo è unimodulare, dato che la misura di Haar destra e sinistra debbono coincidere ($gg' = g'g$); anche un gruppo compatto qualsiasi lo è, come segue dal teorema di Haar.*

- *Consideriamo il gruppo delle matrici triangolari superiori a coefficienti in $\mathbb{R}$:*

$$N_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right\}_{a_{ij} \in \mathbb{R}}$$

Si tratta di un gruppo topologico omeomorfo a $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$: esiste quindi la misura di Lebesgue

$$d\mu = \prod_{i<j} da_{ij}$$

Si vede immediatamente che questa è una misura di Haar su $N_n(\mathbb{R})$, cioè che è invariante a sinistra: infatti, se $A, B \in N_n(\mathbb{R})$, il coefficiente nella riga i-sima e nella colonna s-esima della matrice AB è

$$(AB)_{is} = \sum_k a_{ik} b_{ks} = b_{is} + a_{is} + \sum_{i<k<s} a_{ik} b_{ks}$$

cioè è pari a $b_{is} + a_{is}$ più una costante (che non dipende dagli elementi di indici $_{is}$): ne segue che $d\mu(AB) = d\mu(B)$; analogamente si dimostra che $d\mu$ è invariante a destra, sicché il gruppo è unimodulare.

14.1.9 Teorema *Se G è un gruppo topologico commutativo localmente compatto allora esiste un'unica misura Haar su G.*

DIMOSTRAZIONE: L'operazione di moltiplicazione in G induce l'operatore di traslazione, se $g \in G$:

$$\begin{aligned} L_g : C_c(G)^* &\longrightarrow C_c(G) \\ \varphi &\longmapsto (f \longmapsto \varphi(f_g)) \end{aligned}$$

(con f_g denotiamo la funzione $f(h) := f(gh)$ da G in $\mathbb{R}$). Evidentemente L_g è continua rispetto alle topologie *-deboli e, al variare di g abbiamo la famiglia

$$\mathcal{L} := \{L_g\}_{g\in G}$$

di trasformazioni lineari continue che commutano a due a due (perché G è commutativo: $L_gL_h = L_{gh} = L_{hg} = L_hL_g$). Se consideriamo il convesso

$$K := \{\varphi \in C_c(G)^* \mid ||\varphi|| \leq 1\} \cap \{\varphi \in C_c(G)^* \mid F(1) = 1\}$$

è immediato verificare che la famiglia $\mathcal{L}$ lascia invariante K: $\mathcal{L}K \subset K$. Ma, per il teorema di Alaoglu, K è compatto; possiamo quindi applicare alla famiglia $\mathcal{L}$ ed al convesso compatto K il teorema del punto fisso di Markov–Kakutani 8.3.11 e dedurre l'esistenza di un punto fisso $\varphi_0 \in K$. Abbiamo cioè un funzionale lineare continuo su $C_c(G)$ invariante per ogni traslazione del gruppo: per il teorema di Riesz–Markov 9.2.2 questo funzionale determina univocamente una misura di Radon μ che è proprio la misura invariante cercata.

QED

La misura di Haar sul gruppo commutativo G è positiva, in quanto lo sono i funzionali lineari in K, ed è finita sui compatti perché φ_0 è continuo (di nuovo per il teorema di Riesz–Markov).

14.1.10 Esempio

- *È facile rendersi conto che, nel caso di $\mathbb{R}^n$, questa costruzione dà luogo esattamente alla misura di Lebesgue (a meno di multipli costanti).*

- *Se il gruppo è compatto, $\mu(G)$ è finito, ed in genere si normalizza la misura in modo che $\mu(G) = 1$.*

- *Nel caso $G = \mathbb{Z}$ la misura di Haar ν è semplicemente la media sulle funzioni a supporto compatto $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, cioè su quelle che non valgono zero se non in un numero finito di punti:*

$$\int_{\mathbb{Z}} f(n)d\nu(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\nu(\{n\})$$

In questo caso si normalizza la misura in modo che

$$\nu(\{n\}) = 1$$

per ogni punto $n \in \mathbb{Z}$ *e quindi la misura di Haar è la misura # che conta:* $\nu(E) = \#E = \operatorname{Card} E$.

- *In particolare, su un gruppo abeliano finito (che è della forma* $\mathbb{Z}_m$*: classi di congruenza modulo* m*), la misura di Haar pure è la misura che conta #.*

Possiamo quindi considerare la teoria della misura su G: ad esempio gli spazi L^p, il teorema di Fubini ed i teoremi di convergenza degli integrali. Osserviamo che nel definire la convoluzione di funzioni in $C_c(\mathbb{R}^n)$ e $L^1(\mathbb{R}^n)$ non abbiamo usato altro che l'invarianza della misura e le proprietà gruppali della somma di vettori: *mutatis mutandis* possiamo quindi riformulare tutta la teoria per un gruppo commutativo localmente compatto G; la teoria della trasformata di Fourier è il caso $G = \mathbb{R}^n$ e la teoria delle serie di Fourier il caso $G = \mathbb{T}$.

14.1.11 Teorema *Se* G *è un gruppo topologico che ammette una misura di Haar, lo spazio di Banach* $L^1(G)$ *è un'algebra di Banach rispetto alla convoluzione, che è commutativa se e solo se lo è il gruppo.*

DIMOSTRAZIONE: Definiamo la convoluzione di due elementi di $L^1(G)$ come

$$\varphi * \psi(g) := \int_G \varphi(h)\psi(h^{-1}g)dh$$

Vediamo intanto che $\varphi * \psi \in L^1(G)$: dato che la funzione $(g, h) \longmapsto (h^{-1}g, h)$ è un omeomorfismo di $G \times G$ in sé, porta funzioni misurabili in funzioni misurabili: quindi, dato che il prodotto punto per punto $\varphi(g)\psi(g)$ è misurabile se lo sono φ e ψ, anche $\varphi(h)\psi(h^{-1}g)$ lo è; allora:

$$\begin{aligned}\int\int |\varphi(h)\psi(h^{-1}g)|dgdh &= \int |\varphi(h)| \int |\psi(h^{-1}g)|dg \\ &= \int |\varphi(h)|dh \int |\psi(g)|dg < \infty\end{aligned}$$

Cioè $\varphi(h)\psi(h^{-1}g) \in L^1(G \times G)$ e quindi, per il teorema di Fubini, $\varphi * \psi \in L^1(G)$.

Che la convoluzione renda $L^1(G)$ un'algebra associativa si dimostra con gli stessi passaggi del caso $G = \mathbb{R}^n$; dimostriamo dunque che, rispetto alla sua struttura di spazio di Banach, $L^1(G)$ è un'algebra di Banach. Infatti

$$\begin{aligned}||\varphi * \psi||_1 &= \int \left| \int \varphi(h)\psi(h^{-1}g)dh \right| dg \le \int \left(\int |\varphi(h)|\,|\psi(h^{-1}g)|dh \right) dg \\ &= \int \left(\int |\psi(h^{-1}g)|dg \right) |\varphi(h)dh = \int |\psi(g)|dg \int |\varphi(h)|dh \\ &= ||\varphi||_1\, ||\psi||_1\end{aligned}$$

Infine, abbiamo che se G è abeliano allora

$$\begin{aligned}\varphi * \psi(g) &= \int \varphi(h)\psi(h^{-1}g)dh = \int \varphi(gk^{-1})\psi(k)dk \\ &= \int \psi(k)\psi(k^{-1}g)dk = \psi * \varphi(g)\end{aligned}$$

(col cambio di variabile $h^{-1}g = k$ e tenendo conto che $dh = d(gh)$ e $dh = dh^{-1}$ per invarianza della misura di Haar) e viceversa.

QED

14.1.12 Esempio

- *Su un gruppo abeliano finito G, l'algebra $L^1(G)$ è semplicemente l'*algebra di gruppo *cioè lo spazio*

$$\mathbb{C}[G] = \left\{ \sum_{g\in G} a_g g \mid a_g \in \mathbb{C} \right\}$$

(infatti una funzione $G \longrightarrow \mathbb{C}$ è un elemento di $\mathbb{C}^G = \mathbb{C}^{\operatorname{Card} G}$, cioè una $(\operatorname{Card} G)$*-pla, che scriviamo come una somma formale negli elementi di g) con la convoluzione*

$$a * b(g) = \int_G a(gh^{-1})b(h)dh = \sum_{h\in G} a(gh^{-1}b(h) = \sum_{h_1h_2=g\in G} a(h_1)b(h_2)$$

- *Se G è un gruppo discreto, possiede ovviamente la misura di Haar che assegna ad ogni $\{g\}$ (per $g \in G$) un valore positivo fissato, ad esempio 1.*

14.1.13 Proposizione *L'algebra $L^1(G)$ possiede un elemento neutro e se e solo se il gruppo G è discreto.*

DIMOSTRAZIONE: Ovviamente, se G è discreto, la funzione $\varepsilon : G \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\varepsilon(g) := \delta_{ge}$$

(che si identifica all'elemento $e\in G$) è diversa da zero in $L^1(G)$, dato che $\mu(\{e\}) > 0$:

$$\int_G \varepsilon(g)d\mu(g) = \mu(\{e\}) = 1$$

ed è ovviamente l'elemento neutro per la convoluzione.

Viceversa, se $L^1(G)$ contiene un elemento neutro $e : G \longrightarrow \mathbb{R}$ allora la misura degli insiemi aperti non vuoti possiede un limite inferiore positivo: se così non fosse, per ogni $\varepsilon > 0$ esisterebbe un U intorno dell'elemento neutro $e \in G$ in G tale che

$$\int_G |e(g)|dg < \varepsilon$$

Consideriamo allora un intorno V di $e \in G$ tale che se $g \in V$ anche $g^{-1} \in V$ e che $V^2 \subset U$ (V^2 è l'insieme dei prodotti di elementi di V con se stesso). Per $g \in V$ si ha quindi

$$1 = \chi_V(g) = \chi_V * e(g) = \int_G \chi_V(gh^{-1})e(h)dh = \int_{gV} e(h)dh \leq \int_U |e(h)|dh < \varepsilon$$

che è assurdo. Quindi deve esistere un $a > 0$ tale che, per ogni aperto non vuoto $A \subset G$, $a \leq \mu(A)$; se $g \in G$, possiamo considerare una successione di aperti $A_n \subset A_{n+1}$ tali che $\cap_n A_n = \{e\}$. Infatti $\{g\}$ è intersezione della famiglia di intorni che lo contiene (perché la topologia del gruppo è Hausdorff[2]), e ciascuno di questi intorni contiene un aperto contenente g, quindi possiamo scegliere una successione di questi aperti. Allora

$$\mu(\{g\}) = \mu\left(\bigcap_n A_n\right) = \lim_{n \longrightarrow \infty} A_n$$

cioè $\mu(\{g\}) \geq a$. Quindi i punti hanno misura positiva, e quindi devono essere aperti; infatti se U è un aperto di misura finita (che esiste per locale compattezza del gruppo):

$$\infty > \mu(U) = \mu\left(\bigcup_{g \in U} \{g\}\right) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{g_i\}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\{g_i\}) = \infty$$

per ogni successione $\{g_i\} \subset U$; dunque ogni $\{g\}$ è aperto e quindi G è discreto.

QED

14.2 Gruppi compatti e rappresentazioni

In questa sezione ci occupiamo principalmente di gruppi compatti e delle loro rappresentazioni: tutti i nostri ragionamenti si baseranno sull'esistenza di un'unica misura di Haar finita per questi gruppi, fatto che abbiamo supposto senza dimostrazione ma che dimostreremo per la classe dei gruppi di Lie, sostanzialmente i gruppi di interesse nelle applicazioni. Ricordiamo la seguente

[2] Se l'intersezione degli intorni di g fosse un insieme I non ridotto al solo $\{g\}$, allora, se $h \in I$ e $h \neq g$, i punti h e g non possiederebbero intorni disgiunti.

14.2.1 Definizione *Se X è uno spazio vettoriale topologico, una* rappresentazione *di un gruppo topologico G è un omomorfismo di gruppi topologici*

$$\rho : G \longrightarrow GL(X)$$

Se $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert, una rappresentazione unitaria *di G in $\mathcal{H}$ è un omomorfismo del gruppo nel gruppo $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ degli operatori unitari di X in sé.*

Considereremo solo rappresentazioni di G in spazi di Hilbert: si noti che una rappresentazione in uno spazio di Hilbert non è necessariamente unitaria: inoltre la parola "continua" riferita alla rappresentazione vuol dire "fortemente continua".

Ricordiamo che se π_1 e π_2 sono rappresentazioni di un gruppo topologico G negli spazi di Hilbert $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, l'insieme degli operatori *di allacciamento* è

$$(\pi_1, \pi_2) := \{A : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2) \mid A\pi_1 = \pi_2 A\}$$

Esattamente come nel caso delle C*-algebre, due rappresentazioni di un gruppo topologico G si dicono *disgiunte* se $\dim \hom_G(V_1, V_2) = 0$, e si dicono *equivalenti* se l'insieme $\hom_G(V_1, V_2)$ contiene un isomorfismo A.

Abbiamo i concetti di irriducibilità e completa riducibilità di rappresentazioni per un gruppo topologico come nel caso di un gruppo qualsiasi: π si dice *topologicamente irriducibile* se non esistono sottospazi invarianti chiusi di V. Ricordiamo inoltre che nel caso di un gruppo topologico, una *sottorappresentazione* di una rappresentazione $\mathcal{H}$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{H}$ invariante per la rappresentazione di G (si riveda il capitolo **??** per questi concetti nel caso delle C*-algebre e il capitolo **??** nel caso dei gruppi finiti).

Dal fatto che il complemento ortogonale $W^\perp$ si un sottospazio invariante W di uno spazio di Hilbert pure è invariante, segue che

14.2.2 Lemma *Ogni rappresentazione unitaria è completamente riducibile.*

e quindi il seguente e fondamentale

14.2.3 Teorema *Ogni rappresentazione unitaria di dimensione finita è completamente riducibile.*

Ricordiamo inoltre che il nucleo e l'immagine di un operatore di allacciamento sono sottospazi invarianti, quindi:

14.2.4 Lemma (Schur) *Se V_1 e V_2 sono rappresentazioni irriducibili allora ogni operatore di allacciamento è zero oppure è un isomorfismo.*

14.2.5 Corollario *Se V è una rappresentazione irriducibile di G in uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita, allora* $\hom_G(V,V)=\mathbb{C}$.

DIMOSTRAZIONE: Se $A\in\hom_G(V,V)$ allora esiste $\lambda\in\mathbb{C}$ tale che $A-\lambda I$ non sia invertibile (infatti $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso e quindi ogni matrice ammette sempre autovalori); per il lemma si ha allora $A-\lambda I=0$.

QED

14.2.6 Lemma *Se $\mathcal{H}$ è una rappresentazione unitaria topologicamente irriducibile di G allora* $\hom_G(\mathcal{H},\mathcal{H})=\mathbb{C}$.

DIMOSTRAZIONE: Per prima cosa notiamo che

$$A\in\hom_G(\mathcal{H},\mathcal{H})\Rightarrow A^*\in\hom_G(\mathcal{H},\mathcal{H})$$

Infatti

$$A^*\pi(g)=A^*\pi(g^{-1})^*=(\pi(a^{-1})A)^*=(A\pi(g^{-1}))^*=\pi(g^{-1})^*A^*=\pi(g)A^*$$

Dato che ogni operatore si decompone in somma di autoaggiunti:

$$A=\frac{1}{2}(A+A^*)\frac{1}{2}(A-A^*)$$

basta dimostrare il lemma per gli elementi autoaggiunti di $\hom_G(\mathcal{H},\mathcal{H})$.

Usiamo quindi la teoria spettrale: se A commuta con un operatore unitario, lo stesso fa ogni proiezione spettrale E_λ di A (per unicità della decomposizione spettrale di A). Quindi se $A\in\hom_G(\mathcal{H},\mathcal{H})$ allora anche ogni $E_\lambda\in\hom_G(\mathcal{H},\mathcal{H})$ e, per l'ipotesi di irriducibilità, ogni E_λ risulta essere 0 oppure I. Ne segue che A è scalare.

QED

Dato che ogni rappresentazione unitaria è completamente riducibile, il seguente teorema è il più fondamentale nella teoria dei gruppi compatti[3]:

14.2.7 Teorema *Ogni rappresentazione di dimensione finita di un gruppo compatto è equivalente ad una rappresentazione unitaria.*

[3]Questo teorema ed i seguenti sono del tutto analoghi a quelli dati per i gruppi finiti nel capitolo **??**: in effetti quei risultati sono casi particolari di questi, dato che un gruppo finito è un gruppo topologico e l'integrale di Haar si riduce alla somma sui suoi elementi.

Dimostrazione: Sia $\pi : G \longrightarrow GL(V)$ la rappresentazione; per avere la tesi basterà dotare V di un prodotto hilbertiano invariante rispetto agli operatori $\{\pi(g)\}_{g\in G}$. Consideriamo su V un qualsiasi prodotto scalare (basta ad esempio prendere una base e dichiararla ortogonale) $\langle , \rangle$; allora per $x, y \in V$, poniamo

$$(x, y) := \int_G \langle \pi(g)x, \overline{\pi(g)y} \rangle dg$$

Evidentemente la (.) è sesquilineare, non degenere e tale che

$$\begin{aligned}(\pi(g)x, \pi(g)y) &= \int_G \langle \pi(h)(\pi(g)x), \overline{\pi(g)(\pi(h)y)} \rangle dh \\ &= \int_G \langle \pi(hg)x, \overline{\pi(hg)y} \rangle dh \\ &= \int_G \langle \pi(k)x, \overline{\pi(k)y} \rangle dk = (x, y)\end{aligned}$$

(per invarianza della misura di Haar per traslazioni: $d(hg) = dh$)

QED

Se $\dim V < \infty$ possiamo associare alla rappresentazione unitaria π la matrice i cui elementi sono

$$p_{x,y}(g) := (\pi(g)x, y)$$

14.2.8 Teorema *Ogni rappresentazione $\pi : g \longrightarrow GL(V)$ topologicamente irriducibile di un gruppo compatto è di dimensione finita e gli elementi della sua matrice soddisfano le relazioni*

$$\int_G p_{x,y}(g)\overline{p_{x',y'}(g)}dg = \frac{1}{\dim V}(x, x')(y, y')$$

Dimostrazione: Consideriamo la funzione

$$x \longmapsto \int_G p_{x,y}(g)\overline{p_{x',y'}(g)}dg$$

Si tratta evidentemente di un funzionale lineare sullo spazio di Hilbert V, quindi, per il teorema di Riesz, è della forma $x \longmapsto (x, z)$ per qualche $z \in V$, che dipende da y, x', y'.

Inoltre, fissati y e y', z dipende in modo continuo da x' e quindi esiste un operatore A su V tale che $z = Ax'$; si ha che

$$A \in \hom_G(V, V)$$

Questo segue dall'invarianza per traslazioni dell'integrale di Haar e dalla

$$p_{\pi(g)x,y}(h) = \pi_{x,y}(hg)$$

Quindi, per il lemma di Schur, $A = \lambda I$, con $\lambda \in \mathbb{C}$ (che dipende ovviamente da y e y'). Ragionando come in precedenza troviamo allora che

$$\lambda = c\overline{(y, y')}$$

ove c è una costante che stavolta dipende solo da π. Quindi

$$(*) \qquad \int_G p_{x,y}(g) p_{x',y'}(g) dg = c(x, x')(y, y')$$

Se ora $\{x_1, ..., x_n\}$ è un insieme ortonormale di V si ha che

$$\sum_{i=1}^n |p_{x,x_i}(g)|^2 = \sum_{i=1}^n |(\pi(g)x, x_i)| \le ||\pi(g)x||^2 = ||x||^2$$

Integrando questa disuguaglianza su G ed usando la (*) otteniamo

$$cn||x||^2 \le ||x||^2$$

cioè $n \le c^{-1}$. Questo prova che $\dim V < \infty$.

Per $n = \dim V$ si ottiene immediatamente la seconda asserzione del teorema.

QED

14.2.9 Corollario (Relazioni di Ortogonalità) *Se* $\pi : G \longrightarrow GL(V)$ *e* $\rho : G \longrightarrow GL(W)$ *sono rappresentazioni irriducibili non equivalenti di un gruppo compatto* G *allora*

$$\int_G p_{x,y}(g) \overline{\rho_{x',y'}(g)} dg = 0$$

Le relazioni di ortogonalità mostrano che gli elementi della matrice associata alla rappresentazione irriducibile π sono un sistema ortonormale nello spazio $L^2(G)$ e che, per rappresentazioni irriducibili non equivalenti, questi sistemi sono fra loro ortogonali. In realtà, l'unione di tutti questi sistemi ortonormali al variare di π nell'insieme di tutte le rappresentazioni irriducibili, è una base ortonormale di $L^2(G)$.

14.2.10 Teorema (Peter–Weyl) *Ogni funzione continua su un gruppo compatto* G *si può approssimare (in norma uniforme) con combinazioni lineari di elementi di matrici associate a rappresentazioni irriducibili di* G*.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $A(G)$ lo spazio delle combinazioni lineari finite di elementi di matrici associate a rappresentazioni irriducibili di G; dato che se una rappresentazione π è irriducibile anche la sua aggiunta π^* lo è, lo spazio $A(G)$ è chiuso rispetto alla coniugazione: $f \in A(G) \Rightarrow \overline{f} \in A(G)$.

Inoltre se π_1 e π_2 sono rappresentazioni di dimensione finita, il loro prodotto tensoriale $V_1 \otimes V_2$ è uno spazio di dimensione finita e quindi si decompone in somma di rappresentazioni irriducibili, e quindi il prodotto di due elementi di matrici associate a rappresentazioni irriducibili è combinazione lineare di elementi di matrici: questo significa che $A(G)$ è una sottoalgebra di $C(G)$. Per dimostrare che $\overline{A(G)} = C(G)$ usiamo quindi il teorema di Stone–Weierstrass 9.2.9: l'unica ipotesi che ci resta da verificare per applicarlo è che gli elementi di $A(G)$ separino i punti di G.

Ora, ogni rappresentazione unitaria è somma di rappresentazioni irriducibili; in particolare la rappresentazione regolare

$$R : G \longrightarrow \mathcal{U}(L^2(G))$$

definita come

$$(R(g))(f)(h) = f(hg)$$

si decompone in irriducibili, i.e. se $h \neq h'$ sono elementi di G esiste una rappresentazione irriducibile π tale che $\pi(h) \neq \pi(h')$ (infatti se così non fosse avremmo $R(h) = R(h')$ e quindi, per ogni $g \in G$: $gh = gh'$).

QED

La teoria delle rappresentazioni dei gruppi topologici che stiamo qui delineando presenta forti analogie con la teoria delle C*-algebre: precisiamo questo legame: cominciamo con l'osservare che il gruppo $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ degli operatori unitari di uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ è sempre un gruppo topologico (anche se non è localmente compatto a meno che la dimensione di $\mathcal{H}$ non sia finita), come si verifica immediatamente.

14.2.11 Teorema *Esiste una corrispondenza biunivoca fra le rappresentazioni unitarie continue di un gruppo topologico G e le rappresentazioni non degeneri dell'algebra di Banach $L^1(G)$ (si noti che, in generale, $L^1(G)$ non è una C*-algebra).*

DIMOSTRAZIONE: Sia $U : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ una rappresentazione unitaria di G: definiamo

$$\forall f \in L^1(G) \quad (x, \pi(f)y) := \int f(g)(x, U(g)y)dg$$

Evidentemente $\pi : L^1(G) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è un omomorfismo di spazi di Banach:

$$||\pi(f)|| \leq ||f||_1$$

Vediamo che si tratta di una rappresentazione:

$$\begin{aligned}(x,\pi(f)\pi(f')y) &= \int f(g)(x,U(g)\pi(f')y)dg = \int f(g)(U(g)^*x,\pi(f')y)dg\\ &= \int f(g)\int f'(h)(U(g)^*x,U(h)y)dhdg\\ &= \int f(g)\int f'(g^{-1}h')(x,U(g)U(g^{-1}h')y)dh'dg\\ &= \int f(g)\int f'(g^{-1}h')(x,U(h')y)dh'dg = (x,\pi(f)*\pi(f')y)\end{aligned}$$

(l'ultimo passaggio usa il teorema di Fubini). Si tratta di una *-rappresentazione:

$$\begin{aligned}(y,\pi(f)^*x) &= \overline{(x,\pi(f)y)} = \overline{\int f(g)(x,U(g)y)d\mu(g)}\\ &= \int \overline{f(g)}(U(g)y,x)d\mu(g) = \int \overline{f(g)}(y,U(g)^*x)d\mu(g)\\ &= \int \overline{f(g^{-1})}(y,U(g)x)\frac{d\mu(g)}{d\mu(g^{-1})}d\mu(g)\end{aligned}$$

cioè $f^*(g) = \lambda(g)\overline{f(g^{-1})}$ ove $\lambda(g) = \frac{d\mu(g)}{d\mu(g^{-1})}$. Osserviamo che U determina univocamente π, dato che

$$U(g)\pi(f) = \pi(f_g)$$

($f_g(h) := f(g^{-1}h)$ è la traslazione della funzione f) e

$$\forall x\in\mathcal{H}\quad x\perp\pi(f)x \Rightarrow f = 0$$

Dunque, per densità di $\{\sum_i \pi(f_i)x_i\}$ π è univocamente determinata.

Viceversa, se π è una rappresentazione non degenere della *-algebra di Banach $L^1(G)$ allora

$$\lim_{g\longrightarrow e} ||f_g - f||_1 = 0$$

e, dato che $f_g^* * h_g = f^*h$ (analogamente al caso $G=\mathbb{R}$) abbiamo che l'operatore

$$U_0(g)\sum_j \pi(f_j)y_j := \sum_j \pi(f_j)g)y_i$$

è isometrico e densamente definito: la sua estensione $U\in\mathcal{U}(\mathcal{H})$ è la rappresentazione di G voluta: le mappe

$$U(g)\pi(f)x = \pi(f_g)x$$

e

$$\pi(f) = \int f(g)U(g)d\mu(g)$$

sono l'una inversa dell'altra

QED

Nel caso dei gruppi finiti, l'algebra di gruppo è una rappresentazione rispetto all'azione del gruppo su se stesso per traslazioni: nel caso di un gruppo compatto qualsiasi, questo non sarà vero che su un sottospazio di $L^1(G)$: lo spazio delle funzioni di quadrato sommabile.

Consideriamo dunque lo spazio $\mathcal{H} = L^2(G)$ e la *rappresentazione regolare* di G in $\mathcal{H}$:

$$(\lambda(g)x)(h) := x(g^{-1}h)$$

Si tratta di una isometria, dato che

$$\int |f(g^{-1}h)|^2 d\mu(h) = \int |f(h)|^2 d\mu(h)$$

cioè $\lambda : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ è una rappresentazione unitaria di G; le corrisponde quindi una rappresentazione

$$(\pi_\lambda(f)x, h) = \int f(g)x(g^{-1}h)d\mu(g)$$

dell'algebra $L^1(G)$ nello spazio $\mathcal{B}(L^2(G))$; osserviamo che

$$\pi_\lambda(f)x = f * x$$

per $f \in L^1(G)$, $x \in L^2(G)$, sicché

$$||f * x||_2 \leq ||f||_1||x||_2$$

e quindi π_λ è una rappresentazione fedele (priva di nucleo), dato che

$$\forall x \in L^2(G) \quad f * x = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ in } L^1(G)$$

Questo si dimostra usando le identità approssimanti in $L^1(G)$, che sono l'analogo dei nuclei di Fejér (cfr. proposizioni 7.3.7 e 7.4.5): la loro esistenza per i gruppi compatti segue dal

14.2.12 Teorema *Se $f \in L^1(G)$ allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $\varphi \in L^1(G)$ tale che*

$$||f * \varphi - f||_1 < \varepsilon \qquad e \qquad ||\varphi * f - f||_1 < \varepsilon$$

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo un intorno U dell'elemento neutro $e \in G$ e una funzione $\varphi_U \geq 0$ con supporto in U e tale che

$$\int \varphi_U(g) d\mu(g) = 1$$

(ad esempio basta prendere $\varphi U = \frac{1}{\mu(U)}\chi_U$); allora

$$\varphi_U * f(g) = \int \varphi_U(h) f(h^{-1}g) d\mu(h) = \int \varphi_U(h) f_h(g) d\mu(h)$$

e quindi (il gruppo è compatto, quindi $\mu(G) < \infty$ e possiamo supporre, a meno di normalizzare, che $\mu(G) = 1$)

$$\begin{aligned} ||\varphi_U * f - f||_1 &= \left|\left| \int \varphi_U(h) f_h d\mu(h) - f \right|\right|_1 = \left|\left| \int \varphi_U(h)(f_h - f) d\mu(h) \right|\right|_1 \\ &\leq \int \varphi_U(h) ||f_h - f||_1 d\mu(g) \end{aligned}$$

Per continuità della $h \longmapsto f_h$ possiamo scegliere U_ε tale che

$$\forall h \in U_\varepsilon \quad ||f_h - f||_1 < \varepsilon$$

ottenendo

$$||\varphi_{U_\varepsilon} * f - f|| < \varepsilon \int_{U_\varepsilon} \varphi_{U_\varepsilon}(h) d\mu(h) = \varepsilon$$

In modo analogo si dimostra che $||f * \varphi_U - f|| \longrightarrow 0$.

QED

Ora, se $f \in L^1(G)$ allora possiamo definire la *norma ridotta* di f come

$$||f||_r := ||\pi_\lambda(f)||$$

e considerare quindi la norma

$$||f|| := \sup_\pi ||\pi(f)||$$

Evidentemente $||f||_r \leq ||f||$ e quindi possiamo considerare le C*-algebre

$$C_r^*(G) := \overline{L^1(G)}^{||.||_r} \qquad \text{e} \qquad C^*(G) := \overline{L^1(G)}^{||.||}$$

che si dicono *C*-algebra ridotta* e *C*-algebra del gruppo G*: $C_r^*(G)$ è quoziente di $C^*(G)$; osserviamo che si tratta delle C*-algebre inviluppanti di $L^1(G)$ rispetto alle norme $||.||_r$ e $||.||$.

Notiamo che, avendosi $||\pi(f)|| \leq ||f||$, segue che per ogni rappresentazione $\pi : L^1(G) \longrightarrow \mathcal{H}$, si ha

$$\pi(f) = \widetilde{\pi}|_{L^1(G)}(f)$$

ove $\widetilde{\pi}$ è l'estensione di π alla C*-algebra di G: se estendiamo la rappresentazione regolare otteniamo (dato che è fedele) la successione esatta di algebre di Banach:

$$C^*(G) \longrightarrow C^*_r(G) \longrightarrow 0$$

In realtà vale il seguente

Teorema. $\ker \pi_\lambda = 0$ *se e solo se* G *è amenabile.*

(che non dimostreremo) ove

14.2.13 Definizione *Un gruppo* G *è* amenabile *se lo spazio* $C_B(G)$ *delle funzioni continue limitate su* G *è una* C^**-algebra commutativa con unità e se esiste uno stato* ω *di* $C_B(G)$ *invariante, cioè tale che*

$$\forall g \in G \quad \omega(f_g) = \omega(f)$$

Ad esempio un gruppo commutativo è amenabile, per il teorema di Markov–Kakutani 8.3.11[4], così come ogni gruppo compatto: la misura di Haar realizza lo stato invariante sulle funzioni continue di G.

Consideriamo una rappresentazione non degenere π di $C^*(G)$: sappiamo che esistono le corrispondenze biunivoche

$$\pi \leftrightarrow \pi|_{L^1(G)} \leftrightarrow U_\pi$$

Ora dimostriamo che

14.2.14 Proposizione π *è irriducibile se e solo se lo è* U*.*

Dimostrazione: Questo segue dal fatto che $L^1(G)$ è densa in norma in $C^*G()$ (per definizione) e quindi

$$\pi(C^*(G))' = \pi(L^1(G))'$$

e, dato che $\pi(f) = \int f(g)U(g)d\mu(g)$:

$$\pi(L^1(G))' = U(G)'$$

QED

Evidentemente

[4]Esempi di gruppi non amenabili sono i gruppi liberi (su almeno due generatori, ma anche $SL(2)$, il gruppo delle matrici di ordine 2 con determinante 1).

14.2.15 Proposizione *π è ciclica se e solo se lo è U.*

Consideriamo ora gli stati $\mathcal{S}(C^*(G))$ della C*-algebra $C^*(G)$: sappiamo per la teoria GNS che corrispondono alle rappresentazioni come

$$\omega(f) = (\xi, \pi_\omega(f)\xi)$$

Limitandoci, come è sufficiente, ad un sottoinsieme denso in $C^*(G)$, ad esempio $L^1(G)$, troviamo che

$$\omega(f) = \int f(g)(\xi, U(g)\xi)d\mu(g)$$

pertanto gli stati corrispondono biunivocamente alle funzioni

$$\varphi(g) := (\xi, U(g)\xi)$$

sul gruppo. Osserviamo infatti che se f ha supporto finito allora

$$\begin{aligned}\left|\left|\sum_{g\in G} f(g)U(g)\xi\right|\right|^2 &= \sum_{g,h\in G} \overline{f(g)}f(h)(\xi, U(g^{-1}h)\xi)\\ &= \sum_{g,h\in G} \overline{f(g)}f(h)\varphi(g^{-1}h) \geq 0\end{aligned}$$

Quindi si tratta di funzioni di tipo positivo, nel senso della seguente

14.2.16 Definizione *Una funzione $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ si dice* di tipo positivo *se $\varphi(e) = 1$ e, per ogni $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ a supporto finito:*

$$\sum_{g,h\in G} \overline{f(g)}f(h)\varphi(g^{-1}h) \geq 0$$

Il seguente teorema è l'analogo del teorema GNS per i gruppi, ed è una versione del *teorema di Bochner*:

14.2.17 Teorema *φ è una funzione di tipo positivo su G se e solo se esiste una rappresentazione unitaria $U : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ tale che*

$$\varphi(g) = (\xi, U(g)\xi)$$

ove $\xi \in \mathcal{H}$ è un vettore ciclico per U con $||\xi|| = 1$.

DIMOSTRAZIONE: Abbiamo appena osservato che la condizione è sufficiente. Sia quindi φ una funzione di tipo positivo e consideriamo lo spazio vettoriale delle funzioni a supporto finito (se si vuole delle successioni finite di elementi di G); su questo spazio consideriamo la forma sesquilineare

$$\langle p, q\rangle := \sum_{g,h\in G} \overline{p(g)}q(h)\varphi(g^{-1}h)$$

Ovviamente $\langle p, p\rangle \geq 0$ e, quozientando per il sottospazio delle funzioni p tali che $\langle p, p\rangle = 0$ e completando si ottiene uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ sul quale gli operatori

$$U(g)[p] := [p_g]$$

(con $[p]$ si indica la classe in $\mathcal{H}$ della funzione a supporto finito p) definiscono la rappresentazione unitaria richiesta.

QED

14.2.18 Proposizione *Se φ è continua in $e\in G$ allora è continua in G e anche U è continua.*

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamo che

$$\lim_{g\longrightarrow e} ||U(g)U(h)\xi - U(h)\xi||^2 = 0$$

Infatti, se $\varphi \longrightarrow 1$ per $g \longrightarrow e$:

$$\begin{aligned}||U(g)U(h)\xi - U(h)\xi|| =& 2 - 2\,\mathrm{Re}(U(h)\xi, U(gh)\xi) = 2 - 2\,\mathrm{Re}(\xi, U(h^{-1}gh)\xi)\\ =& 2 - 2\,\mathrm{Re}\,\varphi(h^{-1}gh) \xrightarrow{g\longrightarrow e} 0\end{aligned}$$

(dato che $h^{-1}gh \xrightarrow{g\longrightarrow e} e$).

QED

14.3 Gruppi a un parametro e teorema di Stone

Ci occupiamo ora di un caso rilevantissimo di rappresentazioni: i gruppi a un parametro, cioè le rappresentazioni del gruppo topologico $\mathbb{R}$ fortemente continue negli operatori unitari di uno spazi di Hilbert: il teorema di Stone 14.3.6 ne darà una classificazione completa.

Consideriamo un operatore autoaggiunto $A = A^*$ e la trasformata di Cayley:

$$U = S_0(A) = (A - iI)(A + iI)^{-1}$$

Se $f \in C_0(\mathbb{R})$ (funzioni continue nulle all'infinito, cioè il cui limite all'infinito è zero), allora, per il calcolo funzionale continuo, $f(A) = g(U)$ per una certa $g \in C_0(\mathbb{T} \setminus \{1\})$ (funzioni continue nulle all'infinito sull'intervallo $(0,1)$: immaginiamo il toro unidimensionale S^1 come l'intervallo $(0,1)$ nel quale si identifichino i punti 0 e 1, cioè lo pensiamo come la compattificazione di Alexandroff di $(0,1)$). Abbiamo dunque

$$f \in C_0(\mathbb{R}) \longmapsto g \in C_0(\mathbb{T} \setminus \{1\})$$

Inoltre

$$f(A) = \int f(\lambda) dE(\lambda)$$

(integrale alla Riemann–Stieltjes).

Ora, se, per $t \in \mathbb{R}$

$$f_t(\lambda) := e^{it\lambda}$$

possiamo calcolare

$$f_t(A) = e^{itA} =: U(t)$$

Si tratta di un operatore unitario (dato che il calcolo funzionale è uno *-omomorfismo) ed è ovvio che

$$U(t + t') = U(t)U(t')$$

Inoltre, per ogni λ: $f_{t'}(\lambda) \xrightarrow{t' \longrightarrow t} f_t(\lambda)$. Ma, ogni tale f ha modulo 1e quindi le f_t sono equilimitate:

$$U(t') \xrightarrow{\text{fortemente}} (t)$$

se $t' \longrightarrow t$.

Cioè l'insieme $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ soddisfa alla seguente

14.3.1 Definizione *Una famiglia $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ di operatori unitari in uno spazio di Hilbert si dice* gruppo ad un parametro fortemente continuo *se*

- $U(t + t') = U(t)U(t')$.
- *Se $t' \longrightarrow t$ allora $U(t') \xrightarrow{\textit{fortemente}} U(t)$.*

L'operatore A si dice generatore infinitesimale *del gruppo a un parametro.*

Un gruppo ad un parametro non è altro che una rappresentazione unitaria fortemente continua del gruppo additivo $\mathbb{R}$.

Osserviamo che per un gruppo a un parametro (fortemente continuo) la funzione $t \longmapsto U(t)x$ è continua, per ogni $x \in \mathcal{H}$ fissato e

$$||U(t) - I|| \xrightarrow{t \longrightarrow \infty} 0 \iff ||A|| < \infty$$

14.3.2 Teorema

- $\mathcal{D}_A = \{x \in \mathcal{H} \,|\, t \longmapsto U(t)x$ *è una funzione* $C^1\}$.
- *Se* $x \in \mathcal{D}_A$ *allora*
$$Ax = \frac{1}{i}\left(\frac{d}{dt}U(t)x\right)_{t=0}$$
e se $A = A^*$ *allora l'*equazione di Schrödinger
$$i\frac{d}{dt}x = Ax$$
possiede un'unica soluzione x *tale che* $x(0) = x_0 \in \mathcal{H}$*, e tale soluzione è esattamente*
$$x(t) = e^{itA}x_0$$

Dimostrazione: (1) Siano $x \in \mathcal{D}_A$, t_n una successione di numeri reali infinitesima ($t_n \longrightarrow 0$) e
$$z_n := \frac{1}{t_n}(U(t_n)x - x)$$
Per dimostrare la (2) basta allora far vedere che $z_n \longrightarrow 0$. Per farlo basta far vedere che

- $\exists z \; (x, z_n) \longrightarrow (x, z)$ (convergenza debole).
- $||z_n|| \longrightarrow ||z||$.

Infatti, se valgono a) e b):
$$||z_n - z||^2 = (z_n - z, z_n - z) = ||z_n|| + ||z|| - 2\,\mathrm{Re}(z, z_n) \longrightarrow 0$$

Ora dimostriamo le (a) e (b).
$$\begin{aligned}\left|\left|\frac{1}{t_n}((U(t_n) - I)x)\right|\right|^2 =&(x, \left(\frac{1}{t_n}(U(t_n) - I)\right)^* \left(\frac{1}{t_n}(U(t_n) - I)\right) x)\\ =& \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{e^{it_n\lambda} - 1}{t_n}\right|^2 d(x, E(\lambda)x)\end{aligned}$$

Ma
$$\left|\frac{e^{it\lambda} - 1}{t}\right|^2 = \left|\frac{e^{\frac{it\lambda}{2}} - e^{-\frac{it\lambda}{2}}}{2t\frac{\lambda}{2}}\right|^2 \lambda^2 = \lambda^2 \left(\frac{\sin^2\left(\frac{t\lambda}{2}\right)}{t\frac{\lambda}{2}}\right)^2 \leq \lambda^2$$

Possiamo quindi applicare il teorema della convergenza dominata di Lebesgue per passare al limite sotto il segno di integrale (λ^2 è una funzione L^1 rispetto alla misura $d(x, E(\lambda)x) =$) ottenendo

$$\left|\left|\frac{1}{t_n}((U(t_n) - I)x)\right|\right|^2 \longrightarrow \int \lambda^2 d(x, E(\lambda)x) < \infty$$

(si rammenti che $x \in \mathcal{D}_A$). Dunque

$$\left|\left|\frac{1}{t}((U(t) - I)x)\right|\right|^2 \xrightarrow{t\longrightarrow 0} ||Ax||^2$$

Ma allora

$$(x, \frac{1}{t_n}((U(t_n) - I)x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\lambda} - 1}{t} d(x, E(\lambda)x) \longrightarrow i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(x, E(\lambda)x)$$

e quindi

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad (x, \frac{1}{t_n}((U(t_n) - I)x)) \xrightarrow{t\longrightarrow 0} i(x, Ax)$$

La formula di polarizzazione ci consente allora di scrivere

$$\forall x, y \in \mathcal{H} \quad (y, \frac{1}{t_n}((U(t_n) - I)x)) \xrightarrow{t\longrightarrow 0} i(y, Ax)$$

Ponendo

$$z(t) := \frac{1}{t_n}((U(t_n) - I)x$$

otteniamo allora un elemento $z(t)$ convergente debolmente a Ax su $\mathcal{D}_A$, e quindi che soddisfa le (a) e (b). Dunque la (2) è dimostrata.

Ora dimostriamo la (1). Sia B tale che

$$\mathcal{D}_B = \{x \in \mathcal{H} \,|\, t \longmapsto U(t)x \text{ è di classe } C^1\}$$

Osserviamo che, per ogni $x \in \mathcal{D}_B$:

$$Bx := \frac{1}{i}\left(\frac{d}{dt}U(t)x\right)_{t=0}$$

Abbiamo appena visto che B è densamente definito, dato che $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}_B$ e $A \subset B$; quindi per dimostrare il teorema non resta che mostrare $A = B$.

Ma A è autoaggiunto, e se proviamo che B è hermitiano allora da $A \subset B$ seguirà $A = B$. Che B sia hermitiano segue ovviamente da

$$\forall x \in \mathcal{D}_B \quad (x, Bx) = \frac{1}{i}\left(\frac{d}{dt}(x, U(t)x)\right)_{t=0} = \frac{1}{i}\left(\frac{(x, U(t)x) - (x, x)}{t}\right)_{t\longrightarrow 0} \in \mathbb{R}$$

Infatti

$$\begin{aligned}\overline{(x,Bx)} &= -\frac{1}{i}\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\overline{(x,U(t)x)}-(x,x)}{t} = -\frac{1}{i}\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{(U(t)x,x)-(x,x)}{t}\\ &=\frac{1}{i}\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{(x,U(-t)x)-(x,x)}{-t} = \frac{1}{i}\left(\frac{d}{dt}U(t)x\right)_{t=0} = (x,Bx)\end{aligned}$$

Quindi $\overline{(x,Bx)} = (x,Bx)$, cioè $(x,Bx)\in\mathbb{R}$.

QED

Osserviamo che questo teorema è una generalizzazione al caso di dimensione infinita della teoria delle equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti: in effetti ogni tale equazione è risolta dall'esponenziale di una matrice (nel nostro caso l'operatore A). Quello che dobbiamo far vedere, per completare l'analogia, è che ogni gruppo ad un parametro si ottiene come esponenziale di un operatore, ottenendo così una profonda generalizzazione di noti risultati sull'esponenziale delle matrici: questa generalizzazione sarà il contenuto del teorema di Stone.

Studiamo ora i gruppi a un parametro fortemente continui dal punto di vista della teoria delle rappresentazioni: intanto osserviamo che la forte continuità può essere indebolita nella condizione

$$\forall x,y\in\mathcal{H}\quad (x,U(t)y)\longrightarrow (x,y)$$

dato che

$$||U(t)y|| = ||y||$$

(le $U(t)$ sono isometrie). Ricordando le (a) e (b) della dimostrazione del teorema precedente abbiamo quindi che la continuità debole di $U(t)$ implica la continuità in norma.

Ora, se $U:\mathbb{R}\longrightarrow\mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una rappresentazione unitaria (fortemente continua) del gruppo topologico additivo dei numeri reali, fissati $x,y\in\mathcal{H}$, la $t\longmapsto (x,U(t)y$ è lineare e continua (disuguaglianza di Schwartz) e quindi

$$\forall f\in L^1(\mathbb{R})\quad (x,U(t)y)f(t)\in L^1(\mathbb{R})$$

sicché

$$\left|\int (x,U(t)y)f(t)dt\right| \leq ||x||\ ||y||\ ||f||_1$$

e, per il teorema di Riesz, esiste un unico operatore π

$$\pi(f) := \int f(t)U(t)dt$$

lineare e continuo con $||\pi(f)|| \leq ||f||_1$. Allora, per ogni $f, g \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}(y, \pi(f)\pi(g)x) &= \int f(t)(y, U(t)\pi(g)x)dt = \int f(t)(U(-t)y, \pi(y)x)dt \\ &= \int f(t)\left(\int g(t')(y, U(t+t')x)dt'\right)dt \\ &= \int\int f(t)g(t')(y, U(t+t')x)dt'dt\end{aligned}$$

Ma $f(t)g(t')(y, U(t+t')x) \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ come si è detto, quindi possiamo applicare il teorema di Fubini e dedurre:

$$(y, \pi(f)\pi(g)x) = \int f(t)g(s-t)(y, U(s)x)dtds$$

(per $s = t + t'$). In altri termini

$$\pi(f)\pi(g) = \pi(f * g)$$

(prodotto di convoluzione). Inoltre

$$(y, \pi(f)^*x) = \overline{(x, \pi(f)y)} = \int \overline{f(t)(x, U(t)y)}dt = \int \overline{f(t)}(y, U(-t)x)dt$$

cioè, se $f^*(t) := \overline{f(-t)}$,

$$\pi(f)^* = \pi(f^*)$$

Quindi abbiamo dimostrato il

14.3.3 Lemma *π è una rappresentazione dell'algebra di Banach $L^1(\mathbb{R})$ (rispetto al prodotto di convoluzione).*

Dimostriamo che π è non degenere; se $x \in \{\pi(f)y \mid f \in L^1(\mathbb{R}), y \in \mathcal{H}\}^\perp$ allora

$$\forall f \quad (x, \pi(f)x) = 0 \Rightarrow \int f(t)(x, U(t)x)dt = 0$$

cioè $(x, U(t)x) = 0$ q.o. e, per continuità, $(x, U(t)x) = 0$ ovunque. Quindi $x = 0$ e $U(1) = I$.

Ora invertiamo questa costruzione: data una rappresentazione non degenere di $L^1(\mathbb{R})$ ricostruiamo $U(t)$:

$$(x, U(t)\pi(f)y) = \int f(t')(x, U(t+t')y)dt' = \int f(s-t)(x, U(s)y)ds$$

$$=\pi(f_t))$$

(si rammenti che $f_t(s) := f(s-t)$). Ma la misura di Lebesgue è invariante per traslazioni e quindi

$$||f_t - f||_1 \xrightarrow{t \longrightarrow 0} 0 \implies U(t)\pi(f)y = \pi(f_t)y$$

e quindi abbiamo una mappa iniettiva

$$\left\{ \begin{matrix} \text{gruppi ad un parametro} \\ \text{fortemente continui} \end{matrix} \right\} \longrightarrow \{\pi : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \text{ non degeneri}\}$$

Dimostriamo che si tratta di una mappa biunivoca:

14.3.4 Teorema *I gruppi unitari ad un parametro fortemente continui corrispondono biunivocamente alle rappresentazioni unitarie non degeneri dell'algebra di Banach $L^1(\mathbb{R})$.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo π come rappresentazione non degenere dell'algebra di Banach $L^1(\mathbb{R})$ (ricordiamo che dato che $L^1(\mathbb{R})$ è l'algebra di gruppo di $\mathbb{R}$, le rappresentazioni del gruppo e quelle dell'algebra si corrispondono biunivocamente) e sia

$$U(t)\pi(f)y := \pi(f_y)y$$

(dato che la rappresentazione è non degenere l'insieme $\{\pi(f)y\}_{y\in\mathcal{H}}$ è denso, quindi ci basta aver definito $U(t)$ sugli elementi della forma $\pi(f)y$).

Dimostriamo che si tratta di un gruppo ad un parametro fortemente continuo: intanto definisce una famiglia ad un parametro di operatori unitari (basta all'uopo far vedere che sono lineari isometrici).

Infatti

$$\begin{aligned}\int (f_t^*)(s')g_t(s-s')ds' &= \int \overline{f_t(-s')}g_t(s-s')ds' \\ &= \int f(-(s'+t))g(s-(s'+t))ds'\end{aligned}$$

sicché

$$f_t^* * g_t = f^* * g$$

da cui

$$\pi(f_t^* * g_t) = \pi(f^* * g)$$

cioè $\pi(f_t)^*\pi(g_t) = \pi(f)^*\pi(g)$, dunque

$$(\pi(f_t)x, \pi(g_t)y) = (\pi(f)x, \pi(g)y)$$

Quindi la famiglia ad un parametro $\{U(t)\}$ è unitaria: è inoltre un gruppo ad un parametro, dato che

$$U(t')U(t)\pi(f)x = \pi\left((f_t)_{t'}\right)x = \pi(f_{t+t'})x = U(t+t')\pi(f)x$$

Dimostriamo infine che è fortemente continua: abbiamo che

$$||U(t)\pi(f)x - \pi(f)x|| = ||\pi(f_t)x - \pi(f)x|| = ||\pi(f_t - f)x|| \leq ||f_t - f||_1||x||$$

e $||f_t - f||_1 \longrightarrow 0$, pertanto

$$||U(t)y - y|| \longrightarrow 0$$

Il gruppo ad un parametro $U(t)$ dà luogo, per tramite della costruzione precedente, alla rappresentazione π:

$$\int U(t)g(t)dt\pi(f)x = \int g(t)\pi(f_t)xdt$$

e, per definizione di convoluzione:

$$\pi(g * f)x = \pi(\int g(t)f_t dt) = \int U(t)g(t)dt\pi(f)x$$

QED

Notiamo che abbiamo utilizzato il fatto che

$$||\pi(f)|| \leq ||f||_1$$

(uno *-omomorfismo di un'algebra di Banach in una C*-algebra è una contrazione).

Il seguente criterio ci permette di semplificare questo risultato nel caso di spazi di Hilbert separabili:

14.3.5 Teorema (von Neumann) *Se $U : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una rappresentazione unitaria di $\mathbb{R}$ su uno spazio di Hilbert separabile allora $t \longmapsto (x, U(t)y)$ è misurabile secondo Lebesgue e la rappresentazione unitaria è fortemente continua.*

Dimostrazione: Per ipotesi ha senso definire π come

$$(x, \pi(f)y) := \int f(t)(x, U(t)y)dt$$

in modo da ottenere una rappresentazione di $L^1(\mathbb{R})$; se questa rappresentazione è non degenere allora

$$\pi(f) = \int f(t)V(t)dt$$

e V è fortemente continua. Quindi non resta che dimostrare che π è non degenere.

Per separabilità di $\mathcal{H}$, esiste una successione $\{y_n\}$ densa; se x è tale che

$$\forall n \quad x \perp \pi(f)y - n$$

allora

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \qquad \int (x, U(t)y_n)f(t)dt = 0$$

cioè per ogni n $(x, U(t)y_n) = 0$ q.o. e quindi $(x, U(t)y_n) = 0$ in $\mathbb{R} \setminus N_n$ ove N_n è un insieme di misura nulla. Dato che

$$N := \bigcup_n N_n$$

ha ancora misura nulla,

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus N \quad (x, U(t)y_n) = 0$$

e quindi (dato che x è ortogonale a tutti i $\pi(f)y_n$: $x = 0$.

QED

L'ipotesi di separabilità è irrinunciabile: se ad esempio $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{R})$ allora per

$$(U(t)x)(s) := x(s - t)$$

la funzione $(x', U(t)x)$ è misurabile secondo Lebesgue, ma la U si guarda bene dall'essere fortemente continua.

14.3.6 Teorema (STONE) *Se $U : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una rappresentazione unitaria fortemente continua di $\mathbb{R}$ allora esiste un unico operatore A autoaggiunto tale che*

$$U(t) = e^{itA}$$

DIMOSTRAZIONE: Abbiamo visto (teorema 14.3.4) che dare un gruppo ad un parametro fortemente continuo è come dare una rappresentazione non degenere $\pi : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tale che

$$\pi(f) = \int f(t)U(t)dt$$

(e quindi $||\pi(f)|| \leq ||f||_1$). Se consideriamo lo spazio $C_c^\infty(\mathbb{R})$ delle funzioni infinitamente differenziabili a supporto compatto, sappiamo che è denso in $L^1(\mathbb{R})$ e quindi l'insieme

$$\{\pi(f)\}_{f \in C_c^\infty(\mathbb{R})}$$

è un'algebra non degenere, dato che

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad \overline{\pi(C_c^\infty(\mathbb{R}))x} = \overline{\pi(L^1(\mathbb{R}))x} \ni x$$

Ore definiamo A come

$$Ax := \frac{1}{i}\left(\frac{d}{dt}U(t)\right)_{t=0}(x)$$

Dimostriamo che $\mathcal{D}_A$ è denso, osservando che

$$\mathcal{D}_A = \{x \in \mathcal{H} \,|\, t \longmapsto U(t)(x) \in C^1(\mathbb{R})\}$$

e che, se

$$A_0 := \frac{1}{i}\left(\frac{d}{dt}U(t)\right)_{t=0}$$

con

$$\mathcal{D}_0 = \{\pi(f)x \,|\, x \in \mathcal{H}\,, f \in C_c^\infty(\mathbb{R})\}$$

allora $\mathcal{D}_0$ è denso, dato che

$$U(t)\pi(f)x = \pi(f_y)x$$

e

$$\frac{1}{i}\left(\frac{d}{dt}U(t)\right)_{t=0} y = \frac{1}{i}\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\pi(f_t - f)}{t}(x)$$

Ma, dato che $\frac{1}{t}(f_t - f) \longrightarrow f'$ in $L^1(\mathbb{R})$, si ha

$$\frac{\pi(f_t - f)}{t} \xrightarrow{\|\cdot\|} \pi(f') \implies \frac{\pi(f_t - f)}{t}x \longrightarrow \pi(f')x$$

quindi $\mathcal{D}_0$ è denso. Abbiamo cioè che

(1) A_0 è densamente definito.

e vogliamo dimostrare inoltre che

(2) A_0 è hermitiano;
(3) A_0 è essenzialmente autoaggiunto;
(4) $A_0 = \overline{A_0}$;

Cominciamo con la (2). Se $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e

$$y_1 := \pi(f)x \qquad \text{e} \qquad y_2 := \pi(g)y$$

dimostriamo che

$$(y_1, A_0 y_2) = (A_0 y_1, y_2)$$

In effetti
$$(y_1, A_0y_2) = (\pi(f)x, \frac{1}{i}\pi(g')y) = \frac{1}{i}(x, \pi(f^* * g')y)$$
e
$$(A_0y_1, y_2) = (\frac{1}{i}\pi(f')x, \pi(g)y) = -\frac{1}{i}(x, \pi(f'^* * g)y)$$
Basta allora dimostrare che $f^* * g' = f'^* * g$ per avere la (2), il che è semplicemente la regola di integrazione per parti combinata con la definizione di convoluzione (tenendo conto che f e g hanno supporto compatto).

$$\begin{aligned}(f^* * g')(t) &= \int f^*(s)g'(t-s)ds = -\int f^*(s)dg \\ &= (f^*g)|_{\partial K} - \int g(s)df^* = \int g(t-s)df^* \\ &= \int f'^*(s)g(t-s)ds = (f'^* * g)(t)\end{aligned}$$

(ove $K = \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g$ è compatto).

Dimostriamo la (3): abbiamo $U(t)\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0$ dato che $U(t)\pi(f)x = \pi(f_t)x$ (se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ anche $f_t \in C_c^\infty(\mathbb{R})$) e viceversa.

Ora, se $A_0^*z = \pm iz$ ha come unica soluzione $z = 0$ abbiamo la (3); ma
$$(U(t)x, A_0^*z) = (U(t), \pm iz)$$
e $(U(t)x \in \mathcal{D}_0)$ $(U(t)x, A_0^*z) = (A_0U(t)x, z)$, sicché
$$(A_0U(t)x, z) = \pm i(U(t)x, z)$$
Si ricordi ora che
$$A_0U(t)y = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}U(t)y$$
dato che
$$A_0\pi(f_t)x = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}\pi(f_t)x = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}U(t)y$$
e quindi
$$(A_0U(t)x, z) = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}(U(t)x, z)$$
Ne segue che $\xi := (U(t)x, z)$ soddisfa l'equazione
$$\xi' = \mp\xi$$
dunque $\xi(t) = ce^{\mp t}$ e
$$|\xi(t)| \leq ||U(t)x||\ ||z|| = ||x||\ ||z|| = \text{costante}$$

il che è possibile se e solo se $c = 0$ e quindi $z = 0$ (dato che è ortogonale ad un insieme denso). Ne segue la (3).

Infine dimostriamo (4). Se $A := \overline{A_0}$ ha senso considerare e^{itA} che è un gruppo ad un parametro fortemente continuo di operatori unitari; vogliamo dimostrare che per ogni $y \in \mathcal{D}_0$ (che è denso) si ha che

$$w(t) := e^{itA}y - U(t)y$$

è zero per ogni $t \in \mathbb{R}$. Intanto $w(0) = 0$ per definizione; inoltre

$$\frac{d}{dt}||w(t)||^2 = 0$$

dato che $w(t)$ è "C^1 in norma" e quindi

$$\frac{d}{dt}||w(t)||^2 = \frac{d}{dt}(w(t), w(t)) = (w'(t), w(t)) + (w(t), w'(t))$$

e

$$w'(t) = (e^{itA}y - U(t)y)' = iAe^{itA}y - iA_0U(t)y$$

Per $U(t)y$ generico in $\mathcal{D}_0$ e $A = \overline{A_0}$ (in particolare $A_0 \subset A$), abbiamo che, su $\mathcal{D}_0$, $A = A_0$, e quindi

$$w'(t) = iAe^{itA}y - iA_0U(t)y = iAw(t)$$

Dunque

$$\frac{d}{dt}||w(t)||^2 = i\left((w(t), Aw(t)) - (Aw(t), w(t))\right) = 0$$

(A è hermitiano). Allora $||w(t)|| = 0$ (è nullo in 0 e ha derivata nulla, quindi è costante) e quindi $w(t) = 0$. Ne segue

$$e^{itA} = U(t)$$

QED

Traiamo alcune conseguenze da questo importante risultato. Se $A = A^*$, allora i seguenti oggetti si determinano univocamente a due a due (dare l'uno equivale a dare l'altro):

- Un operatore unitario U con $1 \notin \sigma(U)$;
- Una famiglia spettrale $\{E(\lambda)\}$;
- Una rappresentazione $\rho : f \longmapsto f(A)$ di $C_0(\mathbb{R})$ non degenere;
- Un gruppo ad un parametro unitario fortemente continuo $\{U(t)\}$;

- Una rappresentazione π della *-algebra di Banach $L^1(\mathbb{R})$;

ove, se A è limitato allora nel caso (1) $1 \notin \sigma(A)$, nel caso (2) $\operatorname{supp} E$ è compatto, nel caso (3) $\operatorname{supp} \rho$ è compatto, nel caso (4) $t \longmapsto U(t)$ è uniformemente continua.

Si passa dall'operatore A all'unitario U con la trasformata di Cayley, da questo alla famiglia spettrale con la formula di decomposizione spettrale, da questa alla rappresentazione ρ con il calcolo funzionale continuo, da questa al gruppo $U(t)$ con il teorema di Stone 14.3.6 e da questo alla rappresentazione π col teorema 14.3.4.

Consideriamo ora una n-pla di operatori essenzialmente autoaggiunti A_1, ..., A_n tali che

$$e^{itA_1} \cdots e^{itA_n} = e^{it\sum_k A_k}$$

Questa scelta determina un *gruppo a n parametri fortemente continuo*

$$U(t) = e^{itA_1} \cdots e^{itA_n} = e^{it\sum_k A_k}$$

Ponendo

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad U_t(\lambda) := U(\lambda t)$$

otteniamo una rappresentazione del gruppo (topologico) additivo dei numeri reali:

$$\lambda \longmapsto e^{i\lambda A_t}$$

ove

$$A_t = \sum_k t_k A_k$$

In questo modo otteniamo una generalizzazione della teoria fin qui svolta da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$ (che è sempre un gruppo topologico[5] abeliano localmente compatto): ci si potrebbe spingere più oltre e generalizzare questa costruzione ad un gruppo di Lie[6] G parametrizzando gli operatori A con gli elementi u dell'algebra di Lie del gruppo ed ottenendo

$$M(\exp \lambda x) = e^{i\lambda A_x}$$

e $[A_u, A - v] = iA_{[u,v]}$ (cioè una rappresentazione dell'algebra di Lie di G).

Concludiamo questa discussione sui gruppi ad un parametro con un n-esimo teorema di von Neumann.

Osserviamo preliminarmente che, riandando alla dimostrazione del teorema di Stone 14.3.6, abbiamo che da $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_A$ e

$$e^{itA}\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0$$

[5]Per una discussione di questi gruppi, cfr. il capitolo **??**.

[6]Fra due capitoli si daranno dei cenni su gruppi e algebre di Lie.

(ricordiamo che $A = A^*$) segue che $A|_{\mathcal{D}_0}$ è essenzialmente autoaggiunto: cioè $\mathcal{D}_0$ un *cono* per A.

Per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$ abbiamo

$$\int f(t)U(t)dt = \int f(t)e^{itA}dt$$

Ma

$$e^{itA} = \int e^{it\lambda}dE(\lambda)$$

sicché

$$\int f(t)U(t)dt = \int f(t)\int e^{it\lambda}dE(\lambda)dt$$

Inoltre, se

$$(x, \int f(t)U(t)dty) := \int f(t)(x, U(t)y)dt = \int f(t)\left(\int e^{it\lambda}d(x, E(\lambda y)\right)dt$$

e quindi, dato che $e^{it\lambda}$ è continuo e di norma 1 e $f \in L^1$, possiamo applicare il teorema di Fubini:

$$\begin{aligned}(x, \int f(t)U(t)dty) &= \int\int f(t)e^{it\lambda}dtd(x, E(\lambda)y)) \\ &= \int \widehat{f}(\lambda)d(x, E(\lambda)y) = (x, \int \widehat{f}dE(\lambda)y)\end{aligned}$$

Osserviamo che, per il lemma di Riemann–Lebesgue 7.4.9, $\int \widehat{f}dE(\lambda)$ è il calcolo funzionale di A con $\widehat{f}$. In definitiva:

$$\pi(f) = \int f(t)U(t)dt = \widehat{f}(A) = \rho(\widehat{f})$$

Se $U(t)$ è unitario allora

$$R(n) := U^n$$

è una rappresentazione del gruppo additivo $\mathbb{Z}$ e, considerando la proiezione ortogonale E_0 sul sottospazio $\ker(I - U)$ allora

$$E_0 = \underset{N\longrightarrow\infty}{\text{s-lim}} \frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N} U^n$$

come già sappiamo.

14.3.7 Teorema (Ergodico di von Neumann) *Se $\{U(t)\}$ è un gruppo ad un parametro fortemente continuo di operatori unitari in uno spazio di Hilbert e se E_0 è la proiezione sul sottospazio dei vettori invarianti di $U(t)$:*

$$\{x \in \mathcal{H} \mid \forall t \in \mathbb{R}\ U(t)x = x\}$$

allora

$$E_0 = \operatorname*{s-lim}_{N \longrightarrow \infty} \frac{1}{2N} \int_{-N}^{N} U(t)dt$$

Dimostrazione: Siano

$$g := \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]} \qquad \text{e} \qquad g_n(t) := g\left(\frac{t}{N}\right)\frac{1}{N}$$

Allora

$$\frac{1}{2N}\int_{-N}^{N} U(t)dt = \int g_n(t)U(t)dt$$

Ma, se $f \in L^1(\mathbb{R})$ è tale che

$$\int f(t)dt = 1$$

e se $f_N := \frac{1}{N} f(t/N)$ allora

$$\int f_N(t)U(t)dt \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} E_0$$

fortemente. Infatti, per il teorema di Stone 14.3.6, $U(t) = e^{itA}$ e

$$\widehat{g_N}(A) = \int g_N(t)U(t)dt$$

dunque $\{\widehat{g_N}\}$ è equilimitata e converge puntualmente a $\chi_{\{0\}}$, il che si dimostra come segue:

$$\int e^{i\frac{t}{N}\lambda N} g\left(\frac{t}{N}\right)\frac{dt}{N} = \widehat{g_N}(\lambda)$$

da cui $\widehat{g_N}(\lambda) = \widehat{g}(N\lambda)$; dunque, se $\lambda = 0$ allora $\widehat{g}(0) = \widehat{g_N}(0)$, mentre se $\lambda \neq 0$ allora

$$\lim_N \widehat{g_N}(\lambda) = \lim_N \widehat{g}(N\lambda) = 0$$

per il lemma di Riemann–Lebesgue. Ne segue che $\{\widehat{g_N}\}$ è equilimitata e converge a zero puntualmente; ma $\widehat{g}(0) = \int g(t)dt = 1$ (per scelta di f) e $\widehat{g_N}$ è uniformemente limitata. Allora

$$\widehat{g_N}(A) \longrightarrow \chi_{\{0\}}(A) = E_{\{x \in \mathcal{H} \mid Ax = 0\}}$$

Ma $\{x \mid Ax = 0\} = \{x \mid, U(t)x = x\}$ (dato che $x \in \mathcal{D}_A \iff U(t)x$ è derivabile con derivata continua in t e $U'(t)x = iAU(t)x = iU(t)Ax$.

Quindi

$$\widehat{g_N}(A) \xrightarrow{N\longrightarrow\infty} E_0$$

fortemente.

QED

14.4 Vettori analitici

Vogliamo dare in questa sezione una applicazione importantissima del teorema di Stone: il teorema di Nelson, che fornisce un criterio affinché un operatore sia essenzialmente autoaggiunto.

Cominciamo col ricordare una definizione formulata in precedenza *en passant*:

14.4.1 Definizione *Se A è un operatore lineare su uno spazio di Banach X, un vettore $x \in X$ si dice* analitico *se $x \in C^\infty(A)$ (cioè se per ogni n $x \in \mathcal{D}_{A^n}$) e se esiste $\lambda > 0$ tale che*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} ||A^n x|| < \infty$$

ovvero se la serie $\sum_n (i\lambda)^n/n!\, A^n x$ ha raggio di convergenza maggiore di zero.

Se A è autoaggiunto possiamo trovare moltissimi vettori analitici: per il teorema spettrale

$$A = A^* = \int \lambda dE(\lambda)$$

e quindi, se

$$\mathcal{H}_n := E_{[-n,n]}\mathcal{H} = (E(n) - E(-n))\mathcal{H} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{H}_\omega = \bigcup_n \mathcal{H}_n$$

(ovviamente $\mathbb{R} = \cup_n [-n, n]$) allora

$$\forall x \in \mathcal{H}_\omega \ x \text{ è analitico per } A$$

e il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(i\lambda)^n}{n!} A^n x$$

è infinito.

14.4.2 Definizione *Se per un vettore analitico x il raggio di convergenza della serie*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(i\lambda)^n}{n!} A^n x$$

è infinito, x si dice intero.

Torniamo ora al nostro esempio $x \in \mathcal{H}_\omega$: esiste n tale che $x \in \mathcal{H}_n$, quindi

$$A_n := A|_{\mathcal{H}_n}$$

è autoaggiunto e limitato (infatti $||A_n|| \leq n$ dato che $|(x, Ax)| \leq n$); ma, per ogni n: $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{D}_A$, dato che se $x \in \mathcal{H}_n$ allora

$$\int \lambda^2 d(x, E(\lambda)x) = \int_{-n}^{n} \lambda^2 d(x, E(\lambda)x) < \infty$$

Quindi $\mathcal{H}_\omega \subset \mathcal{D}_A$. Inoltre ogni vettore di $\mathcal{H}_n$ è autovettore di A e quindi $A\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}_n$, sicché per ogni $x \in \mathcal{H}_n$: $x \in C^\infty(A)$ a $A_n^k x = A^k x$. Ma

$$\sum_{m\geq 0} \frac{(i\lambda)^m}{m!} A^m x = \sum_{m\geq 0} \frac{(i\lambda)^m}{m!} A_n^m x = e^{i\lambda A_n} x$$

(il raggio di convergenza è, in questo caso, infinito). Dunque ogni elemento di $\mathcal{H}_\omega$ è un vettore analitico per A.

Ne segue, dato che $\overline{\mathcal{H}_\omega} = \mathcal{H}$:

14.4.3 Proposizione *Se A è autoaggiunto possiede un insieme denso di vettori analitici.*

Osserviamo che, se x è un vettore analitico e

$$e^{itA} x = \sum_{n\geq 0} \frac{(i\lambda)^n}{n!} A^n x$$

Per quel che sappiamo sui gruppi ad un parametro:

$$x \in \mathcal{D}_A \iff t \longmapsto U(t)x \in C^1(\mathbb{R})$$

e quindi

$$x \in \mathcal{D}_{A^n} \iff t \longmapsto U(t)x \in C^n(\mathbb{R})$$

In particolare

$$x \in C^\infty(A) \iff t \longmapsto U(t)x \in C^\infty(\mathbb{R})$$

14.4.4 Teorema *Se A è autoaggiunto, un vettore $x \in C^\infty(A)$ è analitico per A se e solo se la funzione $t \longmapsto U(t)x$ è analitica, cioè è la restrizione a $\mathbb{R}$ di una funzione olomorfa in $\{|\operatorname{Im} z| < \delta\}$ (ove δ è il raggio di convergenza della serie 14.4.1).*

DIMOSTRAZIONE: Sia A autoaggiunto e $x \in C^\infty(A)$. Se x è analitico allora, per ogni $y \in \mathcal{H}$:

$$\left(\sum_{n\geq 0} \frac{(it)^n}{n!} A_m^n x, y\right) = \left(\sum_{n\geq 0} -\frac{(it)^n}{n!} A_m^n y, x\right) = (e^{-itA_m} y, x)$$

(per continuità passiamo il prodotto scalare sotto il segno di sommatoria). Ma

$$e^{itA_m} y = e^{itA} y = \int e^{it\lambda} dE(\lambda) y$$

(avendosi $E(\lambda)y = E_m(\lambda)y$, ove $E_m(\lambda)$ è la famiglia spettrale associata a A_m), quindi

$$\begin{aligned}(y, \sum_{n\geq 0} \frac{(it)^n}{n!} A_m^n x) &= (\sum_{n\geq 0} \frac{(-it)^n}{n!} A_m^n y, x) \\ &= (e^{-itA} y, x) = (U(-t)y, x) = (y, U(t)x)\end{aligned}$$

Cioè

$$U(t)x = \sum_{n\geq 0} \frac{(it)^n}{n!} A_m^n x$$

Ma, se $t = z$ con $|z| < \delta$ allora questa serie definisce nel disco $\{|z| < \delta\}$ una funzione analitica e quindi, per $|t| < \delta$ è la restrizione di una funzione olomorfa nel disco. Se

$$x_\lambda = U(t)x$$

e se ripetiamo il ragionamento, allora questa funzione olomorfa è definita nel disco di centro λ e raggio δ: possiamo, al variare di λ, descrivere con l'unione di questi dischi l'intera striscia di piano $\{|\operatorname{Im} z| < \delta\}$ e, quindi, per continuazione analitica, abbiamo il teorema.

QED

Ora dimostriamo il risultato chiave sui vettori analitici:

14.4.5 Teorema (NELSON) *Se $A \subset A^*$ possiede un insieme totale di vettori analitici allora è essenzialmente autoaggiunto.*

Dimostrazione: Ci basta mostrare che se x è un vettore analitico per A allora è un vettore di unicità, e quindi applicare il criterio di Nussbaum. Ricordiamo che un vettore differenziabile $x \in C^\infty(A)$ si dice *vettore di unicità* per $A \subset A^*$ se $A_x := A|_{\mathcal{D}_x}$ (ove $\mathcal{D}_x$ è il sottospazio generato dall'insieme $\{A^n x\}$) è un operatore (densamente definito in $\mathcal{H}_x = \overline{\mathcal{D}_x}$) essenzialmente autoaggiunto in $\mathcal{H}_x$.

Consideriamo dunque un vettore x analitico per A e l'operatore A_x: osserviamo che, su $\mathcal{H}_x$ esiste un operatore antiunitario V definito come

$$V : aA^n x \longmapsto \overline{a}A^n x$$

sui generatori (gli elementi di $\mathcal{D}_x$) ed estendendo per linearità e continuità a tutto $\mathcal{H}_x$; per definizione $VA_x = A_x V$ e quindi, per il criterio di von Neumann 13.4.1 A_x possiede un'unica estensione autoaggiunta $H = H^*$; allora x è analitico per H, dato che $A_x^n x = H^n x$ e $A^n x = A_x^n x$, cioè

$$A(A^n x) = A_x(A^n x) = H(A^n x)$$

e quindi x è analitico per H. Allora (se $|t| < \delta$):

$$e^{itH}x = \sum_{n\geq 0} \frac{(it)^n}{n!} H^n x = \sum_{n\geq 0} \frac{(it)^n}{n!} A^n x$$

sicché $e^{itH}x$ non dipende dall'estensione H ma solo da A, se $|t| < \delta$; tuttavia, per t qualsiasi, possiamo scrivere

$$e^{itH} = e^{iH(t_1+\ldots+t_n)}$$

con $|t_i| < \delta$.

Quindi tutte le estensioni autoaggiunte di A_x danno luogo al medesimo gruppo ad un parametro e^{itH} e dunque, per il teorema di Stone 14.3.6, esiste un'unica estensione autoaggiunta di A_x; ma (criterio di Von Neumann 13.4.1) A_x ne possiede almeno una. quindi è essenzialmente autoaggiunto e x è un suo vettore di unicità.

QED

Consideriamo una applicazione del teorema di Nelson. Sia μ una misura regolare positiva sull'asse reale $\mathbb{R}$ con supporto in un intervallo compatto I: allora è univocamente determinata dai suoi *momenti*

$$q_n := \int_I \lambda^n d\mu(\lambda)$$

al variare di $n \in \mathbb{N}$ (per il teorema di Stone–Weierstrass 9.2.9 e la densità delle funzioni continue in I nell'algebra $L^1(I)$).

Ci chiediamo se questo sia vero per una misura a supporto non compatto: se μ è semplicemente una misura regolare positiva su $\mathbb{R}$ e

$$a_n := \int_{\mathbb{R}} \lambda^n d\mu(\lambda)$$

possiamo formulare il *problema dei momenti (*HAMBURGER): *data una successione* $\{a_n\}$ *esiste una misura regolare positiva su* $\mathbb{R}$ *della quale i momenti siano gli elementi della successione?*

Intanto possiamo osservare che, se una tale misura esiste, allora per ogni polinomio $p \in \mathbb{C}[z]$:

$$\int |p(\lambda)|^2 d\mu(\lambda) \geq 0$$

e che, se $p(z) = \sum_n c_n z^n$ allora

$$0 \leq \int \left| \sum_n c_n \lambda^n \right|^2 d\mu(\lambda) = \sum_{n,m} c_n \overline{c_m} \int \lambda^{n+m} d\mu(\lambda)$$

così che $a_{n+m} = \int \lambda^{n+m}$.

in altri termini, la

$$\sum_{n,m} c_n \overline{c_m} a_{n+m} \geq 0$$

è una condizione necessaria per l'esistenza della misura μ. Il risultato interessante è che questa condizione è anche sufficiente.

14.4.6 Teorema *Il problema dei momenti ammette soluzione per una successione* $\{a_n\}$ *se e solo se*

$$\sum_{n,m=1}^{N} c_n \overline{c_m} a_{n+m} \geq 0$$

per ogni $N \in \mathbb{N}$ *e* $c_1, ..., c_N \in \mathbb{C}$.

DIMOSTRAZIONE: L'idea è di scrivere

$$a_n = (\xi, A_0^n \xi)$$

per qualche operatore hermitiano A_0 che ammette estensioni autoaggiunte e tale che $\xi \in C^\infty(A)$: infatti avremmo in questo caso

$$a_n = (\xi, A^n \xi) = \int \lambda^n d(\xi, E(\lambda)\xi)$$

per ogni estensione $A_0 \subset A = A^*$.

Consideriamo dunque lo spazio vettoriale X delle funzioni $c : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ a supporto finito (i coefficienti c_n) col prodotto

$$(c, c') := \sum_{m,n=0}^{\infty} c_n \overline{c_m} a_{n+m}$$

(si tratta di una forma sesquilineare semidefinita positiva per ipotesi). Se

$$N = \{c \in X \mid (c, c) = 0\}$$

allora sullo spazio vettoriale X/N la forma sesquilineare diviene una struttura prehilbertiana: sia $\mathcal{H}$ lo spazio di Hilbert ottenuto completando questo spazio prehilbertiano.

Definiamo su X l'operatore

$$(A_0 c)(n) := c_{n-1}$$

(con $(A_0 c)(0) := 0$). Dato che, se $(c, c) = 0$ allora $A_0 c = 0$ A_0 induce su X/N un operatore, che è hermitiano: infatti

$$\begin{aligned}
(c', A_0 c) &= \sum_{n,m=0}^{\infty} c'_n (A_0 c)(m) a_{n+m} = \sum_{n=0,m=1}^{\infty} c'_n c_{m-1} a_{n+m} \\
&= \sum_{n,l=0}^{\infty} c'_n c_l a_{n+l+1} = \sum_{n,l=0}^{\infty} c'_n c_l a_{(n+1)+l} \\
&= \sum_{k=1,l=0}^{\infty} c'_{k-1} c_l a_{k+l} = \sum_{k=0,l=0}^{\infty} (A_0 c')(k) c_l a_{k+l} \\
&= (A_0 c', c)
\end{aligned}$$

Abbiamo dunque un operatore densamente definito A_0 su $\mathcal{H}$ ($\mathcal{D}_{A_0} = X/N$). Ora consideriamo gli elementi di X:

$$e_i : \mathbb{N} \longrightarrow X \qquad \text{tale che} \qquad e_i(n) = \delta_{in}$$

Ovviamente $A_0 e_i = e_{i+1}$; se $\xi = \overline{e_0}$ è la sua classe di equivalenza in $\mathcal{H}$, allora

$$\xi \in C^\infty(A_0)$$

e

$$(\xi, A_0^k \xi) = (\overline{e_0}, \overline{e_k}) = (e_0, e_k) = \sum_{n,m=0}^{\infty} e_0(n) e_k(m) a_{n+m} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \delta_{0n} \delta_{km} a_{n+m} = a_k$$

Dunque ξ è un vettore ciclico oltre che differenziabile per A_0: ne segue che l'operatore hermitiano A_0 ammette estensioni autoaggiunte.

QED

Osserviamo che, se $A_0 \subset A = A^*$ nella dimostrazione precedente, allora A induce una rappresentazione dell'algebra $C(\mathbb{R})$

$$\pi(f) := f(A)$$

che ha ξ come vettore ciclico, dato che

$$A^n\xi = \operatorname*{s\text{-}lim}_{k\longrightarrow\infty} f_k(A)\xi$$

se $f_k \in C_0(\mathbb{R})$ è una funzione nulla all'infinito. Quindi, per la teoria GNS, la rappresentazione è univocamente determinata da uno stato

$$\omega(f) := (\xi, f(A)\xi) = \int f(\lambda)d\mu(\lambda)$$

Dunque le estensioni autoaggiunte sono in corrispondenza biunivoca con le misure regolari, la cui unicità equivale all'essere A_0 essenzialmente autoaggiunto. Ma per il teorema di Nelson A_0 è essenzialmente autoaggiunto perché X/N è un insieme di vettori analitici.

14.5 Gruppi commutativi e dualità di Pontriagin

Vogliamo infine giustificare l'affermazione fatta in calce al capitolo, secondo la quale è possibile generalizzare la teoria di Fourier al caso di un gruppo commutativo localmente compatto qualsiasi.

14.5.1 Definizione *Un* morfismo *fra i gruppi topologici G e H è una funzione $\varphi : G \longrightarrow H$ continua che sia un morfismo di gruppi.*

Ovviamente i gruppi topologici e i loro morfismi definiscono una categoria. Combinando le proprietà delle applicazioni continue e dei morfismi di gruppi si ottengono le proprietà dei morfismi di gruppi topologici: ad esempio, il nucleo $\ker\varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = e\}$ di un morfismo di gruppi topologici è un sottospazio chiuso (per continuità della φ) di G e lo spazio quoziente $G/\ker\varphi$ è un gruppo topologico isomorfo all'immagine $\operatorname{im}\varphi$; ovviamente un isomorfismo di gruppi topologici è un omeomorfismo che sia un morfismo di gruppi.

Particolare interesse hanno certi morfismi associati ad un gruppo G:

14.5.2 Definizione *Se G è un gruppo topologico, un* carattere *è un morfismo*

$$\chi : G \longrightarrow \mathbb{T}$$

del gruppo topologico G nel gruppo topologico $\mathbb{T}$.

In altri termini un carattere di G è una funzione continua a valori complessi tale che

- $|\chi(g)| = 1$
- $\chi(gh) = \chi(g)\chi(h)$

Osserviamo che l'insieme dei caratteri di un gruppo topologico è ancora un gruppo topologico: infatti il prodotto $\chi_1\chi_2$ di due caratteri soddisfa ancora le (1)-(2) e quindi è un carattere; lo stesso vale per l'inverso, definito come

$$\chi^{-1} := \overline{\chi}$$

(complesso coniugato). Rispetto a queste operazioni, l'insieme

$$\widehat{G} := \{\chi : G \longrightarrow \mathbb{T} \mid \chi \text{ carattere}\}$$

è un gruppo. Inoltre, $\widehat{G}$ è uno spazio topologico: basta definire la convergenza di una successione $\{\chi_n\}$ come la convergenze uniforme sui compatti $K \subset G$; in altri termini, una base di intorni dell'identità $e \in \widehat{G}$ è data dagli insiemi

$$\{\chi \in \widehat{G} \mid |\chi(g)| < \varepsilon\}_{g \in K}$$

al variare di K fra i compatti di G. Come accade per gli spazi vettoriali topologici, la topologia su un gruppo topologico è completamente determinata una volta che sia data intorno all'elemento e: infatti le traslazioni sono per definizione continue, e, se $g \in G$, e U è un intorno di e allora gU è un intorno di g.

Rispetto a questa topologia, $\widehat{G}$ è a sua volta un gruppo topologico: infatti se χ_1, χ_2, χ_3 e χ_4 sono caratteri di G, per ogni $g \in G$ si ha (denotiamo additivamente la moltiplicazione in $\mathbb{T}$, che immaginiamo come la circonferenza unitaria nel piano complesso e moltiplicativamente quella in $\widehat{G}$)

$$\begin{aligned} |\chi_3(x)\chi_4(x) - \chi_1(x)\chi_2(x)| =& |(\chi_3(x) - \chi_1(x))\chi_4(x) - \chi_1(x)(\chi_4(x) - \chi_2(x))| \\ \leq & |\chi_3(x) - \chi_1(x)| + |\chi_4(x) - \chi_2(x)| \end{aligned}$$

(dato che $\chi(x) \in \mathbb{T}$ si tratta di numeri complessi di modulo 1) e da questo scende la continuità del prodotto (la continuità del passaggio all'inverso è ovvia).

Osserviamo che la topologia di $\widehat{G}$ è indotta dalla topologia su $C_B(G)$ (funzioni continue e limitate su G) data dalle seminorme

$$p_K(f) = \sup_{g \in K} |f(g)|$$

Infatti $\widehat{G} \hookrightarrow C_B(G)$.

Inoltre $\widehat{G}$ è commutativo, dato che lo è $\mathbb{T}$:

$$(\chi_1\chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g) = \chi_2(g)\chi_1(g) = (\chi_2\chi_1)(g)$$

Calcoliamo il gruppo dei caratteri degli esempi che abbiamo dato:

14.5.3 Teorema *Il gruppo topologico* $\widehat{\mathbb{Z}}$ *è isomorfo al gruppo topologico* $\mathbb{T}$.

DIMOSTRAZIONE: Intanto stabiliamo una corrispondenza biunivoca fra $\widehat{\mathbb{Z}}$ e $\mathbb{T}$: un carattere $\chi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{T}$ è completamente determinato dal valore che assume su $1 \in \mathbb{Z}$, dato che

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \chi(n) = \chi(1 + ... + 1) = \chi(1)...\chi(1) = \chi(1)^n$$

(il prodotto in $G = \mathbb{Z}$ è la somma $+$). Per il resto, la funzione $\chi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{T}$ è completamente arbitraria: ne segue che per ogni $z \in \mathbb{T}$ esiste un carattere di $\mathbb{Z}$, determinato dalla

$$\chi_z(1) := z$$

Ovviamente se $\chi_z(1) = \chi_w(1)$ allora $z = w$ e quindi abbiamo una corrispondenza biunivoca

$$\widehat{\mathbb{Z}} \xleftrightarrow{\chi} \mathbb{T}$$

Di più, abbiamo che

$$\chi_{z_1 z_2} = \chi_{z_1}\chi_{z_2}$$

e quindi questa corrispondenza biunivoca è un isomorfismo di gruppi.

Resta da verificare che si tratta di un omeomorfismo di spazi topologici. Ma $\mathbb{Z}$ ha la topologia discreta: quindi i suoi compatti sono precisamente gli insiemi finiti e dunque la convergenza in $\widehat{\mathbb{Z}}$ è, per definizione, quella punto per punto. In particolare:

$$\chi z_n \longrightarrow \chi_z \iff \chi_{z_n}(1) \longrightarrow \chi_z(1)$$

il che accade se e solo se $z_n \longrightarrow z$.

QED

14.5.4 Teorema *Il gruppo topologico* $\widehat{\mathbb{R}}$ *è isomorfo al gruppo topologico* $\mathbb{R}$.

DIMOSTRAZIONE: Per ogni fissato $\lambda \in \mathbb{R}$, la funzione

$$\begin{aligned} \chi_\lambda : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{T} \\ x &\longmapsto e^{2\pi i \lambda x} \end{aligned}$$

è un carattere di $\mathbb{R}$: ma ogni altro carattere di $\mathbb{R}$ è di questa forma (per il teorema di Stone 14.3.6 nel caso dello spazio di Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{C}$), pertanto $\chi_\lambda \longleftrightarrow \lambda$ è una una mappa biunivoca $\mathbb{R} \longrightarrow \widehat{\mathbb{R}}$, che ovviamente è un omeomorfismo, ed un morfismo di gruppi topologici:

$$\chi_{\lambda+\mu}(t) = e^{i(\lambda+\mu)t} = e^{i\lambda t}e^{i\mu t} = \chi(\lambda)\chi(\mu)$$

QED

Possiamo stabilire dei semplici risultati sulla dualità nei gruppi abeliani: ricordiamo che se H è un sottogruppo di G (gruppo abeliano), un elemento $g \in G$ si dice ortogonale a un elemento $\chi \in \widehat{G}$ se $\chi(x) = 1$. Se G è topologico e S è un suo sottoinsieme, l'insieme degli elementi $\chi \in \widehat{G}$ ortogonali a *tutti* gli elementi di S si dice *annullatore di* S e si denota $S^\perp$. Si tratta ovviamente di un sottogruppo chiuso in $\widehat{G}$.

14.5.5 Lemma *Se G è un gruppo topologico localmente compatto abeliano e H è un sottogruppo chiuso di G, il duale del gruppo*[7] *quoziente, è isomorfo all'annullatore di H in $\widehat{G}$.*

Dimostrazione: Consideriamo l'epimorfismo canonico

$$p : G \longrightarrow G/H$$

ed il suo duale

$$\widehat{p} : \widehat{G/H} \longrightarrow \widehat{G}$$

definito come $\widehat{p}(\chi)(g) = \chi(p(g))$ ove $\chi \in \widehat{G/H}$ e $g \in G$. Allora $\widehat{p}$ è un monomorfismo di gruppi: se $\widehat{p}(\chi) = 1$ allora $\chi(p(g)) = 1$ e quindi $\chi \in H^\perp$, i.e. è il carattere 1 in $\widehat{G/H}$; inoltre $\operatorname{im} \widehat{p} = H^\perp$: infatti un carattere $\chi \in \widehat{G}$ è della forma $p(\chi')$ se e solo se χ è 1 su H.

Infine $\widehat{p}$ è un omeomorfismo: è aperta perché p è continua ed è continua perché p è aperta.

QED

14.5.6 Proposizione *Il duale di un gruppo finito è isomorfo al gruppo stesso.*

Dimostrazione: Il duale di $\mathbb{Z}_n$ è isomorfo all'annullatore in $\mathbb{T}$ di $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$: si tratta quindi del sottogruppo di $\mathbb{T}$, immagine, per mezzo della mappa canonica $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}$, del sottoinsieme dei numeri reali x tali che

$$e^{2\pi i x n} = 1$$

Si vede facilmente che questo gruppo è ciclico di ordine n, e ne deduciamo che il duale di un gruppo ciclico è isomorfo al gruppo stesso; combinando questo risultato col noto teorema di Algebra secondo il quale ogni gruppo abeliano finito è prodotto di gruppi ciclici, otteniamo la tesi

QED

Dato che, ovviamente

[7] Ogni sottogruppo di un gruppo abeliano è normale, quindi il quoziente è sempre un gruppo.

14.5.7 Proposizione *Il duale di un prodotto di gruppi è il duale dei prodotti.*
abbiamo che $\widehat{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$, $\widehat{\mathbb{T}^n} = \mathbb{Z}^n$ e $\widehat{\mathbb{Z}^n} = \mathbb{T}^n$: in particolare osserviamo che ognuno di questi gruppi è isomorfo al suo biduale (nel caso di $\mathbb{R}^n$ questa non è altro che la dualità canonica fra uno spazio vettoriale ed il suo biduale). In generale è vero il seguente

14.5.8 Teorema (DUALITÀ DI PONTRIAGIN) *Il duale del duale di un gruppo topologico G è canonicamente isomorfo al gruppo stesso.*

In altri termini si tratta di una vastissima generalizzazione dell'isomorfismo canonico fra uno spazio vettoriale ed il suo biduale, al caso di un gruppo topologico commutativo qualsiasi:

$$\widehat{\widehat{G}} \cong G$$

Per la dimostrazione si veda ad esempio [32] oppure, per una dimostrazione che usi l'Analisi Funzionale, [21].

Dato che G è commutativo, anche $L^1(G)$ e quindi $C^*(G)$ lo è; allora, per il teorema di Gel'fand–Najmark 9.5.1, esiste uno spazio topologico localmente compatto X tale che

$$C^*(G) \cong C_0(X)$$

Per definizione, la compattificazione di X è lo spettro dell'algebra $\mathcal{A}$ ottenuta aggiungendo un elemento neutro a $C^*(G)$: si tratta cioè dello spazio dei funzionali lineari moltiplicativi su $C^*(G)$, e quindi dello spazio delle rappresentazioni unitarie di dimensione 1 (continue) di $C^*(G)$; ma sappiamo che esiste una corrispondenza biunivoca fra queste rappresentazioni e le rappresentazioni unitarie di dimensione 1 di G, ovvero dei suoi caratteri. Quindi

$$X \leftrightarrow \widehat{G}$$

La catena di corrispondenze che abbiamo enunciato è continua in ambedue i sensi, quindi ha luogo l'omeomorfismo

$$X \cong \widehat{G}$$

Osserviamo in ogni caso, che se G è compatto allora $C^*(G) = C(X)$ possiede un'unità, quindi X è discreto; viceversa se G è discreto allora $L^1(G)$ possiede una unità, quindi, per il teorema di Gel'fand–Najmark, X è compatto. Dunque

14.5.9 Corollario *Il duale di un gruppo compatto è un gruppo discreto e viceversa.*

Si noti che, se G è un gruppo commutativo localmente compatto e se consideriamo $\widehat{G}$ con la topologia discreta, allora il duale di $\widehat{G}$ è un gruppo compatto nel quale G si immerge, e che si dice *compattificazione di Bohr*.

Osserviamo che, per la funtorialità espressa dal teorema di Gel'fand–Najmark 9.5.1:

$$C^*(G) \cong C_0(\widehat{G})$$

(isomorfismo di C*-algebre).

Quindi: ogni rappresentazione non degenere ρ di $C_0(\widehat{G})$ corrisponde unicamente ad una rappresentazione non degenere π di $C^*(G)$ che corrisponde unicamente ad una rappresentazione unitaria (fortemente continua) U di G, e la corrispondenza è realizzata dalle

$$\pi(f) = \int f(g)U(g)d\mu(g) = \rho(\widehat{f})$$

ove $\widehat{f}$ è la trasformata di Gel'fand di f.

Possiamo allora estendere ρ ad una rappresentazione dell'algebra delle funzioni boreliane limitare

$$\widetilde{\rho} : \beta(\widehat{G}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

in modo che

$$\widetilde{\rho}(\chi_\Delta) = E(\Delta)$$

(misura spettrale). Quindi, per ogni funzione boreliana $f \in \beta(\widehat{G})$ possiamo esprimere $\widetilde{\rho}(f)$ come limite (in norma) di somme alla Lebesgue–Stieltjes:

$$\widetilde{\rho}(f) = \int_{\widehat{G}} f(\chi)dE(\chi)$$

In particolare, per $h \in C_0(\widehat{G})$:

$$\widetilde{\rho}(h) = \rho(h) = \int_{\widehat{G}} h(\chi)dE(\chi)$$

sicché, per $h = \widehat{f}$ (trasformata di Gel'fand di una funzione $f \in L^1(G)$):

$$\pi(f) = \rho(\widehat{f}) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\chi)dE(\chi)$$

e quindi, dato che la mappa

$$\eta_g : \chi \longmapsto \chi(g)$$

è un funzionale su $\beta(\widehat{G})$, troviamo

$$\widetilde{\rho}(\eta_g) = \int_{\widehat{G}} \chi(g)dE(\chi)$$

Ora applichiamo il seguente teorema per concludere che

$$\widetilde{\rho}(\eta_g) = U(g)$$

14.5.10 Teorema (STONE–NAJMARK–AMBROSE–GODEMENT)

$$\int_{\widehat{G}} \chi(g) dE(\chi) = U(g)$$

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo che, se, al solito, $f_g(h) = f(g^{-1}h)$ da

$$\widehat{f}(\chi) = \omega(f) = \int f(g)\chi(g)d\mu(g)$$

segue che

$$\widehat{f_g}(\chi) = \int f(g^{-1}h)\chi(h)d\mu(h) = \int f(h)\chi(gh)d\mu(h) = \chi(g)\widehat{f}(\chi)$$

cioè $\widehat{f_g}(\chi) = \chi(g)\widehat{f}(\chi)$, da cui ($\rho$ è un omomorfismo):

$$\begin{aligned} U(g)\pi(f) &= \pi(f_g) = \rho(\widehat{f_g}) = \widetilde{\rho}(\widehat{f_g}) = \widetilde{\rho}(\chi(g)\widetilde{\rho}(\widehat{f}) \\ &= \widetilde{\rho}(\eta_g)\pi(f) = \left(\int_{\widehat{G}} \chi(g)dE(\chi)\right)\pi(f) \end{aligned}$$

Pertanto, dato che π è non degenere, $\{\pi(f)x\}$ è totale per ogni x al variare di f:

$$U(g) = \int_{\widehat{G}} \chi(g)dE(\chi)$$

QED

Definiamo ora la trasformata di Fourier per i gruppi localmente compatti abeliani semplicemente come la trasformata di Gel'fand

$$\widehat{\ }: L^1(G) \longrightarrow C_0(\widehat{G})$$

Evidentemente

$$\widehat{L^1(G) \cap L^2}(G) = C_0(\widehat{G}) \cap L^2(\widehat{G})$$

e possiamo scegliere la misura di Haar su $\widehat{G}$ (semplicemente scalandola per un fattore non nullo) in modo che

$$\int_G |f(g)|^2 d\mu(g) = \int_{\widehat{G}} |\widehat{f}(\chi)|^2 d\widehat{\mu}(\chi)$$

in modo da generalizzare il teorema di Plancherel al caso dei gruppi:

14.5.11 Teorema *La trasformata di Gel'fand si estende ad un isomorfismo unitario fra lo spazio di Hilbert $L^2(G)$ e lo spazio di Hilbert $L^2(\widehat{G})$.*