Capitolo 3

METRICHE

In molti esempi la topologia può definirsi in termini del concetto di “distanza fra due punti”, e le topologie indotte da distanze caratterizzano gli spazi utilizzati nell'analisi (spazi euclidei, di Hilbert, di Banach etc.). Richiamiamo qui le nozioni fondamentali sugli spazi metrici ponendo l'accento sulle nozioni di completezza e compattezza, e sul loro legame.

3.1 Spazi metrici

3.1.1 Definizione *Se X è un insieme, una funzione $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice* metrica *se*

(1) $d(x, y) = d(y, x)$.

(2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

(3) $d(x, y) \leq d(x, z)+ \leq d(z, y)$.

Uno spazio X equipaggiato di una metrica d si dice spazio metrico.

Ovviamente, in uno spazio metrico (X, d):

$$\left|d(x, z) - d(z, y)\right| \leq d(x, y) \tag{3'}$$

In particolare, $d(x, y) > 0$ per $x \neq y$.

In uno spazio metrico (X, d) gli insiemi

$$B_r(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

si dicono *palle aperte* di centro x e raggio r; è immediato verificare che $\{B_r(x)\}_{x\in X}$ è una sottobase di aperti per una topologia che si dice *indotta dalla metrica*. Ad esempio, la topologia della retta reale è usualmente definita in questo modo, con $d(x, y) = |x - y|$.

Si osservi che, nella topologia indotta dalla distanza, la funzione

$$x \longmapsto d(x, y)$$

è continua per la (3′).

3.1.2 Proposizione *Uno spazio metrico è di Hausdorff.*

DIMOSTRAZIONE: Se $x, y \in X$ sono distinti e hanno distanza positiva $\varepsilon = d(x, y)$ allora sono separabili dalle palle $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$ e $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)$. In effetti se esistesse $z \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)$, avremmo

$$\varepsilon = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

che è assurdo a meno che $\varepsilon = 0$ i.e. $x = y$.

QED

Oltre a $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ con le topologie naturali l'esempio fondamentale è il seguente:

3.1.3 Esempio *L'insieme delle funzioni* $C[0, 1]$ *continue sull'intervallo* $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ *è uno spazio metrico rispetto alla* metrica uniforme

$$d(f, g) := \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

Questo dovrebbe essere ben noto dai rudimenti dell'Analisi: l'unico assioma non immediato è la disuguaglianza triangolare, che segue da

$$\begin{aligned} |f(t) - h(t)| &\leq |f(t) - g(t)| + |g(t) - h(t)| \\ &\leq \max_t |f(t) - g(t)| + \max_t |g(t) - h(t)| \end{aligned}$$

È inoltre facile constatare come la convergenza in questo spazio metrico sia la convergenza uniforme delle funzioni continue.

3.1.4 Esempio *Lo spazio* $B[0, 1]$ *delle funzioni qualsiasi* $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *limitate è uno spazio metrico rispetto alla metrica*

$$d(f, g) := \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|$$

3.1.5 Esempio *Siano (X_n, d_n) spazi metrici per $n \in \mathbb{N}$; sul prodotto*

$$X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

(che è uno spazio topologico con la topologia prodotto) consideriamo la metrica

$$d(x,y) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}$$

(con x_n indichiamo la n-sima componente di x: si rammenti che possiamo vedere x come una funzione $\mathbb{N} \longrightarrow X$, e scriviamo x_n in luogo di $x(n)$).

Questa d è effettivamente una distanza: più in generale, la funzione $f(t) := \frac{t}{1+t}$ verifica sempre la $f(t+s) \leq f(t) + f(s)$; inoltre è chiaro che $d(x,y) = 0$ implica $d_n(x_n, y_n) = 0$ e quindi $x_n = y_n$ dato che le d_n sono distanze, i.e. $x = y$.

Ora questa distanza induce una topologia su X: si tratta esattamente della topologia prodotto delle topologie indotte dalle distanze d_n.

Per vederlo osserviamo intanto che, se $\mathcal{T}_d$ è la topologia indotta dalla distanza d su X e $\mathcal{T}$ è la topologia prodotto, allora $\mathcal{T}_d < \mathcal{T}$: una palla aperta in X è certo aperta in $\mathcal{T}$, dato che le funzioni $x \longmapsto \delta_n(x, x_0)$ (con x_0 fissato) sono continue e quindi $B_r(x_0)$ è certamente aperta.

Viceversa consideriamo la base di intorni di $x_0 \in X$ per $\mathcal{T}$:

$$\left\{ \bigcap_{n\in I} p_n^{-1}(B_r(p_n(x_0))) \right\}_{I\subset\mathbb{N} \text{ finito}; r>0}$$

(con $p_n : X \longrightarrow X_n$ denotiamo la proiezione sulla n-sima componente). Basta far vedere che ogni elemento di questa base contiene una palla aperta di $\mathcal{T}_d$; si fissi quindi un elemento della base (i.e. si fissi un sottoinsieme finito $I \subset \mathbb{N}$ e un $r > 0$) e si prenda il massimo intero N dell'insieme I: allora

$$2^N r \leq \frac{r}{1+r}$$

e quindi $B_r(x_0) \in \bigcap_{n\in I} p_n^{-1}(B_r(p_n(x_0)))$.

Ad esempio, se ciascuno degli X_n è lo spazio metrico $\mathbb{R}$ con la distanza usuale, il prodotto X è lo spazio delle successioni di numeri reali.

Nell'esempio precedente le funzioni $p_n : X \longrightarrow X_n$ non sono soltanto continue, ma hanno anche un'ulteriore proprietà, espressa dalla seguente

3.1.6 Definizione *Se* (X, d) *e* (X', d') *sono spazi metrici, una funzione* $f : X \longrightarrow X'$ *si dice* uniformemente continua *se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un* $\delta_\varepsilon > 0$ *tale che, per ogni scelta di* $x, y \in X$ *tali che* $d(x, y) < \delta_\varepsilon$*, si abbia*

$$d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Ogni funzione uniformemente continua è anche continua (per definizione!) ma non vale il viceversa: ad esempio, il classico teorema di Heine–Cantor afferma che su un compatto in $\mathbb{R}$ ogni funzione continua è uniformemente continua; in generale, su un intervallo qualsiasi, questo non è vero: basti considerare su $[0, 1) \subset \mathbb{R}$ la funzione $h(t) = \frac{1}{1-t}$.

3.1.7 Definizione *Se* (X, d) *e* (X', d') *sono spazi metrici, una funzione* $f : X \longrightarrow X'$ *si dice* isometrica *(*isometria*) se*

$$\forall x, y \in X \quad d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

Una isometria è un drastico esempio di funzione uniformemente continua: si noti ad esempio che una isometria è sempre iniettiva:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 0 = d(f(x), f(y)) = d(x, y) \Rightarrow x = y$$

Quindi se $f : X \longrightarrow X'$ è una isometria, X è un "sottospazio metrico" di X': se f è anche suriettiva, gli spazi metrici si dicono *isometrici*. Due spazi isometrici sono equivalenti dal punto di vista della teoria degli spazi metrici: sono inoltre omeomorfi, perché una isometria suriettiva $f : X \longrightarrow X'$ possiede una inversa, che per definizione è pure una isometria:

$$d(f^{-1}(x'), f^{-1}(y')) = d(f(f^{-1}(x')), f(f^{-1}(y'))) = d(x', y')$$

e quindi continua.

Se (X, d) è uno spazio metrico, $x \in X$ e $S \subset X$ definiamo

$$d(x, S) := \inf_{y \in S} d(x, y)$$

(distanza del punto x dall'insieme S).

3.1.8 Teorema *Uno spazio metrico è normale.*

DIMOSTRAZIONE: Se C, C' sono chiusi disgiunti in X dobbiamo trovare due aperti disgiunti che li contengano. Basta porre

$$A := \{x \in X \mid d(x, C) < d(x, C')\} \quad \text{e} \quad A' := \{x \in X \mid d(x, C') < d(x, C)\}$$

Dato che d è continua si tratta di due insiemi aperti. Inoltre $C \subset A$ e $C' \subset A'$: se $x \in C$ allora $0 = d(x, C) < d(x, C')$ ed analogamente per C'. Infine $A \cap A' = \emptyset$: se infatti $x \in A \cap A'$ allora

$$d(x, C) < d(x, C') < d(x, C)$$

(abbiamo usato nell'ordine $x \in A$ e $x \in A'$). Assurdo.

QED

Questo ci permette di dare molti esempi di spazi topologici non metrizzabili: in particolare è naturale chiedersi quando uno spazio topologico è metrizzabile. La risposta è contenuta nel classico

3.1.9 Teorema (Uryshon) *Uno spazio T_1, regolare a base numerabile è metrizzabile.*

Dimostrazione: Sappiamo già, lo abbiamo visto come esempio, che un prodotto numerabile di spazi metrizzabili è metrizzabile. Ora usiamo il seguente

3.1.10 Lemma *Se X è uno spazio topologico T_1 e $\mathcal{F}$ è una famiglia di funzioni continue $f : X \longrightarrow Y_f$ che separino punti e chiusi (i.e. per ogni $x \in X$ e ogni chiuso $C \subset X$ esiste una funzione zero in x e identicamente 1 su C) allora la mappa di valutazione $e : X \longrightarrow \prod_{f \in \mathcal{F}} Y_f$ (definita come $e(x)(f) = f(x)$) è un omeomorfismo fra X e $e(X)$.*

Dimostrazione: Se $p_f : \prod_{f \in \mathcal{F}} Y_f \longrightarrow Y_f$ è la proiezione sulla f-sima coordinata (che è continua) allora $p_f \circ e = f$ è continua e quindi lo è e; inoltre è una mappa aperta: basta mostrare che l'immagine tramite e di un intorno aperto U di un punto $x \in X$ contiene l'intersezione di $e(X)$ con un intorno di $e(x)$; si scelga per questo un elemento $f \in \mathcal{F}$ tale che $f(x) \notin \overline{f(X \setminus U)}$ (il che è possibile per le ipotesi su $\mathcal{F}$); l'insieme

$$\{y \in \prod_{f \in \mathcal{F}} Y_f \mid y_f \notin \overline{f(X \setminus U)}\}$$

è aperta e la sua intersezione con $e(x)$ è ovviamente contenuta in $e(U)$. Dunque e è una mappa aperta.

Infine, dato che i punti di X sono chiusi, è chiaro che e è iniettiva.

QED

Quello che abbiamo in mente è applicare questo lemma trovando per questo una famiglia numerabile di funzioni continue definite da X a uno spazio metrico Y_f che separi i punti dai chiusi: ne dedurremo che X sarà omeomorfo ad uno spazio metrico per tramite della mappa di valutazione, e quindi avremo la tesi del teorema di Uryshon. Tutto quello che ci occorre è il seguente teorema di immersione, interessante di per sé.

3.1.11 Teorema *Uno spazio T_1 regolare a base numerabile è omeomorfo a un sottospazio del cubo di Hilbert, i.e. del prodotto topologico numerabile $[0,1]^\omega$ di copie dell'intervallo $[0,1]$ (che è uno spazio metrico perché lo è $[0,1]$).*

DIMOSTRAZIONE: $[0,1]^\omega$ è lo spazio delle funzioni $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1]$; quindi basta dimostrare che esiste una famiglia numerabile di funzioni continue $X \longrightarrow [0,1]$ che separi i punti dai chiusi di X.

Se $\mathcal{B}$ è una base numerabile per la topologia di X e

$$\mathcal{A} := \{(U,V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} \,|\, \overline{U} \subset V\}$$

allora $\mathcal{A}$ è numerabile e per ogni $(U,V) \in \mathcal{A}$ possiamo scegliere una funzione continua che sia zero su U e 1 su $X \setminus U$ (lemma di Uryshon); sia $\mathcal{F}$ la famiglia di tutte queste funzioni continue, Ovviamente $\mathcal{F}$ è numerabile e non ci resta che mostrare la proprietà di separazione. Se $C \subset X$ è chiuso e $x \in X \setminus C$ scegliamo $V \in \mathcal{B}$ tale che $x \in V \subset X \setminus C$ ($\mathbb{C}$ è una base) e $U \in \mathcal{B}$ tale che $x \in \overline{U} \subset V$; allora $(U,V) \in \mathcal{A}$ e, se f è il corrispondente elemento di $\mathcal{F}$, allora $f(x) = 0$ e $f|_C = 1$.

QED

3.2 Spazi metrici completi

Il concetto di uniforme continuità non ha luogo negli spazi topologici generali, ed è mediato dalla teoria delle funzioni in $\mathbb{R}$: un altro concetto che si ritrova in questa teoria è quello di *successione di Cauchy*.

Consideriamo una successione $\{x_n\}$ in uno spazio metrico (X,d) che sia convergente al punto x: intuitivamente i punti x_n si avvicinano (al crescere di n) a x, quindi le loro distanze reciproche dovrebbero divenire sempre più piccole: in effetti

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_n)$$

Dato che x_n converge a x se e solo se $d(x, x_n)$ converge a zero abbiamo che

$$(C) \qquad \lim_{n,m \longrightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0$$

Una successione che goda della proprietà (C) si dice *di Cauchy*. Una successione di Cauchy che ammette dei punti limite converge, ed il limite è unico.

Ad esempio, in $\mathbb{R}$, ogni successione di Cauchy converge: si dice che $\mathbb{R}$ è completo nel senso della

3.2.1 Definizione *Uno spazio metrico è completo se ogni successione di Cauchy converge.*

In generale non è vero: basti prendere $\mathbb{Q}$ con la metrica $d(q,q') = |q-q'|$: la successione $(1+\frac{1}{n})^n$ non converge ad alcun numero razionale, pur essendo di Cauchy. Cantor costruì i numeri reali proprio aggiungendo ai razionali i limiti delle successioni di Cauchy: questo procedimento può darsi per ogni spazio metrico.

3.2.2 Esempio *Il classico teorema di Weierstrass (del quale dimostreremo una profonda generalizzazione) afferma che lo spazio delle funzioni $P : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ polinomiali rispetto alla metrica*

$$d(P,Q) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t) - Q(t)|$$

è denso in $C[0,1]$, quindi non è completo.

3.2.3 Esempio *Lo spazio $C[a,b]$ delle funzioni continue $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è completo: infatti se $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy, allora per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $x \in [a,b]$, esiste $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che se $n,m > N_\varepsilon$ si abbia*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Quindi la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente ed il suo limite è dunque una funzione continue $f \in C[a,b]$. Allora per $m \longrightarrow \infty$ nella disugualianza precedente troviamo la

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

e quindi che f è il limite di $\{f_n\}$ nella metrica di $C[a,b]$.

Si noti che la completezza di uno spazio metrico è una nozione metrica e non topologica: se consideriamo lo spazio $[0,1)$, questo non è completo: la successione $1-\frac{1}{n}$ è di Cauchy ma si guarda dal convergere; lo spazio $[0,\infty)$ (sempre con la metrica abituale) è completo (facile esercizio). Ora, questi due spazi sono omeomorfi. La funzione

$$h(t) = \frac{1}{1-t}$$

già considerata è in effetti biunivoca e bicontinua fra $[0,1)$ e $[0,\infty)$; ma non può essere una isometria (dato che la completezza è una proprietà che si conserva per isometrie). Si osservi inoltre che la successione di Cauchy $1-\frac{1}{n}$ viene trasformata da h nella successione $n-1$ che non è di Cauchy.

Tutti questi accidenti derivano dall'essere h non uniformemente continua:

3.2.4 Proposizione *Se $f : X \longrightarrow X'$ è una funzione uniformemente continua fra spazi metrici allora l'immagine, tramite f di una successione di Cauchy in X, è una successione di Cauchy in X'; inoltre se f è un omeomorfismo e sia f che f^{-1} sono uniformemente continue allora X è completo se e solo se X' lo è.*

(La dimostrazione si riduce ad applicare le definizioni).

3.2.5 Teorema *Se (X, d) è uno spazio metrico allora esiste uno spazio metrico $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ completo ed una isometria $i : X \longrightarrow \widetilde{X}$ tale che $i(X)$ è denso in X.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo l'insieme $\mathcal{C}$ delle successioni di Cauchy di X, e su di esso la relazione

$$(\dagger) \qquad \{x_n\}\mathcal{R}\{x'_n\} \iff \lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_n, x'_n) = 0$$

Si tratta evidentemente di una relazione di equivalenza (la transitività segue da $d(x_n, z_n) \le d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n) = 0$) e quindi possiamo considerare l'insieme quoziente $\widetilde{X}$ delle classi di equivalenza di $\mathcal{C}$ modulo $\mathcal{R}$.

Definiamo su $\widetilde{X}$ una metrica $\widetilde{d}$: se $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{X}$, e se $\{x_n\} \in \widetilde{x}$ e $\{y_n\} \in \widetilde{y}$ allora poniamo

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) := \lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_n, y_n)$$

Questo limite esiste perché la successione $\{d(x_n, y_n)\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) &\le d(x_n, y_m) + d(y_m, y_n) - d(x_m, y_m) \\ &< d(x_n, y_m) - d(x_m, y_m) + \varepsilon \\ &\le d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) - d(x_m, y_m) + \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

e quindi converge, ed è ben definito perché, se $\{x'_n\} \in \widetilde{x}$ e $\{y'_n\} \in \widetilde{y}$ allora (usando la disuguaglianza triangolare e la $(\dagger)$)

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} (d(x_n, y_n) + d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n)) \ge \lim_{n\longrightarrow\infty} d(x'_n, y'_n)$$

e, viceversa (scambiando i ruoli delle variabili senza apice e quelle con apice):

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} d(x'_n, y'_n) \ge= \lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_n, y_n)$$

i.e. il valore $\widetilde{d}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ non dipende dalle successioni scelte in $\widetilde{x}$ e $\widetilde{y}$, ma solo dalla classe di equivalenza.

Che $\widetilde{d}$ sia una distanza segue passando al limite le proprietà della distanza d (usando i rappresentanti $\{x_n\} \in \widetilde{x}$ e mostrando di nuovo che il calcolo non dipende da questa scelta ma solo dalla classe).

Che lo spazio $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ sia completo segue dalla definizione: se $\{\widetilde{x}_n\}$ è di Cauchy, sia $\{x_m^{(n)}\} \in \widetilde{x}_n$; allora il limite di $\{\widetilde{x}_n\}$ è la classe $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ che contiene la successione $\{x_n^{(n)}\}$. Infatti

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \widetilde{d}(\widetilde{x}_n, \widetilde{x}) = \lim_{n,m\longrightarrow\infty} d(x_m^{(n)}, x_m^{(m)}) = \lim_{n,m\longrightarrow\infty} \widetilde{d}(\widetilde{x}_n, \widetilde{x}_m) = 0$$

(dato che $\{\widetilde{x}_n\}$ è di Cauchy).

Dimostriamo ora che X si immerge isometricamente in un sottospazio denso di $\widetilde{X}$: l'isometria sarà $i : X \longrightarrow \widetilde{X}$:

$$i(x) := \{x_n \,|\, \forall n \in \mathbb{N}\ x_n = x\}$$

cioè la mappa che associa a x la successione costante $\{x\}$. Che si tratti di una isometria è banale:

$$\widetilde{d}(i(x), i(y) = \lim_{n \longrightarrow \infty} d(x, y) = d(x, y)$$

Dimostriamo che $i(X)$ è denso; sia $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ e $\{x_n\} \in \widetilde{x}$. Ovviamente

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}, i(x_n)) = \lim_{m \longrightarrow \infty} d(x_m, x_n)$$

e, dato che $\{x_n\}$ è di Cauchy, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n, m > n_\varepsilon \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Al limite per $m \longrightarrow \infty$ otteniamo

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}, i(x_n)) < \varepsilon$$

Quindi $\widetilde{x} = \lim_n i(x_n)$; inoltre questo limite (i.e. $\widetilde{x}$) appartiene alla chiusura di $i(X)$.

Dunque $i(X)$ è denso.

QED

Notiamo che, se (X, d) è completo allora

(1) Se $Y \subset X$ è un sottospazio, è uno spazio metrico rispetto a $d|_Y$, ed è completo se e solo se è chiuso.

(2) Se $f : X \longrightarrow X'$ è una isometria allora $f(X)$ è chiuso in X'.

Osserviamo inoltre che lo spazio $\widetilde{X}$ costruito nel teorema precedente è unico a meno di isometrie suriettive: infatti se (X', d') è uno spazio metrico completo nel quale X si immerge isometricamente per mezzo della $j : X \longrightarrow X'$, la funzione $j \circ i^{-1} : X \longrightarrow X$ è una isometria dal sottoinsieme denso $i(X) \subset \widetilde{X}$ al sottoinsieme denso $j(X) \subset X'$. Esiste quindi un unico modo di estenderla ad una isometria fra $\widetilde{X}$ e X' suriettiva.

Infatti ogni punto $x' \in X'$ è limite di una successione di punti di $j(X)$, e ogni punto $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ è limite di una successione $\{i(x_n)\}$ di punti di $i(X)$. Poniamo quindi

$$\begin{aligned} f : \widetilde{X} &\longrightarrow X' \\ \widetilde{x} &\longmapsto \lim_n j(i(x_n)) \end{aligned}$$

Si tratta ovviamente di una mappa biunivoca, ed isometrica:

3.2.6 Definizione *Lo spazio $\widetilde{X}$ associato a X si dice il suo* completamento.

Un risultato sugli spazi completi che non si può passare sotto silenzio è il *principio delle contrazioni*, largamente usato nella risoluzione di equazioni (ad esempio per dimostrare i teoremi di esistenza per equazioni differenziali ordinarie).

3.2.7 Definizione *Una funzione $T : X \longrightarrow X$ di uno spazio metrico in sé si dice* contrazione *se esiste una costante positiva $c < 1$ tale che, per ogni $x, y \in X$:*

$$d(T(x), T(y)) \leq cd(x, y)$$

Una tale funzione "accorcia" le distanze fra i punti di X.

3.2.8 Teorema (PRINCIPIO DELLE CONTRAZIONI) *Se (X, d) è uno spazio metrico completo e $T : X \longrightarrow X$ una contrazione allora esiste $x_0 \in X$ tale che $T(x_0) = x_0$.*

DIMOSTRAZIONE: Se $x \in X$ poniamo: $x_1 = T(x)$, $x_2 = T^2(x) = T(x_1)$,... in modo da ottenere una successione $\{x_n = T^n(x)\}$. Dimostriamo che si tratta di una successione di Cauchy: infatti

$$\begin{aligned}
d(x_1, x_2) =& d(T(x), T(x_1)) \leq cd(x, x_1) = cd(x, T(x)) \\
d(x_2, x_3) =& d(T(x_1), T(x_2)) \leq cd(x_1, x_2) \leq c^2 d(x, T(x)) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
d(x_n, x_{n+1}) \leq& c^n d(x, T(x))
\end{aligned}$$

Quindi, supponendo ad esempio $m > n$:

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) \leq& d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{m-1}, x_m) \\
\leq& (c^n + c^{n+1} + \ldots + c^{m-1}) d(x, T(x)) \\
=& \frac{c^n - c^m}{1 - c} d(x, T(x))
\end{aligned}$$

Ma $c < 1$, sicché per $n, m \longrightarrow \infty$ otteniamo $d(x_n, x_m) \longrightarrow 0$.

Per completezza di X la successione $\{x_n\}$ converge dunque ad un punto x_0. Ora:

$$\begin{aligned}
d(x_0, T(x_0)) \leq& d(x_0, x_n) + d(x_n, T(x_0)) = d(x_0, x_n) + d(T(x_{n-1}), T(x_0)) \\
\leq& d(x_0, x_n) + cd(x_{n-1}, x_0) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

i.e. $d(x_0, T(x_0)) = 0$ e quindi $T(x_0) = x_0$.

QED

Le applicazioni al problema di Cauchy per le equazioni differenziali ordinarie di questo teorema dovrebbero essere note dai rudimenti dell'Analisi: diamo qui alcune applicazioni alle classiche equazioni integrali.

3.2.9 Esempio *L'*equazione integrale di Fredholm di seconda specie *è l'equazione non omogenea*

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)f(y)dy + \varphi(x)$$

dove $K : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue (K si dice il nucleo dell'equazione integrale*). In particolare, dato che è continua su un compatto, $|K(x,y)| \leq M$ per una certa costante $M \in \mathbb{R}$. Consideriamo la funzione $T : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$ data da, se $g \in C[a,b]$*

$$T(f)(x) := \lambda \int_a^b K(x,y)f(y)dy + \varphi(x)$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} d(T(f_1), T(f_2)) &= \max_{x\in[a,b]} |T(f_1)(x) - T(f_2)(x)| \\ &\leq |\lambda| M(b-a) \max_{x\in[a,b]} |f_1(x) - f_2(x)| \end{aligned}$$

e quindi per $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ la mappa T è una contrazione nello spazio metrico completo $C[a,b]$. Dunque l'equazione di Fredholm ha, in questo caso, una unica soluzione per il principio delle contrazioni.

3.2.10 Esempio *L'*equazione integrale di Volterra *è un'equazione del tipo*

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x,y)f(y)dy + \varphi(x)$$

con $x \in [a,b]$ e le stesse ipotesi su f, K e φ del caso precedente: si potrebbe considerare questa equazione un caso particolare della precedente, definendo $\widetilde{K}(x,y) = 0$ se $y > x$ e considerando l'equazione di Fredholm corrispondente di nucleo $\widetilde{K}$. Tuttavia in questo caso possiamo svincolarci dalla limitazione $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, se notiamo che l'operatore

$$V(f)(x) := \lambda \int_a^x K(x,y)f(y)dy + \varphi(x)$$

non è una contrazione, ma una sua opportuna potenza T^n lo è: infatti per ogni $f, g \in C[a,b]$

$$|V(f)(x) - V(g)(x)| \leq |\lambda| M(x-a) \max_{y\in[a,x]} |f(y) - g(y)|$$

con $M = \max K(x,y)$. Da questa segue la

$$|V(V(f))(x) - V(V(g))(x)| \leq |\lambda|^2 M^2 \frac{(x-a)^2}{2} \max_{y\in[a,x]} |f(y) - g(y)|$$

ed in generale la

$$|V^n(f)(x) - V^n(g)(x)| \leq |\lambda|^n M^n \frac{(x-a)^n}{n!} \max_{y\in[a,x]} |f(y) - g(y)|$$

Dato che $(x-a) < (b-a)$ basta prendere n tale che $|\lambda|^n M^n (x-a)^n \max_{y\in[a,x]} |f(y)-g(y)| < n!$ (cosa sempre possibile) per avere che V^n è una contrazione. Allora esiste un'unica $f \in C[a,b]$ tale che $V^n(f) = f$, per cui

$$V(f) = V(V^n(f)) = V^n(V(f)) = V^n(g)$$

dove $g = V(f)$: dato che V^n è una contrazione, $\{V^n(g)\}$ converge al punto fisso f di V^n qualsiasi sia g, e quindi, passando al limite per $n \longrightarrow \infty$ nell'equazione precedente, troviamo $V(f) = f$.

3.3 Categorie di spazi metrici

Il seguente teorema esprime una proprietà cruciale degli spazi completi, che sarà ampliamente sfruttata nel séguito:

3.3.1 Teorema (BAIRE) *Se (X,d) è uno spazio metrico completo e $\{A_n\}$ è una successione di aperti densi in X allora $\bigcap_n A_n$ è un insieme denso in X.*

DIMOSTRAZIONE: Sia U un aperto in X, $x_1 \in A_1 \cap U$ e B_1 la palla di centro x_1 (e raggio $r_1 > 0$) contenuta in $A_1 \cap U$. Per densità di A_2 in X deve esistere $x_2 \in A_2 \cap B_1$ e, dato che A_2 è aperto, deve esistere una B_2 palla di centro x_2 (e raggio $r_2 > 0$ contenuta in A_2. Possiamo supporre (a meno di rimpicciolire B_2) che

$$r_2 < \frac{1}{2} r_1 \qquad \text{e} \qquad r_2 < r_1 - d(x_!, x_2)$$

Con queste condizioni si ha che $\overline{B_2} \subset B_1$.

Iteriamo questa costruzione ottenendo una successione di palle $\{B_n\}$ tali che $\overline{B_n} \subset B_{n-1}$ e $B_n \subset A_n$, i cui raggi r_i siano una successione di numeri reali che tende a zero.

Consideriamo anche la successione dei centri $\{x_n\}$ di queste palle: per costruzione, dato $N \in \mathbb{N}$, per ogni $n, m > N$ si ha che $x_n, x_m \in B_N$, i.e.

$$d(x_n, x_m) \leq 2r_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Quindi $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy e, per completezza di X, deve convergere ad un punto $x\in X$. Dato che $x_n \in B_{N+1}$ (se $n > N$) allora $x \in \overline{B_{N+1}} \subset B_N \subset A_N$. In altre parole, per ogni $N \in \mathbb{N}$: $x \in A_n$, i.e. $x \in \cap_N A_N$; ora si rammenti che ogni B_N era contenuta in $A_N \cap U$, quindi, in particolare, $x \in U$.

Dunque abbiamo dimostrato che, per ogni aperto U, esiste $x \in \cap_N A_N$ tale che $x \in U$. Cioè $\cap_N A_N$ è denso in X.

QED

Osserviamo che, dalla dimostrazione del teorema di Baire, traiamo la seguente generalizzazione del principio di Cantor dei *segmenti nidificati* in $\mathbb{R}$: diciamo che una successione di palle aperte $\{B_n\}$ è *nidificata* se $\overline{B_n} \subset B_{n+1}$ e se la successione dei raggi converge a zero.

3.3.2 Teorema *Se $\{B_n\}$ è una successione di palle aperte nidificate in uno spazio metrico completo allora esiste un unico punto interno in $\bigcap_n B_n$.*

Dimostrazione: Che esista un tale punto interno segue dalla dimostrazione del teorema precedente: se x' è un altro punto interno dell'intersezione delle palle $\{B_n\}$ allora

$$d(x, x') \leq d(x, x_n) + d(x_n), x') < \varepsilon + \varepsilon$$

ove $\{x_n\}$ è la successione dei centri delle palle $\{B_n\}$.

QED

Come nel caso reale, questa proprietà caratterizza la completezza:

3.3.3 Teorema *Se (X, d) è uno spazio metrico tale che ogni successione di palle aperte nidificate possiede intersezione non vuota allora X è completo.*

Dimostrazione: Se $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in X, possiamo associarle una successione di palle aperte nidificate $\{B_n\}$ come segue: scegliamo una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ imponendo la condizione

$$\forall m > 0 \quad d(x_{n_k+m}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k}$$

Allora definiamo B_k come la palla aperta di centro x_{n_k} e raggio $1/2^{k-1}$. La successione $\{B_k\}$ è nidificata: infatti $B_k \subset \overline{B_{k+1}}$ dato che

$$\forall x \in \overline{B_{k+1}} \quad d(x, x_{n_k}) \leq d(x, x_{n_{k+1}}) + d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

(si ricordi che il centro di B_k è x_{n_k}). Inoltre, dato che $\{x_n\}$ è di Cauchy, i raggi delle B_k tendono a zero.

Ora, per ipotesi, esiste x_0 comune a tutte le palle; evidentemente si tratta del limite della successione: infatti, dato che la successione $\{x_n\}$ è di Cauchy:

$$d(x_0, x_n) \leq d(x_0, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n) < \frac{1}{2^{k-1}} + \varepsilon$$

QED

3.3.4 Definizione *Un sottoinsieme $S \subset X$ di uno spazio metrico X si dice:*

(1) raro *(o* mai denso*) se $X \setminus \overline{S}$ è denso;*

(2) di prima categoria *(o* magro*) se è unione di una famiglia numerabile di insiemi rari;*

(3) di seconda categoria *se non è di prima categoria.*

Notiamo che *S è raro se e solo se non contiene aperti non vuoti.* Con questa terminologia classica possiamo dare il

3.3.5 Teorema (DELLA CATEGORIA DI BAIRE) *Se X è uno spazio metrico completo allora non contiene sottoinsiemi aperti di prima categoria (eccetto il vuoto).*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\{R_n\}$ una collezione numerabile di sottoinsiemi rari di X: allora, per definizione, $A_n := X \setminus \overline{R_n}$ sono aperti densi; se U è un aperto qualsiasi, per il teorema di Baire, esiste $x \in U$ tale che $x \in \bigcap_n A_n = X \setminus \bigcup_n \overline{R_n}$, i.e. per ogni n, $x \notin \overline{R_n}$ ed in particolare $x \notin R_n$. Ne segue che U non può essere contenuto in $\bigcup_n R_n$.

QED

In altri termini *in uno spazio metrico completo non esistono aperti (non vuoti) che siano l'unione di una famiglia numerabile di sottoinsiemi rari.*

3.3.6 Esempio $\mathbb{Q}$ *con la metrica abituale è di prima categoria; il suo completamento $\mathbb{R}$ è di seconda categoria, dato che è completo.*

Come conseguenza del teorema di Baire possiamo ottenere la non numerabilità dell'insieme dei numeri reali, che è uno spazio metrico completo:

3.3.7 Corollario *I numeri reali sono un insieme non numerabile.*

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo che $\mathbb{R}$ sia numerabile: in questo caso potremmo trovare una successione (x_n) i cui termini siano tutti i numeri reali; in altre parole

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$$

i numeri reali sarebbero esattamente gli elementi di questa successione; ma è ovvio che l'insieme formato da un singolo elemento è raro (possiede un unico punto di accumulazione: se stesso, quindi i numeri reali che non sono suoi punti di accumulazione sono tutti quelli diversi da lui, che formano ovviamente un insieme denso). Questo contraddice il teorema di Baire.

QED

Questi risultati sono notevoli perché traggono conclusioni puramente topologiche (densità) da ipotesi metriche (completezza).

Ovviamente ci sono spazi che non sono completi ma che non sono di prima categoria: ad esempio se (X, d) è completo e $A \subset X$ è un aperto il cui complementare $X \setminus E$ non sia aperto allora A con la metrica indotta non è completo, ma non è di prima categoria: in effetti esiste una metrica compatibile con la topologia di A che lo rende completo, ad esempio

$$d'(x, y) := d(x, y) + \left| \frac{1}{d(x, X \setminus A)} - \frac{1}{d(y, X \setminus A)} \right|$$

3.4 Spazi metrici compatti

In generale uno spazio metrico non sarà compatto (basti pensare a $\mathbb{R}^n$) né localmente compatto (ad esempio $C[0, 1]$ non lo è): è un risultato notevole che sia sempre paracompatto e vogliamo qui dimostrarlo anche come applicazione della teoria del transfinito alla topologia generale.

3.4.1 Teorema (Stone) *Uno spazio metrico (X, d) è paracompatto.*

Dimostrazione: (M.E. Rudin) Consideriamo un ricoprimento aperto $\{A_\alpha\}$ di X e supponiamo che gli indici α di questo ricoprimento siano numeri ordinali[1]. Sia $B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$ la palla di centro x e raggio r in X: per ogni intero positivo n definiamo induttivamente su n l'insieme $D_{\alpha,n}$ come l'unione delle sfere $B_{\frac{1}{2}^n}(x)$ tali che

(1) α è il più piccolo ordinale tale che $x \in A_\alpha$;

(2) se $j < n$ allora $x \notin D_{\beta,j}$;

(3) $B_{\frac{3}{2^n}}(x) \subset A_\alpha$;

Abbiamo quindi una famiglia $\{D_{\alpha,n}\}_{n>0,\alpha}$ di aperti di X: dimostriamo che si tratta di un raffinamento localmente finito di $\{A_\alpha\}$.

[1] Ricordiamo che è sempre possibile: ogni insieme bene ordinato è isomorfo a un numero ordinale.

Che si tratti di un raffinamento di $\{A_\alpha\}$ è ovvio dalla definizione: per vedere che $\{D_{\alpha,n}\}$ è un ricoprimento di X basta notare che, se $x\in X$ e se α è il minimo ordinale per cui $x \in C_\alpha$ allora esiste n abbastanza grande perché valga la (3) (essendo C_α aperto) e quindi, per la (2), esiste $j \geq n$ tale che $x \in D_{\beta,j}$.

Dimostriamo infine che $\{D_{\alpha,n}\}$ è localmente finito. Sia $x \in X$ e sia α il più piccolo ordinale tale che $x \in D_{\alpha,n}$ per qualche n; scegliamo j tale che

$$B_{\frac{1}{2^j}}(x) \subset D_{\alpha,n}$$

Allora basta dimostrare che

(a) Se $i \geq n+j$ allora $B_{2^{-n-j}}(x)$ non interseca nessun $D_{\beta,i}$;

(b) Se $i < n+j$ allora $B_{2^{-n-j}}(x)$ interseca $D_{\beta,i}$ per al più un β.

Dimostriamo (a): dato che $i > n$, per (2) ciascuna palla di raggio 2^{-i} coinvolta nella definizione di $D_{\beta,i}$ ha centro y fuori da $D_{\alpha,n}$, e dato che

$$B_{\frac{1}{2^j}}(x) \subset D_{\alpha,n}$$

allora $d(x,y) \leq 2^{-j}$; ma $i \geq j+n$ e $n+j \geq j+1$, sicché

$$B_{\frac{1}{2^{n+j}}}(x) \cap B_{\frac{1}{2^i}}(y) = \emptyset$$

Dimostriamo infine (b): siano $p \in D_{\beta,i}$, $q \in D_{\gamma,i}$ e $\beta < \gamma$; vogliamo mostrare che

$$\frac{1}{2^{n+j-1}} < d(p,q)$$

Ma esistono $y,z\in X$ tali che $p\in B_{2^{-j}}(y) \subset D_{\beta,i}$ e $q\in B_{2^{-i}}(z) \subset D_{\gamma,i}$ e, per la (3):

$$B_{\frac{3}{2^i}}(y) \subset C_\beta$$

da cui (per la (2)) $z \notin C_\beta$. Ne segue che

$$\frac{1}{2^{n+j-1}} < \frac{1}{2^i} \leq d(p,q)$$

QED

In molti esempi, specie negli spazi di funzioni, una proprietà cruciale è la *separabilità*:

3.4.2 Definizione *Uno spazio topologico si dice* separabile *se contiene un sottoinsieme denso e numerabile.*

L'esempio ispiratore è ovviamente quello di $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Più in generale, ogni spazio topologico X a base numerabile è separabile: infatti se $\{A_n\}$ è una base numerabile di aperti, per l'assioma di scelta possiamo dare una successione $S = \{x_n\}$ di elementi di X tali che $x_n \in A_n$: evidentemente $\overline{S} = X$; infatti se $x \in X$ esiste un intorno U_n di x che contiene $x_n \in S$.

Tuttavia non è vero il viceversa: consideriamo su un insieme qualsiasi X la *topologia cofinita* $\mathcal{C}_X$; si tratta della famiglia degli insiemi il cui complementare è un insieme finito (si dimostra facilmente che si tratta di una topologia). Allora, se X è più che numerabile, la topologia cofinita non può avere base numerabile, e tuttavia è separabile: infatti ogni sottoinsieme infinito di X è denso (per definizione), quindi in particolare ogni sottoinsieme numerabile.

3.4.3 Teorema *Se X è uno spazio topologico T_1 allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(1) *X è metrizzabile e separabile;*

(2) *X è regolare a base numerabile;*

(3) *X è omeomorfo ad un sottospazio del cubo di Hilbert.*

DIMOSTRAZIONE: (1) implica (2): se $D \subset X$ è denso e numerabile allora la famiglia numerabile

$$\mathcal{B} := \{B_{\frac{1}{n}}(x)\}_{x\in D, n\in\mathbb{N}}$$

è una base di aperti: infatti per ogni aperto $A \subset X$ e per ogni $x_0 \in A$ esiste un $R > 0$ tale che $B_R(z_0) \subset A$ e quindi, se $x \in D$ è tale che $d(x, x_0) < \frac{1}{n} \le \frac{R}{2}$ allora $x_0 \in B_{\frac{1}{n}}(x) \subset B_R(x) \subset A$, sicché ciascun punto di A appartiene ad un elemento di $\mathcal{B}$ contenuto in A.

(2) implica (3) per il teorema di metrizzabilità di Uryshon.

Infine il cubo è metrizzabile ed ha base numerabile (la ha $[0, 1]$) sicché ogni suo sottospazio possiede queste proprietà[2]: dunque (3) implica (1).

QED

La situazione è molto più semplice nel caso compatto:

3.4.4 Proposizione *Uno spazio metrico compatto è separabile.*

DIMOSTRAZIONE: Per ogni $\varepsilon > 0$ la famiglia

$$\{B_\varepsilon(x)\}_{x\in X}$$

[2]Si noti comunque che un sottospazio di uno spazio separabile non è necessariamente separabile.

è un ricoprimento aperto di X, e quindi esiste sottoricoprimento indicizzato da un insieme finito $X_\varepsilon \subset X$. Ponendo

$$D = \bigcup_{n\geq 1} X_{\frac{1}{n}}$$

otteniamo un insieme numerabile che è denso, dato che per ogni $x \in X$ e $n \geq 1$ esiste $x' \in X_{\frac{1}{n}}$ tale che $d(x, x') < 1/n$.

QED

Se X è compatto metrizzabile, ogni successione possiede un insieme di punti limite, e quindi ogni successione di Cauchy converge:

3.4.5 Proposizione *Uno spazio metrizzabile compatto è completo.*

Un sottoinsieme compatto in $\mathbb{R}^n$ è chiuso e limitato: ci chiediamo se una proprietà analoga non valga anche per gli spazi metrici qualsiasi; intanto è ovvio che un compatto K in uno spazio metrico (X, d) è chiuso e limitato: è chiuso perché uno spazio metrico è di Hausdorff (un compatto in uno spazio di Hausdorff è chiuso); è limitato perché la funzione distanza è continua e quindi, fissato $x_0 \in X$: $x \longmapsto d(x_0, x)$ ristretta al compatto K assume un massimo e minimo.

3.4.6 Definizione *Uno spazio metrico (X, d) si dice* totalmente limitato *se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia finita di punti $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ tali che, per ogni $x \in X$ esiste un k_ε tale che $d(x, x_{k_\varepsilon}) < \varepsilon$.*

Equivalentemente, uno spazio totalmente limitato si può ricoprire con una famiglia finita di palle di raggio ε.

3.4.7 Teorema *Uno spazio metrico (X, d) è compatto se e solo se è completo e totalmente limitato.*

DIMOSTRAZIONE: Se K è compatto è totalmente limitato e completo in modo ovvio. Viceversa, se X è completo e totalmente limitato, dimostriamo che ogni successione $\{x_n\}$ ammette una sottosuccessione convergente; ricopriamo X con palle di raggio 1 (totale limitatezza) e scegliamone una B_1 che contenga infiniti elementi della successione (deve esistere per forza, dato che le palle ricoprono X). Ora, di nuovo per totale limitatezza, ricopriamo X con sfere di raggio $1/2$ e scegliamone una B_2 che contenga infiniti elementi della successione, ed iteriamo il procedimento per ogni n (assioma di scelta). Abbiamo così una successione di palle $\{B_k\}$ di raggi $1/k$ tale che $B_1 \cap ... \cap B_k$ contiene infiniti punti della successione.

Possiamo allora scegliere, fissato n, un n_k tale che $n_k > n_{k-1}$ e $x_{n_k} \in B_1 \cap ... \cap B_k$; questo determina la scelta di una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ che è di Cauchy:

$$d(x_{n_k}, x_{n_h}) \leq \frac{2}{N}$$

se $N \leq k, h$. Per completezza di X si ha la convergenza.

QED

3.5 Teorema di Ascoli–Arzelà

L'applicabilità pratica del teorema con cui si è conclusa la sezione precedente, è assai limitata: tuttavia è importante determinare la compattezza di uno spazio, perché nelle applicazioni si costruiscono oggetti come limiti di sottosuccessioni: un teorema classico di teoria delle funzioni che serve a questo scopo è il teorema di Ascoli–Arzelà.

3.5.1 Definizione *Un sottoinsieme $M \subset C(X)$ dell'algebra delle funzioni continue definite su uno spazio metrico compatto a valori reali si dice* equicontinuo *se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che*

$$\forall x, y \in X \quad d(x, y) < \delta_\varepsilon \Rightarrow \forall f \in M \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

e si dice equilimitato *se esiste un $N \geq 0$ tale che, per ogni $f \in M$: $d(f, 0) < N$ (ovvero* $\sup |f(x)| < N$*).*

Il seguente teorema caratterizza i sottoinsiemi a chiusura compatta di $C(X)$ come equicontinui ed equilimitati.

3.5.2 Teorema (ASCOLI–ARZELÀ) *Se (X, d) è uno spazio metrico compatto e $\{f_n\} \subset C(X)$ una successione equicontinua ed equilimitata allora possiede una sottosuccessione convergente.*

DIMOSTRAZIONE: Dato che X è compatto metrizzabile, è separabile: sia $D \subset X$ un denso numerabile e supponiamo che $D = \{x_n\}$. Ora la chiusura dell'insieme $\{f_n(x_1)\}$ è compatta, quindi esiste una sottosuccessione $\{f_{n(1)}(x_1)\}$ convergente. Ora consideriamo la successione $\{f_{n(1)}(x_2)\}$ e scegliamone una sottosuccessione $\{f_{n(2)}(x_2)\}$ convergente. Iterando il procedimento otteniamo una successione $\{f_{n(k)}\}$ in $C(X)$ tale che le successioni numeriche

$$f_{n(k)}(x_k)$$

sono convergenti.

La sottosuccessione diagonale $f_{n(n)}(x_k)$ converge allora per ogni $x_k \in D$; si definisca

$$g_n := f_{n(n)}$$

Dimostriamo che si tratta di una successione di Cauchy, e quindi che converge (per compattezza e quindi completezza dello spazio).

Dato che le f_n sono equicontinue lo sono anche le g_n, e quindi, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste m_ε tale che

$$\forall x, x' \in X \quad d(x, x') < \frac{1}{m_\varepsilon} \Rightarrow |g_n(x) - g_n(x')| < \varepsilon$$

Ma X è compatto, quindi totalmente limitato, dunque esiste un insieme finito $\{y_1, ..., y_{n_\varepsilon}\}$ tale che

$$\forall k = 1...n_\varepsilon \; \forall n, m > n_\varepsilon \quad |g_n(y_k) - g_m(y_k)| < \varepsilon$$

Sia ora $x \in X$; per equilimitatezza deve esistere k tale che

$$d(x, x') < \frac{1}{n_\varepsilon}$$

e quindi, per ogni $n, m > n_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g_m(x)| \leq |g_n(x) - g_n(y_k)| + |g_n(y_k) - g_m(y_k)| + \\ + |g_m(y_k) - g_m(x)| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

Quindi $\{g_n\}$ è di Cauchy, e, per completezza di $C(X)$ è una sottosuccessione convergente di $\{f_n\}$.

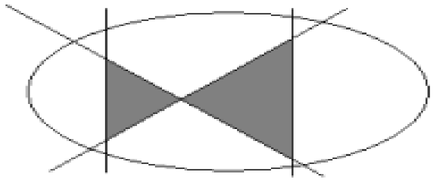
QED

Diamo una applicazione del teorema di Ascoli–Arzelà: il *teorema di Peano*.

3.5.3 Teorema *Se $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua nel dominio chiuso $D \subset \mathbb{R}^2$ allora per ogni punto interno $(x_0, y_0) \in D$ passa almeno una curva integrale dell'equazione differenziale*

$$\frac{df}{dx} = f(x, y)$$

DIMOSTRAZIONE: Poiché è continua su un chiuso, f è limitata: $|f(x, y)| \leq M$. Ora consideriamo le rette per il punto (x_0, y_0) di coefficienti angolari M e



$-M$ e due rette verticali $x = a$ e $x = b$ tali che i due triangoli di vertice (x_0, y_0) delimitati da queste rette siano contenuti in D, e chiamiamo Δ l'insieme chiuso dato dall'unione di questi due triangoli.

Ora costruiamo una *spezzata di Eulero* L_0 per l'equazione differenziale data nell'enunciato: dal punto (x_0, y_0) tracciamo una retta r_0 di coefficiente angolare $f(x_0, y_0)$ (che quindi è compresa fra le rette che delimitano Δ; su $r_0 \cap \Delta$ scegliamo un punto (x_1, y_1) e tracciamo da esso una retta r_1 di coefficiente angolare $f(x_1, y_1)$; su $r_1 \cap \Delta$ scegliamo un punto (x_2, y_2) e così via (stiamo usando l'assioma di scelta).

Possiamo costruire ovviamente infinite spezzate $L_0, L_1, L_2, ...$ in questo modo partendo da (x_0, y_0) e scegliendo punti differenti sulle rette r_n che andiamo a considerare: consideriamo ora una successione di tali spezzate (L_n) in modo che la massima lunghezza l_k di un segmento di estremi (x_k, y_k) e (x_{k+1}, y_{k+1}) appartenente alla spezzata tenda a zero per $k \longrightarrow \infty$.

Alla successione di curve $\{L_n\}$ corrisponde una successione di funzioni $\{\varphi_n\}$ i cui grafici sono dati dalle $\{L_n\}$: queste funzioni hanno le seguenti proprietà:

(1) φ_n è definita sull'intervallo $[a, b]$;

(2) Le φ_n sono uniformemente limitare;

(3) La successione $\{\varphi_n\}$ è equicontinua.

Per il teorema di Ascoli–Arzelà, esiste allora una sottosuccessione $\{\varphi_{n_k}\}$ convergente ad una certa funzione φ. Ovviamente

$$\varphi(x_0) = y_0$$

Mostriamo che φ è la soluzione dell'equazione differenziale dell'enunciato.

Precisamente mostriamo che, per ogni $\varepsilon > 0$, se $|x' - x''|$ è abbastanza piccolo, allora

$$\left| \frac{\varphi(x'') - \varphi(x')}{x'' - x'} - f(x', \varphi(x')) \right| < \varepsilon$$

cioè che, per k abbastanza grande,

$$(*) \qquad \left| \frac{\varphi_{n_k}(x'') - \varphi_{n_k}(x')}{x'' - x'} - f(x', \varphi_{n_k}(x')) \right| < \varepsilon$$

Ora sfruttiamo la continuità di f in D: dato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x - x'| < 2\delta\,, \quad |y - y'| < 4M\delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$$

Consideriamo i punti del rettangolo $R = \{(x,y) \,|\, |x - x'| < 2\delta\,, |y - y'| < 4M\delta\}$, e prendiamo $N \in \mathbb{N}$ grande abbastanza affinché, per $k > N$ si abbia

$$|\varphi(x) - \varphi_{n_k}(x)| < 2M\delta \qquad \text{e} \qquad l_k < \delta$$

(l_k è la lunghezza massima di un segmento della spezzata L_k). In questo modo, se $x - x'| < 2\delta$, le spezzate di Eulero L_k giacciono interamente nel rettangolo R.

Per fissare le idee supponiamo ora che $x' < x''$ (il resto della dimostrazione nell'altro caso è del tutto analoga), e supponiamo che la spezzata L_k abbia come vertici dei segmenti che la compongono i punti $(x_0, y_0) = (a_0, b_0)$, (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_{n+1}, b_{n+1}) in modo che

$$x_0 = a_0 \le x' < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < x'' \le a_{n+1}$$

Allora, se φ_{n_k} è la funzione corrispondente a questa spezzata, si ha

$$\begin{aligned} \varphi_{n_k}(a_1) - \varphi_{n_k}(x') &= f(a_0, b_0)(a_1 - x') \\ \varphi_{n_k}(a_2) - \varphi_{n_k}(a_1) &= f(a_1, b_1)(a_2 - a_1) \\ \cdots \qquad & \qquad \cdots \\ \varphi_{n_k}(x'') - \varphi_{n_k}(a_n) &= f(a_n, b_n)(x'' - a_n) \end{aligned}$$

da cui, per $|x'' - x'| < \delta$, troviamo

$$\begin{aligned} (f(x', y') - \varepsilon)(a_1 - x') &< \varphi_{n_k}(a_1) - \varphi_{n_k}(x') < (f(x', y') + \varepsilon)(a_1 - x') \\ (f(x', y') - \varepsilon)(a_2 - a_1) &< \varphi_{n_k}(a_2) - \varphi_{n_k}(a_1) < (f(x', y') + \varepsilon)(a_2 - a_1) \\ \cdots \qquad & \qquad \cdots \\ (f(x', y') - \varepsilon)(x'' - a_n) &< \varphi_{n_k}(x'') - \varphi_{n_k}(a_n) < (f(x', y') + \varepsilon)(x'' - a_n) \end{aligned}$$

Sommando queste disequazioni troviamo la

$$(f(x', y') - \varepsilon)(x'' - x') < \varphi_{n_k}(x'') - \varphi_{n_k}(x') < (f(x', y') + \varepsilon)(x'' - x')$$

cioè la (*).

QED

Notiamo che la soluzione non è unica: infatti costruendo una sottosuccessione non attraverso le spezzate di Eulero si ottengono soluzioni diverse.

Vediamo un'altra applicazione del teorema di Ascoli–Arzelà che segue lo spirito della dimostrazione del teorema di Peano. Per prima cosa diamo una

3.5.4 Definizione *Una* curva parametrizzata *in uno spazio metrico* (X, d) *è una funzione continua* $c : [0, 1] \longrightarrow X$*.*

Geometricamente la curva è l'immagine della funzione: comunque uno stesso insieme di punti può essere immagine di moltissime funzioni distinte, che possono individuare la stessa curva o meno.

3.5.5 Definizione *Due curve parametrizzate* $c, c' : [0,1] \longrightarrow X$ *si dicono* equivalenti *se esistono due funzioni continue crescenti* $\varphi, \varphi' : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *tali che* $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$*,* $\varphi(1) = \varphi'(1) = 1$ *e*

$$\forall t \in [0,1] \qquad c(\varphi(t)) = c'(\varphi'(t))$$

Si tratta ovviamente di una relazione di equivalenza.

3.5.6 Definizione *Una* curva continua *in uno spazio metrico* (X, d) *è una classe di equivalenza di curve parametrizzate in* (X, d)*.*

Una curva continua *congiunge due punti* $x, y \in X$ quando per una (e quindi per ogni) sua rappresentazione parametrica $c : [0,1] \longrightarrow X$ si ha che $c(0) = x$ e $c(1) = y$.

Possiamo allora dire quando una successione $\{C_n\}$ di curve converge ad una curva C: precisamente quando è possibile parametrizzare le C_n con delle funzioni c_n e C con una funzione c in modo che $d(c, c_n) \longrightarrow 0$. Ovviamente il limite di una famiglia di curve che congiungono due punti $x, y \in X$ congiunge gli stessi punti.

3.5.7 Definizione *Se* C *è una curva continua in uno spazio metrico* (X, d) *parametrizzata da* $c : [0,1] \longrightarrow X$*, la sua* lunghezza *è il numero reale*

$$l(C) = \sup_{(t_0,t_1,\ldots,t_n)\in T} \sum_{i=1}^{n} d(c(t_{i-1}), c(t_i))$$

dove T *è l'insieme dei punti* $(t_0, t_1, ..., t_n)$ *tali che*

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

e $n \in \mathbb{N}$.

Questa definizione non dipende dalla parametrizzazione scelta, dato che

$$\begin{aligned} d(c(t_{i-1}), c(t_i)) &= d(c(\varphi(t'_{i-1})), c(\varphi(t'_i))) = d(c'(\varphi'(t'_{i-1})), c'(\varphi'(t'_i))) \\ &= d(c'(t''_{i-1}), c'(t''_i)) \end{aligned}$$

(le φ trasformano elementi di T in elementi di T).

3.5.8 Teorema *Se $K \subset X$ è compatto in uno spazio metrico (X, d) e se due suoi punti $x, y \in K$ si possono congiungere con una curva continua di lunghezza finita, allora esiste una curva che li congiunge di lunghezza minima.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo una successione di curve $\{C_n\}$ tale che:

(1) $l(C_n) \leq L$ dove L è la lunghezza di una curva fissata che congiunga x e y (che esiste per ipotesi);

(2) $l(C_n) \longrightarrow l$ dove l è l'estremo inferiore delle lunghezze delle curve che congiungono x e y.

Mostriamo ora come si possano parametrizzare le curve C_n con una funzioni equicontinue: se C è una curva che congiunge x e y, e $c : [0, 1] \longrightarrow X$ una sua rappresentazione parametrica, allora la funzione $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\varphi(t) = l(C_t)$$

dove C_t è la curva che congiunge x con $c(t)$: allora

$$c'(t) = c(\varphi^{-1}(t))$$

è una rappresentazione parametrica per C, tale che

$$d(c'(t_1), c'(t_2)) \leq l(C)|t_1 - t_2|$$

Poiché tutte le curve della famiglia $\{C_n\}$ hanno lunghezza minore L, la condizione precedente implica la loro equicontinuità; ovviamente sono equilimitate (perché definite in $[0, 1]$), quindi il teorema di Ascoli–Arzelà[3] implica che da $\{C_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente ad una curva C.

La lunghezza di C sarà maggiore o uguale a l, e sarà minore o uguale all'estremo inferiore delle lunghezze delle C_n (cioè la lunghezza è una funzione semicontinua inferiormente), che è ancora l, quindi C è la curve di lunghezza minima cercata.

QED

[3] O meglio una sua generalizzazione al caso dello spazio $C(X, Y)$ delle funzioni continue da uno spazio metrico (X, d) ad un altro spazio metrico (Y, d'), che si dimostra in modo analogo al caso $Y = \mathbb{R}$.