

## CAPITOLO 7

# SPAZI DI HILBERT E TEORIA DI FOURIER

In questo capitolo ci concentriamo sugli spazi di Hilbert: per questi spazi si possono generalizzare molte nozioni geometriche valide negli spazi euclidei, ad esempio i procedimenti di ortogonalizzazione, che forniscono i sistemi ortonormali completi: questi ultimi si inquadrano nella teoria di Fourier, della quale ci occuperemo in fondo al capitolo, e che costituisce il primo e principale esempio di applicazione degli spazi di Hilbert

### 7.1 Basi ortonormali negli spazi di Hilbert

Uno spazio di Hilbert, come ogni spazio vettoriale, possiede delle basi, che tuttavia si dimostrano inadatte a descriverne la geometria, dato che “ignorano” l’esistenza del prodotto hilbertiano; il concetto “giusto” di base per uno spazio di Hilbert è quello di sistema ortonormale completo.

**7.1.1 Definizione** *Un sistema ortonormale in uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  è una famiglia  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  di elementi di  $\mathcal{H}$  di norma 1 ( $\forall \alpha \in A \quad \|e_\alpha\| = 1$ ) tali che*

$$\forall \alpha, \beta \in A \quad (e_\alpha, e_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$$

A priori un sistema ortonormale può essere del tutto insufficiente a descrivere la totalità degli elementi di uno spazio di Hilbert; per questo diamo la

**7.1.2 Definizione** *Un sistema ortonormale  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  si dice base ortonormale (b.o.) se il sottospazio  $\sum_\alpha e_\alpha \mathbb{C}$  (generato dalla famiglia  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ) è denso in  $\mathcal{H}$ .*

**7.1.3 Proposizione** *Se  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  è un sistema ortonormale in uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  è una base ortonormale.
- Se  $\forall x \in \mathcal{H} \forall \alpha \in A \quad (e_\alpha, x) = 0$  allora  $x = 0$ .
- $\forall x \in \mathcal{H} \quad \|x\|^2 = \sum_\alpha |(e_\alpha, x)|^2$  (identità di Parseval).
- $\forall x \in \mathcal{H} \quad x = \sum_\alpha (e_\alpha, x)e_\alpha$ .

DIMOSTRAZIONE: (1)  $\iff$  (2) è ovvio per definizione di densità.

(1)  $\iff$  (4) Segue dal fatto che  $\overline{M} = M^{\perp\perp}$ ; infatti se  $B \subset A$  è finito e  $N$  è il sottospazio generato da  $\{e_\beta\}_{\beta \in B}$ , che è chiuso, allora per  $x \in \mathcal{H}$ :

$$x_N = \sum_{\beta \in B} (e_\beta, x)e_\beta$$

e, se  $M_0$  è il sottospazio (non chiuso!) generato da  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , si ha che, per  $x \in M_0$ :

$$x = \sum_{\alpha \in A} (e_\alpha, x)e_\alpha$$

e

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |(e_\alpha, x)|^2$$

(ove le somme sono estese ad un numero finito di termini non nulli). Consideriamo ora il sottospazio  $N_0$  denso in  $l^2(A)$  definito come

$$N_0 := \{f : A \longrightarrow \mathbb{C} \mid \text{Card}\{\alpha \in A \mid f(\alpha) \neq 0\} < \infty\}$$

L'applicazione

$$\begin{aligned} \Phi : N_0 &\longrightarrow M_0 \\ f &\longmapsto \sum_{\alpha \in A} f(\alpha)e_\alpha \end{aligned}$$

è una isometria lineare e suriettiva. Ma sia  $L^2(A)$  che  $\mathcal{H}$  sono completi e quindi  $\Phi$  si estende per continuità ad una funzione

$$\tilde{\Phi} : l^2(A) \longrightarrow \mathcal{H}$$

lineare isometrica e suriettiva, i.e. un isomorfismo di spazi di Hilbert. Quindi, per ogni  $x \in M$  esiste  $f \in l^2(A)$  tale che  $x = \sum_{\alpha \in A} f(\alpha)e_\alpha$  e quindi esiste  $\alpha_0 \in A$  tale che  $f(\alpha_0) = (e_{\alpha_0}, x)$ . Quindi (1)  $\iff$  (4).

Inoltre

$$\|x_{M^\perp}\|^2 = \|x\|^2 - \|x_M\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\alpha \in A} |(x, e_\alpha)|^2$$

da cui, per ogni  $x \in \mathcal{H}$ :

$$\sum_{\alpha \in A} |(x, e_\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$$

e quindi l'equivalenza (1)  $\iff$  (3).

QED

Notiamo due conseguenze della dimostrazione:

**7.1.4 Corollario** *Se  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  è una base ortonormale in uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  allora  $\mathcal{H} \cong l^2(A)$ .*

Cioè spazi di Hilbert che ammettano basi della stessa cardinalità sono isomorfi a  $l^2(A)$  e quindi fra loro.

**7.1.5 Corollario** (IDENTITÀ DI BESSEL)

$$\sum_{\alpha \in A} |(x, e_\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$$

**7.1.6 Teorema** *Uno spazio di Hilbert ha sempre una base ortonormale.*

**DIMOSTRAZIONE:** La famiglia  $\mathcal{S}$  formata dai sistemi ortonormali in  $\mathcal{H}$  è un insieme parzialmente ordinato dall'inclusione (e non vuoto, visto che un qualsiasi vettore di norma 1 forma da solo un sistema ortonormale). Se  $\Sigma$  è una catena in  $\mathcal{S}$  (i.e. per ogni  $S, S' \in \Sigma$  si ha  $S \subset S'$  oppure  $S' \subset S$ ) allora l'insieme unione di  $\Sigma$ :

$$\bigcup_{S \in \Sigma} S$$

è un sistema ortonormale: se  $x, y \in \bigcup_{S \in \Sigma} S$  allora esistono  $S, S' \in \Sigma$  tali che  $x \in S$  e  $y \in S'$  e quindi, dato che  $\Sigma$  è una catena, si ha  $x, y \in S \subset S'$  oppure  $x, y \in S' \subset S$ : in ogni caso  $x, y$  appartengono ad un medesimo sistema ortonormale (che sia  $S$  o  $S'$ ) e quindi devono verificare la  $(x, y) = \delta_{x,y}$ .

Inoltre l'insieme  $\bigcup_{S \in \Sigma} S$  è evidentemente un confine superiore della famiglia  $\Sigma$  rispetto all'ordine  $\subset$  e quindi, per il lemma di Zorn, l'insieme  $\mathcal{S}$  dei sistemi ortonormali ammette un elemento massimale: per definizione di massimalità (e per la (2) della proposizione precedente) questo massimale deve essere una base ortonormale; infatti la massimalità di una base è ovvia, mentre un sistema ortonormale massimale  $S$  che non sia una base è tale che  $S^\perp \neq 0$  e quindi deve esistere  $e \in S^\perp$  con  $\|e\| = 1$  in modo che  $S \cup \{e\}$  sia un sistema ortonormale, contro la massimalità di  $S$ .

QED

**7.1.7 Definizione** *La cardinalità di una base ortonormale in uno spazio di Hilbert si dice dimensione hilbertiana dello spazio.*

Evidentemente se la dimensione di  $\mathcal{H}$  come spazio vettoriale è finita allora anche la dimensione hilbertiana lo è e questi due numeri coincidono. In generale questo non sarà vero: molti spazi di funzioni, ad esempio  $L^2(\mathbb{R})$ , avranno dimensione hilbertiana numerabile (lo vedremo fra breve rammentando che si tratta di uno spazio separabile): tuttavia  $L^2(\mathbb{R})$ , come spazio vettoriale, ha dimensione continua: i suoi punti sono parametrizzati dagli elementi di  $\mathbb{R}$ .

Nel caso generale non è ovvio nemmeno che tutte le basi ortonormali abbiano la stessa cardinalità.

**7.1.8 Teorema** *Tutte le basi ortonormali in uno spazio di Hilbert hanno la stessa cardinalità, che è poi pari alla dimensione hilbertiana.*

DIMOSTRAZIONE: Siano  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  e  $\{f_\beta\}_{\beta \in B}$  basi ortonormali di  $\mathcal{H}$ , allora

$$\forall \alpha \in A \quad e_\alpha = \sum_{\beta \in B} (f_\beta, e_\alpha) f_\beta$$

Ma l'insieme

$$G_\alpha := \{\beta \in B \mid (f_\beta, e_\alpha) \neq 0\}$$

è numerabile, quindi l'unione  $B = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$  è una unione di insiemi numerabili indicizzata da  $A$ :

$$\text{Card}(B) \leq \text{Card}(A) \cdot \aleph_0 = \text{Card}(A)$$

(stiamo supponendo  $\text{Card}(A)$  infinita, i.e.  $\geq \aleph_0$ ).

Viceversa, scrivendo gli elementi  $f_\beta$  in termini della base  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  otteniamo

$$\text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)$$

e quindi, per il teorema di Cantor–Bernstein:  $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$ .

QED

**7.1.9 Teorema** *Gli spazi di Hilbert di dimensione hilbertiana numerabile (o finita) sono tutti e soli quelli separabili<sup>1</sup>.*

DIMOSTRAZIONE: Il caso di dimensione finita segue ovviamente da quello di dimensione numerabile.

<sup>1</sup>Cioè che contengono una successione densa.

Sia la dimensione hilbertiana di  $\mathcal{H}$  numerabile: allora esiste una base ortonormale  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ed, evidentemente, il sottospazio

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})e_n$$

è denso in  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}e_n$ , la cui chiusura è  $\mathcal{H}$ .

Sia viceversa lo spazio  $\mathcal{H}$  è separabile; dimostreremo che possiede una base ortonormale indicizzata da  $\mathbb{N}$ . Sia  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di vettori totale<sup>2</sup>, che deve esistere per l'ipotesi di separabilità: usando un procedimento alla Gram-Schmidt la renderemo ortonormale in modo da avere la base voluta.

Basta per questo osservare che il sottospazio  $M_n$  generato dall'insieme finito di vettori  $\{x_1, \dots, x_n\}$  è chiuso (perché ha dimensione finita e quindi è completo) e ovviamente non contiene  $x_{n+1}$ . Decomponiamo allora  $x_{n+1}$  secondo la somma diretta  $M_n + M_n^\perp$  e chiamiamo  $y_{n+1}$  la componente di  $x_{n+1}$  in  $M_n^\perp$ . Ponendo per ogni  $n \in \mathbb{N}$ :

$$e_n := \frac{y_{n+1}}{\|y_{n+1}\|}$$

otteniamo ovviamente un sistema ortonormale in  $\mathcal{H}$

QED

La seguente definizione è di fondamentale importanza:

**7.1.10 Definizione** *Un operatore unitario fra due spazi di Hilbert  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$  è un operatore  $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  lineare isometrico tale che*

$$U^* = U^{-1}$$

Un operatore unitario è una realizzazione concreta di un isomorfismo fra spazi di Hilbert: in particolare

**7.1.11 Teorema** *Se due spazi di Hilbert  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$  hanno la stessa dimensione hilbertiana allora esiste un operatore unitario  $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ .*

**DIMOSTRAZIONE:** Possiamo per ipotesi scegliere due basi ortonormali  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  e  $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$  in  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$  indicizzate dallo stesso insieme  $A$ . Quindi esistono gli isomorfismi di spazi di Hilbert

$$\Phi_1 : \mathcal{H}_1 \rightarrow l^2(A) \quad \text{e} \quad \Phi_2 : \mathcal{H}_2 \rightarrow l^2(A)$$

(per il corollario 7.1.4) e componendo l'uno con l'inverso dell'altro otteniamo l'operatore unitario voluto.

QED

---

<sup>2</sup>Cioè gli  $\{x_n\}$  sono linearmente indipendenti ed il sottospazio vettoriale che generano è denso.

Ad esempio, se  $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{N})$ , e se consideriamo come insieme di indici i numeri naturali pari  $2\mathbb{N}$ , allora esiste un operatore unitario in  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  isometrico su un sottospazio *proprio*:

$$Ue_n := e_{2n}$$

tale che

$$\|Ux\|^2 = \|x\|^2$$

e quindi  $(Ux, Ux) = (x, U^*Ux) = (x, x)$  i.e.  $U^*U = I$ . Tuttavia  $U$  non è unitario, dato che non è suriettivo.

Osserviamo inoltre che se  $A = \{1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$  allora esiste un operatore

$$\begin{aligned} S : \mathcal{H} &\longrightarrow L^2(A) \\ e_n &\longmapsto e_{n+1} \end{aligned}$$

tale che  $\text{im}(S)^\perp = \mathbb{C}e_0$  e che si dice *shift unilatero*. Si tratta di un operatore isometrico.

## 7.2 Operatori di proiezione negli spazi di Hilbert

Consideriamo uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  ed un suo sottospazio vettoriale chiuso  $M$ . Per il teorema di Riesz ogni elemento  $x \in \mathcal{H}$  si decompone come  $x = x_M + x_{M^\perp}$ . Quindi la mappa

$$x \longmapsto x_M$$

è lineare<sup>3</sup> e suriettiva. Denotiamola  $E_M$ .

Osserviamo che  $E_M^2 = E_M$ , cioè che l'operatore  $E : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$  è idempotente: infatti  $E_M^2(x) = E_M(x_M) = x_M$ . Questo è un fatto del tutto generale che si verifica ogni qual volta uno spazio vettoriale  $X$  si decomponga in somma di sottospazi e si considerino le proiezioni di  $X$  su questi suoi sottospazi.

Un altro fatto generale che probabilmente è ben noto al lettore è che, viceversa, se  $X$  è uno spazio vettoriale e  $E : X \longrightarrow X$  un operatore lineare idempotente,  $X$  si decompone in somma diretta di due sottospazi, precisamente l'immagine  $M = \text{im}(E)$  di  $E$  ed il suo conucleo  $N = \text{im}(I - E)$  (ove  $I$  è l'operatore identità su  $X$ ).

Nel caso di un sottospazio chiuso  $M$  di uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  la proiezione  $E_M : X \longrightarrow X$  è un operatore continuo:

$$\|x\|^2 = \|x_M\|^2 + \|x_{M^\perp}\|^2$$

---

<sup>3</sup>Se  $X$  è un qualsiasi spazio vettoriale che sia somma diretta di due sottospazi  $M$  e  $N$  allora la decomposizione di un elemento  $x \in X$  come somma di un elemento  $x_M \in M$  ed un elemento  $x_N \in N$  è unica, e quindi le mappe  $x \longmapsto x_M$  e  $x \longmapsto x_N$  sono lineari.

da cui segue  $\|E_M x\| = \|x_M\| \leq \|x\|$ .

Osserviamo esplicitamente che,  $E \neq 0$  se e solo se  $\text{im}(E) \neq (0)$ , il che avviene se e solo se esiste un elemento  $x_0 \in \mathcal{H}$  non nullo tale che  $E x_0 = x_0$ . Dunque  $\|E\| = 1$ .

Naturalmente

$$(y, E x) = (y_M + y_{M^\perp}, x_M) = (y_M, x_M) = (E y, E x) = (y, E^* E x)$$

e quindi un proiettore  $E$  è autoaggiunto. Dunque

$$E = E^* E \iff \begin{cases} E = E^2 \\ E = E^* \end{cases}$$

sono condizioni equivalenti all'essere  $E$  un proiettore su un sottospazio chiuso.

**7.2.1 Definizione** Una isometria parziale in uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  è un elemento  $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  tale che l'operatore

$$W|_{\mathcal{N}(W)^\perp}$$

sia una isometria (si ricordi che  $\mathcal{N}(A)$  è il nucleo dell'operatore  $A$ , i.e. l'insieme  $\{x \in \mathcal{H} \mid Ax = 0\}$ ).

Ad esempio, se  $M$  e  $N$  sono sottospazi chiusi di  $\mathcal{H}$  della stessa dimensione allora esiste un operatore unitario

$$W_0 : M \longrightarrow N$$

che possiamo comporre ad esempio con il proiettore  $E_M$  ottenendo

$$W := W_0 E_M$$

che è evidentemente una isometria parziale.

**7.2.2 Proposizione** Esiste una corrispondenza biunivoca

$$\{M \subset \mathcal{H} \mid M = \overline{M}\} \longleftrightarrow \{E \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid E = E^* E\}$$

**DIMOSTRAZIONE:** Se  $E \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  è tale che  $E = E^* E$  allora prendiamo  $M = \text{im}(E)$  e  $N = \text{im}(I - E)$ . Ovviamente  $\mathcal{H} = M + N$ . Inoltre  $M \cap N = (0)$ , dato che  $M = N^\perp$ :  $(E y, (I - E) x) = (y, (E^* - E^* E) x) = 0$ , ed analogamente  $N = M^\perp$ .

QED

Se  $M_1$  e  $M_2$  sono sottospazi chiusi di  $\mathcal{H}$ , con proiettori  $E_1, E_2$ , allora

$$M_1 \subset M_2^\perp \iff E_1 E_2 = 0$$

Infatti  $0 = (E_1 x, E_2 y) \iff (x, E_1^* E_2 y) = 0 \iff E_1^* E_2 = 0 \iff E_1 E_2 = 0$  (essendo i proiettori autoaggiunti). Ovviamente  $E_1 E_2 = 0 \iff E_2 E_1 = 0$  e  $M_1 \subset M_2^\perp \iff M_2 \subset M_1^\perp$ .

Osserviamo che in generale la somma  $E_1 + E_2$  non è necessariamente idempotente, ma tuttavia, se  $M_1 \perp M_2$ :

$$(E_1 + E_2)^2 = E_1^2 + E_1 E_2 + E_2 E_1 + E_2^2 = E_1 + E_2$$

e quindi  $E_1 + E_2$  è in questo caso il proiettore di  $M_1 + M_2$ .

QED

Questi fatti si estendono al caso di  $n$  proiettori, così ad esempio, se  $M_1, \dots, M_n$  sono sottospazi chiusi mutuamente ortogonali, allora  $\sum E_i$  è il proiettore dello spazio  $\sum M_i$ . In particolare la somma di sottospazi chiusi è chiuso.

Ancora più in generale, se  $\{M_\alpha\}$  è una famiglia qualsiasi di sottospazi vettoriali chiusi di  $\mathcal{H}$  mutuamente ortogonali:

$$\forall \alpha \neq \beta \quad M_\alpha \perp M_\beta$$

allora lo spazio  $\sum M_\alpha$  può non essere affatto chiuso. Bisogna considerare esplicitamente la sua chiusura in  $\mathcal{H}$ .

Ad esempio, si noti che se  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  sono idempotenti autoaggiunti (non nulli!) e tali che

$$\forall i \neq j \quad E_i E_j = 0$$

allora  $\sum_{i \in \mathbb{N}} E_i$  non converge in norma. Se così non fosse si avrebbe infatti, per ogni  $\varepsilon > 0$  e per  $n, m > n_\varepsilon$ :

$$\left\| \sum_{i=1}^n E_i \right\| < \varepsilon$$

il che è assurdo, visto che l'idempotente autoaggiunto  $\sum E_i$  ha norma 1.

Questo esempio mostra come sia necessario considerare topologie alternative sullo spazio degli operatori lineari.

**7.2.3 Definizione** Se  $X$  è uno spazio di Banach e  $\{A_n\} \subset \mathcal{B}(X)$  allora si dice che la successione  $\{A_n\}$  converge fortemente a  $A$ , e si scrive

$$A_n \xrightarrow{f} A$$

se per ogni  $x \in X$ :  $\lim_n A_n x = Ax$ .

Osserviamo che se  $\|A_n - A\| \rightarrow 0$  allora  $\sup_{\|x\|=1} |A_n x - Ax| \rightarrow 0$  e quindi (scriviamo  $A_n \xrightarrow{\|\cdot\|} A$  per la convergenza in norma):

$$A_n \xrightarrow{\|\cdot\|} A \iff A_n \xrightarrow{f} A \text{ uniformemente sulla palla unitaria in } \mathcal{H}$$

Ricordando la definizione di topologia debole su uno spazio topologico (definizione 2.1.22), diamo la

**7.2.4 Definizione** *La topologia forte sullo spazio  $\mathcal{B}(X)$  è la topologia debole definita dalla famiglia di funzioni*

$$\{f : \mathcal{B}(X) \rightarrow X \mid \forall A \in \mathcal{B}(X) \quad f(A) = Ax\}_{x \in X}$$

Per capire meglio la definizione, scriviamo come sono fatti gli intorni di un operatore  $A$  nella topologia forte:

$$U_{x_1, \dots, x_n}(A) = \{B \in \mathcal{B}(X) \mid \forall k = 1, \dots, n \quad \|(B - A)x_k\| \leq 1\}$$

(l'intorno  $U$  dipende da  $A$  e da  $n$  elementi  $x_1, \dots, x_n \in X$ ).

Evidentemente questa topologia non possiede una base numerabile di intorni, e non può dunque caratterizzarsi semplicemente con i limiti di successioni, bensì con i limiti di successioni generalizzate.

Supponiamo quindi di avere una famiglia di proiettori  $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$  con  $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$  relativi sottospazi e consideriamo l'insieme

$$B := \{\beta \subset A \mid \text{Card}(\beta) < \infty\}$$

parzialmente ordinato dalla relazione di inclusione  $\subset$ . Si tratta di un insieme diretto e quindi possiamo definire la successione generalizzata

$$F_\beta := \sum_{\alpha \in \beta} E_\alpha$$

il cui limite (se esiste) è  $\sum_{\alpha \in A} E_\alpha$ .

**7.2.5 Proposizione** *La serie*

$$\sum_{\alpha \in A} E_\alpha =: E$$

*converge nella topologia forte.*

DIMOSTRAZIONE: Dobbiamo dimostrare che per ogni  $x \in \mathcal{H}$  esiste un  $\beta_0 \in B$  tale che se  $\beta_0 \subset \beta$  allora

$$\|F_\beta x - Ex\| < 1$$

Sia  $x \in M$  con

$$M := \overline{\sum_{\alpha \in A} M_\alpha}$$

Dato che  $M$  è chiuso deve esistere  $x' \in \sum_{\alpha \in \beta_0} M_\alpha$  arbitrariamente vicino a  $x$  (in norma) i.e.  $x' = \sum_{\alpha \in A} E_\alpha x$ . Dunque

$$x - \sum_{\alpha \in \beta} E_\alpha x = x - \sum_{\alpha \in \beta} E_\alpha E_\alpha x + \sum_{\alpha \in \beta} E_\alpha x' = x - x' + F_\beta(x - x')$$

i.e.

$$\|x - \sum_{\alpha \in \beta} E_\alpha x\| \leq \|x - x'\| + \|F_\beta(x - x')\| \longrightarrow 0$$

per  $\|x - x'\| \longrightarrow 0$ . Dunque, se  $x \in M$  allora  $x = \sum_{\alpha \in A} E_\alpha x$ .

Se ora  $x \in \mathcal{H}$  è qualsiasi,  $Ex \in M$  e quindi, applicando il ragionamento precedente (tenendo conto che  $E_\alpha Ex = E_\alpha x$ , avendosi  $M_\alpha \subset M$ ) si trova

$$Ex = \sum_{\alpha \in A} E_\alpha Ex = \sum_{\alpha \in A} E_\alpha x$$

QED

Osserviamo che, se  $\beta \subset A$  (con  $\text{Card}(\beta) < \infty$ ), allora

$$\left\| \sum_{\alpha \in \beta} E_\alpha x \right\|^2 = \sum_{\alpha \in \beta} \|E_\alpha x\|^2$$

Se  $x \in \mathcal{H}$ , per la proposizione precedente si ha

$$\|Ex\|^2 = \lim_{\beta} \left\| \sum_{\alpha \in \beta} E_\alpha x \right\|^2 = \sum_{\alpha} \|E_\alpha x\|^2$$

Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti<sup>4</sup>:

- $\overline{\sum_{\alpha \in A} M_\alpha} = \mathcal{H}$ .
- $\mathcal{H} = M$ .
- $\sum_{\alpha} E_\alpha = I$  (nella topologia forte).

<sup>4</sup>Un sottoinsieme è totale se il suo involucro lineare, il sottospazio vettoriale che genera, è denso.

- $\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$  è un *sottoinsieme totale* in  $\mathcal{H}$ .
- $(\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha)^\perp = 0$  ( $S$  è totale se e solo se  $S^\perp = 0$ ).

Non appena una di esse sia verificata allora ha luogo l'isomorfismo di spazi di Hilbert

$$\mathcal{H} \cong \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$$

realizzato dalla mappa  $x \mapsto \{\alpha \in A \mapsto \chi(\alpha) = E_\alpha x \in M_\alpha\}$ . Si noti che

$$\sum_{\alpha} \|\chi(\alpha)\|^2 = \|x\|^2$$

e si osservi che, se ciascuno degli spazi  $M_\alpha$  è di dimensione 1, allora la teoria che abbiamo svolto è semplicemente quella delle basi ortonormali in  $\mathcal{H}$ .

Concludiamo la nostra analisi di  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  indagandone alcune particolarità della struttura algebrica. Prima svolgiamo qualche semplice osservazione sui proiettori e sui loro sottospazi associati:

**7.2.6 Proposizione**  $(x, Ex) = (x, x) \iff x \in M$ .

DIMOSTRAZIONE: Basta osservare che

$$(Ex, Ex) = (x, Ex) = (x, x) = (Ex, Ex) + ((I - E)x, (I - E)x)$$

e che  $(I - E)x = 0 \iff x = Ex$ .

QED

Se  $M$  e  $N$  sono sottospazi chiusi, allora

$$M \subset N \iff E_M E_N = E_M$$

Ma  $EF$  è autoaggiunto se e solo se  $EF = FE$  i.e.  $E_M E_N = E_M \iff E_N E_M = E_M$ :

$$M \subset N \Rightarrow E_M E_N = E_N E_M$$

Inoltre

$$M \perp M \Rightarrow E_M E_N = E_N E_M$$

Se poi  $M = M_1 + M_2$  allora  $E_1 + E_2 = E_M := E$  e dunque, se  $F := E_N$ ,  $EF = FE$ .

In  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  c'è una relazione di ordine parziale che possiamo determinare stabilendo quali sono gli elementi positivi:

$$\mathcal{B}(\mathcal{H})_+ := \{B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid \forall x \in \mathcal{H} \quad (x, Bx) \geq 0\}$$

Evidentemente, per l'identità di polarizzazione:

$$B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+ \Rightarrow B = B^*$$

Ad esempio per ogni  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  l'operatore  $AA^*$  è semi-definito positivo:  $AA^* \geq 0$ .

In particolare, un autoaggiunto idempotente  $E$  è positivo.

**7.2.7 Proposizione**  $M \subset N \iff E_M E_N = EM \iff E_M \leq E_N$ .

DIMOSTRAZIONE: Dato che  $N = M + (M^\perp \cap N)$  si ha  $E_N = E_M + E_{M^\perp \cap N}$  e quindi:

$$(x, E_N x) = (x, E_M x) + (x, E_{M^\perp \cap N} x)$$

quindi, dato che il secondo addendo del secondo membro è  $\geq 0$ , troviamo  $(x, E_N x) \geq (x, E_M x)$ .

Viceversa,  $x \in M \iff (x, E_M x) = (x, x)$ . Ma se  $E_M \leq E_N$  allora

$$(x, x) = (x, E_M x) \leq (x, E_N x) = (E_N x, E_N x) \leq \|x\|^2 = (x, x)$$

(dato che  $E_N$  è un proiettore). Quindi, per la proposizione precedente:

$$M \subset N$$

QED

**7.2.8 Teorema** *Se  $E$  e  $F$  sono idempotenti autoaggiunti in  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  (e quindi esistono i sottospazi chiusi  $M$  e  $N$  in modo che  $E = E_M$  e  $F = E_N$ ) allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- $EF = FE$ .
- $EF = E_{M \cap N}$ .
- $N = (N \cap N) + (N \cap M^\perp)$ .

DIMOSTRAZIONE: (3)  $\Rightarrow$  (1) è già stato dimostrato.

(1)  $\Rightarrow$  (2):  $EF = FE \Rightarrow EF = (EF)^*$  e  $\Rightarrow (EF)^2 = E^2 F^2 = EF$ . Quindi  $EF$  è un proiettore se  $EF = FE$ .

Ma, se  $x \in M \cap N$  allora  $Ex = x = Fx$  e quindi  $EFx = x$ , cioè  $M \cap N \subset \text{im}(EF)$ . Inoltre, se  $x \in \text{im}(EF)$  allora  $x = EFx$  e  $Ex = E(EFx) = E^2 Fx = x$ . Scambiando il ruolo di  $E$  e  $F$  si ottiene anche  $Fx = x$  e quindi  $M \cap N = \text{im}(EF)$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1) è banale.

(2)  $\Rightarrow$  (3): Se  $EF = E_{M \cap N}$  allora:

$$F = (F - EF) + EF = F(I - E) + EF$$

Ma vale (1) (perché vale (2)) e quindi  $F$  e  $I - E$  commutano:

$$F(I - E) = E_{N \cap M^\perp}$$

e  $EF = E_{N \cap M}$ , sicché

$$F = E_{N \cap M^\perp} + E_{N \cap M} \Rightarrow N = M^\perp \cap N + M \cap N$$

QED

Possiamo formulare quanto fin qui ottenuto dicendo che *il reticolo dei sottospazi chiusi (o equivalentemente degli idempotenti autoaggiunti) di uno spazio di Hilbert è un'algebra di Boole.*

### 7.3 Serie di Fourier

Corrediamo ora la teoria con gli esempi fondamentali: le serie e l'integrale di Fourier<sup>5</sup>.

Vogliamo considerare funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  periodiche, di periodo  $2\pi$  (come le classiche funzioni trigonometriche):  $f(t) = f(t + 2\pi)$ ; il modo più naturale di procedere non è considerare queste funzioni definite sulla retta reale ma sulla circonferenza  $\mathbb{T} = \{|z| = 1\} \subset \mathbb{C}$ . Osserviamo che  $\mathbb{T}$  è lo spazio topologico (compatto) ottenuto dall'intervallo  $[0, 2\pi]$  identificandone gli estremi  $0 \approx 2\pi$ , ovvero è il quoziente  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  (via la mappa  $t \mapsto e^{it}$ ).

Consideriamo dunque lo spazio  $\mathbb{T}$ , con la misura di Lebesgue: ricordiamo che la misura di Lebesgue è invariante per traslazioni:

$$\int_{\mathbb{T}} f(t-s) dt = \int_{\mathbb{T}} f(t) dt$$

per ogni  $0 \leq s < 2\pi$  (integrare su  $\mathbb{T}$  è come integrare sull'intervallo  $(0, 2\pi)$ ).

Consideriamo lo spazio  $L^1(\mathbb{T})$  con la norma di Banach

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)| dt$$

(supponiamo che le funzioni abbiano valori complessi).

Ad esempio sia

$$p(t) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{int}$$

(una tale funzione si dice *polinomio trigonometrico*). I coefficienti  $a_n$  del polinomio sono tutto ciò che dobbiamo conoscere per determinarlo completamente; inoltre si possono ricavare dal polinomio stesso, per mezzo della formula

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} p(t) e^{-int} dt$$

Questa formula segue direttamente dalle relazioni di ortogonalità

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{int} dt = \delta_{n0}$$

---

<sup>5</sup>Si tratta degli esempi che storicamente hanno dato impulso sia alla teoria della misura di Lebesgue che alla teoria degli spazi di Hilbert.

**7.3.1 Definizione** Una serie trigonometrica è una espressione formale

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$$

con  $a_n \in \mathbb{C}$ .

Notiamo che si tratta di una serie formale, nel senso che può benissimo non convergere; tuttavia, motivati dall'esempio dei polinomi trigonometrici, ci chiediamo se una tale serie non possa rappresentare una funzione.

Sia  $f \in L^1(\mathbb{T})$  e definiamo l' $n$ -simo *coefficiente di Fourier* di  $f$  come

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt$$

Se  $f$  è un polinomio otteniamo esattamente il suo coefficiente in grado  $n$ ; in generale abbiamo non un polinomio ma una serie trigonometrica

$$S_f := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{int}$$

che si dice *serie di Fourier* associata alla funzione  $f$ . Si verificano immediatamente le seguenti proprietà:

**7.3.2 Proposizione** Siano  $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ ;

- $\widehat{f+g}(n) = \widehat{f}(n) + \widehat{g}(n)$ .
- $\forall z \in \mathbb{C} \widehat{zf}(n) = z\widehat{f}(n)$ .
- Se la traslata di  $t \in \mathbb{T}$  della funzione  $f$  è la funzione

$$f_t(s) := f(s - t)$$

allora  $\widehat{f_t}(n) = \widehat{f}(n) e^{-int}$ .

•

$$|\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_1$$

Forse solo la (4) merita un commento:

$$|\widehat{f}(n)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)| dt = \|f\|_1$$

(ricordiamo che  $e^{it}$  è un numero complesso di modulo 1, se  $t \in \mathbb{R}$ ). Evidentemente, se  $\{f_n\}$  è una successione convergente in  $L^1(\mathbb{T})$  allora  $\widehat{f_n}$  converge uniformemente.

Definiamo ora una operazione sullo spazio  $L^1(\mathbb{T})$  che riflette il fatto che  $\mathbb{T}$  è un gruppo rispetto alla somma (modulo  $2\pi$ ).

**7.3.3 Lemma** Se  $f, g \in L^1(\mathbb{T})$  allora, per quasi ogni  $s \in \mathbb{T}$ , la funzione  $t \mapsto f(t)g(s-t)$  è integrabile.

DIMOSTRAZIONE: La funzione di due variabili  $(s, t) \mapsto f(t)g(s-t)$  è misurabile (è prodotto di funzioni misurabili!) e quindi, per quasi ogni  $t$ , la funzione  $s \mapsto f(t)g(s-t)$  è multiplo costante di  $g_t$  e quindi è integrabile e

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)g(s-t)| ds dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)| \|g\|_1 dt = \|f\|_1 \|g\|_1$$

Quindi  $f(t)g(s-t)$  è integrabile (per il teorema di Fubini) come funzione di  $t$ , per quasi ogni  $s$ .

QED

Abbiamo quindi, per ogni  $f, g \in L^1(\mathbb{T})$  la loro *convoluzione*  $f * g \in L^1(\mathbb{T})$  definita come

$$f * g(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)g(s-t) dt$$

Ovviamente

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

dato che

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int |f * g(s)| ds &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{2\pi} \int |f(t)g(s-t)| dt ds \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2} \iint |f(t)g(s-t)| dt \otimes ds = \|f\|_1 \|g\|_1 \end{aligned}$$

**7.3.4 Proposizione**  $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$

DIMOSTRAZIONE: Si tratta di un semplice cambiamento di variabile nell'integrale combinato col teorema di Fubini:

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int f * g(s) e^{-ins} ds = \frac{1}{4\pi^2} \iint f(t) e^{-int} g(s-t) e^{-in(s-t)} ds dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int f(t) e^{-int} dt \frac{1}{2\pi} \int g(s) e^{-ins} ds = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n) \end{aligned}$$

QED

A questo punto, usando calcoli analoghi a quelli fin qui svolti, è un facile esercizio dimostrare la

**7.3.5 Proposizione** *Rispetto alla convoluzione, lo spazio  $L^1(\mathbb{T})$  diviene un'algebra associativa e commutativa.*

**7.3.6 Esempio** *Calcoliamo la convoluzione di una funzione  $f \in L^1(G)$  con un polinomio trigonometrico  $p$ :*

$$\begin{aligned} f * p(t) &= \frac{1}{2\pi} \int f(s) \sum_{n=-N}^N a_n e^{i(t-s)n} ds = \sum_{n=-N}^N a_n e^{int} \frac{1}{2\pi} \int f(s) e^{-ins} ds \\ &= \sum_{n=-N}^N a_n \widehat{f}(n) e^{int} \end{aligned}$$

Consideriamo ora una successione di funzioni in  $L^1(\mathbb{T})$  (si tratta di polinomi trigonometrici) nota come *nucleo di sommabilità di Fejér*:

$$(\dagger) \quad K_N(t) := \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e^{int}$$

**7.3.7 Proposizione** *Il nucleo di Fejér soddisfa alle proprietà seguenti:*

- Per ogni  $N \in \mathbb{N}$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int K_N(t) dt = 1$$

- Esiste una costante  $c$  tale che

$$\frac{1}{2\pi} \int |K_N(t)| dt \leq c$$

- Se  $0 < \delta < \pi$ :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} |K_N(t)| dt = 0$$

- $K_N(t) \geq 0$ .

DIMOSTRAZIONE: La (2) e la (4) sono ovvie, dato che  $|e^{int}| = 1$ . La (1) segue dal fatto che  $\int e^{int} = \delta_{n0}$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int K_M(t) dt = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{1+N}\right) \frac{1}{2\pi} \int e^{int} = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{1+N}\right) \delta_{n0} = 1$$

La (3) segue dalla formula

$$K_N(t) = \frac{1}{1+N} \left( \frac{\sin \frac{N+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2$$

che si dimostra osservando che

$$\begin{aligned} \left( -\frac{1}{4}e^{-it} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{it} \right) \sum_{n=-N}^N \left( 1 - \frac{|n|}{1+N} \right) e^{int} &= \\ &= \frac{1}{1+N} \left( -\frac{1}{4}e^{-i(N+1)t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{i(N+1)t} \right) \end{aligned}$$

ed utilizzando l'identità trigonometrica

$$\sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1 - \cos^2 t}{2} = -\frac{1}{4}e^{-it} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{it}$$

QED

Una successione di funzioni che verifichi queste proprietà si dice *nucleo (positivo) di sommabilità*. Notiamo che, per la (†):

$$f * K_N(t) = \sum_{n=-N}^N \left( 1 - \frac{|n|}{N+1} \right) \widehat{f}(n) e^{int}$$

Il nucleo di Fejér è di fondamentale utilità: ad esempio possiamo dimostrare per mezzo di esso<sup>6</sup> il

**7.3.8 Teorema di Approssimazione (WEIERSTRASS)** *Ogni funzione  $f \in C(\mathbb{T})$  è limite uniforme di polinomi trigonometrici.*

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo che una funzione continua è in  $L^1(\mathbb{T})$  e che

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_0$$

ove  $\|\cdot\|_0$  è la norma dello spazio di Banach  $C(\mathbb{T})$ :

$$\|f\|_0 = \max_{t \in \mathbb{T}} |f(t)|$$

Infatti

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int |f(t)| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int \|f\|_0 dt = \frac{1}{2\pi} \frac{\|f\|_0}{2\pi} = \|f\|_0$$

<sup>6</sup>Questo teorema seguirà immediatamente da un risultato generale, il teorema di Stone-Weierstrass 9.2.9, che daremo in seguito: ci sembra interessante darne comunque una dimostrazione particolare in questa sede.

Quindi la convergenza in  $L^1$  implica la convergenza uniforme; ora se  $f \in C(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$  dimostriamo che si può approssimare con i polinomi trigonometrici  $f * K_N$ . Dobbiamo dimostrare che  $\|f - f * K_N\|_1 \rightarrow 0$ , il che faremo in due passi: prima dimostreremo che, se  $k \in C(\mathbb{T})$  e  $f \in L^1(\mathbb{T})$  allora

$$(*) \quad \frac{1}{2\pi} \int k(t) f_t dt = f * k$$

e poi dimostreremo che

$$(**) \quad f = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int K_N(t) f_t dt$$

(limite nella norma  $\|\cdot\|_1$ ). Da (\*) e (\*\*) segue la tesi.

Dimostriamo (\*): se  $f \in C(\mathbb{T})$  scriviamo l'integrale alla Riemann:

$$\frac{1}{2\pi} \int k(t) f_t dt = \frac{1}{2\pi} \lim \sum_n (t_{n+1} - t_n) k(t_n) f_{t_n}$$

per una partizione  $\{t_n\}$  di  $[0, 2\pi)$ : ma

$$\frac{1}{2\pi} \lim \sum_n (t_{n+1} - t_n) k(t_n) f(t - t_n) = f * k(t)$$

(limite nella norma uniforme) sempre per definizione di integrale di Riemann: quindi per funzioni continue il teorema è dimostrato. Ma le funzioni continue approssimano le funzioni  $L^1(\mathbb{T})$ , e, se  $f \in L^1(\mathbb{T})$  e  $g \in C(\mathbb{T})$  è tale che  $\|f - g\| \leq \varepsilon$  allora, dato che la (\*) vale per le funzioni continue:

$$\frac{1}{2\pi} \int k(t) f_t dt - f * k = \frac{1}{2\pi} \int k(t) (f - g)_t dt - (f - g) * k$$

da cui

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \int k(t) f_t dt - f * k \right\|_1 \leq 2\varepsilon \|k\|_1$$

Questo dimostra la (\*); passiamo alla (\*\*): ricordiamo che  $f$  è continua su un compatto  $(\mathbb{T})$ , quindi uniformemente continua. Cioè, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta_\varepsilon$  tale che se  $|s - t| < \delta_\varepsilon$  allora  $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$ . Allora, ricordando le proprietà del

nucleo di Fejér (proposizione 7.3.7), se  $0 < \delta < \pi$ :

$$\begin{aligned}
|f * K_N(s) - f(s)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int K_n(t) f(t-s) dt - \frac{1}{2\pi} \int f(s) K_N(t) dt \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int |f(t-s) - f(s)| K_N(t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^\delta |f(t-s) - f(s)| K_N(t) dt + \right. \\
&\quad \left. + \int_\delta^{2\pi-\delta} |f(t-s) - f(s)| K_N(t) dt + \right. \\
&\quad \left. + \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} |f(t-s) - f(s)| K_N(t) dt \right) \\
&< \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^\delta \varepsilon K_N(t) dt + \int_\delta^{2\pi-\delta} |f(t-s) - f(s)| K_N(t) dt + \right. \\
&\quad \left. + \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} \varepsilon K_N(t) dt \right) \\
&< \frac{1}{2\pi} \left( 2\delta\varepsilon c + \int_\delta^{2\pi-\delta} M_s K_N(t) dt \right) \\
&< C\varepsilon
\end{aligned}$$

(ove  $M_s = \max_{t \in \mathbb{T}} |f(t-s) - f(s)|$  e  $\int |K_N(t)| \leq c$ ).

QED

Osserviamo che l'algebra  $L^1(\mathbb{T})$  non ha elemento neutro, ma che il nucleo di Fejér può essere considerato una "identità approssimante".

I coefficienti di Fourier  $\widehat{f}(n)$  di una funzione  $f \in L^1(\mathbb{T})$  soddisfano un "teorema di unicità":

**7.3.9 Teorema** *Se  $f \in L^1(\mathbb{T})$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$   $\widehat{f}(n) = 0$  allora  $f = 0$ .*

**DIMOSTRAZIONE:** Dato che si tratta di un polinomio trigonometrico, i coefficienti di  $f * K_N = 0$  sono tutti nulli essendo multipli dei  $\widehat{f}(n)$  e, dato che  $f * K_N \rightarrow f$ , ne segue  $f = 0$ .

QED

In altri termini, se due funzioni hanno eguali coefficienti di Fourier, debbono coincidere: la serie di Fourier determina univocamente la funzione stessa. Inoltre la successione  $\{\widehat{f}(n)\}$  è infinitesima:

**7.3.10 Lemma (RIEMANN–LEBESGUE)** *Se  $f \in L^1(\mathbb{T})$  allora*

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \widehat{f}(n) = 0$$

**DIMOSTRAZIONE:** Se  $p$  è un polinomio trigonometrico che approssima  $f \in L^1(\mathbb{T})$  per meno di  $\varepsilon$ :

$$\|f - p\|_1 < \varepsilon$$

e se  $|n|$  è maggiore del grado di  $p$ , allora

$$|\widehat{f}(n)| = |\widehat{f - p}(n)| \leq \|f - p\|_1 < \varepsilon$$

QED

Osserviamo che la serie di Fourier non converge necessariamente: possiamo, usando il teorema di Banach–Steinhaus, dare un esempio di funzione la cui serie di Fourier è non convergente in un punto di  $\mathbb{T}$ : ricordiamo che la serie

$$S_f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{itn}$$

converge se converge (in norma  $\|\cdot\|_1$ ) la successione delle sue ridotte  $N$ -sime

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{itn}$$

Evidentemente la mappa  $S_N : C(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \mapsto S_N(f)(0) = \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n)$$

è un funzionale lineare continuo sullo spazio di Banach  $C(\mathbb{T})$ ; come esercizio si può dimostrare che la successione di funzionali lineari  $\{S_N\}$  non è uniformemente limitata e quindi, per il teorema di Banach–Steinhaus, esiste  $f \in C(\mathbb{T})$  tale che  $\{S_N(f)(0)\}$  non è limitata e quindi la serie di Fourier diverge in 0.

Ora consideriamo lo spazio di Hilbert  $L^2(\mathbb{T})$ : osserviamo che la famiglia di funzioni  $\{e^{int}\}$  in  $L^2(\mathbb{T})$  forma un sistema ortonormale completo: è completo per il teorema di unicità delle serie di Fourier, dato che

$$(f, e^{int}) = \frac{1}{2\pi} \int f(t) \overline{e^{int}} dt = \widehat{f}(n)$$

ed è ortonormale in virtù delle identità

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{int} \overline{e^{imt}} dt = \delta_{nm}$$

Da quello che sappiamo sulle basi ortonormali negli spazi di Hilbert segue il

**7.3.11 Teorema** *Se  $f \in L^2(\mathbb{T})$  allora*

- $\sum_n |\widehat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int |f(t)|^2 dt$
- $\|f - S_N(f)\|_1 \rightarrow 0$
- *Se  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  è una successione in  $l^2(\mathbb{Z})$  (i.e.  $\sum |a_n|^2 < \infty$ ) allora esiste un'unica  $f \in L^2(\mathbb{T})$  tale che  $a_n = \widehat{f}(n)$ .*
- *Se  $g \in L^2(\mathbb{T})$ :*

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int f(t) \overline{g(t)} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{g}(n)}$$

In altri termini, l'operatore

$$U : L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z})$$

che ad una funzione  $f$  fa corrispondere la successione dei suoi coefficienti di Fourier (si noti che  $U(f) \in l^2(\mathbb{Z})$  per l'identità di Parseval) è unitario.

Osserviamo inoltre che l'operatore di shift  $Se_n := e_{n+1}$  è unitario su  $l^2(\mathbb{Z})$  e che

$$(U^{-1}SU(f))(z) = zf(z)$$

## 7.4 Integrale di Fourier

Ora consideriamo le funzioni integrabili su  $L^1(\mathbb{R})$ ; di nuovo la misura di Lebesgue è invariante per traslazioni

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

per ogni  $s \in \mathbb{R}$ .

Consideriamo sullo spazio  $L^1(\mathbb{T})$  la norma di Banach

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt$$

(supponiamo che le funzioni abbiano valori complessi).

Osserviamo che, a differenza di  $L^1(\mathbb{T})$ ,  $L^1(\mathbb{R})$  non contiene tutte le funzioni che ha interesse considerare: ad esempio non contiene le funzioni  $L^p(\mathbb{R})$  (dato

che la misura è infinita). In particolare non abbiamo qualcosa come i polinomi trigonometrici in  $\mathbb{R}$ : tuttavia, se poniamo

$$\varphi(t) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + 2\pi n)$$

otteniamo una funzione  $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$ :

$$\|\varphi\|_1 \leq \|f\|_1$$

e quindi possiamo calcolarne i coefficienti di Fourier:

$$\widehat{\varphi}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \varphi(t) e^{-int} dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{T}} f(t + 2\pi m) e^{-int} dt = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{inx} dx$$

(infatti  $\mathbb{R} = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} [m, m + 2\pi)$ ). Osserviamo che in questa formula,  $n$  “agisce” su  $x$  per moltiplicazione: possiamo allora definire, per ogni  $\xi \in \mathbb{R}^*$  (ovviamente  $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^*$  non appena si fissi un numero reale non nullo), la *trasformata di Fourier* di  $f \in L^1(\mathbb{R})$ :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\xi(x)} dx$$

Quindi  $\widehat{\varphi}$  è semplicemente la restrizione agli interi di  $\widehat{f}$ . Analizziamo meglio il legame che esiste fra trasformata di Fourier e coefficienti di Fourier: se  $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$  associata a  $f$  è definita come sopra, consideriamo la

$$\varphi_y(t) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} y f(ty + 2\pi y)$$

Allora, per definizione:

$$\widehat{\varphi}_y(n) = \widehat{f}\left(\frac{n}{y}\right)$$

Supponendo che la serie di Fourier di  $\varphi_y$  converga a  $\varphi_y(0)$  in 0 abbiamo che

$$\varphi_y(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}_y(n)$$

e quindi la *formula di Poisson*

$$2\pi y \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi ny) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\left(\frac{n}{y}\right)$$

Come nel caso delle serie di Fourier valgono le seguenti proprietà della trasformata di Fourier:

**7.4.1 Proposizione** *Siano  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ;*

- $\widehat{f+g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) + \widehat{g}(\xi)$ .
- $\forall z \in \mathbb{C} \quad \widehat{zf}(\xi) = z\widehat{f}(\xi)$ .
- *Se la traslata di  $x \in \mathbb{R}$  della funzione  $f$  è la funzione  $f_x(y) := f(y-x)$  allora*

$$\widehat{f}_x(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{-i\xi(x)}$$

- $|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$

Se  $f \in L^1(\mathbb{R})$  allora  $\widehat{f}$  è uniformemente continua: infatti

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\xi + \eta) - \widehat{f}(\xi)| &= \left| \int f(x)(e^{-i(\xi+\eta)(x)} - e^{-i\xi(x)})dx \right| \\ &\leq \int |f(x)||e^{-i\xi(x)}| |e^{-i\eta(x)} - 1| dx \end{aligned}$$

e  $|e^{-i\xi(x)}| = 1$ , sicché l'integrando  $|f(x)||e^{-i\eta(x)} - 1|$  tende a zero per  $\eta \rightarrow 0$  ( $|f(x)|$  è limitato).

Definiamo ora una convoluzione sullo spazio  $L^1(\mathbb{R})$ . Esattamente come nel caso di  $L^1(\mathbb{T})$  si dimostra il seguente

**7.4.2 Lemma** *Se  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  allora, per quasi ogni  $y \in \mathbb{R}$ , la funzione  $x \mapsto f(x)g(y-x)$  è integrabile.*

Possiamo quindi, per ogni  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  definire la loro *convoluzione*  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$  come

$$f * g(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(y-x)dx$$

Come nel caso delle serie di Fourier:

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

**7.4.3 Proposizione** *Rispetto alla convoluzione, lo spazio  $L^1(\mathbb{R})$  diviene un'algebra associativa commutativa, ed inoltre*

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$$

**7.4.4 Esempio** Calcoliamo la convoluzione di una funzione  $f \in L^1(\mathbb{R})$  con una funzione  $g \in L^1(\mathbb{R})$  della forma:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^*} h(\xi) e^{i\xi(x)} d\xi$$

(queste funzioni sono l'analogo dei polinomi trigonometrici<sup>7</sup>) ove  $h \in L^1(\mathbb{R}^*)$ . Si ha che

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int f(y)g(x-y)dy = \frac{1}{2\pi} \int f(y) \int h(\xi) e^{i\xi(x-y)} d\xi dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int h(\xi) e^{i\xi(x)} \int f(y) e^{-i\xi(y)} dy d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int h(\xi) \widehat{f}(\xi) e^{i\xi(x)} d\xi \end{aligned}$$

Quindi, se  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^*)$  otteniamo la *formula di inversione di Fourier*:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \widehat{f}(\xi) e^{i\xi(x)} d\xi$$

(il secondo membro di questa espressione si dice *antitrasformata di Fourier*).

Vogliamo ora costruire l'analogo del nucleo di Fejér nel contesto della trasformata di Fourier: consideriamo la funzione

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (1 - |\xi|) e^{i\xi(x)} d\xi$$

La famiglia di funzioni

$$K_y(x) = yK(xy)$$

( $y \in \mathbb{R}$ ) si dice *nucleo di Fejér*.

**7.4.5 Proposizione** Il nucleo di Fejér soddisfa alle proprietà seguenti:

•

$$\frac{1}{2\pi} \int K_y(x) dx = 1$$

<sup>7</sup>Osserviamo che  $\mathbb{R}^*$  gioca il ruolo che  $\mathbb{Z}$  ha nelle serie di Fourier: le variabili continue  $\xi$  sostituiscono quelle discrete  $n$ , gli integrali su  $\mathbb{R}^*$  sostituiscono le somme su  $\mathbb{Z}$  e così via. Esistono comunque polinomi trigonometrici anche nel caso delle funzioni reali: vengono considerati nell'approssimazione delle funzioni quasi-periodiche, importanti ad esempio in Meccanica Celeste.

- Per  $y \rightarrow \infty$ :

$$\|K_y\|_1 = O(1)$$

- Per ogni  $\delta > 0$ :

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_{|x| > \delta} |K_y(x)| dx = 0$$

DIMOSTRAZIONE: Calcoliamo la norma  $\|\cdot\|_1$  di  $K(x)$ , usando la nostra conoscenza del nucleo di Fejér per le serie trigonometriche: sappiamo che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{N+1} \left( \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 dx = 1$$

Dato che  $\int K_y(x) dx = \int yK(yx) dx = \int K(yx) d(yx) = \int K(x) dx$  possiamo prendere  $y = N + 1$ , ottenendo

$$K_y(x) = \frac{1}{2\pi(N+1)} \left( \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2$$

e quindi

$$\begin{aligned} \left( \frac{\sin \delta}{\delta} \right)^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{N+1} \left( \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 dx &< \int_{-\delta}^{\delta} K_y(x) dx \\ &< \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{N+1} \left( \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 dx \end{aligned}$$

Per  $\delta \rightarrow 0$  il numero  $\int K(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^{\delta} K_y(x) dx$  è compreso fra  $\sin^2 \delta / \delta^2$  e 1. Quindi, per arbitrarietà di  $\delta$ ,  $\int K(x) dx = 1$ .

Questo calcolo implica le (1)–(3).

QED

A questo punto, come nel caso delle serie di Fourier, si trova che

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \|f * K_y(x) - f\|_1 = 0$$

e si dimostra il

**7.4.6 Teorema** *Se  $f \in L^1(\mathbb{R})$  allora*

$$f = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-y}^y \left( 1 - \frac{|\xi|}{y} \right) \widehat{f}(\xi) e^{i\xi(x)} d\xi$$

(in norma  $\|\cdot\|_1$ ).

da cui si deduce un “teorema di unicità”:

**7.4.7 Teorema** *Se  $f \in L^1(\mathbb{R})$  e per ogni  $\xi \in \mathbb{R}^*$   $\widehat{f}(\xi) = 0$  allora  $f = 0$ .*

In altri termini, *se due funzioni hanno eguali trasformate di Fourier, debbono coincidere*: la trasformata di Fourier determina univocamente la funzione stessa. Inoltre la funzione  $\widehat{f}$  è nulla all'infinito:

Vogliamo ora un analogo del teorema di approssimazione di Weierstrass:

**7.4.8 Teorema** *Le funzioni la cui trasformata di Fourier ha supporto compatto sono un sottospazio denso in  $L^1(\mathbb{R})$ .*

DIMOSTRAZIONE: Ogni funzione  $f \in L^1(\mathbb{R})$  si approssima con una famiglia  $\{f * K_y\}$  di funzioni: dimostriamo che gli elementi di questa famiglia hanno trasformata di Fourier a supporto compatto.

Per la formula di inversione di Fourier applicata al nucleo di Fejér:

$$\widehat{K}_y(\xi) = \max\left(1 - \frac{|\xi|}{y}, 0\right)$$

e, dato che  $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$ :

$$\widehat{f * K}_y(\xi) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|\xi|}{y}\right) \widehat{f}(\xi) & \text{se } |\xi| \leq y \\ 0 & \text{se } |\xi| > y \end{cases}$$

Quindi queste trasformate di Fourier hanno supporto compatto.

QED

Possiamo ora dedurre il

**7.4.9 Lemma (RIEMANN-LEBESGUE)** *Se  $f \in L^1(\mathbb{R})$  allora*

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$$

DIMOSTRAZIONE: Se  $g$  ha trasformata di Fourier a supporto compatto e approssima  $f \in L^1(\mathbb{T})$  per meno di  $\varepsilon$ :

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon$$

allora

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| = |\widehat{f - g}(\xi)| \leq \|f - g\|_1 < \varepsilon$$

Ma  $|\widehat{g}(\xi)| \rightarrow 0$  per  $|\xi| \rightarrow \infty$  avendo supporto compatto, quindi anche  $\widehat{f}$  è nulla all'infinito.

QED

Sia  $A(\mathbb{R}^*)$  lo spazio delle funzioni che sono trasformate di Fourier di funzioni  $L^1(\mathbb{R})$ .

**7.4.10 Teorema**  $A(\mathbb{R}^*)$  è un'algebra (rispetto alla moltiplicazione  $FG(\xi) = F(\xi)G(\xi)$ ) di funzioni continue nulle all'infinito.

Ora consideriamo lo spazio di Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$ : cerchiamo un sistema ortonormale in  $L^2(\mathbb{R})$ , in analogia a quanto fatto nel caso di  $\mathbb{T}$ ; sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione misurabile tale che

$$|f(x)| \leq ce^{-a|x|}$$

ove  $C$  e  $a$  sono costanti positive. Ad esempio, la *funzione di Gauss*

$$G(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

verifica questa ipotesi.

**7.4.11 Lemma** Se  $f$  e  $xf$  sono in  $L^1(\mathbb{R})$  allora  $\widehat{f}$  è derivabile e

$$\widehat{f}' = \widehat{-ixf}$$

DIMOSTRAZIONE: Basta derivare  $\widehat{f}$ :

$$\widehat{f}'(\xi) = \frac{d}{d\xi} \int f(x)e^{-i\xi(x)} dx = -i \int xf(x)e^{-i\xi(x)} dx$$

QED

In generale, se  $f, xf, x^2f, \dots, x^n f \in L^1(\mathbb{R})$  allora  $\widehat{f}$  sarà derivabile  $n$  volte:

$$\widehat{f}^{(n)} = \widehat{(-ix)^n f}$$

**7.4.12 Teorema** Le funzioni

$$f(x), xf(x), x^2f(x), \dots, x^n f(x), \dots$$

sono un sistema completo in  $L^2(\mathbb{R})$ .

DIMOSTRAZIONE: Assumiamo il contrario: allora, per il teorema di Hahn–Banach, deve esistere una funzione non nulla  $h \in L^2(\mathbb{R})$  tale che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\int_{\mathbb{R}} x^n f(x) \overline{h(x)} dx = 0$$

Ovviamente  $f\overline{h} \in L^1(\mathbb{R})$  e quindi anche  $e^{a_1|x|}f\overline{h} \in L^1(\mathbb{R})$  per ogni  $a_1 < a$ . Ora sia

$$g(\xi) := \widehat{f\overline{h}}$$

Allora, per il lemma, la funzione  $g$  è derivabile infinite volte:  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ , e tutte le sue derivate sono nulle in 0. Ma la funzione  $g$  si prolunga ad una funzione analitica nella striscia del piano complesso  $\{\zeta = \xi + i\eta \mid |\eta| < a\}$ , perché l'integrale

$$\int f(x)\overline{h(x)}e^{-i\zeta(x)}dx$$

converge e coincide, sulla parte reale della striscia, con  $g$ ; quindi  $g$  è una funzione analitica con tutte le derivate nulle in 0, sicché  $g(0) = 0$  e, per il teorema di unicità della trasformata di Fourier:

$$f(x)h(x) = 0 \quad \text{q.o.}$$

Dunque  $h = 0$  in  $L^2(\mathbb{R})$ , che è assurdo.

QED

Questo dimostra la completezza del sistema di funzioni  $\{x^n f(x)\}$ , ma noi vorremmo in più un sistema ortogonale.

Nel prossimo capitolo vedremo come la trasformata di Fourier sia un isomorfismo di  $L^2(\mathbb{R})$  in sé, e mostreremo come costruire un sistema ortonormale: avremo bisogno, per questo, di considerare spazi di funzioni differenziabili, che non sono spazi di Banach, e che necessitano di una teoria a parte.