Metodi Matematici della Meccanica Quantistica

Paolo Caressa, Roma, 1994

PREMESSA

Questo libro origina dalla rielaborazione degli appunti di lezione da me presi durante il corso *Meccanica quantistica* tenuto dal prof. Sergio Doplicher presso l'istituto matematico *G. Castelnuovo* di Roma I nell'A.A.1993/94: gli appunti delle lezioni corrispondono grosso modo alla seconda parte ed agli ultimi tre capitoli della terza parte, mentre il restante materiale è una aggiunta di nozioni più o meno preliminari prese dalla letteratura classica e da me rielabolate: in particolare mi sono posto l'obiettivo di dimostrare ogni nozione introdotta, partendo dagli assiomi della teoria degli insiemi.

Va da sé che anche la parte originata da appunti è stata rielaborata e che questi non rappresentano né lo stile, né l'erudizione, né l'eclettività delle lezioni del professor Doplicher, che queste note non possono e non intendono sostituire: questa versione più o meno definitiva si mette liberamente a disposizione *per uso personale o didattico ma senza fini di lucro* (una versione preliminare è circolata per anni, specie fra gli studenti di Roma I).

Questo libro non rappresenta un testo didattico o una introduzione ai metodi matematici della fisica: non ci sono esercizi e l'esposizione è mirata a raggruppare logicamente le nozioni più che a suddividerle affinché siano più facilmente apprese. Piuttosto può essere impegato come un testo di riferimento da quanti abbiano la necessità di utilizzare il macchinario matematico (o meglio parte di esso) fondamentale per la meccanica quantistica, in particolare la teoria algebrica dei campi.

La mia intenzione è che questo libro possa essere un utile vademecum per studenti di matematica, fisica, chimica e altre materie scientifiche, a complemento di testi didatticamente più appropriati: la prima parte è un rapido riassunto di nozioni matematiche fondamentali ma che generalmente non si affrontano, o almeno non completamente, nei corsi istituzionali del primo anno o primo biennio di una facoltà scientifica. La seconda parte costituisce un corso di analisi funzionale (orientato alle algebre di operatori e non alle equazioni a derivate parziali). La terza parte introduce il concetto di simmetria attraverso l'esplorazione della teoria dei gruppi topologici e di Lie, ed è seguita da alcune applicazioni alla meccanica quantistica dei sistemi in finiti gradi di libertà ed alla teoria dei campi liberi (seconda quantizzazione). In particolare *non si discute in modo sistematico la meccanica quantistica* se non nei suoi tratti elementari: non si troveranno né rinormalizzazione, né QED, né stringhe, etc.

Nella bibliografia alla fine del volume sono elencati solo i titoli consultati nella preparazione delle presenti note: ai testi specialistici sono rinviati i lettori desiderosi di una bibliografia coerente sull'argomento.

Ovviamente errori, refusi, incongruenze e quant'altro sono responsabilità del sottoscritto: potevano essercene di più, se Tommaso Addabbo, Sebastiano Carpi, Roberto Conti, Ezio Vasselli ed altri (che ringrazio) non me ne avessero segnalato qualcuno in precedenti versioni.

Paolo Caressa

Indice

Parte I

Prolegomeni di Algebra, Analisi e Topologia

Capitolo 1

INSIEMI

Il concetto di insieme è così generale che non ha senso cercare di definirlo in termini di nozioni più semplici: quindi si darà qui una caratterizzazione assiomatica degli insiemi, scrivendo dei postulati che generalizzino ciò che alla nostra intuizione si presenta come "famiglia", "aggregato" o generica "collezione" di oggetti. Per evitare i paradossi della teoria ingenua degli insiemi distingueremo fra *classi* ed *insiemi* immaginando intuitivamente che le classi siano insiemi così grandi da non poter figurare come elementi di altri insiemi.

1.1 Un sistema di assiomi

Introduciamo alcuni assiomi[1] per determinare il concetto di classe: supponiamo di avere solo, oltre al concetto indefinibile di classe, un altro concetto primitivo, vale a dire la relazione di "inclusione" $x \in y$ che interpretiamo come l'appartenenza dell'elemento x alla classe y.

Il primo assioma stabilisce il legame fra il concetto logico di uguaglianza e quello insiemistico di appartenenza: intuitivamente equivale a dire che un insieme è determinato dagli elementi che gli appartengono, e da null'altro:

Assioma 1. (di estensionalità) *Se A e B sono classi allora $A = B$ se e solo se A e B hanno gli stessi elementi.*

Volendo questa può essere presa come una definizione della relazione di uguaglianza in termini di appartenenza: ovviamente, a meno che non si lavori come fanno i logici con i linguaggi al primo ordine, si può definire l'uguaglianza come un concetto logico, seguendo Leibniz:

Principio di identità degli indiscernibili. *Se $A = B$ allora per ogni proprietà P si ha $P(A) \iff P(B)$.*

[1] Si tratta sostanzialmente dell'assiomatica proposta da J. von Neumann, K. Gödel, e P. Bernays.

Quest'ultimo è uno *schema di assiomi*, perché da esso si può desumere un assioma data una qualsiasi proposizione[2] $P(x)$ che contenga una variabile libera x.

Quando tutti gli elementi di una classe A sono anche elementi di una classe B scriviamo $A \subset B$: questo si può definire come

1.1.1 Definizione *$A \subset B$ se e solo se per ogni $x \in A$ si ha pure $x \in B$.*

Se $A \subset B$ e $B \subset A$ allora le classi sono uguali: $A = B$; in vista del prossimo assioma la seguente definizione è cruciale:

1.1.2 Definizione *Una classe A è un* insieme *se esiste una classe B tale che $A \in B$.*

Il secondo assioma è appunto uno schema di assiomi

Assioma 2. (DI FORMAZIONE DELLE CLASSI) *Esiste una classe i cui elementi sono esattamente gli insiemi che soddisfano la proposizione $P(X)$.*

Si noti che la classe la cui esistenza è postulata dall'assioma 2 è formata dagli *insiemi* e non dalle classi che soddisfano P.

1.1.3 Esempio *Esibiamo una classe che non è un insieme: si consideri la proposizione $P(x)$ definita come $x \notin x$ (il segno $\notin$ è la negazione dell'appartenenza: cioè $x \notin y$ se e solo se non è vero che $x \in y$); allora possiamo formare la classe R degli insiemi tali che $P(x)$: cioè R contiene gli* insiemi *x tali che $x \notin x$; si noti che questa classe è univocamente determinata (assioma di estensionalità) ma* non può essere un insieme*: supponiamo infatti che R sia un insieme: allora possiamo chiederci se $R \in R$ e questo è vero se e solo se $P(R)$ cioè se e solo se $R \notin R$: un assurdo. Quindi R non è un insieme.*

La classe postulata dall'assioma 2 si denota

$$\{x \mid P(x)\}$$

Ad esempio la classe vuota si può definire come

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$$

Che questo sia un insieme, dobbiamo peró assumerlo assiomaticamente.[3]

[2] In una trattazione rigorosa bisognerebbe definire il concetto di "proposizione" e caratterizzare quelle che si possono utilizzare per generare istanze di questo schema di assiomi; in questo caso supporremo che le nostre proposizioni siano formate con i quantificatori $\forall$, $\exists$ ed i soliti operatori logici usati in matematica (e, o, implica, se e solo se)... ed impiegati per connettere termini che siano altri predicati, negazioni di altri predicati o relazioni della forma $t = s$ o $Y \in X$.

[3] Si potrebbe obiettare che la classe $\emptyset$ è elemento della classe $\{\emptyset\}$ (la classe che ha come elemento esattamente l'insieme vuoto): ma per formare questa classe, dobbiamo sapere che $\emptyset$ sia un insieme.

Assioma 3. *La classe $\emptyset$ è un insieme.*

L'unione e l'intersezione sono ovviamente $A \cup B = \{X \mid X \in A \text{ oppure } X \in B\}$ e $A \cap B = \{X \mid X \in A \text{ e } X \in B\}$.

In generale definiamo unione e intersezione di una famiglia di insiemi ("famiglia" è un altro sinonimo di "classe") come

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup \{A_i\}_{i \in I} = \{X \mid \exists i \in I \; X \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap \{A_i\}_{i \in I} = \{X \mid \forall i \in I \; X \in A_i\}$$

Osserviamo che in queste costruzioni otteniamo in generale delle classi. Per garantire che questi procedimenti diano luogo ad insiemi, dobbiamo imporre qualche altro assioma.

Assioma 4. *Se A e B sono insiemi allora $\{A, B\}$ è un insieme.*

Assioma 5. *Se A è un insieme e $B \subset A$ allora B è un insieme.*

Dato che si dimostra facilmente che, se $j \in I$ allora $\bigcap_{i \in I} A_i \subset A_j$, questo assioma implica ad esempio che l'intersezione di una famiglia qualsiasi di insiemi è un insieme. Per l'unione, vale invece la relazione $j \in I \Rightarrow A_j \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ e quindi non si può usare l'assioma 5.

Assioma 6. *Se A è un insieme di insiemi allora l'unione $\bigcup A$ è un insieme.*

Se A è un insieme, è naturale considerare l'*insieme delle parti* di A, ovvero la classe dei suoi sottoinsiemi: è pure naturale imporre che si tratti a sua volta di un insieme.

Assioma 7. *Se A è un insieme, allora*

$$P(A) = \{X \mid X \subset A\}$$

è un insieme.

L'assioma 2 consente anche la formazione di coppie ed in genere successioni ordinate di elementi:

$$(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$$

In generale, una n-pla $(a_1, ..., a_n)$ si definisce iterando la definizione di coppia. L'insieme di tutte le possibili coppie di elementi di A e B è il prodotto (cartesiano) di A per B:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Se $A = B$ lo denotiamo anche A^2. Ricordiamo che

1.1.4 Definizione *Una* relazione *fra due classi A e B è una sottoclasse del prodotto $A \times B$.*

1.1.5 Definizione *Una funzione da A in B è una relazione fra A e B tale che un elemento di B non possa essere in relazione con piú di un elemento di A, cioè se $(a, b) \in f$ e $(a, c) \in f$ allora $c = b$.*

Definiamo

$$\mathrm{Dom}(f) = \{a \mid a \in A \text{ e } \exists b \in B \ b = f(a)\}$$

(dominio della funzione f) e

$$\mathrm{im}(f) = \{b \mid b \in B \text{ e } \exists a \in A \ b = f(a)\}$$

(immagine della funzione f).

Notiamo che se A è un insieme, certamente lo è $\mathrm{Dom}(f)$; non è detto che lo sia $\mathrm{im}(f)$.

Assioma 8. *Se $f : A \longrightarrow B$ è una funzione e A è un insieme, allora* $\mathrm{im}(f)$ *è un insieme.*

Siamo ora in grado di definire una nozione generale di prodotto di insiemi: se $\{A_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di insiemi allora il loro insieme prodotto $\prod_{i_I} A_i$ è l'insieme delle funzioni $f : I \longrightarrow A$. Gli assiomi che abbiamo dato implicano che sia un insieme *a patto che sia gli A_i che I siano insiemi.* Se per ogni $i \in I$ è $A_i = A$ allora denotiamo $A^I = \prod_{i\in I} A_i$.

Nel caso di famiglie qualsiasi, se un prodotto di insiemi non è vuoto, possiamo dire che ognuno degli insiemi che figurano nel prodotto non è vuoto? Per rispondere questo quesito è necessario chiarire il significato della parola "infinito" in teoria degli insiemi.

Assioma 9. (ASSIOMA DELL'INFINITO) *Esiste un insieme U tale che $\emptyset \in U$ e se $u \in U$ allora $u \cup \{u\} \in U$.*

Questo assioma implica l'esistenza di un insieme infinito perché consente, ad esempio, di costruire i numeri naturali. L'insieme postulato da questo assioma contiene almeno un elemento, il vuoto, ma contiene anche l'insieme formato dal vuoto $\{\emptyset\}$, ed anche l'insieme $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ e così via. Definiamo allora i numeri naturali come

$$0 = \emptyset \qquad 1 = \{\emptyset\} \qquad 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \qquad \ldots$$

e quindi l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Formalmente, basta considerare la classe degli insiemi X tali che $\emptyset \in X$ e se $x \in X$ allora $x \cup \{x\} \in X$; l'intersezione di questa classe è l'insieme $\mathbb{N}$.

Ora dimostriamo che si tratta esattamente dei numeri naturali, cioè che $\mathbb{N}$ soddisfa gli assiomi di Peano.

Intanto $0 = \emptyset \in \mathbb{N}$. Poi, definiamo $n + 1$ come $n \cup \{n\}$ e lo chiamiamo il *successore* di n; in questo modo se $n \in \mathbb{N}$ allora $n+1 \in \mathbb{N}$ ed è ovvio che 0 non è mai della forma $n+1$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. Inoltre abbiamo che:

$$\forall n, m \in N \qquad n+1 = m+1 \Rightarrow n = m$$

Infatti $n+1 = n \cup \{n\}$ e quindi $n+1 = m+1$ implica $n \cup \{n\} = m \cup \{m\}$ cioè, per ogni x (($x \in n$ oppure $x \in \{n\}$) $\iff$ ($x \in m$ oppure $x \in \{m\}$)), il che è vero se e solo se $x = n = m$ oppure n e m hanno gli stessi elementi e quindi ancora $n = m$.

Infine vale il principio di induzione matematica:

$$\forall N \subset \mathbb{N} \quad 0 \in N \text{ e } (\forall x \in N \quad x+1 \in N) \Rightarrow N = \mathbb{N}$$

Infatti l'insieme $\mathbb{N}$ è l'intersezione della classe degli insiemi che soddisfano le ipotesi del principio di induzione, quindi $\mathbb{N} \subset N$.

Abbiamo in questo modo i numeri naturali, ciascuno dei quali è un insieme. Allora, ricordando la seguente

1.1.6 Definizione *Una funzione $f : A \longrightarrow B$ si dice*

(1) iniettiva *se $f(a) = f(b)$ implica $a = b$ e si dice in tal caso che A va in B.*

(2) suriettiva *se $\operatorname{im}(f) = B$ e si dice in tal caso che A va su B.*

(3) biunivoca *se è iniettiva e suriettiva e si dice in tal caso che A è biunivoco a B.*

possiamo dare quella di insieme finito:

1.1.7 Definizione *Un insieme è* finito *se è biunivoco a un numero naturale; in caso contrario si dice* infinito.

Torniamo ora ai prodotti di insiemi: notiamo che se $\{A_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di insiemi, e se per qualche $i \in I$ si ha che $A_i = \emptyset$ allora $\prod_{i \in I} A_i = \emptyset$, esattamente come nel caso dei numeri (se uno dei fattori è nullo anche il prodotto è nullo; il viceversa è pure una proprietà che sembra naturale imporre (la "legge di annullamento del prodotto"), ma che non è possibile dimostrare a partire dagli assiomi fin qui dati.

Assioma 10. (ASSIOMA MOLTIPLICATIVO) *Se $\prod_{i \in I} A_i = \emptyset$ allora esiste $i \in I$ tale che $A_i = \emptyset$.*

Ora ricaviamo da questo assioma un altro famoso enunciato: l'*assioma di scelta*. Per formularlo, diamo una

1.1.8 Definizione *Una funzione* $f : A \longrightarrow B$ *si dice* funzione di scelta *se per ogni* $C \in \mathrm{Dom}(A)$ *si ha che* $f(C) \in C$.

1.1.9 Teorema (ASSIOMA DI SCELTA) *Ogni insieme non vuoto ha una funzione di scelta che lo ammette come dominio.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo ora un insieme A: possiamo immaginarlo come una famiglia di insiemi (i suoi elementi) indicizzata da A stesso; cioè $A = \{A_a\}_{a\in A}$ (dove $A_a = a$). In questo modo, il prodotto $\prod_{a\in A} A_a$ della famiglia A è l'insieme delle funzioni da $A \longrightarrow A$, che in questo caso sono tutte funzioni di scelta (dato che $(f(a)) \in A_a = a$). Dunque, dato che esiste $a \in A$ in modo che A_a è non vuoto (un modo contorto di dire che $A \neq \emptyset$), l'assioma moltiplicativo ci dice che anche $\prod_{a\in A} A_a$ è non vuoto, cioè che l'insieme delle funzioni di scelta su A è non vuoto.
QED

L'ultimo assioma è il seguente:

Assioma 11. (ASSIOMA DI FONDAZIONE) *Ogni classe* A *non vuota contiene un elemento* X *tale che* $A \cap X = \emptyset$.

Il significato intuitivo di questo assioma è che un insieme non può contenere se stesso come elemento. Un modo equivalente di esprimerlo è dire che un insieme non può contenere catene infinite di elementi, cioè a dire se A è un insieme, non può aversi una catena di appartenenze

$$... \in A_n \in ... \in A_2 \in A_1 \in A$$

1.2 Ordinamento e Lemma di Zorn

Le seguenti definizioni catturano il concetto di "relazione" ed in particolare di "ordinamento":

1.2.1 Definizione *Una relazione* $R \subset A^2$ *su un insieme* A *si dice*

(1) *di* ordine parziale *se è riflessiva, antisimmetrica e transitiva, ovvero se per ogni* $a \in A$ $(a, a) \in R$, *per ogni* $a, b \in A$ $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$ *e per ogni* $a, b, c \in A$ $((a, b) \in R$ *e* $(b, c) \in R) \Rightarrow (a, c) \in R$;

(2) *di* ordine totale *se è di ordine e se per ogni* $a, b \in R$ $(a, b) \in R$ *oppure* $(b, a) \in R$;

(3) *di* buon ordinamento *se è di ordine totale e se ogni $B \subset A$ non vuoto possiede un elemento minimo m (cioè per ogni $b \in B$ tale che $(b, m) \in R$ segue che $b = m$).*

(4) *di* equivalenza *se è riflessiva, transitiva e simmetrica cio per ogni $a, b \in R$ $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R \Rightarrow a = b$.*

(5) *Un insieme A parzialmente ordinato da R è* diretto *se per ogni $a, b \in A$ esiste un $c \in A$ tale che aRc e bRc.*

Se R è una relazione in un insieme A, in genere si scrive aRb in luogo di $(a, b) \in R$.

1.2.2 Definizione *Sia A un insieme ordinato dalla relazione $\leq$.*

(1) *Una* catena *C in A è un sottoinsieme totalmente ordinato da $\leq$.*

(2) *Un* confine superiore (inferiore) *di un sottoinsieme B di A è un elemento $s \in A$ tale che per ogni $b \in B$ si abbia $b \leq s$ ($s \leq b$).*

(3) *Un* massimale (minimale) *in A è un elemento $m \in A$ tale che per ogni $a \in A$ tale che $m \leq a$ si abbia $a = m$ (tale che $a \leq m$ si abbia $a = m$).*

(4) *Il* estremo inferiore (superiore) $\inf B$ ($\sup B$) *di un sottoinsieme $B \subset A$ è il minimo dei confini superiori (massimo dei confini inferiori) di B.*

Si noti che un elemento massimale non è necessariamente un massimo.

1.2.3 Definizione *Sia A un insieme bene ordinato dalla relazione $\leq_A$. Un sottoinsieme $B \subset A$ si dice*

(1) Segmento iniziale *di A se per ogni $a, b \in A$ da $a \in B$ e $b \leq_A a$ segue che $b \in B$.*

(2) Segmento iniziale chiuso *di A se esiste un $a \in A$ tale che $B = \{b \in A | b \leq_A a\}$ e l'elemento a si dice* estremo *di B.*

(3) Segmento iniziale aperto *di A se esiste un $a \in A$ tale che $B = \{b \in A | b <_A a\}$.*

Osserviamo che $\emptyset$ è segmento iniziale di ogni insieme bene ordinato (notare l'analogia con le definizioni di intervalli aperti e chiusi a destra nei numeri reali). Passiamo ora alla dimostrazione del principale risultato che coinvolge queste definizioni:

Lemma di Zorn. *Sia A un insieme ordinato dalla relazione $\leq$; se ogni catena in A ha un confine superiore, allora A possiede un elemento massimale.*

Dimostrazione: Consideriamo l'insieme

$$C = \{B \subset A \mid B \text{ è una catena in } A\}$$

e, per ogni $c \in C$, l'insieme

$$S(c) = \{a \in A \mid a \text{ è confine superiore di } C\}$$

Supponiamo per assurdo che A non possieda un massimale; allora la famiglia

$$F = \{S(B) \setminus B\}_{B\in C}$$

è formata da sottoinsiemi di A non vuoti. Per l'assioma di scelta esiste una funzione $f : C \longrightarrow A$ tale che, per ogni $B \in C$, $f(B) = S(B) \setminus B$.

Sia ora Z l'insieme delle catene B (non vuote) tali che per ogni segmento iniziale B' di B (diverso da B) di abbia

$$f(B') = \inf\{B \setminus B'\}$$

i.e. una catena B di A sta in Z se e solo se la funzione di scelta sceglie in ogni suo segmento iniziale un elemento che è piú piccolo di ogni elemento di B che non è in B'.

Ovviamente $f(\emptyset) \in Z$ che è quindi non vuoto e se $B', B'' \in Z$, dato che $f(\emptyset)$ è il minimo, in B' e B'' deve esistere un segmento iniziale comune a B' ed a B'', e quindi l'unione di tali segmenti è un insieme S non vuoto: si tratta naturalmente di un segmento iniziale sia per B' che per B''.

Per quanto si è visto, l'insieme $S \cup \{f(S)\}$ è ancora un segmento iniziale (la f sceglie un elemento apposta in questo modo) e quindi è un sottoinsieme di C: questo non può essere a meno che non sia $C = B'$ oppure $C = B''$.

Ne concludiamo che se $B', B'' \in Z$ allora deve aversi $B' \subset B''$ oppure $B'' \subset B'$; quindi l'insieme

$$B^* = \bigcup_{B\in Z} B$$

è una catena in A. Ma, di nuovo, $B^* \cup \{f(B^*)\} \in Z$ il che contraddice sia la definizione di B^* che il fatto $f(B^*) \in S(B^*) \setminus B^*$. L'assurdo deriva dunque dall'ipotesi che esistano elementi non vuoti nella famiglia F, e cioè dall'aver supposto l'insieme A privo di massimali.

QED

Il primo e principale esempio di applicazione del lemma di Zorn è il teorema di Zermelo secondo il quale ogni insieme è bene ordinabile: in séguito si avrà occasione di dare molte applicazioni del lemma di Zorn.

Teorema del Buon Ordinamento. (ZERMELO) *Per ogni insieme A esiste una relazione d'ordine $\le_A$ su A rispetto alla quale A è bene ordinato.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo l'insieme

$$W = \{(B, \le_B) \,|\, B \subset A \text{ e } \le_B \text{ è un buon ordinamento su } B\}$$

Definiamo su W un ordinamento $\ll$ come segue: $(B, \le_B) \ll (B', \le_{B'}) \iff B \subset B'$, $\le_{B'}$ ristretto a B è $\le_B$ e B è segmento iniziale di B.

Cioè un elemento $B \in W$ è piú piccolo di un altro $B' \in W$ se è piú piccolo come insieme ($B \subset B'$), se è pure piú piccolo come insieme ordinato (nel senso che la relazione di ordine su B' ristretta agli elementi di B sia esattamente la relazione di ordine su B) e se non esistano elementi in $B' \subset B$ piú piccoli di un qualsiasi elemento di B.

Ora consideriamo una catena $\{B_i\}_{i\in I}$ in W rispetto all'ordine parziale $\ll$. Allora l'insieme $B^* = \bigcup_{i\in I} B_i$ unione di questa catena è totalmente ordinato rispetto alla relazione unione delle relazioni d'ordine $\{\le_{B_i}\}_{i\in I}$.

Sia C è un sottoinsieme non vuoto di B^*; ciò vuol dire che esiste un indice $i_0 \in I$ tale che $C \cap B_{i_0} \neq \emptyset$. L'insieme B_{i_0} è bene ordinato dalla sua relazione $\le_{B_0}$ (per definizione) e quindi il suo sottoinsieme $C \cap B_{i_0}$ ha un elemento minimo c_0 (rispetto all'ordinamento $\le_{B_{i_0}}$).

Ma B_{i_0} è segmento iniziale di A, e dunque c_0 è anche un minimo rispetto all'ordinamento di ogni altro B_i, col che c_0 è minimo rispetto all'ordinamento di B^*. Quindi $A \in W$.

è poi ovvio che A è un confine superiore per la catena $\{(B_i, \le_i)\}_{i\in I}$ in W rispetto all'ordinamento $\ll$. Cioè l'insieme ordinato W soddisfa alle ipotesi del lemma di Zorn e quindi deve avere un elemento massimale $(M, \le_M)$.

Per dimostrare il teorema basta far vedere che $M = A$. Se esistesse un elemento $a_0 \in A \setminus M$ allora $M \cup \{a_0\}$, con la relazione d'ordine che su M coincide con $\le_M$ e che rende a_0 maggiore di ogni elemento di M, è ancora un elemento di W, il che contraddice la massimalità di M.

QED

1.3 Numeri ordinali e cardinali

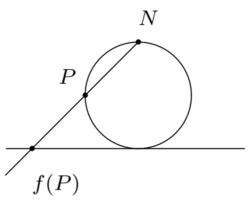
Contare gli elementi di un insieme finito significa metterli in corrispondenza biunivoca con un numero naturale: abbiamo così la possibilità di determinarne il numero di elementi di un insieme finito, che, in linguaggio insiemistico, si dice *cardinalità*. Vogliamo ora estendere il concetto di "numero di elementi di un insieme" anche al caso infinito.

1.3.1 Definizione *Due insiemi A e B si dicono* equipotenti *ovvero si dice che hanno la* stessa cardinalità *se sono biunivoci e si scrive in tal caso* $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$.

1.3.2 Esempio

(1) *Due numeri naturali sono equipotenti se e solo se sono uguali.*

(2) *L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ è equipotente all'intervallo $(0,1)$: un modo per vederlo è osservare che questo intervallo è equipotente ad una circonferenza del piano privata di un punto (ad esempio $t \longmapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ è biunivoca fra $(0,1)$ e la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 privata del punto $(1,0)$). Che poi una circonferenza privata di un punto sia equipotente a $\mathbb{R}$ si vede considerando un proiezione: se consideriamo ad esempio la circonferenza di centro $(0,1)$ e raggio 1 privata del punto $N = (0,2)$, possiamo associare ad un punto P di questo insieme l'unico punto $f(P)$ dell'asse reale $\{y = 0\}$ che interseca la retta per P e per il punto $(0,2)$.*



1.3.3 Definizione *Un insieme è* numerabile *se è equipotente a* $\mathbb{N}$.

Stabiliamo una notazione: avendo denotato col simbolo $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$ l'esistenza di una funzione biunivoca fra A e B, denotiamo col simbolo $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B)$ l'esistenza di una funzione iniettiva da A in B, e col simbolo $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(B)$ l'esistenza di una funzione iniettiva fra A e B e la non esistenza di funzioni biunivoche fra A e B.

1.3.4 Teorema (CANTOR–SCHRÖDER–BERNSTEIN)

$$\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B) \text{ e } \mathrm{Card}(B) \leq \mathrm{Card}(A) \Rightarrow \mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$$

DIMOSTRAZIONE: (Birkhoff–MacLane) Osserviamo preliminarmente che, come in ogni questione riguardante la cardinalità, possiamo considerare gli insiemi A e B disgiunti (cioè $A \cap B = \emptyset$), dato che se non lo sono, possiamo considerare $C = A \cap B$ e porre $B' = (B \setminus C) \cup C'$ con C' insieme equipotente a C e disgiunto da C in modo che, ovviamente, $\mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(B')$.

Dimostriamo quindi il teorema nell'ipotesi che sia $A \cap B = \emptyset$; consideriamo due funzioni (che esistono per ipotesi) $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$ iniettive. Definiamo per un elemento a di A o B un suo discendente come un elemento che sia stato ottenuto con applicazioni successive delle funzioni f e g (ad esempio $g(f(g(b))) \in A$ è discendente di $b \in B$). Allora possiamo decomporre A in tre insiemi: A_P che consiste degli elementi di A che hanno un numero pari di discendenti, A_D che consiste degli elementi di A che hanno un numero dispari di discendenti e A_I che consiste degli elementi di A con un numero infinito di discendenti. Analogamente decomponiamo B ed osserviamo che f manda A_P su B_D e A_I su B_I e che g^{-1} manda A_D su B_P. Quindi la funzione che, su $A_P \cup A_I$ è definita come f e che su A_D è definita come g^{-1} è biunivoca da A in B.

QED

1.3.5 Teorema (CANTOR) *Se A è un insieme, allora* $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(P(A))$.

DIMOSTRAZIONE: Che si abbia $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(P(A))$ è ovvio: la funzione $f : A \longrightarrow P(A)$ definita come $f(a) = \{a\}$ è manifestamente iniettiva. Ora dimostriamo per assurdo che $\mathrm{Card}(A) \neq \mathrm{Card}(P(A))$.

Supponiamo cioè che esista una funzione biunivoca $f : A \longrightarrow P(A)$, e definiamo l'insieme

$$B = \{a \in A \,|\, a \notin f(a)\}$$

Per definizione è $B \subset A$ e quindi $B \in P(A)$. Deve allora esistere un unico elemento $a_B \in A$ tale che $f(a_B) = B$; ma se $a_B \in B$ allora $a_B \notin f(a_B) = B$ che è assurdo; quindi deve aversi $a_B \notin B$, cioè a dire $a_B \in f(a_B) = B$ che è un altro assurdo.

Quindi la funzione biunivoca f non può esistere.

QED

Osserviamo che i numeri che abbiamo incontrato finora (i naturali e ω stesso) sono insiemi che hanno due particolarità, espresse dalle definizioni seguenti:

1.3.6 Definizione

(1) *Un insieme A è* pieno *se per ogni $B \in A$ si ha pure $B \subset A$.*

(2) *Un insieme A è* transitivo *se per ogni $B \in A$ e per ogni $C \in B$ si ha che $C \in A$.*

(3) *Un* numero ordinale *è un insieme pieno e transitivo.*

Cioè un ordinale contiene come elementi esattamente i suoi sottoinsiemi e gli elementi dei suoi elementi.

1.3.7 Teorema *Un numero ordinale è bene ordinato dalla relazione* $\in$.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo un numero ordinale α: che la relazione $\in$ sia un ordinamento parziale in α è ovvio; dimostriamo che ogni sottoinsieme A non vuoto di α ha un primo elemento. Per l'assioma di fondazione v'è un elemento $a \in A$ tale che $a \cap A = \emptyset$ e quindi nessun elemento di a appartiene ad A, il che vuol dire che a è il primo elemento di A.

QED

1.3.8 Lemma *Sia* α *un ordinale.*

(1) *Se* $A \subset \alpha$, $A \neq \alpha$ *e* A *è pieno allora* $A \in \alpha$.

(2) *Se* β *è un ordinale allora* $\alpha \subset \beta$ *oppure* $\beta \subset \alpha$.

(3) *Se* β *è un ordinale allora* $\alpha \in \beta$ *oppure* $\beta \in \alpha$ *oppure* $\beta = \alpha$.

(4) *Se* $A \in \alpha$ *allora* A *è un ordinale.*

DIMOSTRAZIONE:

(1) Per transitività di A esiste un $B \in A$ tale che $A = \{a \in \alpha | a \in B\}$. Infatti l'insieme $\alpha \setminus A$ ha un primo elemento B per la relazione $\in$, ed è un esercizio vedere che A è formato dagli elementi che appartengono a questo B. Per concludere basta allora osservare che, essendo ogni elemento di B anche elemento di α ne segue che $A = B$.

(2) L'insieme $\alpha \cap \beta$ è piena e per (1) è $\alpha = \alpha \cap \beta$ oppure $\alpha \cap \beta \in \alpha$; nel primo caso troviamo immediatamente $\alpha \subset \beta$, mentre nel secondo caso, otteniamo $\alpha \cap \beta \notin \beta$ (dato che $\alpha \cap \beta \in \alpha \cap \beta$), e quindi, per (1), $\alpha \cap \beta = \beta$ (dato che $\alpha \cap \beta \notin \beta$) sicché $\beta \subset \alpha$.

(3) Ovvio!

(4) Che A sia pieno segue dal fatto che lo è α; per vedere che è transitivo, si osservi che α è bene ordinato da $\in$ e che $A \in \alpha$: allora se $C \in B$ e $B \in A$ allora $C \in A$.

QED

1.3.9 Definizione *Una funzione* $f : A \longrightarrow B$ *fra due insiemi totalmente ordinati* A *e* B *si dice un* isomorfismo (ordinale) *se è suriettiva e monotona:*

$$\forall a, b \in A \quad a \leq_A b \Rightarrow f(a) \leq_B f(b)$$

Un isomorfismo ordinale è necessariamente iniettivo ed il suo inverso è un isomorfismo ordinale.

1.3.10 Lemma *Siano A e B insiemi totalmente ordinati.*

(1) *Se $f : A \longrightarrow B$ è un isomorfismo ordinale e S è un segmento iniziale (aperto, chiuso) in A, allora $f(S)$ è un segmento iniziale (aperto, chiuso) in B.*

(2) *Se S è un segmento iniziale di A e A è bene ordinato, allora (se $S \neq A$) S è aperto.*

(3) *Se $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$ sono isomorfismi ordinali fra un insieme bene ordinato A ed un segmento iniziale di un insieme totalmente ordinato B allora $f = g$.*

1.3.11 Teorema *Per ogni insieme A bene ordinato dalla relazione $\leq$ esiste un unico ordinale α che sia isomorfo (con la relazione $\in$) ad A come insieme ordinato.*

DIMOSTRAZIONE: L'unicità segue facilmente dalla (3) del lemma precedente. Dimostriamo l'esistenza di α: denotiamo con B l'insieme di tutti gli $a \in A$ tali che esistano un ordinale α_a e un isomorfismo f_a dell'insieme bene ordinato α_a sul segmento chiuso S_a di estremo a: notiamo che per il lemma precedente questa funzione f_a è univocamente determinata da a.

Ora sia $c \in B$ tale che $b \leq c$. Allora l'insieme $\alpha_0 = \{f_c^{-1}(a)\}_{a\in S_b}$ è un numero ordinale. la funzione f ristretta a α_0 è un isomorfismo su S_b e quindi $b \in B$ e $f_b = f_c|_{\alpha_0}$. In altri termini $f_b \subset f_c$.

Ma allora la funzione $f_0 = \bigcup_{a\in B} f_a$ è un isomorfismo dell'ordinale $\beta_0 = \bigcup_{a\in B} \alpha_a$ su B. Ora, se $A = B$ il teorema è dimostrato, altrimenti, se $A \neq B$, comunque B è segmento iniziale di A, che è bene ordinato, sicché deve esistere un $a_0 \in A$ tale che $B = S_{a_0}$. Dunque $f_0 \cup \{(\beta_0, \alpha_0)\}$ è un isomorfismo dell'ordinale $\beta_0 + 1 = \beta_0 \cup \{\beta_0\}$ su $B \cup \{\alpha_0\} = S_{a_0}$ il che implica $a_0 \in B$ che è un assurdo. Quindi $A = B$.

QED

Dato che ogni insieme è bene ordinato, per una opportuna relazione d'ordine totale, dal teorema precedente segue che ogni insieme è isomorfo a un numero ordinale: in particolare un isomorfismo è una funzione biunivoca e quindi

1.3.12 Corollario *Ogni insieme è equipotente a un numero ordinale.*

Un insieme qualsiasi è ordinato dalla relazione di uguaglianza: $a \leq a$ se e solo se $a = a$. Questo è un ordinamento banale, che non aggiunge alcuna ulteriore informazione alla natura dell'insieme stesso e definiamo i numeri cardinali come gli ordinali che tengano conto di questa relazione.

1.3.13 Definizione *Un numero ordinale α è un* numero cardinale *se per ogni ordinale $\beta \leq \alpha$*[4]*, β e α* non *sono equipotenti.*

Dimostriamo ora che per ogni insieme A possiamo trovare un solo numero cardinale che sia equipotente ad A; chiameremo questo numero la *cardinalità* di A e lo indicheremo con $\mathrm{Card}(A)$

1.3.14 Teorema *Per ogni insieme A esiste un unico cardinale $\mathfrak{a}$ ad esso equipotente.*

DIMOSTRAZIONE: Dato che A è bene ordinabile, per il corollario 1.3.12 esiste un unico ordinale α isomorfo (in particolare equipotente) a A; ora vogliamo trovare un cardinale $\mathfrak{a}$ equipotente a α (e quindi ad A). Questo è facilissimo: dato che α è bene ordinato da $\in$ esiste un ordinale $\mathfrak{a} \leq \alpha$ equipotente a α ma i cui elementi siano tutti non equipotenti a α; questo $\mathfrak{a}$ è quindi un cardinale.

L'unicità di $\mathfrak{a}$ segue dall'unicità di α sancita nel corollario 1.3.12 e dalla definizione di numero cardinale.

QED

1.3.15 Corollario *Per ogni numero ordinale α esiste un unico numero cardinale equipotente a α.*

1.3.16 Teorema *Se A è un insieme infinito, allora $\mathrm{Card}(A^2) = \mathrm{Card}(A)$.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo la funzione

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow A^2 \\ a &\longmapsto (a, a) \end{aligned}$$

Dato che è iniettiva, abbiamo subito che $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(A^2)$. Ora procediamo per assurdo: supponiamo che non valga la $\mathrm{Card}(A^2) \leq \mathrm{Card}(A)$; allora l'insieme C dei cardinali infiniti $\mathfrak{a}$ tali che

$$\mathfrak{a} \leq \mathrm{Card}(A) \text{ e } \mathfrak{a} < \mathrm{Card}(\mathfrak{a}^2)$$

è non vuoto e, i cardinali sono bene ordinati, sia $\mathfrak{a}_0$ il suo minimo. Sull'insieme $\mathfrak{a}_0^2$ definiamo una relazione d'ordine $\leq$ come

$$\begin{aligned} (\alpha, \alpha') \leq (\beta, \beta') \iff & \max(\alpha, \alpha') < \max(\beta, \beta') \text{ oppure} \\ & \alpha < \beta \text{ e } \max(\alpha, \alpha') < \max(\beta, \beta') \text{ oppure} \\ & \alpha = \beta \text{ e } \alpha' \leq \beta' \text{ e } \max(\alpha, \alpha') < \max(\beta, \beta') \end{aligned}$$

[4] Ricordiamo che per gli ordinali la relazione $\leq$ significa $\in$.

In questo modo $\mathfrak{a}^2$ è totalmente ordinato; ma è pure bene ordinato: per ogni insieme non vuoto $B \subset \mathfrak{a}^2$ i seguenti sottoinsiemi sono non vuoti (in virtù della definizione della relazione $\leq$ su $\mathfrak{a}^2$):

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(\alpha,\alpha') \in B | \forall(\beta,\beta') \in B \ \max(\alpha,\alpha') \leq \max(\beta,\beta')\} \\ B_2 &= \{(\alpha,\alpha') \in B_1 | \forall(\beta,\beta') \in B_1 \ \alpha < \beta\} \\ B_3 &= \{(\alpha,\alpha') \in B_2 | \forall(\beta,\beta') \in B_2 \ \alpha' < \beta'\} \end{aligned}$$

e B_3 non può che contenere esattamente un elemento, che è proprio il minimo in B rispetto alla relazione $\leq$. Dato che $\mathfrak{a}_0 < \mathrm{Card}(\mathfrak{a}_0^2)$, l'insieme bene ordinato (dalla relazione $\in$) $\mathfrak{a}_0$ è isomorfo al segmento iniziale S (aperto di estremo (α_0,β_0)) dell'insieme bene ordinato $\mathfrak{a}_0^2$. Ora consideriamo il massimo δ_0 fra α_0 e β_0; evidentemente deve aversi

$$B \subset (\delta \cup \{\delta\})^2$$

(notare che $\delta + 1 = \delta \cup \{\delta\}$). Ma α_0 è infinito e quindi anche B e δ_0 lo sono e si ha

$$\mathrm{Card}(\delta_0 + 1) = \mathrm{Card}(\delta_0) < \mathfrak{a}_0$$

Allora, per minimalità di $\mathfrak{a}_0$ in C, abbiamo

$$\mathfrak{a}_0 = \mathrm{Card}(B) \leq \mathrm{Card}((\delta_0+1)^2) \leq \mathrm{Card}(\delta_0 + 1) \leq \mathfrak{a}_0$$

che è assurdo. Quindi l'insieme C è vuoto e il teorema è dimostrato.

QED

1.3.17 Corollario *Siano A e B insiemi, con A infinito.*

(1) *Se $B \neq \emptyset$ allora* $\mathrm{Card}(A \times B) = max(\mathrm{Card}(A), \mathrm{Card}(B))$.

(2) $\mathrm{Card}(A \cup B) = max(\mathrm{Card}(A), \mathrm{Card}(B))$.

(3) *Se $n \in \mathbb{N}$ oppure se $n = \mathbb{N}$ allora* $\mathrm{Card}(A^n) = \mathrm{Card}(A)$.

Si può dimostrare che il teorema precedente non solo è conseguenza, ma equivale al teorema del buon ordinamento. Concludiamo riportando alcuni fondamentali risultati dovuti a Cantor.

Ricordiamo che possiamo identificare i numeri razionali con le frazioni $\frac{n}{m}$ (con $n, m \neq 0$ interi) e quindi delle coppie $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$ modulo la relazione di equivalenza $(n,m) \equiv (n',m') \iff \exists a \in \mathbb{Z}\ an = n', am = m'$. Usando il teorema precedente abbiamo che $\mathbb{Q}$ è numerabile.

1.3.18 Definizione *Una* successione *in un insieme A è una funzione $s : \mathbb{N} \longrightarrow A$; si denota pure $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e si scrive quindi $s(n) = s_n$.*

1.3.19 Teorema (CANTOR) *L'insieme $\mathbb{R}$ non è numerabile.*

DIMOSTRAZIONE: Basta dimostrare la non numerabilità dell'intervallo $I = (0, 1)$ che è infatti biunivoco con $\mathbb{R}$. Supponiamo per assurdo che I sia numerabile: allora deve esistere una successione $\{r_n\} = I$. Un elemento di $r_n \in I$ è un numero reale positivo minore di 1, che ha dunque uno sviluppo decimale della forma

$$r_n = c_{n1}10^{-1} + c_{n2}10^{-2} + c_{n3}10^{-3} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}10^{-k}$$

(le c_{nk} sono le cifre dello sviluppo decimale di r_n). La successione $\{r_n\}$ dà quindi luogo ad una "tabella infinita"

$$\begin{array}{ccc} r_0 & \longleftrightarrow & r_{01}\ r_{02}\ r_{03}... \\ r_1 & \longleftrightarrow & r_{11}\ r_{12}\ r_{13}... \\ r_2 & \longleftrightarrow & r_{21}\ r_{22}\ r_{23}... \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Ora, combinando arbitrariamente una successione di cifre a_1, a_2, a_3,... possiamo costruire il numero reale $r \in I$ il cui sviluppo è $\sum_{k \in \mathbb{N}^+} a_k 10^{-k}$ e questo deve figurare da qualche parte nella successione (r_n), deve cioè esistere un n_0 (dipendente da (a_m)) tale che $r = r_{n_0}$.

Come successione (a_m) prendiamo quella il cui elemento m-mo a_m è zero se il termine r_{mm} della tabella precedente è diverso da zero, e 1 se il termine r_{mm} della tabella precedente è uguale a zero. L'elemento r non potrà mai figurare nella tabella, cioè la successione (a_m) non corrisponde a nessuna (r_{nk}); infatti se fosse $a_m = r_{n_0 m}$ per un certo numero naturale n_0 allora, se $a_{n_0} = 0$ avremmo $r_{n_0 n_0} \neq 0$ e quindi $a_{n_0} \neq 0$ e se $a_{n_0} \neq 0$ avremmo $r_{n_0 n_0} = 0$ e quindi $a_{n_0} = 0$. In ogni caso un assurdo, e quindi la successione (r_n) non può esistere.

QED

1.3.20 Teorema (CANTOR) $\mathrm{Card}(\mathbb{R}) = 2^{\mathbb{N}}$.

Il significato di $2^{\mathbb{N}}$ è evidente: 2 è l'insieme con due elementi $2 = \{0, 1\}$. Allora se A è un insieme e B è un altro insieme, poniamo per definizione

$$\mathrm{Card}(A)^{\mathrm{Card}(B)} = \mathrm{Card}(A^B)$$

In questo modo definiamo l'esponenziale per i numeri cardinali. Se A è finito e B è numerabile allora $\mathrm{Card}(A^B) = 2^{\mathbb{N}}$. Il teorema di Cantor afferma che la cardinalità dei numeri reali (che si dice *cardinalità del continuo*) è proprio questa.

Per dimostrarlo si tenga presente il fatto che 2^A è semplicemente l'insieme delle funzioni da A in $\{0,1\}$ cioè un insieme di cifre binarie indicizzato da A; ogni numero reale ammette sviluppi in base due (abbiamo usato prima quelli in base dieci) ove, ad esempio, i numeri 0,111111... e 1 sono esattamente lo stesso (in base due... in base dieci l'esempio è 0,999999... = 1).

1.4 Categorie e funtori

Sarà utile, nel seguito, il linguaggio astratto delle categorie.

1.4.1 Definizione *Una* categoria $\mathcal{C}$ *è determinata da una classe* $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ *i cui elementi si dicono* oggetti *della categoria e da due funzioni:*

(1) *Una funzione che ad ogni coppia di oggetti* X,Y *associ un insieme* $\hom(X,Y)$ *i cui elementi si diranno* morfismi.

(2) *Una funzione che, per ogni tripla di oggetti* X,Y,Z *associ una funzione*

$$\hom(Y,Z)\times\hom(Y,X)\longrightarrow\hom(X,Z)$$

(denotata con $(f,g)\longmapsto g\circ f$ *e che si dirà* composizione *dei morfismi* f *e* g*), tale che valgano i seguenti assiomi:*

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$$
$$1_Y\circ f=f \ \ e\ g\circ 1_Y=g$$

Il morfismo 1_Y si dice *identità* e la classe dei morfismi $\{\hom(X,Y)\}_{X,Y\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}$ si denota con $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$. Vediamo alcuni esempi importanti di categorie.

La categoria $\mathbb{S}$: i suoi oggetti sono tutti gli insiemi e, se X,Y sono insiemi un morfismo è una qualsiasi funzione $f:X\longrightarrow Y$. La composizione è esattamente la composizione di funzioni e le identità sono esattamente le funzioni identità di ciascun insieme. Ovviamente gli oggetti di $\mathbb{S}$ ed i suoi morfismo sono classi che non sono insiemi.

La categoria $\mathbb{G}$ dei gruppi: i suoi oggetti sono tutti i gruppi (si noti che una classe C non può essere un gruppo, perché per definire l'operazione bisogna considerare una funzione $C\times C\longrightarrow C$) ed i suoi morfismi gli omomorfismi fra i gruppi. Si tratta di una sottocategoria di $\mathbb{S}$ nel senso della seguente

1.4.2 Definizione *Se* $\mathcal{C}$ *è una categoria, una sua* sottocategoria *è una categoria* $\mathcal{D}$ *tale che* $\mathrm{Ob}\,\mathcal{D}\subset\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. *Una sottocategoria* $\mathcal{D}$ *di una categoria* $\mathcal{C}$ *si dice* piena *se per ogni* $X,Y\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{D}\subset\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ *si ha che* $\hom_{\mathcal{D}}(X,Y)=\hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ *ove* $\hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ *denota i morfismi fra* X *e* Y *nella categoria* $\mathcal{C}$.

1.4.3 Esempio *La categoria* $\mathbb{AB}$ *dei gruppi abeliani (i suoi oggetti sono gruppi abeliani e i morfismi gli omomorfismi) è una sottocategoria piena della categoria* $\mathbb{G}$ *dei gruppi.*

In generale, tutte le categorie che avremo modo di considerare sono sottocategorie di $\mathbb{S}$: ogni qual volta si definisce una struttura su un insieme ed una classe di applicazioni che preserva tale struttura, si può considerare la categoria associata: gli anelli, gli spazi vettoriali, i campi,... sono tutti esempi di categorie.

Non ogni esempio di categoria sorge in questo modo: se K è un anello commutativo, possiamo considerare la categoria $\mathbb{M}_K$ i cui oggetti sono gli interi positivi e i cui morfismi $\hom(m,n)$ sono le matrici $M_{n,m}(K)$ $m \times n$ a coefficienti in K. La composizione di morfismi sarà il prodotto di matrici.

Non bisogna cioè pensare che i morfismi di una categoria siano necessariamente applicazioni fra insiemi.

1.4.4 Esempio *Se* P *è un insieme parzialmente ordinato dalla relazione* $\leq$ *allora individua una categoria* $\mathcal{P}$ *i cui oggetti sono gli elementi di* P *(i.e.* $\mathrm{Ob}\,\mathcal{P} = P$*) ed i morfismi sono così definiti:*

$$\hom(p,q) = \begin{cases} \{i_{pq}\} & \textit{se } p \leq q \\ \emptyset & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Cioè esiste un solo morfismo fra p *e* q *(che è un simbolo univocamente determinato da* p *e* q*) se* $p \leq q$*; altrimenti non esiste nessun morfismo (si noti che le identità sono i simboli* i_{pp}*).*

In generale, dato un qualsiasi grafo composto da vertici e frecce orientate, questo definisce una categoria, i cui oggetti sono i vertici ed i cui morfismi le frecce.

1.4.5 Esempio *Un gruppo* G *induce una categoria* $\mathbb{C}(G)$ *con:* $\mathrm{Ob}\,\mathbb{C}(G) = \{e\}$ *(identità del gruppo) e* $\hom(e,e) = G$*; la composizione è il prodotto del gruppo.*

In questo esempio abbiamo una proprietà particolare: per ogni morfismo f esiste un *inverso* i.e. un morfismo g tale che $f \circ g = 1$ e $g \circ f = 1$. è un esercizio verificare che ogni categoria i cui morfismi siano tutti invertibili è della forma $\mathbb{C}(G)$ per un opportuno gruppo G.

Evidentemente fra due categorie $\mathbb{C}(G)$ e $\mathbb{C}(H)$ esistono delle applicazioni che è naturale considerare, e che sono indotte dagli omomorfismi del gruppo G nel gruppo H. Si tratta di un caso particolare della nozione seguente.

1.4.6 Definizione *Se* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{D}$ *sono categorie, un* funtore $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *è determinato da*

(1) *Una funzione* $\mathcal{F} : \operatorname{Ob}\mathcal{C} \longrightarrow \operatorname{Ob}\mathcal{D}$.

(2) *Una funzione* $\mathcal{F} : \operatorname{Mor}\mathcal{C} \longrightarrow \operatorname{Mor}\mathcal{D}$.

in modo che

$$\forall X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C} \quad \mathcal{F}(1_X) = 1_{\mathcal{F}(X)}$$

$$\forall f \in \hom(Y,Z)\forall g \in \hom(X,Y) \quad \mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$$

Quindi un funtore è un “morfismo” fra categorie, nel senso che preserva la struttura categorica. In particolare, se un funtore $\mathcal{F}$ è tale che le applicazioni $\mathcal{F} : \operatorname{Ob}\mathcal{C} \longrightarrow \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ e $\mathcal{F} : \operatorname{Mor}\mathcal{C} \longrightarrow \operatorname{Mor}\mathcal{D}$ sono biunivoche si dice una *equivalenza* fra le categorie $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$: questo significa che, anche se realizzate con insiemi diversi, dal punto di vista categorico $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ vanno considerate come indistinguibili. Ovviamente se $\mathcal{C}$ è una categoria esiste sempre il funtore identico $1 : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ e due funtori si possono comporre.

1.4.7 Definizione *Una categoria è* piccola *se la classe dei suoi oggetti è un insieme.*

Osserviamo che, in virtù degli assiomi che abbiamo dato per le classi, una funzione $f : S \longrightarrow C$ ove S sia un insieme e C una classe è un insieme: infatti il suo grafico $\{(s, f(s))\}_{s\in S}$ è l'immagine della funzione $s \longmapsto (s, f(s))$ e quindi, per l'assioma 8 del §1, è un insieme. Se ora $\mathcal{C}$ è una categoria piccola, la classe $\operatorname{Ob}\mathcal{C} \times \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ è un insieme e quindi lo è l'insieme dei morfismi $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$.

In altri termini, esiste la categoria delle categorie piccole: i suoi oggetti sono tutte le categorie ed i cui morfismi sono i funtori.

Per le categorie costruite a partire da insiemi esiste sempre il funtore “distratto”: ad esempio se $\mathbb{G}$ è la categoria dei gruppi, il suo funtore distratto è $\mathcal{F} : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{S}$ (nella categoria degli insiemi) che assegna ad un oggetto $G \in \operatorname{Ob}\mathbb{G}$ se stesso (in quanto insieme) e ad ogni morfismo $f \in \operatorname{Mor}\mathbb{G}$ se stesso in quanto funzione: questo funtore dimentica quindi la struttura gruppale.

In molti casi il concetto di funtore non soddisfa pienamente le proprietà che si vorrebbero: ad esempio se $\mathbb{V}$ è la categoria degli spazi vettoriali, esiste una applicazione $^* : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ che ad ogni spazio vettoriale associa il suo duale: non si tratta però di un funtore, perché

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$$

Cioè * “inverte il senso delle frecce”. Si tratta di un nuovo tipo di funtore:

1.4.8 Definizione *Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono categorie, un* funtore controvariante $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *è determinato da*

(1) *Una funzione* $\mathcal{F} : \operatorname{Ob}\mathcal{C} \longrightarrow \operatorname{Ob}\mathcal{D}$.

(2) *Una funzione* $\mathcal{F} : \operatorname{Mor}\mathcal{C} \longrightarrow \operatorname{Mor}\mathcal{D}$.

in modo che

$$\forall X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C} \quad \mathcal{F}(1_X) = 1_{\mathcal{F}(X)}$$

$$\forall f \in \hom(Y, Z)\ \forall g \in \hom(X, Y) \quad \mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$$

Spesso anziché scrivere identità fra morfismi si scrivono diagrammi e si dichiara che sono *commutativi*, cioè che le applicazioni ottenute componendo frecce che inizino e finiscano sugli stessi vertici sono uguali. Ad esempio anziché scrivere $f \circ g = h \circ i$ si dice che il diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "h"] & W \end{tikzcd}$$

è commutativo. Quindi, se $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ è un funtore controvariante, la seconda proprietà che lo definisce equivale alla commutatività del diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(Z) \arrow[r, "\mathcal{F}(f)"] \arrow[dr, "\mathcal{F}(f\circ g)"'] & \mathcal{F}(Y) \arrow[d, "\mathcal{F}(g)"] \\ & \mathcal{F}(X) \end{tikzcd}$$

Così il funtore $^* : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ è controvariante (i funtori propriamente detti si dicono anche *covarianti*). In generale il funtore che a un oggetto $V \in \mathbb{V}$ associa lo spazio $\hom(V, W)$ (ove $W \in \operatorname{Ob}\mathbb{V}$) è controvariante da $\mathbb{V}$ in $\mathbb{V}$. Osserviamo che questa asserzione è imprecisa: per meglio formalizzarla introduciamo la

1.4.9 Definizione *Se $\mathcal{C}$ è una categoria, la sua* categoria opposta $\mathcal{C}^{op}$ *è la categoria così determinata:* $\operatorname{Ob}\mathcal{C}^{op} = \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ *e ogni* $X \xrightarrow{f} Y \in \operatorname{Mor}\mathcal{C}$ *determina univocamente un* $Y \xrightarrow{f^{op}} X \in \operatorname{Mor}(\mathcal{C}^{op})$*, in modo che*

$$(f \circ g)^{op} = g^{op} \circ f^{op}$$

Quindi fra una categoria e la sua opposta esiste un funtore controvariante $^{op} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{op}$. è ovvio che questo funtore è una equivalenza di categorie e che il suo funtore inverso è $^{op} : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow (\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$. Questa dualità è simile alla dualità degli spazi vettoriali di dimensione finita.

1.4.10 Esempio *Esiste fra la categoria degli insiemi* $\mathbb{S}$ *e la sua opposta* $\mathbb{S}^{op}$ *il funtore controvariante* $\mathcal{P} : \mathbb{S}^{op} \longrightarrow \mathbb{S}$ *dato dall'insieme potenza: fissato un insieme* X *il funtore* $Y \longmapsto X^Y$ *è controvariante.*

Analizziamo meglio l'esempio (che ha dato origine alla teoria) della dualità per gli spazi vettoriali: sappiamo che il funtore $^* : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}^{op}$ è controvariante come pure lo è $^* : \mathbb{V}^{op} \longrightarrow \mathbb{V}$. Il fatto che abbia l'isomorfismo canonico i fra uno spazio vettoriale V ed il suo biduale V^{**} è di natura puramente categorica: se $f : V \longrightarrow W$ è un morfismo di spazi vettoriali (i.e. un'applicazione lineare) allora il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & (V^*)^* \arrow[d, "(f^*)^*"] \\ W \arrow[r, "i"] & (W^*)^* \end{tikzcd}$$

Quindi la mappa i in un certo senso trasforma il funtore identità nel funtore **.

1.4.11 Definizione *Se* $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *sono funtori, una* trasformazione naturale $\mathfrak{t} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ *è una funzione che ad ogni oggetto* $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ *associa un morfismo* $\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\mathfrak{t}_X} \mathcal{G}(X) \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{D}$ *in modo che per ogni morfismo* $X \xrightarrow{f} Y \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ *il seguente diagramma sia commutativo:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(X) \arrow[r, "\mathfrak{t}_X"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{G}(X) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(Y) \arrow[r, "\mathfrak{t}_Y"] & \mathcal{G}(Y) \end{tikzcd}$$

Quindi una trasformazione naturale è in un certo senso un morfismo fra funtori: precisamente, se $\mathcal{C}$ è una categoria piccola e $\mathcal{D}$ una categoria qualsiasi, per l'assioma 8 del §1 una funzione $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ è un insieme: quindi i funtori $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ sono insiemi. Possiamo cioè considerare l'insieme $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ dei funtori $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$; ora dimostriamo che la classe delle trasformazioni naturali $\mathfrak{t} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ del funtore $\mathcal{F} \in \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ nel funtore $\mathcal{G} \in \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, è, some applicazione, è un insieme. Evidentemente, dato che $\mathcal{C}$ è piccola e $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sono insiemi, la classe $\mathcal{M} = \bigcup_{X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} \hom(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))$ è un insieme (assioma 6 del §1) ed una trasformazione naturale è una funzione $\mathfrak{t} : \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}$ ed il suo grafico è una sottoclasse del prodotto $\mathcal{C} \times \mathcal{M}$ che è un insieme. Ma l'insieme $\mathfrak{P}(\mathcal{C} \times \mathcal{M})$ potenza di un insieme è un insieme (assioma 7 del §1) e quindi la classe delle trasformazioni naturali da $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}$ è una sottoclasse di un insieme, cioè (assioma 5 del §1) è un insieme essa stessa.

Fatte tutte queste verifiche, che sono ovvie ma che abbiamo voluto esplicitare per mostrare l'importanza dell'assiomatica insiemistica, possiamo considerare l'insieme dei funtori $\operatorname{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ e definire una categoria che ha come insieme degli oggetti proprio $\operatorname{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, e come classe di morfismi le trasformazioni naturali fra elementi di $\operatorname{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. Questa categoria è la *categoria dei funtori*.

Una trasformazione naturale $\mathfrak{t} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ si dice *equivalenza naturale* se per ogni $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ il morfismo $\mathfrak{t}_X$ è invertibile in $\operatorname{Mor}\mathcal{D}$.

Quindi la teoria della dualità degli spazi vettoriali di dimensione finita si riassume nella frase: esiste una equivalenza naturale fra il funtore identità e il funtore ** effettuata dalla funzione $\mathfrak{i}_V : x \in V \longmapsto (\varphi \longmapsto \varphi(x)) \in V^{**}$ tale che, per ogni morfismo $f : V \longrightarrow W$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathfrak{i}_V"] \arrow[d, "f"'] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ W \arrow[r, "\mathfrak{i}_W"'] & W^{**} \end{tikzcd}$$

Per concludere questa rapida rassegna sul concetto di categoria, introduciamo i concetti forse più importanti della teoria.

1.4.12 Definizione *Se $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{S}$ è un funtore da una categoria nella categoria degli insiemi, una* rappresentazione *di $\mathcal{F}$ è determinata da un oggetto $R \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ e da una famiglia di trasformazioni naturali*

$$\{\varphi_X : \hom_{\mathcal{C}}(R, X) \longleftrightarrow \mathcal{F}(X)\}_{X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}}$$

In altri termini, una rappresentazione di $\mathcal{F}$ è una equivalenza naturale $\mathfrak{f} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H}_R$ ove $\mathcal{H}_R : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{S}$ è il funtore (covariante)

$$\mathcal{H}_r(X) = \hom_{\mathcal{C}}(R, X)$$

Osserviamo che una rappresentazione $\mathfrak{t}$ del funtore $\mathcal{F}$ determina un elemento $S \in \mathcal{F}(R)$ tale che per ogni $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ e per ogni $T \in \mathcal{F}(Y)$ esiste un unico morfismo $f : R \longrightarrow X$ tale che $\mathcal{F}(f)S = T$. L'oggetto S si dice allora *universale* per la rappresentazione del funtore.

Moltissimi oggetti dell'algebra astratta sono determinati da proprietà universali: ad esempio il prodotto tensoriale, i gruppi liberi, l'insieme quoziente modulo una relazione, &c.

1.4.13 Lemma (YONEDA) *Se $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{S}$ è un funtore covariante, e se $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ allora esiste una biiezione canonica fra la classe delle trasformazioni naturali di $\mathcal{H}_X \longrightarrow \mathcal{H}_Y$ e $\hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$.*

DIMOSTRAZIONE: Ogni $g \in \hom(X, Y)$ induce una trasformazione naturale di funtori $\mathfrak{t}_g(f) = f \circ g$. Ovviamente $g = \mathfrak{t}_g(1_X)$. Viceversa, una trasformazione naturale $\mathfrak{t} : \mathcal{H}_X \longrightarrow \mathcal{H}_Y$ dà luogo, per ogni $X \xrightarrow{f} Z \in \operatorname{Mor} \mathcal{C}$ al diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_X(X) \arrow[r, "\mathfrak{t}_X"] \arrow[d, "\mathcal{H}_X(f)"'] & \mathcal{H}_Y(X) \arrow[d, "\mathcal{H}_Y(f)"] \\
\mathcal{H}_X(Z) \arrow[r, "\mathfrak{t}_Z"'] & \mathcal{H}_Y(Z)
\end{tikzcd}$$

Allora definiamo un morfismo in $g \in \hom(X, Y)$ ponendo $g = \mathfrak{t}_X(1_X)$: che si tratti di un morfismo segue dal diagramma: $f = f \circ 1_X = \mathcal{H}_X(f)(1_X)$ e $\mathfrak{t}_Z(f) = \mathcal{H}_Y(f)(\mathfrak{t}_X(1_X)) = f \circ g$.

QED

Il seguente risultato è un modo diverso di esprimere il lemma di Yoneda:

1.4.14 Teorema *La categoria $\mathcal{C}^{op}$ opposta a $\mathcal{C}$ è equivalente alla categoria dei funtori rappresentabili, che è una sottocategoria piena della categoria dei funtori.*

Capitolo 2

TOPOLOGIE

Ogni spazio che si considera in gran parte della matematica e delle sue applicazioni è uno spazio topologico di qualche tipo: qui introduciamo in generale le nozioni di base della topologia, facendo perno sugli esempi che il lettore certamente già conosce (spazi euclidei, spazi di funzioni, superficie). In particolare l'esempio guida sarà la retta reale: discuteremo anche il concetto di omotopia, nelle sue linee fondamentali.

2.1 Spazi topologici

2.1.1 Definizione *Una coppia* $(X, \mathcal{T})$ *si dice* spazio topologico *se* X *è un insieme e* $\mathcal{T}$ *è una famiglia di suoi sottoinsiemi (detta* topologia *su* X*) tale che*

(1) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.

(2) $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_\alpha X_\alpha \in \mathcal{T}$.

(3) $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$.

Gli elementi di una topologia si dicono *aperti* ed i loro complementari in X *chiusi*. Se $Y \subset X$, la *chiusura* $\overline{Y}$ di Y è l'intersezione di tutti i chiusi che contengono Y, e l'*interno* $\overset{o}{Y}$ di Y è l'unione di tutti gli aperti contenuti in Y. Ovviamente Y è chiuso (risp. aperto) se e solo se $Y = \overline{Y}$ (risp. $Y = \overset{o}{Y}$).

I chiusi di uno spazio topologico soddisfano le seguenti proprietà, dedotte dagli assiomi di topologia passando ai complementari, che ovviamente caratterizzano una topologia:

(1) $X, \emptyset$ sono chiusi.

(2) Se $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ sono chiusi allora $\bigcap_\alpha X_\alpha$ è chiuso.

(3) Se A, B sono chiusi allora $A \cup B$ è chiuso.

Gli esempi fondamentali sono ovviamente gli spazi cartesiani $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ della geometria elementare, dotati delle topologie naturali, cioè quelle per le quali un aperto è un sottoinsieme A che, con ogni suo punto x, contiene una palla aperta $\{y \mid |x-y| < \varepsilon\}$ di raggio $\varepsilon > 0$.

Se $(X, \mathcal{T})$ è uno spazio topologico ogni suo sottoinsieme è uno spazio topologico con la *topologia relativa* $\mathcal{T}_A$ definita come segue:

$$U \in \mathcal{T}_A \iff \exists V \in \mathcal{T} \quad U = A \cap V$$

Gli assiomi sono così generali che ogni insieme può considerarsi in svariati modi uno spazio topologico: anche l'insieme vuoto. Infatti se X è un insieme qualsiasi, la collezione $\mathcal{P}(X)$ di tutte le sue parti è una topologia, che si dice *topologia discreta*, come pure lo è la collezione $\{\emptyset, X\}$, che si dice topologia *banale*. Nella topologia discreta ogni sottoinsieme è aperto: ad esempio ogni punto. Inoltre ogni sottoinsieme è anche chiuso.

2.1.2 Definizione *Sia X uno spazio topologico.*

(1) *Un insieme $Y \subset X$ è* denso *se $\overline{Y} = X$.*

(2) *La* frontiera *di un insieme $Y \subset X$ è l'insieme $\partial Y = \overline{Y} \setminus \overset{o}{Y}$.*

(3) *Un insieme $Y \subset X$ è* raro *se $\overset{o}{\overline{Y}} = \emptyset$.*

Un insieme Y è raro se e solo se il complementare della sua chiusura è denso, se e solo se $\overline{Y} = \partial\overline{Y}$. L'esempio più familiare di insieme denso è il sottoinsieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali nei numeri reali $\mathbb{R}$.

L'insieme delle topologie su un insieme X è ordinato dalla relazione di inclusione fra famiglie di sottoinsiemi di X, e se $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ si dice che $\mathcal{T}$ è *meno fine* o *più debole* di $\mathcal{T}'$. L'insieme delle topologie su uno spazio X forma manifestamente un reticolo; gli elementi 0 e 1 di questo reticolo sono la topologia *banale* formata dal solo elemento $\emptyset$ e la topologia *discreta* che coincide con l'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ di X.

Una famiglia di sottoinsiemi di uno spazio X genera una topologia, che è la più piccola topologia su X contenente gli elementi della famiglia, ed è la più debole delle topologie che ammettono gli insiemi appartenenti agli elementi della famiglia come aperti.

2.1.3 Definizione *Se X è uno spazio topologico per la topologia $\mathcal{T}$, un sottoinsieme $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ è una* base *se ogni aperto in $\mathcal{T}$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$, mentre si dice una* sottobase *se le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{B}$ sono una base.*

2.1.4 Esempio *Una base per la topologia di* $\mathbb{R}^n$ *è data dalle palle aperte* $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x-y| < r\}$ *di raggio* r *e centro* x. *Infatti un aperto* A *di* $\mathbb{R}^n$, *per definizione, possiede con ogni suo punto* x *una palla* $B_{r_x}(x)$ *di centro quel punto completamente contenuta in* A*: allora*

$$A = \bigcup_{x \in A} B_{r_x}(x)$$

e quindi A *è unione di palle aperte. In* $\mathbb{R}$ *una palla aperta è semplicemente un intervallo* $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$*; gli intervalli della forma* (x, ∞) *e* $(-\infty, x)$ *formano una sottobase.*

2.1.5 Definizione *Una topologia* $\mathcal{T}$ *su un insieme* X *si dice* a base numerabile *se esiste una base numerabile di aperti.*

2.1.6 Esempio $\mathbb{R}^n$ *ha base numerabile: possiamo infatti scegliere le palle aperte* $B_r(x)$ *in cui* $r \in \mathbb{Q}$ *e* $x \in \mathbb{Q}^n$ *per densità dei razionali nei reali.*

Se $Y \subset X$ è un sottoinsieme di uno spazio topologico con topologia $\mathcal{T}$, allora è a sua volta uno spazio topologico rispetto alla *topologia indotta* da $\mathcal{T}$ su Y, i cui aperti sono intersezioni di aperti di X con Y.

2.1.7 Definizione *Un* intorno *di un punto* x *in uno spazio topologico* X *è un aperto di* X *contenente* x. *Una* base di intorni *di* $x \in X$ *è una famiglia di intorni di* x *tale che ogni intorno di* x *contenga un intorno di questa famiglia.*

2.1.8 Definizione *Uno spazio topologico* X *si dice*

(1) T_1 *se per ogni coppia* $x, y \in X$ *esiste un aperto contenente* x *ma non* y.

(2) T_2 *(o* di Hausdorff*) se per ogni coppia* $x, y \in X$ *esistono un aperto contenente* x *ma non* y *e un aperto contenente* y *ma non* x *disgiunti.*

(3) regolare *(*T_3 *se è anche* T_1*) se per ogni chiuso* F *di* X *ed ogni punto* $x \in X \setminus F$ *esistono un aperto contenente* x *ma non* F *ed un aperto contenente* F *ma non* x *disgiunti.*

(4) normale *(*T_4 *se è anche* T_1*) se per ogni coppia di chiusi* F_1, F_2 *disgiunti di* X *esistono un aperto contenente* F_1 *ma non* F_2 *ed un aperto contenente* F_2 *ma non* F_1 *disgiunti.*

Con degli esempi potrebbe mostrarsi che queste classi di spazi sono contenute propriamente le une dentro le altre nel seguente modo: $T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_1$: per una discussione più approfondita rimandiamo ai testi specialistici (dove si definiscono anche altre classi di spazi, come i T_0 e $\mathrm{T}_{\frac{3}{2}}$); qui ci limitiamo a segnalare alcuni semplici controesempi.

2.1.9 Esempio *Uno spazio T_1 ma non T_2 è ad esempio il seguente: consideriamo nello spazio $\mathbb{R}^n$ gli insiemi della forma*

$$V(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$$

(ove $f \in \mathbb{R}[x]$ è un polinomio). È un semplice esercizio verificare che generano una topologia come insiemi chiusi: gli aperti sono effettivamente i complementari delle curve algebriche piane[1]*; è facile constatare che in questa topologia ogni aperto è denso, quindi non può essere di Hausdorff. Tuttavia i punti sono insiemi chiusi, della forma $V(x - c_0)$ con c_0 costante, quindi la topologia è T_1 in virtù della semplice*

2.1.10 Proposizione *Uno spazio topologico X è T_1 se e solo se per ogni suo punto x l'insieme $\{x\}$ è chiuso.*

DIMOSTRAZIONE: Se $x \in X$ preso un altro punto $y \in X$ gli insiemi $U_x := \complement\{x\} = X \setminus \{x\}$ contenente x e $U_y := \complement\{y\} = X \setminus \{y\}$ contenente y sono aperti e $x \notin U_x$ e $y \notin U_y$. Viceversa, se lo spazio è T_1 e $X \in X$ non fosse chiuso allora $\overline{\{x\}}$ conterrebbe almeno un altro punto y. Ma allora dovrebbero esistere due intorni $x \in U_x$ e $y \in U_y$ con $x \notin U_y$ e $y \notin U_x$, il che è assurdo.

QED

2.1.11 Esempio *Uno spazio T_2 non T_3 è dato dall'intervallo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ con la topologia una cui base di intorni, in ogni punto che non sia lo zero, è quella della topologia naturale (indotta da $\mathbb{R}$), mentre come intorni dello zero prendiamo gli insiemi $[0, r) \setminus \{1/n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cioè gli intervalli destri privati di una successione numerabile tendente a zero. Ovviamente lo spazio è di Hausdorff, ma non è possibile separare un punto ed un insieme chiuso con due suoi aperti disgiunti.*

La classe degli spazi di Hausdorff è, come si vede, sensibilmente più vasta di quella degli spazi regolari o, peggio ancora, normali.

2.1.12 Definizione *Una* successione generalizzata *o* rete *in uno spazio topologico X è una famiglia $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di elementi di X indicizzata da un insieme parzialmente ordinato e diretto A.*

Evidentemente, se A è numerabile otteniamo il classico concetto di successione considerato in Analisi. Se lo spazio ha base numerabile in quel che segue ci si può limitare a queste successioni senza considerare quelle generalizzate.

[1] Si tratta della *topologia di Zariski*.

2.1.13 Definizione *Una successione generalizzata* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *si dice* convergente *ad un elemento* $x \in X$ *se per ogni intorno* $U \ni x$ *esiste un elemento* $\alpha_x \in A$ *tale che per ogni* $\alpha > \alpha_x$ $x_\alpha \in U$*, e si scrive*

$$\lim_{\alpha\in A} x_\alpha = x$$

L'elemento x *si dice* limite *della successione.*

In uno spazio di Hausdorff, il limite di una successione generalizzata, se esiste, è unico, il che si vede esattamente come nel caso delle successioni: se una successione generalizzata converge a due punti limite, questi non potranno in alcun modo essere separati con intorni disgiunti (due tali intorni conterranno sempre ambedue i punti), e viceversa.

Ora vogliamo caratterizzare la topologia di uno spazio in termini di convergenza di successioni generalizzate. Se x è limite della successione $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ allora

$$x \in \overline{\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}}$$

Se Y è un sottoinsieme di X e $x \in \overline{Y}$, allora per ogni intorno U di x esiste un elemento $x_U \in U \cap Y$; l'insieme $\mathcal{U}_x$ degli intorni di x munito della relazione di ordine parziale

$$U < U' \iff U \supset U'$$

è diretto e

$$x = \lim_{U\in\mathcal{U}_x} x_U$$

Ogni punto di $\overline{Y}$ è limite di una successione generalizzata di elementi di Y: così abbiamo una caratterizzazione dei chiusi (e quindi della topologia su X) in termini di convergenza generalizzata.

2.1.14 Definizione *Un* punto limite *per una successione* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *è un* $x \in X$ *tale che per ogni intorno* $U \ni x$ *e per ogni* $\alpha \in A$ *esiste un* $\alpha_U > \alpha$ *in* A *tale che* $x_{\alpha_U} \in U$*.*

In altri termini, se

$$E_\alpha := \overline{\{x_{\alpha'}\}_{\alpha'>\alpha}}$$

allora l'insieme dei punti limite è $\bigcap_\alpha E_\alpha$: si tratta ovviamente di un chiuso.

2.1.15 Definizione *Una* sottosuccessione *di una successione generalizzata* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *è una famiglia* $\{x_\beta\}_{\beta\in B}$ *di elementi di* X *tale che l'insieme* B *sia parzialmente ordinato e diretto, ed esista una funzione* $i : B \longrightarrow A$ *tale che*

$$\forall\alpha \in A\ \exists\beta_\alpha \in B\ \forall\beta \in B \quad \beta > \beta_\alpha \Rightarrow i(\beta) > \alpha$$

Come nel caso della retta reale, le sottosuccessioni giocano un ruolo importante nella topologia generale:

2.1.16 Proposizione *Se $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è una successione generalizzata e se l'insieme $E := \bigcap_\alpha E_\alpha$ è non vuoto allora esiste una sottosuccessione generalizzata che converge ad ogni elemento di E. In altri termini l'insieme dei punti limite è non vuoto se e solo se esistono sottosuccessioni convergenti.*

Dimostrazione: Se x è un punto limite della successione generalizzata $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ in X e $\mathcal{U}_x$ una base di intorni di x, tali che

$$\forall U \in \mathcal{U}_x\ \forall \alpha \in A \quad U \cap E_\alpha \neq \emptyset$$

allora (gli elementi di $\mathcal{U}_x$ sono aperti): $U \cap \{x_{\alpha'}\}_{\alpha'>\alpha} \neq \emptyset$ e quindi per ogni $\alpha \in A$ esiste $\alpha' > \alpha$ tale che $x_{\alpha'} \in U$.

La relazione

$$(\alpha, U) > (\alpha', U') \iff \alpha > \alpha' \text{ e } U \subset U'$$

rende l'insieme $A \times \mathcal{U}_x$ parzialmente ordinato e diretto (dato che $\mathcal{U}_x$ è un sistema fondamentale di intorni); per ogni $\beta = (\alpha, U) \in A \times \mathcal{U}_x$ sia $i(\beta) \in A$ tale che $i(\beta) > \alpha$ e $x_{i(\beta)} \in U$ (l'esistenza di questo elemento $i(\beta)$ è garantita dall'assioma di scelta). Allora, dato che B è parzialmente ordinato e diretto, $\{x_{i(\beta)}\}_{\beta\in B}$ è una sottosuccessione della $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$, tale che

$$x = \lim_\beta x_{i(\beta)}$$

i.e. convergente a x.

QED

Quindi una successione generalizzata in uno spazio topologico ammette sottosuccessioni convergenti se e solo se l'insieme dei suoi punti limite non è vuoto.

Ovviamente se la cardinalità dell'insieme dei punti limite è uno, di certo la successione converge all'unico elemento di questo insieme.

Si noti che, se nessun punto di X ammette una base numerabile di intorni, può succedere che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia densa in X ma che nessuna sottosuccessione (numerabile) sia convergente.

2.1.17 Definizione *Una successione* universale *è una successione generalizzata $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ tale che per ogni $S \subset X$, la successione $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ appartiene definitivamente all'insieme S ovvero all'insieme $X \setminus S$.*

Osserviamo che se $\{x_\alpha\}$ è una successione universale allora $\bigcap E_\alpha = \emptyset$ oppure (se lo spazio è di Hausdorff) $\bigcap E_\alpha = \{x\}$.

2.1.18 Definizione *Una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ di un insieme X possiede la* proprietà dell'intersezione finita *se per ogni sottofamiglia $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ finita:*

$$\bigcap \mathcal{F}' \neq \emptyset$$

Questa definizione è duale a quella di *ricoprimento finito*: una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{U}$ ricopre uno spazio topologico se $X = \bigcup \mathcal{U}$; se ogni sottofamiglia finita $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ ricopre X allora la famiglia formata dai complementari di $\mathcal{U}$ possiede la proprietà dell'intersezione finita e viceversa.

2.1.19 Teorema *Se $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è una successione generalizzata nello spazio topologico X e possiede la proprietà dell'intersezione finita, possiede una sottosuccessione universale.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo l'insieme delle famiglie $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X con la proprietà dell'intersezione finita che contengano la successione generalizzata $\{x_\alpha\}$: evidentemente si tratta di un insieme parzialmente ordinato rispetto all'inclusione. Verifichiamo che soddisfa alle ipotesi del lemma di Zorn.

Se $\mathcal{L}$ è una catena di famiglie con la proprietà dell'intersezione finita che contengano la successione generalizzata $\{x_\alpha\}$, la famiglia $\bigcup \mathcal{L}$ è un confine superiore rispetto all'ordinamento dato dall'inclusione. è facile rendersi conto che $\bigcup \mathcal{L}$ ha ancora la proprietà dell'intersezione finita. Possiamo quindi applicare il Lemma di Zorn e dedurre l'esistenza di un massimale $\mathcal{F}$; questa famiglia, vista come insieme parzialmente ordinato rispetto all'inclusione di sottoinsiemi di X fornisce un sistema di indici per $\{x_\alpha\}$ che determina una sottosuccessione in $\{E_\alpha\}$ universale.

QED

Il classico concetto di funzione reale continua si estende agli spazi topologici qualsiasi

2.1.20 Definizione *Se $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ sono spazi topologici, una funzione*

$$f : X \longrightarrow Y$$

si dice continua *se per ogni $A \in \mathcal{S}$ $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$, si dice* aperta *se per ogni $A \in \mathcal{T}$ $f(A) \in \mathcal{S}$ e si dice* omeomorfismo *se è biunivoca, continua e aperta.*

Ad esempio è chiaro che una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua nel senso dell'Analisi se e solo se lo è nel senso della definizione precedente.

Se $(X, \mathcal{T})$ è uno spazio topologico e Y un insieme qualsiasi, e se $f : X \longrightarrow Y$ è una applicazione suriettiva, possiamo definire su Y una topologia, che si dice *topologia quoziente* come segue:

$$\mathcal{Q} = \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$$

In questo modo la mappa f diviene continua per definizione. Lo spazio Y si dice *spazio topologico quoziente*. Fare il quoziente di uno spazio topologico equivale ad identificare fra loro i punti di un suo sottospazio: in effetti se $y \in Y$, i punti dell'insieme $f^{-1}(y) \subset X$ vengono, tramite f, tutti identificati in y.

2.1.21 Esempio *Consideriamo* $\mathbb{R}$ *con la sua topologia naturale e l'insieme*

$$S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

(si tratta della circonferenza in $\mathbb{R}^2$*). La funzione* $f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$

$$f(t) := e^{2\pi i t}$$

è ovviamente suriettiva; inoltre se $f(t) = (x, y)$ *allora, per ogni* $n \in \mathbb{Z}$, $f(t+n) = (x, y)$*; cioè* f *identifica i punti che abbiano distanza intera fra loro, e quindi possiamo scrivere*

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

intendendo che lo spazio quoziente S^1 *è ottenuto identificando fra loro i punti del sottospazio* $\mathbb{Z}$ *in* $\mathbb{R}$*.* S^1 *si dice anche* toro di dimensione 1 *e si denota pure* $\mathbb{T}$.

La categoria *Top* degli spazi topologici ha per oggetti gli spazi topologici e per morfismi le applicazioni continue: evidentemente due spazi vanno considerati equivalenti dal punto di vista topologico se sono omeomorfi, i.e. se esiste un omeomorfismo fra essi.

Vogliamo definire i prodotti nella categoria degli spazi topologici. Sia X un insieme, A un insieme di indici e per ogni $\alpha \in A$ sia $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uno spazio topologico con una funzione $f_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$.

2.1.22 Definizione *La* topologia debole $\mathcal{T}$ *su* X *definita dalla famiglia di funzioni* $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *è la più debole delle topologie* $\mathcal{T}'$ *per le quali* $f_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ *sia continua per ogni* $\alpha \in A$*.*

Una sottobase per la topologia debole è

$$\bigcup_{\alpha \in A} f_\alpha^{-1}(\mathcal{T}_\alpha)$$

Un esempio di topologia debole si ha proprio considerando i prodotti: siano $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ spazi topologici e X l'insieme prodotto cartesiano[2]

$$X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

La *topologia prodotto* (o di Tichonov) è la topologia debole rispetto alla famiglia di proiezioni $\{p_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Una successione generalizzata $\{x_\xi\}_{\xi \in I}$ converge ad x in X se e solo se per ogni $\alpha \in A$ la successione $\{p_\alpha(x_\xi)\}_{\xi \in I}$ converge a $p_\alpha(x)$ (non necessariamente in modo uniforme da α).

[2]Ricordiamo che si tratta di un insieme non vuoto in virtù dell'assioma di scelta.

Se U è un intorno di $x \in X$, la condizione $y \in U$ pone restrizioni solo un numero finito di proiezioni $p_{\alpha_1}(y), ..., p_{\alpha_n}(y)$: ad esempio per definire U basta assegnare un sottoinsieme A' finito di A e, per ogni suo elemento α' dare un intorno $U_{\alpha'}$ di $p_{\alpha'}(x)$ mediante le condizioni

$$y \in U \text{ se } p_{\alpha'}(y) \in U_{\alpha'}$$

Al variare di A' e α' si ottiene una base di intorni per la topologia prodotto su X.

2.2 Spazi compatti

2.2.1 Definizione *Una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{U}$ di uno spazio topologico X si dice* ricoprimento *di X se*

$$\bigcup \mathcal{U} = X$$

$\mathcal{U}$ si dice ricoprimento aperto *(risp.* chiuso*) se è formato da sottoinsiemi aperti (risp. chiusi).*

La seguente definizione è fra le principali della Topologia:

2.2.2 Definizione *Uno spazio topologico si dice* compatto *se da ogni suo ricoprimento aperto se ne può estrarre uno finito.*

2.2.3 Esempio *Il classico teorema di Heine–Borel afferma che i sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^n$ sono esattamente quelli chiusi e limitati.*

2.2.4 Proposizione *Se X è uno spazio topologico allora sono equivalenti le:*

(1) *X è compatto.*

(2) *Da ogni famiglia di chiusi con l'intersezione vuota se ne può estrarre una finita con l'intersezione vuota.*

(3) *Ogni famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota.*

(4) *Ogni successione generalizzata in X ammette una sottosuccessione convergente.*

(5) *Ogni successione universale in X è convergente.*

Dimostrazione: L'equivalenza delle (1)-(3) è basata sulle leggi di de Morgan[3].

(1) implica (2): se $\mathcal{F}$ è una famiglia di chiusi con l'intersezione vuota, allora, passando ai complementari,

$$\complement \bigcap_{C\in\mathcal{F}} C = \complement\emptyset \implies \bigcup_{C\in\mathcal{F}} \complement C = X$$

il che vuol dire che la famiglia di aperti $\mathcal{U} = \{\complement C \mid C \in \mathcal{F}\}$ è un ricoprimento: per compattezza possiamo allora estrarne uno finito $\{\complement C_1, ..., \complement C_n\}$, cioè

$$\bigcup_{i=1}^{n} \complement C_i = X \implies \complement\bigcap_{i=1}^{n} C_i = \complement\emptyset \implies \bigcap_{i=1}^{n} C_i = \emptyset$$

dunque abbiamo la famiglia finita di chiusi che volevamo. Lo stesso ragionamento, scambiando i chiusi con gli aperti, dimostra che (2) implica (1).

L'equivalenza di (1) con (3) è un fatto puramente logico: dire che X è compatto vuol dire che

$$\forall \mathcal{U} \subset \mathcal{T} \left(X = \bigcup \mathcal{U} \implies \exists U_1, ..., U_n \in \mathcal{U} \quad X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i \right)$$

Dato che $P \Rightarrow Q$ è la stessa cosa che non $Q \Rightarrow$ non P, possiamo scrivere questa definizione come

$$\forall \mathcal{U} \subset \mathcal{T} \left(\forall U_1, ..., U_n \in \mathcal{U} \quad X \neq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \implies X \neq \bigcup \mathcal{U} \right)$$

o anche, prendendo i complementari degli insiemi, come (con $\mathcal{C}$ indichiamo la famiglia di tutti gli insiemi chiusi di X)

$$\forall \mathcal{F} \subset \mathcal{C} \left(\forall C_1, ..., C_n \in \mathcal{F} \quad \emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{n} C_i \implies \emptyset \neq \bigcap \mathcal{F} \right)$$

Quest'ultima è esattamente la (3).

Per quel che riguarda l'equivalenza fra la (3) e le (4)-(5) si procede nel seguente modo: se X è compatto e $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una successione generalizzata in X, i chiusi

$$F_\alpha ;= \overline{\{x_{\alpha'}\}_{\alpha'>\alpha}}$$

[3] Il complementare di una unione è l'intersezione dei complementari e il complementare di una intersezione è l'unione dei complementari.

hanno la proprietà dell'intersezione finita (essendo A un insieme diretto). Dunque per la (3)

$$\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \neq \emptyset$$

Questo insieme è esattamente l'insieme dei punti limite di $\{x_\alpha\}$ e quindi, essendo non vuoto, esistono delle sottosuccessioni convergenti; inoltre, dato che gode della proprietà dell'intersezione finita, esiste una sottosuccessione universale.

Viceversa, sia $\mathcal{F}$ è una famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita in uno spazio topologico X, $\widetilde{\mathcal{G}}$ la famiglia delle sottofamiglie finite di $\mathcal{F}$ e, per ogni $\mathcal{G} \in \widetilde{\mathcal{G}}$, sia dato un $x_\mathcal{G} \in \bigcap \mathcal{F}$ (possiamo supporre che ciò sia possibile grazie all'assioma di scelta).

Allora, se la successione $\{x_\mathcal{G}\}_{\mathcal{G} \in \widetilde{\mathcal{G}}}$ ha un punto limite x, deve aversi $x \in \bigcap \mathcal{F}$.

QED

2.2.5 Esempio $\mathbb{R}$ *non è compatto: ci sono svariati e facili modi per vederlo: ad esempio, per la (4) della proposizione precedente: la successione* $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *non possiede alcuna sottosuccessione convergente.*

Per determinare la compattezza esistono alcuni potenti criteri, il più importante dei quali è il teorema di Tichonov:

2.2.6 Teorema (TICHONOV) *Se* $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *è una famiglia di spazi compatti allora il prodotto topologico*

$$X := \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

è compatto.

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamo la compattezza verificando la (4) della proposizione precedente. Sia dunque $\{x_\beta\}_{\beta \in B}$ una successione generalizzata in X: costruiremo una sottosuccessione tale che, se il suo insieme di punti limite è non vuoto, sia convergente. Sia

$$E_\beta := \{x_{\beta'}\}_{\beta' > \beta}$$

La famiglia $\{E_\beta\}$ gode per definizione della proprietà dell'intersezione finita e soddisfa alle ipotesi del lemma di Zorn: ne segue che esiste una famiglia $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ massimale rispetto alla proprietà dell'intersezione finita ed alla

$$\{E_\beta\}_{\beta \in B} \subset \mathcal{G}$$

Se $\beta \in B$ e $M \in \mathcal{G}$ sono tali che $M \cap E_\beta \neq \emptyset$ e se $f_{\beta,M} \in B$ è tale che $f_{\beta,M} > \beta$ e $x_{f_{\beta,M}} \in M$ allora l'insieme $B \times \mathcal{G}$ è parzialmente ordinato dalla relazione

$$(\beta, M) > (\beta', M') \iff \beta > \beta' \text{ e } M \subset M'$$

e la sottosuccessione

$$\{x_{f_\eta}\}_{\eta\in B\times\mathcal{G}} \subset \{x_\beta\}_{\beta\in B}$$

converge oppure non ha punti limite.

Dato che X_α è compatto, la successione

$$\{p_\alpha(x_{f_{\eta,M}})\}_{\eta\in B\times\mathcal{G}}$$

(ove $p_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ sono le proiezioni canoniche) ha un punto limite x_α: definiamo allora

$$x = (x_\alpha)_{\alpha\in A} \in X$$

Dimostriamo che si tratta di un punto limite per $\{x_\beta\}_{\beta\in B}$: se $A' \subset A$ è un sottoinsieme finito, e, per $\alpha \in A'$: U_α un intorno di x_α, se

$$U := \bigcap_{\alpha\in A'} p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$$

Evidentemente, al variare di $\alpha \in A'$ e degli U_α, U descrive una base di intorni di x in X. Quindi per dimostrare che x è un punto limite per $\{x_\beta\}_{\beta\in B}$, basta dimostrare che

$$\forall\beta \in B \quad E_\beta \cap U \neq \emptyset$$

i.e. che se $\alpha \in A'$ allora $p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{G}$ (dato che $\mathcal{G}$ ha la proprietà dell'intersezione finita, ed $E_\beta \in \mathcal{G}$). Ma questo equivale a dimostrare che

$$\forall\alpha \in A \quad M \cap p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \neq \emptyset$$

ovvero, essendo $M \in \mathcal{G}$ e $\mathcal{G}$ massimale, che

$$\forall\alpha \in A \quad p_\alpha(M) \cap U_\alpha \neq \emptyset$$

Ma x_α è un punto limite per la successione $\{p_\alpha(x_{f_{\eta,M}})\}_{\eta\in B\times\mathcal{G}}$ e U_α è un intorno di x_α: quindi, per ogni $\eta = (\beta, M) \in B \times \mathcal{G}$ esiste un $\eta' > \eta$ tale che

$$p_\alpha(x_{f_{\eta'}}) \in U_\alpha$$

Dunque $p_\alpha(M) \cap U_\alpha \neq \emptyset$.

QED

2.2.7 Proposizione *Se X è uno spazio topologico compatto e $F \subset X$ un sottospazio chiuso allora F è compatto. Se inoltre X è di Hausdorff, un sottospazio $F \subset X$ compatto è necessariamente chiuso.*

DIMOSTRAZIONE: La prima asserzione è ovvia: se F non fosse compatto esisterebbe una famiglia $\mathcal{G}$ di chiusi in F con la proprietà dell'intersezione finita tale che $\bigcap \mathcal{G} = \emptyset$; ma un sottoinsieme chiuso di un sottoinsieme chiuso è chiuso, quindi la famiglia $\mathcal{G}$ è una famiglia di chiusi di X che ne contraddice la compattezza.

Viceversa, se F è compatto in X e $x \in \overline{F}$ esiste una successione generalizzata $\{x_\alpha\} \subset F$ convergente a x: dato che F è compatto la successione ammette un limite $x' \in F$ e, essendo X di Hausdorff, deve aversi $x = x'$.

QED

2.2.8 Proposizione *Se K è compatto e $f : K \longrightarrow X$ è continua a valori nello spazio topologico X allora l'immagine $f(K)$ di K tramite la f è un sottospazio compatto di X.*

DIMOSTRAZIONE: Se $\mathcal{A}$ è un ricoprimento aperto di $f(K)$ allora $\{f^{-1}(U)\}_{U\in\mathcal{A}}$ è un ricoprimento aperto di K, dal quale possiamo estrarne uno $\{f^{-1}(U_{\alpha_1}), ..., f^{-1}(U_{\alpha_n})\}$ finito: è ovvio che allora $\{U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n}\}$ è un ricoprimento finito estratto da $\mathcal{A}$.

QED

2.2.9 Corollario *Siano K uno spazio topologico compatto e X uno spazio di Hausdorff:*

(1) *Una funzione continua $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ sulla retta reale (con la topologia naturale) ammette massimo e minimo.*

(2) *Una funzione continua ed iniettiva $f : K \longrightarrow X$ è chiusa.*

(3) *Una funzione continua e biunivoca $f : K \longrightarrow X$ è un omeomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE:

(1) Dato che $f(K)$ è compatto è chiuso e limitato in $\mathbb{R}$, quindi ammette massimo e minimo per il classico teorema di Weierstrass.

(2) Se $F \subset K$ è chiuso è pure compatto, quindi lo è $f(F)$ che risulta essere chiuso, perché X è di Hausdorff.

(3) Segue immediatamente da (2).

QED

Il terzo punto del corollario fornisce un criterio utilissimo per determinare se due spazi topologici sono omeomorfi e quindi, dal punto di vista topologico, equivalenti: ad esempio

2.2.10 Corollario *Se X è un insieme ed è uno spazio topologico rispetto a due diverse topologie $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ e se rispetto alla topologia $\mathcal{T}$ è uno spazio compatto e rispetto alla topologia $\mathcal{T}'$ è uno spazio di Hausdorff allora la mappa identica* $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X, \mathcal{T}')$ *è continua se e solo se $\mathcal{T}' < \mathcal{T}$.*

In altri termini: *la topologia che rende uno spazio X compatto è minima nel reticolo delle topologie di Hausdorff su X.*

2.2.11 Definizione *Uno spazio topologico è* localmente compatto *se ogni suo punto possiede un intorno la cui chiusura è compatta.*

2.2.12 Esempio $\mathbb{R}^n$ *è localmente compatto, perché se $x \in \mathbb{R}^n$ basta considerare l'intorno $\{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| \leq 1\}$, che è compatto, essendo una sfera (chiuso e limitato in $\mathbb{R}^n$).*

2.2.13 Teorema *Uno spazio localmente compatto è regolare.*

Dimostrazione: Se $x \in X$ e $F \subset X$ è un chiuso (non contenente x), allora x appartiene all'aperto $X \setminus F$ e, per locale compattezza, esiste un intorno V_x di x a tale che $\overline{V_x} \subset X \setminus F$, quindi $\overline{V_x} \cap F = \emptyset$. Ora costruiamo un aperto che contenga F e sia disgiunto da V_x: se $y \in F$ esiste certamente un intorno U_y di y disgiunto da $\overline{V_x}$ (dato che X è in particolare T_2 e $\overline{V_x}$ è compatto) e $U_F := \bigcup_{y \in F} U_y$ è l'aperto richiesto.

QED

2.2.14 Definizione *Se X è uno spazio topologico, una* compattificazione *per X è uno spazio compatto CX dotato di una immersione continua $i : X \hookrightarrow CX$ tale che $\overline{i(X)} = CX$.*

Lo spazio $\mathbb{R}^n$ non è compatto, mentre lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ sì: lo spazio proiettivo si può ottenere quozientando la sfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ identificandone i punti antipodali: questa è una mappa continua e la sfera è compatta, quindi, per la proposizione 2.2.8, il quoziente è compatto; dato che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ può vedersi come $\mathbb{R}^n$ con aggiunto un "piano improprio", vediamo che si tratta di una sua compattificazione.

2.2.15 Definizione *Se X è uno spazio topologico, una sua* compattificazione di Alexandroff *(o* compattificazione a un punto*) è una compattificazione $X' = X \cup \{\xi\}$ ottenuta aggiungendo un punto ξ all'insieme X e dotando l'unione $X \cup \{\xi\}$ di una topologia per la quale ξ non sia un punto isolato.*

L'esempio più elementare è la sfera S^n, che è la compattificazione a un punto dello spazio $\mathbb{R}^n$.

2.2.16 Teorema (ALEXANDROFF) *Uno spazio topologico X ammette una compattificazione di Alexandroff se e solo se è localmente compatto. In questo caso la topologia di X determina univocamente la topologia di X' e, come sottospazio di X', X ha la topologia relativa.*

DIMOSTRAZIONE: Se $X' = X \cup \{\xi\}$ è una compattificazione di Alexandroff di X, X è aperto in X' (ovviamente ogni suo punto contiene un intorno interamente contenuto in X): in particolare, per ogni $x \in X$ esiste un intorno U_x nella topologia di X'; essendo X' compatto, anche $\overline{U_x}$ lo è, quindi ogni punto di x ha un intorno a chiusura compatta.

Viceversa, sia X è localmente compatto (diciamo $\mathcal{T}$ la sua topologia) e consideriamo sull'insieme $X' = X \cup \{\xi\}$ la topologia

$$\mathcal{T}' := \mathcal{T} \cup \{A \cup \{\xi\} \mid A \in \mathcal{T} \text{ e } X \setminus A \text{ compatto}\}$$

(la famiglia degli aperti il cui complementare sia compatto è non vuota per locale compattezza di X). Che si tratti di una topologia su X' è immediato. Verifichiamo che è compatta: se $\{U_\alpha\}$ è un ricoprimento di X', deve esistere un U_{α_0} contenente ξ e quindi $U_{\alpha_0} = A \cup \{\xi\}$ per un certo aperto di X a complementare compatto. Ma allora il ricoprimento $\{U_\alpha\} \setminus \{U_{\alpha_0}\}$ ricopre $X \setminus A$, che è compatto, quindi se ne può estrarre un ricoprimento finito: aggiungendo a questo ricoprimento finito l'insieme $\{U_{\alpha_0}\}$ si ottiene un sottoricoprimento finito di $\{U_\alpha\}$. Quindi X' è compatto.

QED

Evidentemente la compattificazione di Alexandroff di uno spazio localmente compatto è unica a meno di omeomorfismi: si tratta effettivamente di un funtore:

2.2.17 Definizione *Una funzione $f : X \longrightarrow Y$ fra spazi topologici si dice* propria *se per ogni compatto $K \subset Y$, $f^{-1}(K)$ è compatto.*

Le funzioni proprie sono esattamente quelle estendibili da uno spazio compatto alla sua compattificazione di Alexandroff in modo che i punti aggiunti nella compattificazione si corrispondano: quindi la compattificazione di Alexandroff è un funtore dalla categoria i cui oggetti sono gli spazi di Hausdorff localmente compatti ed i cui morfismi le funzioni proprie nella categoria i cui oggetti sono gli spazi compatti ed i morfismi le funzioni continue.

Osserviamo che X è Hausdorff se e solo se X' lo è.

2.3 Spazi normali e generalizzazioni della compattezza

Ricordiamo che uno spazio topologico X è normale se è T_1 ed è possibile separare due chiusi disgiunti in X con aperti disgiunti.

2.3.1 Proposizione *Uno spazio di Hausdorff X compatto è normale.*

DIMOSTRAZIONE: Se $F_1, F_2 \subset X$ sono chiusi e disgiunti e sia $y_2 \in F_2$. Allora, essendo X di Hausdorff, per ogni $x \in F_1$ esistono intorni disgiunti $U_x(y)$ di y e $U_y(x)$ di x: per compattezza di F_1 (è un chiuso in un compatto), dal ricoprimento $\{U_y(x)\}_{x\in F_1}$ se ne può estrarre uno finito $\{U_y(x_1), ..., U_y(x_n)\}$. Poniamo

$$A_y := U_y(x_1) \cup ... \cup U_y(x_n) \supset F_1$$
$$W_y := U_{x_1}(y) \cup ... \cup U_{x_n}(y)$$

Per definizione W_y è un intorno di y e per compattezza di F_2 dal ricoprimento $\{W_y\}_{y\in F_2}$ possiamo estrarne uno finito $\{W_{y_1}, ..., W_{y_m}\}$. Poniamo allora

$$A_1 := A_{y_1} \cap ... \cap A_{y_m} A_2 \qquad := W_{y_1} \cup ... \cup W_{y_m}$$

A_1 e A_2 sono ovviamente aperti disgiunti, tali che $F_1 \subset A_1$ e $F_2 \subset A_2$.

QED

2.3.2 Lemma (URYSOHN) *Se X è uno spazio normale e $F_0, F_1 \subset X$ chiusi disgiunti in X allora esiste una funzione continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tale che $f|_{F_1} = 0$ e $f|_{F_2} = 1$.*

DIMOSTRAZIONE: Notiamo intanto il

2.3.3 Sublemma *Se F è un chiuso e A è un aperto in X tali che $F \subset A$ allora esiste un aperto $B \subset X$ tale che*

$$F \subset B \subset \overline{B} \subset A$$

Infatti i chiusi F e $\complement A$ sono disgiunti e quindi per normalità di X esistono due aperti disgiunti $B \supset F$ e $B' \supset \complement A$ che li separano. Dunque $\overline{B} \cap B' = \emptyset$ e $F \subset \overline{B} \subset \complement B' \subset A$.

Usiamo questo fatto nel caso in cui $F = F_0$ e $A = A_1 = \complement F_1$: esiste allora un aperto A_0 tale che

$$F_0 \subset A_0 \subset \overline{A_0} \subset A_1 = \complement F_0$$

Applichiamo nuovamente il sublemma con $F = \complement A_0$ e $A = A_1$ ottenendo un aperto $A_{\frac{1}{2}}$. Iterando il procedimento, possiamo costruire per ogni numero razionale diadico $r \in [0,1]$ (i.e. della forma $k/2^n$ con $k = 0, ..., 2^n$) un aperto A_r tale che

$$\forall s > r \quad \overline{A_r} \subset A_s$$

Poniamo quindi per ogni numero reale $t \in [0,1]$:

$$A_y := \bigcup_{\substack{r \leq t \\ r \text{ razionale diadico}}} A_r$$

Evidentemente si ha ancora la proprietà

$$(M) \qquad \forall u > t \quad \overline{A_t} \subset A_u$$

Se $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ e r_1, r_2 sono razionali diadici tali che $t_1 < r_1 < r_2 < t_2$ allora $A_{t_1} \subset A_{r_1}$ e $A_{r_2} \subset A_{t_2}$ per definizione, mentre per la proprietà (M):

$$\overline{A_{r_1}} \subset A_{r_2} \qquad \text{e} \qquad \overline{A_{t_1}} \subset A_{t_2}$$

Se poniamo

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in F_1 \\ \inf_{x \in \overline{A_t}} t & \text{se } x \in \overline{A_1} \end{cases}$$

allora $f : X \longrightarrow [0,1]$ è una funzione che, ristretta a F_0 vale identicamente 0 (dato che $F_0 \subset A_0$) e che ristretta a F_1 vale identicamente 1. Resta da provare che è continua.

Dimostriamo quindi che la controimmagine $f^{-1}(t_1, t_2)$ di un intervallo aperto di $[0,1]$ è un aperto di X. Intanto, se $t, t' \in [0,1]$:

$$f^{-1}(t', t) \subset A_t \setminus \overline{A_{t'}} \subset f^{-1}[t', t]$$

Infatti se $x \in A_t \subset \overline{A_t}$ allora $f(x) \leq t$ e, viceversa, se $f(x) < t'$ deve aversi $x \in \overline{A_{t'}}$. Se quindi $t < f(x)$ e $t' \leq f(x)$ si ha che $x \notin \overline{A_t} \cup A_{t'}$ e, per la (M) si hanno le inclusione volute.

A questo punto non resta che osservare che

$$f^{-1}(t_1, t_2) = \bigcup_{t_2 < t' < t < t_1} A_t \setminus \overline{A_{t'}}$$

e che $A_t \setminus \overline{A_{t'}}$ è ovviamente aperto.

QED

Ovviamente non è necessario che il codominio della funzione sia l'intervallo $[0,1]$: se consideriamo un intervallo $[a,b]$ evidentemente la funzione $g_{a,b}(x) := (b-a)f(x) + a$ ha valori in $[a,b]$ ed è tale che $g|_{F_0} = a$ e $g|_{F_1} = b$.

2.3.4 Teorema (TIETZE) *Se X è uno spazio normale, A un chiuso in X e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata allora esiste una funzione continua $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $F|_A = f$ e $\sup_{a \in A} |f(a)| = \sup_{x \in X} |F(x)|$.*

Dimostrazione: Costruiremo la funzione F come limite di una opportuna successione; poniamo $f_0 := f$ e, per $a_0 := \sup_{a\in A}|f(a)|$:

$$A_0 := \left\{a \in A \mid f_0(a) \leq -\frac{a_0}{3}\right\} \qquad \text{e} \qquad B_0 := \left\{a \in A \mid f_0(a) \geq \frac{a_0}{3}\right\}$$

Evidentemente A_0 e B_0 sono chiusi e disgiunti: per il lemma di Urysohn esiste quindi una funzione continua $g_0 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $|g_0(x)| \leq \frac{a_0}{3}$ e

$$g_0(x) = \begin{cases} -\frac{a_0}{3} & \text{se } x \in A_0 \\ \frac{a_0}{3} & \text{se } x \in B_0 \end{cases}$$

Poniamo ora $f_1 := f_0 - g_0$: si tratta di una funzione continua a valori reali tale che $a_1 := \sup_{a\in A}|f_1(a)| \leq \frac{2}{3}a_0$. Iterando allora il procedimento possiamo costruire degli insiemi chiusi e disgiunti A_1 e B_1 ed una funzione g_1 con $|g_1| \leq \frac{a_1}{3}$ che valga $-a_1/3$ su A_1 e $a_1/3$ su B_1, e così via.

Quello che si ottiene è una successione $\{f_n\}$ di funzioni reali e continue su A ed una successione $\{g_n\}$ di funzioni reali e continue su X tali che

$$f_{n+1} = f_n - g_n \qquad \text{e} \qquad |g_n(x)| \leq \frac{a_n}{3}$$

con $a_{n+1} \leq \frac{2}{3}a_n$ e $a_n := \sup_{a\in A}|f_n(a)|$. Quindi

$$|f_n(a)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n a_0 \qquad \text{e} \qquad |g_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{a_0}{3}$$

Ne segue che la serie $\sum_{n\geq 0} g_n(x) =$ converge assolutamente ed uniformemente ad una funzione F perciò continua e reale su X. Ovviamente

$$|F(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{a_0}{3} = a_0$$

Si noti che, se $x \in A$, per definizione si ha $F(x) = f_0(x) = f(x)$.

QED

In particolare, per la proposizione data in precedenza, il teorema di Tietze si applica agli spazi compatti di Hausdorff: in questo caso non è necessario assumere che f sia limitata, visto che, essendo continua e definita in un compatto, deve esserlo necessariamente.

Consideriamo ora collezioni di funzioni su uno spazio X localmente compatto di Hausdorff: ricordiamo che, se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, il *supporto* si f è l'insieme chiuso

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$$

Diciamo che una collezione $\{\varphi_\alpha\}$ di funzioni continue reali su X è *subordinata* ad un ricoprimento $\{A_\beta\}$ di aperti di X se per ogni α esiste un β tale che $\operatorname{supp}\varphi_\alpha \subset A_\beta$.

2.3.5 Teorema (PARTIZIONE DELL'UNITÀ) *Sia X uno spazio localmente compatto di Hausdorff, K in sottoinsieme compatto e $\{A_\alpha\}$ un ricoprimento aperto di K; allora esiste una collezione finita $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ di funzioni continue reali non negative subordinate alla collezione $\{A_\alpha\}$ e tali che*

$$\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n = 1$$

su K.

DIMOSTRAZIONE: Sia A un aperto tale che $K \subset A$ e $\overline{A}$ sia compatto; allora per ogni $k \in K$ esiste una funzione continua reale f_k tale che

(1) per ogni $x \in X$: $0 \leq f(x) \leq 1$;

(2) $f_k(k) = 1$

(3) esiste β tale che $\operatorname{supp} f_k \subset A \cap A_\beta$.

Per ciascun $k \in \overline{A} \setminus K$ sia g_k la funzione reale continua tale che

(1) per ogni $x \in X$: $0 \leq g(x) \leq 1$;

(2) $g_k(k) = 1$

(3) $\operatorname{supp} g_k \subset \complement K$

Ma $\overline{A}$ è compatto, quindi esiste un numero finito di funzioni f_1,...,f_n,g_1,...,g_m tali che gli insiemi sui quali assumano valori positivi ricoprano $\overline{A}$. Poniamo allora

$$f := \sum_{i=1}^{n} f_i \qquad \text{e} \qquad g := \sum_{j=1}^{m} g_j$$

Si ha ovviamente che, su K, $f > 0$, $\operatorname{supp} f \subset A$ e su $\overline{A}$: $f + g > 0$ e $g|_K = 0$. Quindi

$$\frac{f}{f+g}$$

è continua e ristretta a K è identicamente 1: basta prendere allora

$$\varphi_i := \frac{f_i}{f+g}$$

per avere la tesi

QED

La costruzione effettuata in questa proposizione può farsi, ad esempio in $\mathbb{R}^n$, considerando funzioni differenziabili e non semplicemente continue. In questo caso la possibilità di definire una partizione dell'unità differenziabile[4] è legata ad un'altra proprietà di $\mathbb{R}^n$ che si può assiomatizzare per uno spazio topologico qualunque:

2.3.6 Definizione *Una famiglia $\mathcal{U}$ di sottoinsiemi di uno spazio topologico X si dice* localmente finita *se per ogni $x\in$ esiste un intorno $U \ni x$ la cui intersezione con gli elementi di $\mathcal{U}$ sia non vuota solo per un numero finito di essi. Uno spazio topologico si dice* paracompatto *se ogni ricoprimento aperto possiede un raffinamento localmente finito.*

Ricordiamo che un *raffinamento* di un ricoprimento $\mathcal{U}$ è un ricoprimento $\mathcal{V}$ tale che ogni elemento di $\mathcal{V}$ è contenuto in qualche elemento di $\mathcal{U}$: in questo modo la relazione di raffinamento introduce un ordine parziale fra i ricoprimenti di uno spazio.

Ovviamente uno spazio compatto è paracompatto; uno spazio localmente compatto non è necessariamente paracompatto, ma lo è se possiede un'altra proprietà che generalizza la compattezza:

2.3.7 Definizione *Uno spazio topologico è σ-compatto se è unione numerabile di sottospazi compatti.*

Vale allora il

2.3.8 Lemma *Se X è uno spazio di Hausdorff localmente compatto allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(1) *Da ogni ricoprimento aperto di X se ne può estrarre uno numerabile (uno spazio con questa proprietà si dice* di Lindelöf*).*

(2) *X è σ-compatto.*

(3) *Esiste una successione $\{A_n\}$ di aperti a chiusura compatta tali che:*

$$\overline{A_n} \subset A_{n+1} \qquad e \qquad X = \bigcup_n A_n$$

(4) *Esiste una funzione continua e propria $\varphi : X \longrightarrow (0, \infty)$.*

[4]Cosa per la quale si rimanda ai testi specialistici di Geometria Differenziale, ad esempio [17], pp. 272–274.

DIMOSTRAZIONE: (1) implica (2) dato che se X si può ricoprire con una famiglia di aperti a chiusura compatta (essendo localmente compatto) allora possiamo estrarne un sottoricoprimento numerabile le chiusure dei cui elementi forniscono la famiglia numerabile desiderata.

(2) implica (3) perché se $X = \bigcup_n K_n$ con K_n compatti, possiamo prendere come A_1 un aperto a chiusura compatta tale che $K \subset A_1$ e procedere induttivamente, prendendo come A_n un aperto a chiusura compatta contenuto in $K_n \cup \overline{A_{n-1}}$ ottenendo così la successione voluta.

(3) implica (4) ovviamente: basti prendere una famiglia $\{\varphi_n\}$ di funzioni reali a supporti contenuti in A_n e tali che $\varphi_n|_{\overline{A_{n-1}}} = 1$ e porre

$$\varphi := \sum_{n=1}^{\infty}(1 - \varphi_n)$$

Infine (4) implica (1) perché se $\varphi : X \longrightarrow (0, \infty)$ è una mappa propria continua allora $X = \bigcup_n K_n$ con $K_n = \varphi^{-1}([0, n])$: si tratta di compatti perché φ è propria. Dunque ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di X ammette un sottoricoprimento finito $\mathcal{U}_n$ che ricopre K_n e quindi $\bigcup_n \mathcal{U}_n$ è il ricoprimento numerabile richiesto.

QED

2.3.9 Teorema *Se X è uno spazio localmente compatto e σ-compatto allora è paracompatto.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X e $\{A_n\}$ una famiglia come nella (3) del teorema precedente. Se $\mathcal{U}_n$ è la famiglia degli insiemi

$$\mathcal{U}_n = \{U \cap (A_{n+1} \setminus \overline{A_{n-2}})\}_{U \in \mathcal{U}}$$

allora ogni $\mathcal{U}_n$ è un raffinamento di $\mathcal{U}$ ed è un ricoprimento degli insiemi compatti $\overline{A - n} \setminus A_{n-1}$: quindi, per compattezza, possiede un sottoricoprimento finito $\widetilde{\mathcal{U}_n}$ di K_n. Ma $X = \bigcup_n K_n$, quindi $\mathcal{V} := \bigcup_n \widetilde{\mathcal{U}_n}$ è un ricoprimento numerabile di X ed è un raffinamento di $\mathcal{U}$.

Ora, dato che per ogni $x \in X$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $x \in A_n \setminus \overline{A_{n-2}}$ e dato che questi aperti possono intersecare soltanto quattro elementi della famiglia $\widetilde{\mathcal{U}_k}$ (che è una famiglia finita) ne segue che $A_n \setminus \overline{A_{n-2}}$ interseca solo un numero finito di elementi di $\mathcal{V}$. In altre parole, $\mathcal{V}$ è localmente finito.

QED

2.4 Spazi connessi e localmente connessi

Una nozione fondamentale che abbiamo trascurato fin qui è quella di *spazio connesso*.

2.4.1 Definizione *Uno spazio topologico* $(X, \mathcal{T})$ *si dice* connesso *non è unione di due suoi aperti* $A, B \in \mathcal{T}$ *disgiunti* ($A \cap B = \emptyset$) *non banali.*

In altri termini, se $X = A \cup B$ con $A, B \in \mathcal{T}$ e $A \cap B = \emptyset$ allora A e B devono essere $\emptyset$ o X.

2.4.2 Proposizione *Uno spazio è connesso se e solo se non esistono sottoinsiemi* S *propri* ($S \neq X, \emptyset$) *tali che* S *sia aperto e chiuso allo stesso tempo.*

DIMOSTRAZIONE: In effetti se S è chiuso e aperto allora $X = S \cup \complement S$ è unione di aperti propri disgiunti e quindi non è connesso. Se X non è connesso allora esistono $A, B \in \mathcal{T}$ con $A \cap B = \emptyset$ e $X = A \cup B$: ma allora $A = \complement B$ è chiuso (essendo il complementare di un aperto) e aperto (per ipotesi).

QED

2.4.3 Esempio *Un insieme* X *non ridotto ad un sol punto (e.g.* $X = \mathbb{N}$*) con la topologia discreta non è connesso.*

Diamo qualche altro esempio di di insieme connesso.

2.4.4 Teorema *Un segmento* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *è connesso.*

DIMOSTRAZIONE: Sia per assurdo[5] $[a, b] = A \cup B$ con $A \cap B = \emptyset$ aperti e supponiamo ad esempio $a \in A$; allora, si ricordi che A è aperto, i segmenti $[a, \varepsilon)$ per ε abbastanza piccolo sono contenuti in A; possiamo allora considerare il sup di questi ε: sia esso a'. Ovviamente $a' \neq b$ (altrimenti $[a, b) \subset A$ e quindi $A = [a, b]$ dato che B deve essere aperto e quindi non può essere $\{b\}$).

Dunque: $a' \notin B$ (perché A e B sono aperti disgiunti); quindi deve essere $a' \in A$. Ma allora esiste un intorno di a' contenuto in $[a, b)$ ($a \neq b$) e quindi deve esistere un $a'' > a'$ tale che $[a, a'') \subset A$, il che è assurdo per definizione di a'.

Ne segue che $a' \in A$ e quindi $A = [a, b]$ e $B = \emptyset$.

QED

Dalla seguente combinazione di proposizione e teorema segue in particolare la connessione degli spazi $\mathbb{R}^n$:

2.4.5 Proposizione *Se* $f : X \longrightarrow Y$ *è continua fra spazi topologici e* X *è connesso allora* $f(X)$ *è connesso.*

[5] Quasi tutte le dimostrazioni sugli spazi connessi si fanno per assurdo...

DIMOSTRAZIONE: Sia $f(X) = A \cup B$ con A, B aperti disgiunti in $f(X)$ (con la topologia relativa di X); allora $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ sono aperti in X (dato che f è continua) tali che

$$X = f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \qquad \text{e} \qquad f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = \emptyset$$

Ne segue che X non è connesso.

QED

Questa proposizione implica che la connessione è una proprietà topologica: se X e Y sono omeomorfi allora X è connesso se e solo se Y è connesso.

2.4.6 Teorema *Un sottoinsieme convesso $X \subset \mathbb{R}^n$ è connesso.*

DIMOSTRAZIONE: Per assurdo, sia $X = A \cup B$ e siano $a \in A$ e $b \in B$; allora, dato che X è convesso, il segmento $\overline{ab}$ è contenuto in X e quindi $\overline{ab} = (\overline{ab} \cap A) \cup (\overline{ab} \cap B)$ contraddice la connessione del segmento $\overline{ab}$ (per la proposizione e la connessione di un segmento in $\mathbb{R}$).

QED

In particolare $\mathbb{R}^n$ è convesso, quindi è connesso. Inoltre il classico teorema di Bolzano del valor medio ammette una generalizzazione agli spazi connessi:

2.4.7 Teorema *Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua da uno spazio topologico connesso alla retta reale, e se $x, y \in X$ e $c \in \mathbb{R}$ sono tali che*

$$f(x) < c < f(y)$$

allora esiste $z \in X$ tale che $f(z) = c$.

DIMOSTRAZIONE: Se un tale z non esistesse, gli insiemi $f^{-1}((-\infty, c))$ e $f^{-1}((c, \infty))$ sarebbero aperti disgiunti in X e X ne risulterebbe unione, il che è assurdo perché è connesso.

QED

Il seguente criterio è utile per verificare la connessione di uno spazio:

2.4.8 Proposizione *Uno spazio X è connesso se per ogni $x, y \in X$ esiste un sottospazio $C \subset X$ connesso tale che $x, y \in C$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia X non è connesso per mezzo della decomposizione in aperti $X = A \cup B$ $(A \cap B)\emptyset)$, e siano $a \in A$ e $b \in B$; allora esiste per ipotesi un connesso C contenente sia a che b. Gli insiemi $A - 1 = A \cap C$ e $B_1 = B \cap C$ sono aperti e non vuoti in C (rispetto alla topologia relativa di C) ed ovviamente $C = C \cap X = C \cap (A \cup B) = A_1 \cup B_1$. Quindi C non è connesso, dato che $A_1 \cap B_1 \subset A \cap B = \emptyset$, il che è assurdo.

QED

Possiamo limitare la scelta di C, nella proposizione precedente, alle curve:

2.4.9 Definizione *Un* cammino *fra x e y in uno spazio topologico X è una funzione continua $c : [0,1] \longrightarrow X$ tale che $c(0) = x$ e $c(1) = y$.*

2.4.10 Esempio *Una curva nel piano è un esempio di cammino: dato che $[0,1]$ è connesso l'immagine di un cammino è connessa, e quindi soddisfa le ipotesi della proposizione precedente.*

2.4.11 Definizione *Uno spazio topologico X è* connesso per archi *se per ogni $x, y \in X$ esiste un cammino fra x e y.*

Possiamo allora riformulare il criterio precedente come

2.4.12 Teorema *Uno spazio connesso per archi è connesso.*

Si danno tuttavia esempi di insiemi connessi ma non connessi per archi:

2.4.13 Esempio *Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$*

$$X = \overline{(0,0)(1,0)} \cup \bigcup_{n\geq 1} \overline{\left(\frac{1}{n}, 0\right)\left(\frac{1}{n}, 1\right)} \cup (0,1)$$

(il lettore dovrebbe provare a disegnarlo) ove $\overline{PQ}$ denota il segmento che unisce i punti P e Q: allora X è connesso, ma il punto $(0,1)$ non può essere connesso da alcun cammino agli altri punti di X.

2.4.14 Teorema *Il prodotto di due spazi connessi è connesso.*

Dimostrazione: Siano X e Y gli spazi connessi in questione e supponiamo che $X \times Y = A \cup B$ con A, B aperti disgiunti (propri). Possiamo supporre che A sia connesso (se $A = A_1 \cup A_2$ consideriamo $A = A_1$ e $B = A_2 \cup B$, e così via fino ad ottenere A connesso).

Ora, se $(x, y) \in A \subset X \times Y$ i sottoinsiemi di $X \times Y$ dati da $\{x\} \times Y$ e $X \times \{y\}$ sono connessi (perché omeomorfi a Y e X rispettivamente); quindi $\{x\} \times Y \cap A \subset A$ e $X \times \{y\} \cap A \subset A$ (dato che A è connesso). Dunque, avendosi

$$X \times Y = \bigcup_{y_0 \in Y} X \times \{y_0\}$$

esprimiamo $X \times Y$ come unione di sottoinsiemi di A, per cui $B = \emptyset$, il che è assurdo.

QED

Questo teorema si estende, col medesimo ragionamento, al prodotto di insiemi qualsiasi.

Ora osserviamo che se uno spazio è connesso, è naturale tentare di decomporlo in sottospazi connessi, come si è fatto nella dimostrazione del teorema precedente. Se $x\in X$ possiamo considerare la famiglia di tutti i sottoinsiemi connessi di X che contengono x: dato che, per la proposizione 2.4.8, l'unione di due insiemi connessi è connessa, l'insieme unione C_x della famiglia dei connessi che contengono x è un insieme connesso "massimale" contenente x: ogni insieme più grande che contenga x non può essere connesso.

Chiamiamo C_x *componente connessa* di X contenente y; ovviamente

$$\forall y \in C_x \quad C_y = C_x$$

Inoltre la relazione $x \sim y \iff C_x = C_y$ è di equivalenza, e le componenti connesse ne sono le classi. Si noti che, se $x, y \in X$ allora o $C_x = C_y$ oppure $C_x \cap C_y = \emptyset$.

Evidentemente una componente connessa è chiusa, dato che $\overline{C_x}$ è un connesso contenente C_x e quindi deve coincidere con esso. Quindi

2.4.15 Teorema *Uno spazio topologico è unione disgiunta delle sue componenti connesse.*

Osserviamo che una componente connessa C_x non è necessariamente un aperto: tuttavia se lo spazio X ha un numero finito di componenti connesse, allora $X = C_x \cup \bigcup_{y\notin C_x} C_y$ e quindi il complementare di C_x è una unione finita di chiusi, quindi un chiuso, quindi C_x è aperto.

Si osservi inoltre che il numero di componenti connesse (in generale un numero cardinale) è un invariante topologico dello spazio.

2.4.16 Definizione *Uno spazio topologico si dice* localmente connesso *se possiede una base formata da connessi.*

(In modo equivalente, ogni suo punto contiene un sistema di intorni connessi). Non è affatto detto che uno spazio connesso sia localmente connesso: vale infatti il

2.4.17 Teorema *Uno spazio topologico X è localmente connesso se e solo se, per ogni A aperto in X le componenti connesse di A sono aperti.*

Questo segue dalla definizione: ogni aperto è unione di elementi di una base, che può supporsi connessa.

2.4.18 Esempio *Lo spazio connesso ma non connesso per archi*

$$X = \overline{(0,0)(1,0)} \cup \overline{\bigcup_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n},0\right)\left(\frac{1}{n},1\right)} \cup (0,1)$$

visto in precedenza, non è neanche localmente connesso: infatti il punto $(1,0)$ *non possiede nessun sistema di intorni connessi.*

I concetti di connessione e locale connessione sono quindi indipendenti: è infatti facile esibire spazi localmente connessi ma non connessi, non connessi e non localmente connessi e connessi e localmente connessi.

2.5 Spazi semplicemente connessi

Abbiamo visto come considerare cammini su uno spazio topologico sia utile, ad esempio nel dimostrarne la connessione: è naturale chiedersi se la scelta di un cammino possa essere arbitraria e, altrimenti, come distinguere fra cammini che uniscano gli stessi punti. Una nozione utile per questo è la seguente

2.5.1 Definizione *Due cammini* $c, c' : [0,1] \longrightarrow X$ *che congiungano due stessi punti* x *e* y *(i.e.* $c(0) = c'(0) = x$ *e* $c(1) = c'(1) = y$*) si dicono* omotopi *se esiste una funzione continua*

$$F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$$

tale che

$$\forall t \in [0,1] \quad F(t,0) = c(t) \text{ e } F(t,1) = c'(t)$$

e

$$\forall s \in [0,1] \quad F(0,s) = x \text{ e } F(1,s) = y$$

Si scrive $c \approx c'$ *e si dice che* F *è una* omotopia *fra i due cammini* x *e* y*.*

Intuitivamente due cammini sono omotopi se è possibile deformare (in modo continuo) l'uno sull'altro. Questa nozione è particolarmente significativa se i cammini sono *cicli* i.e. se $x = y$: allora li immaginiamo come due "cappi" che abbiano un punto in comune.

In particolare, se $c'(t) := x$ è il *cammino costante* cioè il cappio "degenere" che coincide con x, un cammino è omotopo a c' se è possibile "contrarlo" fino a farlo sparire nel punto x: ad esempio questo non è possibile se il cammino c racchiude un "buco" dello spazio:

Ovviamente l'omotopia è una relazione di equivalenza, e l'insieme delle classi di equivalenza di cammini chiusi su un punto x_0 si denota con $\pi_1(X, x_0)$, e si dice *gruppo fondamentale*. Infatti vale il

2.5.2 Teorema *Rispetto alla composizione di cammini*

$$cc'(t) = \begin{cases} c(2t) & se\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c'(2t-1) & se\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

le classi di omotopia di cammini su un punto fissato formano un gruppo (potrebbe essere un interessante esercizio per il lettore) con inverso

$$c^{-1}(t) = c(1-t)$$

e con identità data dal cammino costante x_0*.*

DIMOSTRAZIONE: Scriviamo esplicitamente le omotopie per dei cammini nelle classi di equivalenza di $\pi_1(X, x_0)$: per dimostrare l'associatività del prodotto di cammini c, c', c'' definiamo

$$F(t,s) := \begin{cases} c\left(\frac{4t}{s+1}\right) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}(s+1) \\ c'(4t-s-1) & \text{se } \frac{1}{4}(s+1) \leq t \leq \frac{1}{4}(s+2) \\ c''\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right) & \text{se } \frac{1}{4}(s+2) \leq t \leq 1 \end{cases}$$

che stabilisce una omotopia fra $(cc')c''$ e $c(c'c'')$. Per dimostrare che il cammino costante x_0 è l'elemento neutro definiamo

$$F(t,s) = \begin{cases} c\left(\frac{2t}{s+1}\right) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{s+1}{2} \\ x_0 & \text{se } \frac{s+1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Infine il fatto che $[c^{-1}]$ è l'inverso di $[c]$ segue definendo

$$F(t,s) = \begin{cases} c(2t) & \text{se } 0 \leq 2t \leq s \\ c(s) & \text{se } s \leq 2t \leq 2-s \\ c^{-1}(2t-1) & \text{se } 2-s \leq 2t \leq 2 \end{cases}$$

QED

Si verifica facilmente che, *se lo spazio X è connesso per archi*, al variare del punto x_0, i gruppi fondamentali $\pi_1(X, x_0)$ sono isomorfi, e che quindi si può parlare del gruppo fondamentale di uno spazio topologico connesso per archi: in effetti se $x-1$ è un altro punto e γ un cammino che connetta x_0 con x_1 allora la mappa

$$\gamma_* : [c] \longmapsto [\gamma c \gamma^{-1}]$$

è un isomorfismo fra i gruppi fondamentali $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ (il suo inverso è infatti $(\gamma^{-1})_*$).

Osserviamo che, se $f : X \longrightarrow Y$ è una mappa continua fra spazi connessi per archi tale che $f(x_0) = y_0$ allora esiste un morfismo di gruppi

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

dato semplicemente da

$$f_*([c]) := [f \circ c]$$

La mappa non dipende che dalla classe di omotopia: se $c' \approx c$ allora esiste una omotopia F fra c e c' allora $f \circ F$ è una omotopia fra $f \circ c$ e $f \circ c'$.

Evidentemente, se $X = Y$ allora

$$(id_X)_* = id_{\pi_1(X,x_0)}$$

e se $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ sono continue e $f(x_0) = y_0$ e $g(y_0) = z_0$ allora

$$(g \circ f)_* = g_* f_*$$

Dunque $\pi_1(-, x_0)$ è un funtore covariante dalla categoria degli spazi topologici con un punto fissato (i cui oggetti sono le coppie (X, x_0) e i cui morfismi le mappe continue $f : X \longrightarrow Y$ tali che $f(x_0) = y_0$) nella categoria dei gruppi.

2.5.3 Definizione *Uno spazio topologico si dice* semplicemente connesso *se è connesso per archi ed il suo gruppo fondamentale è banale (i.e. è ridotto all'identità $\{e\}$).*

Vedremo fra breve come gli spazi $\mathbb{R}^n$ siano semplicemente connessi; prima introduciamo il concetto di omotopia fra mappe.

2.5.4 Definizione *Due mappe continue $f, g : X \longrightarrow Y$ fra spazi topologici sono* omotope *se esiste una mappa continua $F : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$ tale che*

$$\forall x \in X \quad F(x, 0) = f(x) \qquad e \qquad F(x, 1) = g(x)$$

e si scrive $f \approx g$.

Se $X = [0, 1]$ otteniamo il concetto di omotopia fra cammini: quindi due mappe sono omotope se le loro immagini possono essere "deformate" l'una sull'altra.

Di nuovo l'omotopia fra mappe è una relazione di equivalenza sull'insieme delle funzioni continue da X in Y. Questa nozione può generalizzarsi ulteriormente come segue:

2.5.5 Definizione *Due mappe continue $f, g : X \longrightarrow Y$ fra spazi topologici sono* omotope relativamente *ad un sottoinsieme $A \subset X$ fissato se esiste una mappa continua $F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ tale che*

$$\forall x \in X \quad F(x,0) = f(x) \qquad e \qquad F(x,1) = g(x)$$

e

$$\forall a \in A\ \forall t \in [0,1] \quad F(a,t) = f(a) = g(a)$$

e si scrive $f \approx_A g$.

In particolare due mappe omotope relativamente a A coincidono su A. Se $A = \emptyset$ ritroviamo la definizione di omotopia precedente.

Il seguente risultato è immediata conseguenza della definizione:

2.5.6 Teorema *Se $f, g : X \longrightarrow Y$ sono omotope relativamente all'insieme $\{x_0\} \subset X$ allora $f_* = g_*$.*

Cioè f e g inducono lo stesso omomorfismo di gruppi $\pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y.y_0)$ ove $y_0 = f(x_0) = g(x_0)$.

2.5.7 Definizione *Un sottoinsieme $A \subset X$ di uno spazio topologico si dice* retratto *di X se esiste una mappa continua $r : X \longrightarrow A$ tale che pre ogni $a \in A$ $r(a) = a$. r si dice* ritrazione.

Si tratta di una nozione molto forte: ad esempio il cerchio $S^1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ è un retratto del piano "bucato" $\mathbb{R}^2 \setminus 0$: basta considerare

$$r(x,y) := \frac{1}{x^2 + y^2}(x,y)$$

Le ritrazioni sono interessanti in omotopia per il seguente motivo: se $r : X \longrightarrow A$ è una ritrazione e $i : A \longrightarrow X$ è l'inclusione ($A \subset X$) allora possiamo considerare, fissato un $a \in A$, i morfismi di gruppi:

$$\begin{aligned} r_* &: \pi_1(X,a) \longrightarrow \pi_1(A,a) \\ i_* &: \pi_1(A,a) \longrightarrow \pi_1(X,a) \end{aligned}$$

Dato che $r \circ i = id_A$ allora $r_* i_* = id_{\pi_1(A,a)}$ e da questo segue che i_* è iniettivo e r_* suriettivo[6].

[6] Se $i_*([c]) = i_*([c'])$ allora $[c] = r_*(i_*([c])) = r_*(i([c'])) = [c']$; se $[c] \in \pi_1(A,a)$ allora $[c'] = i_*([c]) \in \pi_1(X,a)$ è tale che $r_*([c']) = r_*(i_*([c])) = [c]$.

2.5.8 Definizione *Un sottoinsieme $A \subset X$ è un* retratto di deformazione *di X se esistono una ritrazione $r : X \longrightarrow A$ ed una omotopia $F : X \times [0,1] \longrightarrow X$ tali che*

$$\forall x \in X \quad F(x,0) = x \qquad e \qquad F(x,1) = r(x)$$

e

$$\forall a \in A \ \forall t \in [0,1] \quad F(a,t) = a$$

In altre parole, A è un retratto di deformazione se esiste una ritrazione $r : X \longrightarrow A$ che sia omotopa all'identità $X \longrightarrow X$.

2.5.9 Teorema *Se A è un retratto di deformazione di X allora, per ogni $a \in A$, l'inclusione $i : A \longrightarrow X$ induce un isomorfismo fra i gruppi fondamentali $\pi_1(A,a)$ e $\pi_1(X,a)$.*

Dimostrazione: Sappiamo che $r_* i_*$ è l'identità: basta mostrare quindi che anche $i_* r_*$ è l'identità per concludere che $i_* = r_*^{-1}$ è l'isomorfismo cercato. Ma $i \circ r$ è omotopo alla mappa identità per ipotesi e quindi induce l'identità in omotopia per il teorema 2.5.6.

QED

Questo semplice risultato è utilissimo per dimostrare che due spazi hanno lo stesso gruppo fondamentale o per contraddire questo fatto.

2.5.10 Definizione *Uno spazio topologico X è* contraibile *se esiste un punto $x \in X$ tale che $\{x\}$ è un retratto di deformazione di X.*

Se uno spazio è contraibile, dal punto di vista dell'omotopia è sostanzialmente banale, come mostra la seguente immediata conseguenza del teorema precedente:

2.5.11 Corollario *Se X è contraibile allora è semplicemente connesso.*

2.5.12 Esempio *Dimostriamo che ogni insieme convesso K in $\mathbb{R}^n$ è contraibile, e quindi che è semplicemente connesso: questo in particolare si applica a $\mathbb{R}^n$ stesso. Sia $k_0 \in K$ e definiamo una $F : K \times [0,1] \longrightarrow K$ come*

$$F(k,t) = (1-t)k + tk_0$$

(k e k_0 sono elementi di $\mathbb{R}^n$ e con tk si intende la moltiplicazione di uno scalare per un vettore). In altri termini, fissato k, $F(k,t)$ descrive, al variare di $t \in [0,1]$ il segmento $\overline{kk_0}$ che è contenuto in K (per convessità). È immediato che F è continua e che $F(k,0) = k$ e $F(k,1) = k_0$. Si tratta cioè dell'omotopia richiesta[7]

[7]Si noti che il ragionamento funziona non solo con i convessi ma con i sottoinsiemi stellati, cioè tali che *esista* un punto k_0 tale che per ogni altro punto k il segmento $\overline{kk_0}$ è completamente contenuto in K.

2.5.13 Esempio *La sfera S^n è un retratto di deformazione di $\mathbb{R}^{n+1}$: basta considerare la palla piena bucata*

$$P := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, 0 < |x| \leq 1\}$$

e definire l'omotopia $F : P \times [0,1] \longrightarrow P$ come

$$F(p,t) = (1-t)p + t\frac{p}{|p|}$$

Ora dimostriamo un risultato fondamentale:

2.5.14 Teorema *Il gruppo fondamentale del cerchio è infinito ciclico: $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo il cerchio come immerso nel piano complesso $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$:

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$$

Allora esiste una funzione continua $f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$

$$f(t) := e^{2\pi i t}$$

che è aperta: in effetti si tratta della proiezione di $\mathbb{R}$ sul quoziente $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (il nucleo di f è esattamente $\mathbb{Z}$ ed è suriettiva). Ora necessitiamo di un lemma

Lemma (DEL SOLLEVAMENTO). *Se $c : [0,1] \longrightarrow S^1$ è un cammino tale che $c(0) = 1 \in S^1 \subset \mathbb{C}$ allora*

(1) *Esiste un unico cammino $\widetilde{c} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\widetilde{c}(0) = 0$ e che $f \circ \widetilde{c} = c$ ($\widetilde{c}$ si dice* sollevamento *di c).*

(2) *Se $c' : [0,1] \longrightarrow S^1$ è un altro cammino con $c'(0) = 1$ omotopo a c relativamente all'insieme $\{0,1\} \subset \mathbb{C}$ per mezzo dell'omotopia F allora esiste un'unica omotopia $\widetilde{F}$ fra $\widetilde{c}$ e $\widetilde{c'}$ relativamente all'insieme $\{0,1\}$ tale che $f \circ \widetilde{F} = F$ ($\widetilde{F}$ si dice* sollevamento *di F).*

Assumendo il lemma definiamo una mappa $\chi : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$ come

$$\chi([c]) := \widetilde{c}(1)$$

Per il lemma questa mappa è ben definita, infatti il punto $\widetilde{c}(1)$ non dipende da c ma dalla sua classe di omotopia $[c]$ (come affermato dalla (2)). Dimostriamo che si tratta di un morfismo di gruppi: siano $[c], [c'] \in \pi_1(S^1, 1)$ e $m = \widetilde{c}(1)$, $n = \widetilde{c'}(1)$; allora se $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ è il cammino da m a n dato da

$$\gamma(t) = \widetilde{c'}(t) + m$$

allora $f \circ \gamma = c'$ e quindi $\widetilde{cc'}$ è il sollevamento di cc' con punto iniziale 0 e punto terminale $m+n$. In altre parole:

$$\chi([c][c']) = \chi([c])\chi([c'])$$

χ è ovviamente suriettivo: se $n \in \mathbb{Z}$ allora per $c(t) := f(nt)$ si ha $\chi([c]) = n$; infine χ è iniettivo: se $\chi([c]) = 0$ allora $\widetilde{c}(1) = 0$ i.e. $\widetilde{c}$ è un cammino chiuso in $\mathbb{R}$; ma $\mathbb{R}$ è contraibile, quindi questo cammino è omotopo al cammino costante 0, sicché (per la (1) del lemma) $c(t) = f(0) = 1$ e quindi $[c]$ è l'identità di $\pi_1(S^1, 1)$.

Dunque χ è un isomorfismo di gruppi.

Dimostriamo infine il lemma: ne dimostreremo ambo gli enunciati allo stesso tempo. Scriveremo Y per $[0,1]$ oppure per $[0,1] \times [0,1]$, $\varphi : Y \longrightarrow S^1$ per c oppure per F e 0 per $0 \in [0,1]$ oppure per $(0,0) \in [0,1] \times [0,1]$.

Dato che Y è compatto e φ continua, è uniformemente continua (teorema di Heine–Cantor) i.e. esiste $\delta > 0$ tale che, se $|y - y'| < \delta$ allora

$$|\varphi(y) - \varphi(y')| < 1$$

In particolare $\varphi(y) \neq -\varphi(y')$ e quindi è ben definita la funzione

$$\lambda\left(\frac{\varphi(y)}{\varphi(y')}\right)$$

ove $\lambda : S^1 \setminus \{1\} \longrightarrow (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è la funzione che inverte f (determinazione del logaritmo naturale). Possiamo dunque trovare $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall y \in Y \quad |y| < N\delta$$

Poniamo allora

$$\widetilde{\varphi}(y) := \lambda\left(\frac{\varphi(y)}{\varphi\left(\frac{N-1}{N}y\right)}\right) + \lambda\left(\frac{\varphi\left(\frac{N-1}{N}y\right)}{\varphi\left(\frac{N-2}{N}y\right)}\right) + ... + \lambda\left(\frac{\varphi\left(\frac{1}{N}y\right)}{\varphi(0)}\right)$$

La funzione $\widetilde{\varphi} : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ è ovviamente continua e tale che

$$\widetilde{\varphi}(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad f \circ \widetilde{\varphi} = \varphi$$

Dimostriamone ora l'unicità: nel caso $\varphi = c$, se esistesse $\widetilde{c'} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\widetilde{c'}(0) = 0$ e $f \circ \widetilde{c'} = c$ allora $\widetilde{c} - \widetilde{c'}$ sarebbe una funzione continua da Y nel nucleo di f i.e. in $\mathbb{Z}$; ma Y è connesso, quindi anche la sua immagine per una mappa continua lo è, e se ne deduce che $\widetilde{c} - \widetilde{c'}$ è costante, i.e. $\widetilde{c} = \widetilde{c'}$.

Nel caso $\varphi = F$, $\widetilde{F}$ è una omotopia fra c e c': lo è infatti relativamente al sottoinsieme $\{0,1\}$ e, su $0 \times [0,1]$: $f \circ \widetilde{F} = F = 1$, quindi $\widetilde{F}(0 \times [0,1]) \subset \mathbb{Z}$ e quindi, di nuovo per connessione di, $\widetilde{F}(0 \times [0,1]) = 0$. In modo analogo anche $\widetilde{F}(1 \times [0,1])$ è costante.

QED

Come corollario diamo uno dei più famosi teoremi della topologia generale, una cui dimostrazione elementare si rivelerebbe sorprendentemente complicata.

2.5.15 Teorema (DEL PUNTO FISSO DI BROUWER) *Se* $E^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ *è la palla piena di centro l'origine e raggio 1 in* $\mathbb{R}^n$ *allora ogni mappa continua* $f : E^n \longrightarrow E^n$ *ha un punto fisso, i.e. esiste* $x \in E^n$ *tale che* $f(x) = x$.

Dimostreremo questo teorema solo per $n = 2$: il caso generale richiede (seppure nei suoi sviluppi elementari) la nozione di omologia.

Quello che ci serve è il seguente

2.5.16 Lemma *Il cerchio* S^1 *non è retratto di deformazione di* E^1.

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo che esista una ritrazione $r : E^2 \longrightarrow S^1$ tale che $R|_{S^1} = id_{S^1}$; allora, se $i : S^1 \longrightarrow E^2$ è l'inclusione, la mappa in omotopia $r_* i_*$ è l'identità del gruppo $\mathbb{Z}$. Ma è

$$\begin{tikzcd} \pi_1(S^1) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, equal] & \pi_1(E^2) \arrow[r, "r_*"] \arrow[d, equal] & \pi_1(S^1) \arrow[d, equal] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "i_*"] & 0 \arrow[r, "r_*"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

e quindi $r_* = i_* = 0$, il che è assurdo.

QED

Il teorema di Brouwer si dimostra ora in modo agevolissimo: supponiamo che $f : E^2 \longrightarrow E^2$ non abbia nessun punto fisso: quindi per ogni $x \in E^2$, $f(x) \neq x$. Possiamo dunque considerare la retta che passa pe i punti $f(x)$ e x: questa retta incontrerà il cerchio S^1 (che è il bordo di E^2) in due punti; consideriamo fra questi due punti quello più vicino a x (stiamo su un segmento: basta prendere il punto di S^1 che è dall'altra parte di $f(x)$ rispetto a x) e chiamiamolo $r(x)$. Abbiamo così definito una funzione $r : E^2 \longrightarrow S^1$ che è continua (lo è f) e che ristretta a S^1 è l'identità, cioè una ritrazione di E^2 su S^1, che non può esistere per il teorema precedente.

QED

Capitolo 3

METRICHE

In molti esempi la topologia può definirsi in termini del concetto di "distanza fra due punti", e le topologie indotte da distanze caratterizzano gli spazi utilizzati nell'analisi (spazi euclidei, di Hilbert, di Banach etc.). Richiamiamo qui le nozioni fondamentali sugli spazi metrici ponendo l'accento sulle nozioni di completezza e compattezza, e sul loro legame.

3.1 Spazi metrici

3.1.1 Definizione *Se X è un insieme, una funzione $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice* metrica *se*

(1) $d(x, y) = d(y, x)$.

(2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

(3) $d(x, y) \leq d(x, z)+ \leq d(z, y)$.

Uno spazio X equipaggiato di una metrica d si dice spazio metrico.

Ovviamente, in uno spazio metrico (X, d):

$$\left|d(x, z) - d(z, y)\right| \leq d(x, y) \tag{3'}$$

In particolare, $d(x, y) > 0$ per $x \neq y$.

In uno spazio metrico (X, d) gli insiemi

$$B_r(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

si dicono *palle aperte* di centro x e raggio r; è immediato verificare che $\{B_r(x)\}_{x\in X}$ è una sottobase di aperti per una topologia che si dice *indotta dalla metrica*. Ad esempio, la topologia della retta reale è usualmente definita in questo modo, con $d(x, y) = |x - y|$.

Si osservi che, nella topologia indotta dalla distanza, la funzione

$$x \longmapsto d(x, y)$$

è continua per la (3′).

3.1.2 Proposizione *Uno spazio metrico è di Hausdorff.*

DIMOSTRAZIONE: Se $x, y \in X$ sono distinti e hanno distanza positiva $\varepsilon = d(x, y)$ allora sono separabili dalle palle $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$ e $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)$. In effetti se esistesse $z \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)$, avremmo

$$\varepsilon = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

che è assurdo a meno che $\varepsilon = 0$ i.e. $x = y$.

QED

Oltre a $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ con le topologie naturali l'esempio fondamentale è il seguente:

3.1.3 Esempio *L'insieme delle funzioni* $C[0, 1]$ *continue sull'intervallo* $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ *è uno spazio metrico rispetto alla* metrica uniforme

$$d(f, g) := \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

Questo dovrebbe essere ben noto dai rudimenti dell'Analisi: l'unico assioma non immediato è la disuguaglianza triangolare, che segue da

$$\begin{aligned} |f(t) - h(t)| &\leq |f(t) - g(t)| + |g(t) - h(t)| \\ &\leq \max_t |f(t) - g(t)| + \max_t |g(t) - h(t)| \end{aligned}$$

È inoltre facile constatare come la convergenza in questo spazio metrico sia la convergenza uniforme delle funzioni continue.

3.1.4 Esempio *Lo spazio* $B[0, 1]$ *delle funzioni qualsiasi* $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *limitate è uno spazio metrico rispetto alla metrica*

$$d(f, g) := \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|$$

3.1.5 Esempio *Siano (X_n, d_n) spazi metrici per $n \in \mathbb{N}$; sul prodotto*

$$X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

(che è uno spazio topologico con la topologia prodotto) consideriamo la metrica

$$d(x, y) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}$$

(con x_n indichiamo la n-sima componente di x: si rammenti che possiamo vedere x come una funzione $\mathbb{N} \longrightarrow X$, e scriviamo x_n in luogo di $x(n)$).

Questa d è effettivamente una distanza: più in generale, la funzione $f(t) := \frac{t}{1+t}$ verifica sempre la $f(t + s) \leq f(t) + f(s)$; inoltre è chiaro che $d(x, y) = 0$ implica $d_n(x_n, y_n) = 0$ e quindi $x_n = y_n$ dato che le d_n sono distanze, i.e. $x = y$.

Ora questa distanza induce una topologia su X: si tratta esattamente della topologia prodotto delle topologie indotte dalle distanze d_n.

Per vederlo osserviamo intanto che, se $\mathcal{T}_d$ è la topologia indotta dalla distanza d su X e $\mathcal{T}$ è la topologia prodotto, allora $\mathcal{T}_d < \mathcal{T}$: una palla aperta in X è certo aperta in $\mathcal{T}$, dato che le funzioni $x \longmapsto \delta_n(x, x_0)$ (con x_0 fissato) sono continue e quindi $B_r(x_0)$ è certamente aperta.

Viceversa consideriamo la base di intorni di $x_0 \in X$ per $\mathcal{T}$:

$$\left\{ \bigcap_{n\in I} p_n^{-1}(B_r(p_n(x_0))) \right\}_{I\subset\mathbb{N} \text{ finito};r>0}$$

(con $p_n : X \longrightarrow X_n$ denotiamo la proiezione sulla n-sima componente). Basta far vedere che ogni elemento di questa base contiene una palla aperta di $\mathcal{T}_d$; si fissi quindi un elemento della base (i.e. si fissi un sottoinsieme finito $I \subset \mathbb{N}$ e un $r > 0$) e si prenda il massimo intero N dell'insieme I: allora

$$2^N r \leq \frac{r}{1 + r}$$

e quindi $B_r(x_0) \in \bigcap_{n\in I} p_n^{-1}(B_r(p_n(x_0)))$.

Ad esempio, se ciascuno degli X_n è lo spazio metrico $\mathbb{R}$ con la distanza usuale, il prodotto X è lo spazio delle successioni di numeri reali.

Nell'esempio precedente le funzioni $p_n : X \longrightarrow X_n$ non sono soltanto continue, ma hanno anche un'ulteriore proprietà, espressa dalla seguente

3.1.6 Definizione *Se* (X,d) *e* (X',d') *sono spazi metrici, una funzione* $f : X \longrightarrow X'$ *si dice* uniformemente continua *se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un* $\delta_\varepsilon > 0$ *tale che, per ogni scelta di* $x, y \in X$ *tali che* $d(x,y) < \delta_\varepsilon$*, si abbia*

$$d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Ogni funzione uniformemente continua è anche continua (per definizione!) ma non vale il viceversa: ad esempio, il classico teorema di Heine–Cantor afferma che su un compatto in $\mathbb{R}$ ogni funzione continua è uniformemente continua; in generale, su un intervallo qualsiasi, questo non è vero: basti considerare su $[0,1) \subset \mathbb{R}$ la funzione $h(t) = \frac{1}{1-t}$.

3.1.7 Definizione *Se* (X,d) *e* (X',d') *sono spazi metrici, una funzione* $f : X \longrightarrow X'$ *si dice* isometrica *(*isometria*) se*

$$\forall x, y \in X \quad d(f(x), f(y)) = d(x,y)$$

Una isometria è un drastico esempio di funzione uniformemente continua: si noti ad esempio che una isometria è sempre iniettiva:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 0 = d(f(x), f(y)) = d(x,y) \Rightarrow x = y$$

Quindi se $f : X \longrightarrow X'$ è una isometria, X è un "sottospazio metrico" di X': se f è anche suriettiva, gli spazi metrici si dicono *isometrici*. Due spazi isometrici sono equivalenti dal punto di vista della teoria degli spazi metrici: sono inoltre omeomorfi, perché una isometria suriettiva $f : X \longrightarrow X'$ possiede una inversa, che per definizione è pure una isometria:

$$d(f^{-1}(x'), f^{-1}(y')) = d(f(f^{-1}(x')), f(f^{-1}(y'))) = d(x', y')$$

e quindi continua.

Se (X,d) è uno spazio metrico, $x \in X$ e $S \subset X$ definiamo

$$d(x, S) := \inf_{y \in S} d(x,y)$$

(distanza del punto x dall'insieme S).

3.1.8 Teorema *Uno spazio metrico è normale.*

DIMOSTRAZIONE: Se C, C' sono chiusi disgiunti in X dobbiamo trovare due aperti disgiunti che li contengano. Basta porre

$$A := \{x \in X \mid d(x,C) < d(x,C')\} \quad \text{e} \quad A' := \{x \in X \mid d(x,C') < d(x,C)\}$$

Dato che d è continua si tratta di due insiemi aperti. Inoltre $C \subset A$ e $C' \subset A'$: se $x \in C$ allora $0 = d(x, C) < d(x, C')$ ed analogamente per C'. Infine $A \cap A' = \emptyset$: se infatti $x \in A \cap A'$ allora

$$d(x, C) < d(x, C') < d(x, C)$$

(abbiamo usato nell'ordine $x \in A$ e $x \in A'$). Assurdo.

QED

Questo ci permette di dare molti esempi di spazi topologici non metrizzabili: in particolare è naturale chiedersi quando uno spazio topologico è metrizzabile. La risposta è contenuta nel classico

3.1.9 Teorema (URYSHON) *Uno spazio T_1, regolare a base numerabile è metrizzabile.*

DIMOSTRAZIONE: Sappiamo già, lo abbiamo visto come esempio, che un prodotto numerabile di spazi metrizzabili è metrizzabile. Ora usiamo il seguente

3.1.10 Lemma *Se X è uno spazio topologico T_1 e $\mathcal{F}$ è una famiglia di funzioni continue $f : X \longrightarrow Y_f$ che separino punti e chiusi (i.e. per ogni $x \in X$ e ogni chiuso $C \subset X$ esiste una funzione zero in x e identicamente 1 su C) allora la mappa di valutazione $e : X \longrightarrow \prod_{f \in \mathcal{F}} Y_f$ (definita come $e(x)(f) = f(x)$) è un omeomorfismo fra X e $e(X)$.*

DIMOSTRAZIONE: Se $p_f : \prod_{f \in \mathcal{F}} Y_f \longrightarrow Y_f$ è la proiezione sulla f-sima coordinata (che è continua) allora $p_f \circ e = f$ è continua e quindi lo è e; inoltre è una mappa aperta: basta mostrare che l'immagine tramite e di un intorno aperto U di un punto $x \in X$ contiene l'intersezione di $e(X)$ con un intorno di $e(x)$; si scelga per questo un elemento $f \in \mathcal{F}$ tale che $f(x) \notin \overline{f(X \setminus U)}$ (il che è possibile per le ipotesi su $\mathcal{F}$); l'insieme

$$\{y \in \prod_{f \in \mathcal{F}} Y_f \,|\, y_f \notin \overline{f(X \setminus U)}\}$$

è aperta e la sua intersezione con $e(x)$ è ovviamente contenuta in $e(U)$. Dunque e è una mappa aperta.

Infine, dato che i punti di X sono chiusi, è chiaro che e è iniettiva.

QED

Quello che abbiamo in mente è applicare questo lemma trovando per questo una famiglia numerabile di funzioni continue definite da X a uno spazio metrico Y_f che separi i punti dai chiusi: ne dedurremo che X sarà omeomorfo ad uno spazio metrico per tramite della mappa di valutazione, e quindi avremo la tesi del teorema di Uryshon. Tutto quello che ci occorre è il seguente teorema di immersione, interessante di per sé.

3.1.11 Teorema *Uno spazio T_1 regolare a base numerabile è omeomorfo a un sottospazio del cubo di Hilbert, i.e. del prodotto topologico numerabile $[0,1]^\omega$ di copie dell'intervallo $[0,1]$ (che è uno spazio metrico perché lo è $[0,1]$).*

DIMOSTRAZIONE: $[0,1]^\omega$ è lo spazio delle funzioni $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1]$; quindi basta dimostrare che esiste una famiglia numerabile di funzioni continue $X \longrightarrow [0,1]$ che separi i punti dai chiusi di X.

Se $\mathcal{B}$ è una base numerabile per la topologia di X e

$$\mathcal{A} := \{(U,V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} \,|\, \overline{U} \subset V\}$$

allora $\mathcal{A}$ è numerabile e per ogni $(U,V) \in \mathcal{A}$ possiamo scegliere una funzione continua che sia zero su U e 1 su $X \setminus U$ (lemma di Uryshon); sia $\mathcal{F}$ la famiglia di tutte queste funzioni continue, Ovviamente $\mathcal{F}$ è numerabile e non ci resta che mostrare la proprietà di separazione. Se $C \subset X$ è chiuso e $x \in X \setminus C$ scegliamo $V \in \mathcal{B}$ tale che $x \in V \subset X \setminus C$ ($\mathbb{C}$ è una base) e $U \in \mathcal{B}$ tale che $x \in \overline{U} \subset V$; allora $(U,V) \in \mathcal{A}$ e, se f è il corrispondente elemento di $\mathcal{F}$, allora $f(x) = 0$ e $f|_C = 1$.

QED

3.2 Spazi metrici completi

Il concetto di uniforme continuità non ha luogo negli spazi topologici generali, ed è mediato dalla teoria delle funzioni in $\mathbb{R}$: un altro concetto che si ritrova in questa teoria è quello di *successione di Cauchy*.

Consideriamo una successione $\{x_n\}$ in uno spazio metrico (X,d) che sia convergente al punto x: intuitivamente i punti x_n si avvicinano (al crescere di n) a x, quindi le loro distanze reciproche dovrebbero divenire sempre più piccole: in effetti

$$d(x_n, x_m) \le d(x_n, x) + d(x, x_n)$$

Dato che x_n converge a x se e solo se $d(x, x_n)$ converge a zero abbiamo che

$$(C) \qquad \lim_{n,m \longrightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0$$

Una successione che goda della proprietà (C) si dice *di Cauchy*. Una successione di Cauchy che ammette dei punti limite converge, ed il limite è unico.

Ad esempio, in $\mathbb{R}$, ogni successione di Cauchy converge: si dice che $\mathbb{R}$ è completo nel senso della

3.2.1 Definizione *Uno spazio metrico è completo se ogni successione di Cauchy converge.*

In generale non è vero: basti prendere $\mathbb{Q}$ con la metrica $d(q,q')=|q-q'|$: la successione $(1+\frac{1}{n})^n$ non converge ad alcun numero razionale, pur essendo di Cauchy. Cantor costruì i numeri reali proprio aggiungendo ai razionali i limiti delle successioni di Cauchy: questo procedimento può darsi per ogni spazio metrico.

3.2.2 Esempio *Il classico teorema di Weierstrass (del quale dimostreremo una profonda generalizzazione) afferma che lo spazio delle funzioni $P:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ polinomiali rispetto alla metrica*

$$d(P,Q)=\sup_{t\in[0,1]}|P(t)-Q(t)|$$

è denso in $C[0,1]$, quindi non è completo.

3.2.3 Esempio *Lo spazio $C[a,b]$ delle funzioni continue $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ è completo: infatti se $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy, allora per ogni $\varepsilon>0$ e per ogni $x\in[a,b]$, esiste $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tale che se $n,m>N_\varepsilon$ si abbia*

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

Quindi la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente ed il suo limite è dunque una funzione continue $f\in C[a,b]$. Allora per $m\longrightarrow\infty$ nella disugualianza precedente troviamo la

$$|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$$

e quindi che f è il limite di $\{f_n\}$ nella metrica di $C[a,b]$.

Si noti che la completezza di uno spazio metrico è una nozione metrica e non topologica: se consideriamo lo spazio $[0,1)$, questo non è completo: la successione $1-\frac{1}{n}$ è di Cauchy ma si guarda dal convergere; lo spazio $[0,\infty)$ (sempre con la metrica abituale) è completo (facile esercizio). Ora, questi due spazi sono omeomorfi. La funzione

$$h(t)=\frac{1}{1-t}$$

già considerata è in effetti biunivoca e bicontinua fra $[0,1)$ e $[0,\infty)$; ma non può essere una isometria (dato che la completezza è una proprietà che si conserva per isometrie). Si osservi inoltre che la successione di Cauchy $1-\frac{1}{n}$ viene trasformata da h nella successione $n-1$ che non è di Cauchy.

Tutti questi accidenti derivano dall'essere h non uniformemente continua:

3.2.4 Proposizione *Se $f:X\longrightarrow X'$ è una funzione uniformemente continua fra spazi metrici allora l'immagine, tramite f di una successione di Cauchy in X, è una successione di Cauchy in X'; inoltre se f è un omeomorfismo e sia f che f^{-1} sono uniformemente continue allora X è completo se e solo se X' lo è.*

(La dimostrazione si riduce ad applicare le definizioni).

3.2.5 Teorema *Se (X,d) è uno spazio metrico allora esiste uno spazio metrico $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ completo ed una isometria $i: X \longrightarrow \widetilde{X}$ tale che $i(X)$ è denso in X.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo l'insieme $\mathcal{C}$ delle successioni di Cauchy di X, e su di esso la relazione

$$(\dagger) \qquad \{x_n\}\mathcal{R}\{x'_n\} \iff \lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_n,x'_n)=0$$

Si tratta evidentemente di una relazione di equivalenza (la transitività segue da $d(x_n,z_n) \leq d(x_n,y_n)+d(y_n,z_n) = 0$) e quindi possiamo considerare l'insieme quoziente $\widetilde{X}$ delle classi di equivalenza di $\mathcal{C}$ modulo $\mathcal{R}$.

Definiamo su $\widetilde{X}$ una metrica $\widetilde{d}$: se $\widetilde{x},\widetilde{y}\in\widetilde{X}$, e se $\{x_n\}\in\widetilde{x}$ e $\{y_n\}\in\widetilde{y}$ allora poniamo

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y}) := \lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_n,y_n)$$

Questo limite esiste perché la successione $\{d(x_n,y_n)\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m) &\leq d(x_n,y_m)+d(y_m,y_n)-d(x_m,y_m) \\ &< d(x_n,y_m)-d(x_m,y_m)+\varepsilon \\ &\leq d(x_n,x_m)+d(x_m,y_m)-d(x_m,y_m)+\varepsilon < \varepsilon+\varepsilon \end{aligned}$$

e quindi converge, ed è ben definito perché, se $\{x'_n\}\in\widetilde{x}$ e $\{y'_n\}\in\widetilde{y}$ allora (usando la disuguaglianza triangolare e la $(\dagger)$)

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_n,y_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty}(d(x_n,y_n)+d(x_n,x'_n)+d(y_n,y'_n)) \geq \lim_{n\longrightarrow\infty} d(x'_n,y'_n)$$

e, viceversa (scambiando i ruoli delle variabili senza apice e quelle con apice):

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} d(x'_n,y'_n) \geq= \lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_n,y_n)$$

i.e. il valore $\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})$ non dipende dalle successioni scelte in $\widetilde{x}$ e $\widetilde{y}$, ma solo dalla classe di equivalenza.

Che $\widetilde{d}$ sia una distanza segue passando al limite le proprietà della distanza d (usando i rappresentanti $\{x_n\}\in\widetilde{x}$ e mostrando di nuovo che il calcolo non dipende da questa scelta ma solo dalla classe).

Che lo spazio $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ sia completo segue dalla definizione: se $\{\widetilde{x}_n\}$ è di Cauchy, sia $\{x_m^{(n)}\}\in\widetilde{x}_n$; allora il limite di $\{\widetilde{x}_n\}$ è la classe $\widetilde{x}\in\widetilde{X}$ che contiene la successione $\{x_n^{(n)}\}$. Infatti

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\widetilde{d}(\widetilde{x}_n,\widetilde{x}) = \lim_{n,m\longrightarrow\infty} d(x_m^{(n)},x_m^{(m)}) = \lim_{n,m\longrightarrow\infty}\widetilde{d}(\widetilde{x}_n,\widetilde{x}_m)=0$$

(dato che $\{\widetilde{x}_n\}$ è di Cauchy).

Dimostriamo ora che X si immerge isometricamente in un sottospazio denso di $\widetilde{X}$: l'isometria sarà $i : X \longrightarrow \widetilde{X}$:

$$i(x) := \{x_n \,|\, \forall n \in \mathbb{N}\ x_n = x\}$$

cioè la mappa che associa a x la successione costante $\{x\}$. Che si tratti di una isometria è banale:

$$\widetilde{d}(i(x), i(y) = \lim_{n \longrightarrow \infty} d(x, y) = d(x, y)$$

Dimostriamo che $i(X)$ è denso; sia $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ e $\{x_n\} \in \widetilde{x}$. Ovviamente

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}, i(x_n)) = \lim_{m \longrightarrow \infty} d(x_m, x_n)$$

e, dato che $\{x_n\}$ è di Cauchy, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n, m > n_\varepsilon \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Al limite per $m \longrightarrow \infty$ otteniamo

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}, i(x_n)) < \varepsilon$$

Quindi $\widetilde{x} = \lim_n i(x_n)$; inoltre questo limite (i.e. $\widetilde{x}$) appartiene alla chiusura di $i(X)$.

Dunque $i(X)$ è denso.

QED

Notiamo che, se (X, d) è completo allora

(1) Se $Y \subset X$ è un sottospazio, è uno spazio metrico rispetto a $d|_Y$, ed è completo se e solo se è chiuso.

(2) Se $f : X \longrightarrow X'$ è una isometria allora $f(X)$ è chiuso in X'.

Osserviamo inoltre che lo spazio $\widetilde{X}$ costruito nel teorema precedente è unico a meno di isometrie suriettive: infatti se (X', d') è uno spazio metrico completo nel quale X si immerge isometricamente per mezzo della $j : X \longrightarrow X'$, la funzione $j \circ i^{-1} : X \longrightarrow X$ è una isometria dal sottoinsieme denso $i(X) \subset \widetilde{X}$ al sottoinsieme denso $j(X) \subset X'$. Esiste quindi un unico modo di estenderla ad una isometria fra $\widetilde{X}$ e X' suriettiva.

Infatti ogni punto $x' \in X'$ è limite di una successione di punti di $j(X)$, e ogni punto $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ è limite di una successione $\{i(x_n)\}$ di punti di $i(X)$. Poniamo quindi

$$\begin{aligned} f : \widetilde{X} &\longrightarrow X' \\ \widetilde{x} &\longmapsto \lim_n j(i(x_n)) \end{aligned}$$

Si tratta ovviamente di una mappa biunivoca, ed isometrica:

3.2.6 Definizione *Lo spazio* $\widetilde{X}$ *associato a* X *si dice il suo* completamento.

Un risultato sugli spazi completi che non si può passare sotto silenzio è il *principio delle contrazioni*, largamente usato nella risoluzione di equazioni (ad esempio per dimostrare i teoremi di esistenza per equazioni differenziali ordinarie).

3.2.7 Definizione *Una funzione* $T : X \longrightarrow X$ *di uno spazio metrico in sé si dice* contrazione *se esiste una costante positiva* $c < 1$ *tale che, per ogni* $x, y \in X$*:*

$$d(T(x), T(y)) \leq cd(x, y)$$

Una tale funzione "accorcia" le distanze fra i punti di X.

3.2.8 Teorema (PRINCIPIO DELLE CONTRAZIONI) *Se* (X, d) *è uno spazio metrico completo e* $T : X \longrightarrow X$ *una contrazione allora esiste* $x_0 \in X$ *tale che* $T(x_0) = x_0$*.*

DIMOSTRAZIONE: Se $x \in X$ poniamo: $x_1 = T(x)$, $x_2 = T^2(x) = T(x_1)$,... in modo da ottenere una successione $\{x_n = T^n(x)\}$. Dimostriamo che si tratta di una successione di Cauchy: infatti

$$\begin{aligned}
d(x_1, x_2) =& d(T(x), T(x_1)) \leq cd(x, x_1) = cd(x, T(x)) \\
d(x_2, x_3) =& d(T(x_1), T(x_2)) \leq cd(x_1, x_2) \leq c^2 d(x, T(x)) \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
d(x_n, x_{n+1}) \leq& c^n d(x, T(x))
\end{aligned}$$

Quindi, supponendo ad esempio $m > n$:

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) \leq& d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \\
\leq& (c^n + c^{n+1} + \dots + c^{m-1}) d(x, T(x)) \\
=& \frac{c^n - c^m}{1 - c} d(x, T(x))
\end{aligned}$$

Ma $c < 1$, sicché per $n, m \longrightarrow \infty$ otteniamo $d(x_n, x_m) \longrightarrow 0$.

Per completezza di X la successione $\{x_n\}$ converge dunque ad un punto x_0. Ora:

$$\begin{aligned}
d(x_0, T(x_0)) \leq& d(x_0, x_n) + d(x_n, T(x_0)) = d(x_0, x_n) + d(T(x_{n-1}), T(x_0)) \\
\leq& d(x_0, x_n) + cd(x_{n-1}, x_0) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

i.e. $d(x_0, T(x_0)) = 0$ e quindi $T(x_0) = x_0$.

QED

Le applicazioni al problema di Cauchy per le equazioni differenziali ordinarie di questo teorema dovrebbero essere note dai rudimenti dell'Analisi: diamo qui alcune applicazioni alle classiche equazioni integrali.

3.2.9 Esempio *L'*equazione integrale di Fredholm di seconda specie *è l'equazione non omogenea*

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)f(y)dy + \varphi(x)$$

dove $K : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue (K si dice il nucleo dell'equazione integrale*). In particolare, dato che è continua su un compatto, $|K(x,y)| \leq M$ per una certa costante $M \in \mathbb{R}$. Consideriamo la funzione $T : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$ data da, se $g \in C[a,b]$*

$$T(f)(x) := \lambda \int_a^b K(x,y)f(y)dy + \varphi(x)$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} d(T(f_1), T(f_2)) &= \max_{x\in[a,b]} |T(f_1)(x) - T(f_2)(x)| \\ &\leq |\lambda| M(b-a) \max_{x\in[a,b]} |f_1(x) - f_2(x)| \end{aligned}$$

e quindi per $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ la mappa T è una contrazione nello spazio metrico completo $C[a,b]$. Dunque l'equazione di Fredholm ha, in questo caso, una unica soluzione per il principio delle contrazioni.

3.2.10 Esempio *L'*equazione integrale di Volterra *è un'equazione del tipo*

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x,y)f(y)dy + \varphi(x)$$

con $x \in [a,b]$ e le stesse ipotesi su f, K e φ del caso precedente: si potrebbe considerare questa equazione un caso particolare della precedente, definendo $\widetilde{K}(x,y) = 0$ se $y > x$ e considerando l'equazione di Fredholm corrispondente di nucleo $\widetilde{K}$. Tuttavia in questo caso possiamo svincolarci dalla limitazione $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, se notiamo che l'operatore

$$V(f)(x) := \lambda \int_a^x K(x,y)f(y)dy + \varphi(x)$$

non è una contrazione, ma una sua opportuna potenza T^n lo è: infatti per ogni $f, g \in C[a,b]$

$$|V(f)(x) - V(g)(x)| \leq |\lambda| M(x-a) \max_{y\in[a,x]} |f(y) - g(y)|$$

con $M = \max K(x,y)$. *Da questa segue la*

$$|V(V(f))(x) - V(V(g))(x)| \leq |\lambda|^2 M^2 \frac{(x-a)^2}{2} \max_{y\in[a,x]} |f(y)-g(y)|$$

ed in generale la

$$|V^n(f)(x) - V^n(g)(x)| \leq |\lambda|^n M^n \frac{(x-a)^n}{n!} \max_{y\in[a,x]} |f(y)-g(y)|$$

Dato che $(x-a) < (b-a)$ *basta prendere* n *tale che* $|\lambda|^n M^n (x-a)^n \max_{y\in[a,x]} |f(y)-g(y)| < n!$ *(cosa sempre possibile) per avere che* V^n *è una contrazione. Allora esiste un'unica* $f \in C[a,b]$ *tale che* $V^n(f) = f$, *per cui*

$$V(f) = V(V^n(f)) = V^n(V(f)) = V^n(g)$$

dove $g = V(f)$: *dato che* V^n *è una contrazione,* $\{V^n(g)\}$ *converge al punto fisso* f *di* V^n *qualsiasi sia* g, *e quindi, passando al limite per* $n \longrightarrow \infty$ *nell'equazione precedente, troviamo* $V(f) = f$.

3.3 Categorie di spazi metrici

Il seguente teorema esprime una proprietà cruciale degli spazi completi, che sarà ampliamente sfruttata nel séguito:

3.3.1 Teorema (BAIRE) *Se* (X,d) *è uno spazio metrico completo e* $\{A_n\}$ *è una successione di aperti densi in* X *allora* $\bigcap_n A_n$ *è un insieme denso in* X.

DIMOSTRAZIONE: Sia U un aperto in X, $x_1 \in A_1 \cap U$ e B_1 la palla di centro x_1 (e raggio $r_1 > 0$) contenuta in $A_1 \cap U$. Per densità di A_2 in X deve esistere $x_2 \in A_2 \cap B_1$ e, dato che A_2 è aperto, deve esistere una B_2 palla di centro x_2 (e raggio $r_2 > 0$ contenuta in A_2. Possiamo supporre (a meno di rimpicciolire B_2) che

$$r_2 < \frac{1}{2} r_1 \qquad \text{e} \qquad r_2 < r_1 - d(x_!, x_2)$$

Con queste condizioni si ha che $\overline{B_2} \subset B_1$.

Iteriamo questa costruzione ottenendo una successione di palle $\{B_n\}$ tali che $\overline{B_n} \subset B_{n-1}$ e $B_n \subset A_n$, i cui raggi r_i siano una successione di numeri reali che tende a zero.

Consideriamo anche la successione dei centri $\{x_n\}$ di queste palle: per costruzione, dato $N \in \mathbb{N}$, per ogni $n, m > N$ si ha che $x_n, x_m \in B_N$, i.e.

$$d(x_n, x_m) \leq 2r_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Quindi $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy e, per completezza di X, deve convergere ad un punto $x \in X$. Dato che $x_n \in B_{N+1}$ (se $n > N$) allora $x \in \overline{B_{N+1}} \subset B_N \subset A_N$. In altre parole, per ogni $N \in \mathbb{N}$: $x \in A_n$, i.e. $x \in \cap_N A_N$; ora si rammenti che ogni B_N era contenuta in $A_N \cap U$, quindi, in particolare, $x \in U$.

Dunque abbiamo dimostrato che, per ogni aperto U, esiste $x \in \cap_N A_N$ tale che $x \in U$. Cioè $\cap_N A_N$ è denso in X.

QED

Osserviamo che, dalla dimostrazione del teorema di Baire, traiamo la seguente generalizzazione del principio di Cantor dei *segmenti nidificati* in $\mathbb{R}$: diciamo che una successione di palle aperte $\{B_n\}$ è *nidificata* se $\overline{B_n} \subset B_{n+1}$ e se la successione dei raggi converge a zero.

3.3.2 Teorema *Se $\{B_n\}$ è una successione di palle aperte nidificate in uno spazio metrico completo allora esiste un unico punto interno in $\bigcap_n B_n$.*

DIMOSTRAZIONE: Che esista un tale punto interno segue dalla dimostrazione del teorema precedente: se x' è un altro punto interno dell'intersezione delle palle $\{B_n\}$ allora

$$d(x, x') \leq d(x, x_n) + d(x_n), x') < \varepsilon + \varepsilon$$

ove $\{x_n\}$ è la successione dei centri delle palle $\{B_n\}$.

QED

Come nel caso reale, questa proprietà caratterizza la completezza:

3.3.3 Teorema *Se (X, d) è uno spazio metrico tale che ogni successione di palle aperte nidificate possiede intersezione non vuota allora X è completo.*

DIMOSTRAZIONE: Se $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in X, possiamo associarle una successione di palle aperte nidificate $\{B_n\}$ come segue: scegliamo una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ imponendo la condizione

$$\forall m > 0 \quad d(x_{n_k+m}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k}$$

Allora definiamo B_k come la palla aperta di centro x_{n_k} e raggio $1/2^{k-1}$. La successione $\{B_k\}$ è nidificata: infatti $B_k \subset \overline{B_{k+1}}$ dato che

$$\forall x \in \overline{B_{k+1}} \quad d(x, x_{n_k}) \leq d(x, x_{n_{k+1}}) + d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

(si ricordi che il centro di B_k è x_{n_k}). Inoltre, dato che $\{x_n\}$ è di Cauchy, i raggi delle B_k tendono a zero.

Ora, per ipotesi, esiste x_0 comune a tutte le palle; evidentemente si tratta del limite della successione: infatti, dato che la successione $\{x_n\}$ è di Cauchy:

$$d(x_0, x_n) \leq d(x_0, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n) < \frac{1}{2^{k-1}} + \varepsilon$$

QED

3.3.4 Definizione *Un sottoinsieme $S \subset X$ di uno spazio metrico X si dice:*

(1) raro *(o* mai denso*) se $X \setminus \overline{S}$ è denso;*

(2) di prima categoria *(o* magro*) se è unione di una famiglia numerabile di insiemi rari;*

(3) di seconda categoria *se non è di prima categoria.*

Notiamo che *S è raro se e solo se non contiene aperti non vuoti.* Con questa terminologia classica possiamo dare il

3.3.5 Teorema (della Categoria di Baire) *Se X è uno spazio metrico completo allora non contiene sottoinsiemi aperti di prima categoria (eccetto il vuoto).*

Dimostrazione: Sia $\{R_n\}$ una collezione numerabile di sottoinsiemi rari di X: allora, per definizione, $A_n := X \setminus \overline{R_n}$ sono aperti densi; se U è un aperto qualsiasi, per il teorema di Baire, esiste $x \in U$ tale che $x \in \bigcap_n A_n = X \setminus \bigcup_n \overline{R_n}$, i.e. per ogni n, $x \notin \overline{R_n}$ ed in particolare $x \notin R_n$. Ne segue che U non può essere contenuto in $\bigcup_n R_n$.

QED

In altri termini *in uno spazio metrico completo non esistono aperti (non vuoti) che siano l'unione di una famiglia numerabile di sottoinsiemi rari.*

3.3.6 Esempio *$\mathbb{Q}$ con la metrica abituale è di prima categoria; il suo completamento $\mathbb{R}$ è di seconda categoria, dato che è completo.*

Come conseguenza del teorema di Baire possiamo ottenere la non numerabilità dell'insieme dei numeri reali, che è uno spazio metrico completo:

3.3.7 Corollario *I numeri reali sono un insieme non numerabile.*

Dimostrazione: Supponiamo che $\mathbb{R}$ sia numerabile: in questo caso potremmo trovare una successione (x_n) i cui termini siano tutti i numeri reali; in altre parole

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$$

i numeri reali sarebbero esattamente gli elementi di questa successione; ma è ovvio che l'insieme formato da un singolo elemento è raro (possiede un unico punto di accumulazione: se stesso, quindi i numeri reali che non sono suoi punti di accumulazione sono tutti quelli diversi da lui, che formano ovviamente un insieme denso). Questo contraddice il teorema di Baire.

QED

Questi risultati sono notevoli perché traggono conclusioni puramente topologiche (densità) da ipotesi metriche (completezza).

Ovviamente ci sono spazi che non sono completi ma che non sono di prima categoria: ad esempio se (X,d) è completo e $A \subset X$ è un aperto il cui complementare $X \setminus E$ non sia aperto allora A con la metrica indotta non è completo, ma non è di prima categoria: in effetti esiste una metrica compatibile con la topologia di A che lo rende completo, ad esempio

$$d'(x,y) := d(x,y) + \left| \frac{1}{d(x, X \setminus A)} - \frac{1}{d(y, X \setminus A)} \right|$$

3.4 Spazi metrici compatti

In generale uno spazio metrico non sarà compatto (basti pensare a $\mathbb{R}^n$) né localmente compatto (ad esempio $C[0,1]$ non lo è): è un risultato notevole che sia sempre paracompatto e vogliamo qui dimostrarlo anche come applicazione della teoria del transfinito alla topologia generale.

3.4.1 Teorema (STONE) *Uno spazio metrico (X,d) è paracompatto.*

DIMOSTRAZIONE: (M.E. RUDIN) Consideriamo un ricoprimento aperto $\{A_\alpha\}$ di X e supponiamo che gli indici α di questo ricoprimento siano numeri ordinali[1]. Sia $B_r(x) = \{y \in X \mid d(x,y) \le r\}$ la palla di centro x e raggio r in X: per ogni intero positivo n definiamo induttivamente su n l'insieme $D_{\alpha,n}$ come l'unione delle sfere $B_{\frac{1}{2}^n}(x)$ tali che

(1) α è il più piccolo ordinale tale che $x \in A_\alpha$;

(2) se $j < n$ allora $x \notin D_{\beta,j}$;

(3) $B_{\frac{3}{2^n}}(x) \subset A_\alpha$;

Abbiamo quindi una famiglia $\{D_{\alpha,n}\}_{n>0,\alpha}$ di aperti di X: dimostriamo che si tratta di un raffinamento localmente finito di $\{A_\alpha\}$.

[1] Ricordiamo che è sempre possibile: ogni insieme bene ordinato è isomorfo a un numero ordinale.

Che si tratti di un raffinamento di $\{A_\alpha\}$ è ovvio dalla definizione: per vedere che $\{D_{\alpha,n}\}$ è un ricoprimento di X basta notare che, se $x\in X$ e se α è il minimo ordinale per cui $x\in C_\alpha$ allora esiste n abbastanza grande perché valga la (3) (essendo C_α aperto) e quindi, per la (2), esiste $j\geq n$ tale che $x\in D_{\beta,j}$.

Dimostriamo infine che $\{D_{\alpha,n}\}$ è localmente finito. Sia $x\in X$ e sia α il più piccolo ordinale tale che $x\in D_{\alpha,n}$ per qualche n; scegliamo j tale che

$$B_{\frac{1}{2^j}}(x)\subset D_{\alpha,n}$$

Allora basta dimostrare che

(a) Se $i\geq n+j$ allora $B_{2^{-n-j}}(x)$ non interseca nessun $D_{\beta,i}$;

(b) Se $i<n+j$ allora $B_{2^{-n-j}}(x)$ interseca $D_{\beta,i}$ per al più un β.

Dimostriamo (a): dato che $i>n$, per (2) ciascuna palla di raggio 2^{-i} coinvolta nella definizione di $D_{\beta,i}$ ha centro y fuori da $D_{\alpha,n}$, e dato che

$$B_{\frac{1}{2^j}}(x)\subset D_{\alpha,n}$$

allora $d(x,y)\leq 2^{-j}$; ma $i\geq j+n$ e $n+j\geq j+1$, sicché

$$B_{\frac{1}{2^{n+j}}}(x)\cap B_{\frac{1}{2^i}}(y)=\emptyset$$

Dimostriamo infine (b): siano $p\in D_{\beta,i}$, $q\in D_{\gamma,i}$ e $\beta<\gamma$; vogliamo mostrare che

$$\frac{1}{2^{n+j-1}}<d(p,q)$$

Ma esistono $y,z\in X$ tali che $p\in B_{2^{-j}}(y)\subset D_{\beta,i}$ e $q\in B_{2^{-i}}(z)\subset D_{\gamma,i}$ e, per la (3):

$$B_{\frac{3}{2^i}}(y)\subset C_\beta$$

da cui (per la (2)) $z\notin C_\beta$. Ne segue che

$$\frac{1}{2^{n+j-1}}<\frac{1}{2^i}\leq d(p,q)$$

QED

In molti esempi, specie negli spazi di funzioni, una proprietà cruciale è la *separabilità*:

3.4.2 Definizione *Uno spazio topologico si dice* separabile *se contiene un sottoinsieme denso e numerabile.*

L'esempio ispiratore è ovviamente quello di $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Più in generale, ogni spazio topologico X a base numerabile è separabile: infatti se $\{A_n\}$ è una base numerabile di aperti, per l'assioma di scelta possiamo dare una successione $S = \{x_n\}$ di elementi di X tali che $x_n \in A_n$: evidentemente $\overline{S} = X$; infatti se $x \in X$ esiste un intorno U_n di x che contiene $x_n \in S$.

Tuttavia non è vero il viceversa: consideriamo su un insieme qualsiasi X la *topologia cofinita* $\mathcal{C}_X$; si tratta della famiglia degli insiemi il cui complementare è un insieme finito (si dimostra facilmente che si tratta di una topologia). Allora, se X è più che numerabile, la topologia cofinita non può avere base numerabile, e tuttavia è separabile: infatti ogni sottoinsieme infinito di X è denso (per definizione), quindi in particolare ogni sottoinsieme numerabile.

3.4.3 Teorema *Se X è uno spazio topologico T_1 allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(1) *X è metrizzabile e separabile;*

(2) *X è regolare a base numerabile;*

(3) *X è omeomorfo ad un sottospazio del cubo di Hilbert.*

Dimostrazione: (1) implica (2): se $D \subset X$ è denso e numerabile allora la famiglia numerabile

$$\mathcal{B} := \{B_{\frac{1}{n}}(x)\}_{x\in D, n\in\mathbb{N}}$$

è una base di aperti: infatti per ogni aperto $A \subset X$ e per ogni $x_0 \in A$ esiste un $R > 0$ tale che $B_R(z_0) \subset A$ e quindi, se $x \in D$ è tale che $d(x, x_0) < \frac{1}{n} \leq \frac{R}{2}$ allora $x_0 \in B_{\frac{1}{n}}(x) \subset B_R(x) \subset A$, sicché ciascun punto di A appartiene ad un elemento di $\mathcal{B}$ contenuto in A.

(2) implica (3) per il teorema di metrizzabilità di Uryshon.

Infine il cubo è metrizzabile ed ha base numerabile (la ha $[0, 1]$) sicché ogni suo sottospazio possiede queste proprietà[2]: dunque (3) implica (1).

QED

La situazione è molto più semplice nel caso compatto:

3.4.4 Proposizione *Uno spazio metrico compatto è separabile.*

Dimostrazione: Per ogni $\varepsilon > 0$ la famiglia

$$\{B_\varepsilon(x)\}_{x\in X}$$

[2]Si noti comunque che un sottospazio di uno spazio separabile non è necessariamente separabile.

è un ricoprimento aperto di X, e quindi esiste sottoricoprimento indicizzato da un insieme finito $X_\varepsilon \subset X$. Ponendo

$$D = \bigcup_{n\geq 1} X_{\frac{1}{n}}$$

otteniamo un insieme numerabile che è denso, dato che per ogni $x \in X$ e $n \geq 1$ esiste $x' \in X_{\frac{1}{n}}$ tale che $d(x, x') < 1/n$.

QED

Se X è compatto metrizzabile, ogni successione possiede un insieme di punti limite, e quindi ogni successione di Cauchy converge:

3.4.5 Proposizione *Uno spazio metrizzabile compatto è completo.*

Un sottoinsieme compatto in $\mathbb{R}^n$ è chiuso e limitato: ci chiediamo se una proprietà analoga non valga anche per gli spazi metrici qualsiasi; intanto è ovvio che un compatto K in uno spazio metrico (X, d) è chiuso e limitato: è chiuso perché uno spazio metrico è di Hausdorff (un compatto in uno spazio di Hausdorff è chiuso); è limitato perché la funzione distanza è continua e quindi, fissato $x_0 \in X$: $x \longmapsto d(x_0, x)$ ristretta al compatto K assume un massimo e minimo.

3.4.6 Definizione *Uno spazio metrico (X, d) si dice* totalmente limitato *se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia finita di punti $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ tali che, per ogni $x \in X$ esiste un k_ε tale che $d(x, x_{k_\varepsilon}) < \varepsilon$.*

Equivalentemente, uno spazio totalmente limitato si può ricoprire con una famiglia finita di palle di raggio ε.

3.4.7 Teorema *Uno spazio metrico (X, d) è compatto se e solo se è completo e totalmente limitato.*

DIMOSTRAZIONE: Se K è compatto è totalmente limitato e completo in modo ovvio. Viceversa, se X è completo e totalmente limitato, dimostriamo che ogni successione $\{x_n\}$ ammette una sottosuccessione convergente; ricopriamo X con palle di raggio 1 (totale limitatezza) e scegliamone una B_1 che contenga infiniti elementi della successione (deve esistere per forza, dato che le palle ricoprono X). Ora, di nuovo per totale limitatezza, ricopriamo X con sfere di raggio $1/2$ e scegliamone una B_2 che contenga infiniti elementi della successione, ed iteriamo il procedimento per ogni n (assioma di scelta). Abbiamo così una successione di palle $\{B_k\}$ di raggi $1/k$ tale che $B_1 \cap ... \cap B_k$ contiene infiniti punti della successione.

Possiamo allora scegliere, fissato n, un n_k tale che $n_k > n_{k-1}$ e $x_{n_k} \in B_1 \cap ... \cap B_k$; questo determina la scelta di una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ che è di Cauchy:

$$d(x_{n_k}, x_{n_h}) \leq \frac{2}{N}$$

se $N \leq k, h$. Per completezza di X si ha la convergenza.

QED

3.5 Teorema di Ascoli–Arzelà

L'applicabilità pratica del teorema con cui si è conclusa la sezione precedente, è assai limitata: tuttavia è importante determinare la compattezza di uno spazio, perché nelle applicazioni si costruiscono oggetti come limiti di sottosuccessioni: un teorema classico di teoria delle funzioni che serve a questo scopo è il teorema di Ascoli–Arzelà.

3.5.1 Definizione *Un sottoinsieme $M \subset C(X)$ dell'algebra delle funzioni continue definite su uno spazio metrico compatto a valori reali si dice* equicontinuo *se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che*

$$\forall x, y \in X \quad d(x, y) < \delta_\varepsilon \Rightarrow \forall f \in M \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

e si dice equilimitato *se esiste un $N \geq 0$ tale che, per ogni $f \in M$: $d(f, 0) < N$ (ovvero* $\sup |f(x)| < N$*).*

Il seguente teorema caratterizza i sottoinsiemi a chiusura compatta di $C(X)$ come equicontinui ed equilimitati.

3.5.2 Teorema (ASCOLI–ARZELÀ) *Se (X, d) è uno spazio metrico compatto e $\{f_n\} \subset C(X)$ una successione equicontinua ed equilimitata allora possiede una sottosuccessione convergente.*

DIMOSTRAZIONE: Dato che X è compatto metrizzabile, è separabile: sia $D \subset X$ un denso numerabile e supponiamo che $D = \{x_n\}$. Ora la chiusura dell'insieme $\{f_n(x_1)\}$ è compatta, quindi esiste una sottosuccessione $\{f_{n(1)}(x_1)\}$ convergente. Ora consideriamo la successione $\{f_{n(1)}(x_2)\}$ e scegliamone una sottosuccessione $\{f_{n(2)}(x_2)\}$ convergente. Iterando il procedimento otteniamo una successione $\{f_{n(k)}\}$ in $C(X)$ tale che le successioni numeriche

$$f_{n(k)}(x_k)$$

sono convergenti.

La sottosuccessione diagonale $f_{n(n)}(x_k)$ converge allora per ogni $x_k \in D$; si definisca

$$g_n := f_{n(n)}$$

Dimostriamo che si tratta di una successione di Cauchy, e quindi che converge (per compattezza e quindi completezza dello spazio).

Dato che le f_n sono equicontinue lo sono anche le g_n, e quindi, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste m_ε tale che

$$\forall x, x' \in X \quad d(x, x') < \frac{1}{m_\varepsilon} \Rightarrow |g_n(x) - g_n(x')| < \varepsilon$$

Ma X è compatto, quindi totalmente limitato, dunque esiste un insieme finito $\{y_1, ..., y_{n_\varepsilon}\}$ tale che

$$\forall k = 1...n_\varepsilon \ \forall n, m > n_\varepsilon \quad |g_n(y_k) - g_m(y_k)| < \varepsilon$$

Sia ora $x \in X$; per equilimitatezza deve esistere k tale che

$$d(x, x') < \frac{1}{n_\varepsilon}$$

e quindi, per ogni $n, m > n_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}|g_n(x) - g_m(x)| \leq |g_n(x) - g_n(y_k)| + |g_n(y_k) - g_m(y_k)| + \\ + |g_m(y_k) - g_m(x)| < 3\varepsilon\end{aligned}$$

Quindi $\{g_n\}$ è di Cauchy, e, per completezza di $C(X)$ è una sottosuccessione convergente di $\{f_n\}$.

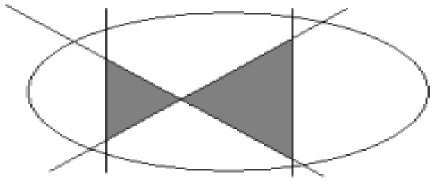
QED

Diamo una applicazione del teorema di Ascoli–Arzelà: il *teorema di Peano*.

3.5.3 Teorema *Se $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua nel dominio chiuso $D \subset \mathbb{R}^2$ allora per ogni punto interno $(x_0, y_0) \in D$ passa almeno una curva integrale dell'equazione differenziale*

$$\frac{df}{dx} = f(x, y)$$

DIMOSTRAZIONE: Poiché è continua su un chiuso, f è limitata: $|f(x, y)| \leq M$. Ora consideriamo le rette per il punto (x_0, y_0) di coefficienti angolari M e



$-M$ e due rette verticali $x = a$ e $x = b$ tali che i due triangoli di vertice (x_0, y_0) delimitati da queste rette siano contenuti in D, e chiamiamo Δ l'insieme chiuso dato dall'unione di questi due triangoli.

Ora costruiamo una *spezzata di Eulero* L_0 per l'equazione differenziale data nell'enunciato: dal punto (x_0, y_0) tracciamo una retta r_0 di coefficiente angolare $f(x_0, y_0)$ (che quindi è compresa fra le rette che delimitano Δ; su $r_0 \cap \Delta$ scegliamo un punto (x_1, y_1) e tracciamo da esso una retta r_1 di coefficiente angolare $f(x_1, y_1)$; su $r_1 \cap \Delta$ scegliamo un punto (x_2, y_2) e così via (stiamo usando l'assioma di scelta).

Possiamo costruire ovviamente infinite spezzate $L_0, L_1, L_2, \ldots$ in questo modo partendo da (x_0, y_0) e scegliendo punti differenti sulle rette r_n che andiamo a considerare: consideriamo ora una successione di tali spezzate (L_n) in modo che la massima lunghezza l_k di un segmento di estremi (x_k, y_k) e (x_{k+1}, y_{k+1}) appartenente alla spezzata tenda a zero per $k \longrightarrow \infty$.

Alla successione di curve $\{L_n\}$ corrisponde una successione di funzioni $\{\varphi_n\}$ i cui grafici sono dati dalle $\{L_n\}$: queste funzioni hanno le seguenti proprietà:

(1) φ_n è definita sull'intervallo $[a, b]$;

(2) Le φ_n sono uniformemente limitare;

(3) La successione $\{\varphi_n\}$ è equicontinua.

Per il teorema di Ascoli–Arzelà, esiste allora una sottosuccessione $\{\varphi_{n_k}\}$ convergente ad una certa funzione φ. Ovviamente

$$\varphi(x_0) = y_0$$

Mostriamo che φ è la soluzione dell'equazione differenziale dell'enunciato.

Precisamente mostriamo che, per ogni $\varepsilon > 0$, se $|x' - x''|$ è abbastanza piccolo, allora

$$\left| \frac{\varphi(x'') - \varphi(x')}{x'' - x'} - f(x', \varphi(x')) \right| < \varepsilon$$

cioè che, per k abbastanza grande,

$$(*) \qquad \left| \frac{\varphi_{n_k}(x'') - \varphi_{n_k}(x')}{x'' - x'} - f(x', \varphi_{n_k}(x')) \right| < \varepsilon$$

Ora sfruttiamo la continuità di f in D: dato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x - x'| < 2\delta\,, \quad |y - y'| < 4M\delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$$

Consideriamo i punti del rettangolo $R = \{(x,y) \,|\, |x-x'| < 2\delta\,, |y-y'| < 4M\delta\}$, e prendiamo $N \in \mathbb{N}$ grande abbastanza affinché, per $k > N$ si abbia

$$|\varphi(x) - \varphi_{n_k}(x)| < 2M\delta \qquad \text{e} \qquad l_k < \delta$$

(l_k è la lunghezza massima di un segmento della spezzata L_k). In questo modo, se $x - x'| < 2\delta$, le spezzate di Eulero L_k giacciono interamente nel rettangolo R.

Per fissare le idee supponiamo ora che $x' < x''$ (il resto della dimostrazione nell'altro caso è del tutto analoga), e supponiamo che la spezzata L_k abbia come vertici dei segmenti che la compongono i punti $(x_0, y_0) = (a_0, b_0)$, (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_{n+1}, b_{n+1}) in modo che

$$x_0 = a_0 \le x' < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < x'' \le a_{n+1}$$

Allora, se φ_{n_k} è la funzione corrispondente a questa spezzata, si ha

$$\begin{aligned}
\varphi_{n_k}(a_1) - \varphi_{n_k}(x') &= f(a_0, b_0)(a_1 - x') \\
\varphi_{n_k}(a_2) - \varphi_{n_k}(a_1) &= f(a_1, b_1)(a_2 - a_1) \\
\cdots \quad &\quad \cdots \\
\varphi_{n_k}(x'') - \varphi_{n_k}(a_n) &= f(a_n, b_n)(x'' - a_n)
\end{aligned}$$

da cui, per $|x'' - x'| < \delta$, troviamo

$$\begin{aligned}
(f(x', y') - \varepsilon)(a_1 - x') &< \varphi_{n_k}(a_1) - \varphi_{n_k}(x') < (f(x', y') + \varepsilon)(a_1 - x') \\
(f(x', y') - \varepsilon)(a_2 - a_1) &< \varphi_{n_k}(a_2) - \varphi_{n_k}(a_1) < (f(x', y') + \varepsilon)(a_2 - a_1) \\
\cdots \quad &\quad \cdots \\
(f(x', y') - \varepsilon)(x'' - a_n) &< \varphi_{n_k}(x'') - \varphi_{n_k}(a_n) < (f(x', y') + \varepsilon)(x'' - a_n)
\end{aligned}$$

Sommando queste disequazioni troviamo la

$$(f(x', y') - \varepsilon)(x'' - x') < \varphi_{n_k}(x'') - \varphi_{n_k}(x') < (f(x', y') + \varepsilon)(x'' - x')$$

cioè la (*).

QED

Notiamo che la soluzione non è unica: infatti costruendo una sottosuccessione non attraverso le spezzate di Eulero si ottengono soluzioni diverse.

Vediamo un'altra applicazione del teorema di Ascoli–Arzelà che segue lo spirito della dimostrazione del teorema di Peano. Per prima cosa diamo una

3.5.4 Definizione *Una* curva parametrizzata *in uno spazio metrico* (X, d) *è una funzione continua* $c : [0,1] \longrightarrow X$.

Geometricamente la curva è l'immagine della funzione: comunque uno stesso insieme di punti può essere immagine di moltissime funzioni distinte, che possono individuare la stessa curva o meno.

3.5.5 Definizione *Due curve parametrizzate* $c, c' : [0,1] \longrightarrow X$ *si dicono* equivalenti *se esistono due funzioni continue crescenti* $\varphi, \varphi' : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *tali che* $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, $\varphi(1) = \varphi'(1) = 1$ *e*

$$\forall t \in [0,1] \qquad c(\varphi(t)) = c'(\varphi'(t))$$

Si tratta ovviamente di una relazione di equivalenza.

3.5.6 Definizione *Una* curva continua *in uno spazio metrico* (X, d) *è una classe di equivalenza di curve parametrizzate in* (X, d).

Una curva continua *congiunge due punti* $x, y \in X$ quando per una (e quindi per ogni) sua rappresentazione parametrica $c : [0,1] \longrightarrow X$ si ha che $c(0) = x$ e $c(1) = y$.

Possiamo allora dire quando una successione $\{C_n\}$ di curve converge ad una curva C: precisamente quando è possibile parametrizzare le C_n con delle funzioni c_n e C con una funzione c in modo che $d(c, c_n) \longrightarrow 0$. Ovviamente il limite di una famiglia di curve che congiungono due punti $x, y \in X$ congiunge gli stessi punti.

3.5.7 Definizione *Se* C *è una curva continua in uno spazio metrico* (X, d) *parametrizzata da* $c : [0,1] \longrightarrow X$*, la sua* lunghezza *è il numero reale*

$$l(C) = \sup_{(t_0, t_1, ..., t_n) \in T} \sum_{i=1}^{n} d(c(t_{i-1}), c(t_i))$$

dove T *è l'insieme dei punti* $(t_0, t_1, ..., t_n)$ *tali che*

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

e $n \in \mathbb{N}$.

Questa definizione non dipende dalla parametrizzazione scelta, dato che

$$\begin{aligned} d(c(t_{i-1}), c(t_i)) &= d(c(\varphi(t'_{i-1})), c(\varphi(t'_i))) = d(c'(\varphi'(t'_{i-1})), c'(\varphi'(t'_i))) \\ &= d(c'(t''_{i-1}), c'(t''_i)) \end{aligned}$$

(le φ trasformano elementi di T in elementi di T).

3.5.8 Teorema *Se $K \subset X$ è compatto in uno spazio metrico (X, d) e se due suoi punti $x, y \in K$ si possono congiungere con una curva continua di lunghezza finita, allora esiste una curva che li congiunge di lunghezza minima.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo una successione di curve $\{C_n\}$ tale che:

(1) $l(C_n) \leq L$ dove L è la lunghezza di una curva fissata che congiunga x e y (che esiste per ipotesi);

(2) $l(C_n) \longrightarrow l$ dove l è l'estremo inferiore delle lunghezze delle curve che congiungono x e y.

Mostriamo ora come si possano parametrizzare le curve C_n con una funzioni equicontinue: se C è una curva che congiunge x e y, e $c : [0, 1] \longrightarrow X$ una sua rappresentazione parametrica, allora la funzione $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\varphi(t) = l(C_t)$$

dove C_t è la curva che congiunge x con $c(t)$: allora

$$c'(t) = c(\varphi^{-1}(t))$$

è una rappresentazione parametrica per C, tale che

$$d(c'(t_1), c'(t_2)) \leq l(C)|t_1 - t_2|$$

Poiché tutte le curve della famiglia $\{C_n\}$ hanno lunghezza minore L, la condizione precedente implica la loro equicontinuità; ovviamente sono equilimitate (perché definite in $[0, 1]$), quindi il teorema di Ascoli–Arzelà[3] implica che da $\{C_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente ad una curva C.

La lunghezza di C sarà maggiore o uguale a l, e sarà minore o uguale all'estremo inferiore delle lunghezze delle C_n (cioè la lunghezza è una funzione semicontinua inferiormente), che è ancora l, quindi C è la curve di lunghezza minima cercata.

QED

[3]O meglio una sua generalizzazione al caso dello spazio $C(X, Y)$ delle funzioni continue da uno spazio metrico (X, d) ad un altro spazio metrico (Y, d'), che si dimostra in modo analogo al caso $Y = \mathbb{R}$.

Capitolo 4

MISURE

La teoria moderna dell'integrazione può svolgersi a partire dalla teoria dei funzionali lineari e continui sugli spazi di funzioni continue, o a partire dalla teoria della misura: il primo approccio, più analitico, consente profonde generalizzazioni (distribuzioni, correnti, etc.) mentre il secondo approccio è più insiemistico e legato alla topologia. Qui diamo le linee portanti della teoria della misura, che è alla base dell'integrazione e del calcolo delle probabilità.

4.1 Algebre di insiemi e spazi di misura

Se $A \subset X$ è un sottoinsieme di un fissato insieme X denoteremo il complemento $X \setminus A$ anche col simbolo $\complement A$.

4.1.1 Definizione *Un'*algebra di sottoinsiemi *di un insieme X è una famiglia $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ tale che:*

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(2) *Se $A, B \in \mathcal{A}$ allora $A \cup B \in \mathcal{A}$.*

(3) *Se $A \in \mathcal{A}$ allora $\complement A \in \mathcal{A}$.*

Ad esempio $\mathcal{P}(X)$ è un'algebra di sottoinsiemi di X. Per le leggi di de Morgan: $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ e $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ si ha che, se $\mathcal{A}$ è un'algebra di insiemi e se $A, B \in \mathcal{A}$ allora $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Le algebre di insiemi sono in particolare *algebre di Boole*: queste ultime sono infatti arbitrari insiemi dotati di tre operazioni ($\cap, \cup$ e $\complement$) e di due elementi (0 e 1) tali da soddisfare le regole dell'algebra degli insiemi. Evidentemente le unioni e le intersezioni finite di elementi di un'algebra appartengono ancora all'algebra.

Osserviamo che un'algebra di insiemi è sempre un insieme parzialmente ordinato rispetto alla relazione $\subset$: in effetti potremmo definire questa relazione

semplicemente come
$$a \subset b \iff a \cap b = a$$

Evidentemente rispetto a questo ordinamento un'algebra di insiemi è un reticolo, cioè ogni coppia di elementi $A, B \in \mathcal{A}$ ha un massimo e minimo dati rispettivamente da $A \cup B$ e $a \cap B$.

Ovviamente non ogni famiglia di sottoinsiemi di un insieme X è un'algebra, ma possiamo sempre associargliene una:

4.1.2 Proposizione *Se $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(X)$ è una famiglia di sottoinsiemi di un insieme X, esiste un'algebra $\mathcal{A}(\mathcal{X})$ contenente $\mathcal{X}$ e minima rispetto a questa proprietà, i.e. ogni altra algebra contenente $\mathcal{X}$ deve contenere $\mathcal{A}(\mathcal{X})$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\mathcal{F}$ la famiglia di tutte le algebre di sottoinsiemi di X contenenti $\mathcal{X}$: certamente $\mathcal{F} \neq \emptyset$ dato che almeno $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{F}$. Consideriamo
$$\mathcal{A}(\mathcal{X}) := \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathcal{F}} \mathcal{A}$$

Una semplice verifica mostra che si tratta di un'algebra di sottoinsiemi di X che, per definizione, è la minima rispetto all'inclusione.

QED

4.1.3 Definizione *L'algebra $\mathcal{A}(\mathcal{X})$ si dice* generata *da $\mathcal{X}$.*

4.1.4 Definizione *Una* σ-algebra *è un'algebra $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di un insieme X tale che per ogni successione $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{A}$ l'insieme $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ sia un elemento di $\mathcal{A}$.*

Dato che i complementari di un elemento di $\mathcal{A}$ appartengono ancora a $\mathcal{A}$ anche le intersezioni numerabili di elementi di una σ-algebra appartengono alla σ-algebra.

La proposizione precedente vale ovviamente anche per le σ-algebre sicché possiamo parlare di σ-algebra generata da una famiglia di sottoinsiemi di X.

4.1.5 Esempio *Se X è uno spazio topologico, la sua topologia è una famiglia di sottoinsiemi di X: dunque esiste la σ-algebra $\beta(X)$ generata dalla topologia di X, che si dice* σ-algebra di Borel *ed i cui elementi si dicono* boreliani. *Equivalentemente, $\beta(X)$ è la σ-algebra generata dai chiusi, ovvero da una qualsiasi base per la topologia di X: ad esempio la σ-algebra di Borel associata alla topologia naturale della retta reale $\mathbb{R}$ è la σ-algebra generata dagli intervalli aperti.*

4.1.6 Definizione *Se X è uno spazio topologico, un suo sottoinsieme si dice F_σ se è unione numerabile di chiusi e si dice G_δ se è intersezione numerabile di aperti.*

Evidentemente i chiusi e le unioni numerabili di F_σ sono ancora F_σ, così come gli aperti e le intersezioni numerabili di aperti sono G_δ: per definizione, gli insiemi di tipo F_σ e G_δ sono boreliani, come pure sono boreliani tutte le possibili combinazioni di F_σ e G_δ. Ad esempio, un insieme è $F_{\sigma\delta}$ se è intersezione numerabile di insiemi F_σ, è così via; gli insiemi $F_{\sigma\delta\ldots}$ e $G_{\delta\sigma\ldots}$ sono tutti boreliani ma, si può dimostrare, non tutti i boreliani sono di questo tipo.

4.1.7 Definizione *Uno* spazio misurabile *è una coppia $(X,\mathcal{B})$ formata da un insieme X e da una σ-algebra $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi di X. Un elemento $A\in\mathcal{B}$ si dice* misurabile.

4.1.8 Definizione *Una* misura esterna *μ^* su un insieme X è una funzione $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,\infty]$ tale che*

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(2) *Se $E \subset F$ allora $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$ (monotonia).*

(3) *Se $\{E_n\}$ è una successione di insiemi misurabili disgiunti allora*

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^\infty E_i\right) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu^* E_i$$

(Subadditività numerabile).

4.1.9 Esempio *La* misura esterna di Lebesgue *sulla retta reale è definita come*

$$l^*(E) = \inf_{E\subset\bigcup I_n} \sum_n l(I_n)$$

ove $\{I_n\}$ sono successioni di intervalli in $\mathbb{R}$ e $l(I)$ è la lunghezza dell'intervallo I. In questo caso, classicamente si definisce un insieme E misurabile secondo Lebesgue *se per ogni altro insieme F si ha che $l^*(F) = l^*(E \cap F) + l^*(\complement E \cap F)$.*

Forti di questo esempio definiamo

4.1.10 Definizione *Se μ^* è una misura esterna su un insieme X, un sottoinsieme $Y \subset X$ tale che*

$$\forall Z \subset X \quad \mu^*(Z) = \mu^*(Y \cap Z) + \mu^*(\complement Y \cap Z)$$

si dice misurabile (rispetto a μ^*).

4.1.11 Teorema *Se μ^* è una misura esterna su un insieme X l'insieme dei sottoinsiemi di X misurabili rispetto a μ^* è una σ-algebra.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\mathcal{B} := \{Y \subset X \mid Y \text{ misurabile rispetto a } \mu^*\}$; ovviamente $\emptyset \in \mathcal{B}$, e se $E \in \mathcal{B}$, anche $\complement E \in \mathcal{B}$. Consideriamo quindi le unioni fra due insiemi misurabili $E_1, E_2 \in \mathcal{B}$: dato che sono misurabili si ha, per ogni $F \subset X$:

$$\mu^*(F) = \mu^*(E_2 \cap F) + \mu^*(\complement E_2 \cap F)$$
$$\mu^*(F \cap \complement E_2) = \mu^*(E_1 \cap F \cap \complement E_2) + \mu^*(\complement E_1 \cap F \cap \complement E_2 F)$$

Ma $F \cap (E_1 \cup E_2) = (F \cap E_1) \cup (F \cap E_1 \cap \complement E_2)$ e quindi, per subadditività di μ^*:

$$\mu^*(F \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^*(F \cap E_1 \cap \complement E_2) \leq \mu^* A$$

Cioè $E_1 \cup E_2$ è misurabile per la legge di de Morgan. Quindi $\mathcal{B}$ è un'algebra di insiemi.

Ora consideriamo $E = \bigcup E_n$ unione di insiemi misurabili disgiunti; poniamo

$$F_n := \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

F_n è misurabile e, dato che $\complement E \subset \complement F_n$:

$$\mu^*(F \cap F_n) + \mu^*(F \cap \complement E) \leq \mu^*(F \cap F_n) + \mu^*(F \cap \complement F_n) = \mu^* F$$

Ma $F_n \cap E_n = E_n \in \mathcal{B}$ e $F_n \cap \complement E_n = F_{n-1}$ sicché

$$\mu^*(F \cap F_n) = \mu^*(F \cap E_n) + \mu^*(F \cap F_{n-1})$$

e, per induzione:

$$\mu^*(F \cap F_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(F \cap E_i)$$

da cui (dato che $F \cap E = \bigcup_{i=1}^{\infty}(F \cap E_i)$

$$\mu^*(F \cap \complement E) + \mu^*(F \cap E) \leq \mu^*(F \cap \complement E) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(F \cap E_i) \leq \mu^* A$$

QED

4.1.12 Definizione *Una* misura μ *su uno spazio misurabile* $(X, \mathcal{B})$ *è una funzione* $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow [0, \infty]$ *tale che*

(1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(2) *Se* $\{E_n\}$ *è una successione di insiemi misurabili disgiunti allora*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu E_i$$

(Additività numerabile).

Uno spazio di misura *è una tripla* $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *ove* μ *è una misura sullo spazio misurabile* $(X, \mathcal{B})$.

4.1.13 Esempio *Se* X *è un insieme non vuoto a* $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$ *l'insieme delle parti, data una funzione* $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ *poniamo*

$$\forall E \in \mathcal{B} \quad \mu E := \sum_{x \in E} f(x)$$

ove si intende che

$$\sum_{x \in E} f(x) = \sup_{\substack{x_1, \dots, x_n \in E \\ n \in \mathbb{N}}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

Evidentemente si tratta di una misura. Ad esempio, per $f = 1$ *otteniamo la* misura $\#$ che conta, *i.e. tale che*

$$\# E = \begin{cases} \mathrm{Card}(E) & \text{se } E \text{ è finito} \\ \infty & \text{se } E \text{ è infinito} \end{cases}$$

Se $x_0 \in X$ *è fissato, per* $f(x) = \delta_{xx_0}$ *otteniamo la* misura δ_{x_0} di Dirac concentrata in x_0*:*

$$\delta_{x_0} E = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{se } x_0 \notin E \end{cases}$$

Un esempio notevole di misura è ottenuto a partire da misure esterne:

4.1.14 Teorema *Se* μ^* *è una misura esterna su un insieme* X *e* $\mathcal{B}$ *è la* σ*-algebra degli insiemi misurabili rispetto a* μ^* *allora la restrizione* μ *di* μ^* *a* $\mathcal{B}$ *è una misura su* $\mathcal{B}$.

DIMOSTRAZIONE: Dato che $\mu = \mu^*|_{\mathcal{B}}$ è una misura esterna, per dimostrare che è una misura basta far vedere che soddisfa l'additività numerabile. Intanto dimostriamo che soddisfa l'additività finita: se E_1 e E_2 sono misurabili e disgiunti, la misurabilità di E_2 implica

$$\begin{aligned} \mu(E_1 \cup E_2) &= \mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^*((E_1 \cup E_2) \cap E_2) + \mu^*((E_1 \cup E_2) \cap \complement E_2) \\ &= \mu^* E_2 + \mu^* E_1 \end{aligned}$$

Ora, se $\{E_n\}$ sono misurabili e disgiunti allora

$$\sum_{i=1}^{n} \mu E_i = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leq \mu E$$

per ogni n, quindi

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu E_i \leq \mu E$$

Ma la disuguaglianza opposta vale sempre dato che μ è una misura esterna e quindi (tenendo conto che $\mu\emptyset = \mu^*\emptyset = 0$) si ha la tesi.

QED

4.1.15 Esempio *Sulla retta reale, partendo dalla misura esterna di Lebesgue l^* associata alla lunghezza degli intervalli, la misura indotta sull'insieme degli insiemi misurabili è la* misura di Lebesgue *in $\mathbb{R}$; dato che gli intervalli sono misurabili, la classe degli insiemi misurabili secondo Lebesgue contiene i boreliani della retta reale.*

Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione monotona, possiamo definire una misura esterna sulla retta reale come

$$s_f^*(E) = \inf_{E \subset \bigcup I_n} s_f(I)$$

ove $s_f([a, b] = f(b) - f(a)$ (osserviamo che se f è la funzione identità s_f è la lunghezza dell'intervallo). La misura esterna e la misura che ne derivano si chiamano di *Lebesgue–Stieltjes* e sono fondamentali nel calcolo delle probabilità: le approfondiremo in séguito.

4.2 Completamenti ed estensioni di misure

Diamo alcune proprietà essenziali delle misure.

4.2.1 Proposizione *Se $(X, \mathcal{B}, \mu)$ è uno spazio di misura:*

(1) *Se $A \subset B$ sono misurabili allora $\mu A \leq \mu B$.*

(2) *Se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono misurabili e $\mu E_1 < \infty$ e $E_n \subset E_{n+1}$ allora*

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu E_n$$

(3) *Se* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sono misurabili allora*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu E_i$$

DIMOSTRAZIONE:
(1) Segue da $B = A \cup (B \setminus A)$ e $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$.
(2) Se $E = \bigcap E_i$ allora

$$E_1 = E \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \setminus E_{i+1}\right)$$

(unione disgiunta) e quindi $\mu E_1 = \mu E + \sum \mu(E_i \setminus E_{i+1})$. Ma $E_i = E_{i+1} \cup (E_i \setminus E_{i+1})$ quindi

$$\mu E_1 = \mu E + \sum_{i=1}^{\infty}(\mu E_i - \mu E_{i+1}) = \mu E + \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=1}^{n-1}(\mu E_i - \mu E_{i+1}) = \mu E + \mu E_1 - \lim \mu E_n$$

(3) Se $F_n = E_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right)$ allora $F_n \subset E_n$ e gli F_n sono disgiunti. Quindi $\mu F_n \leq \mu E_n$ e

$$\mu\left(\bigcup E_i\right) = \sum \mu F_i \leq \sum \mu E_i$$

QED

4.2.2 Definizione *Una misura* μ *su uno spazio* X *si dice* finita *se* $\mu(X) < \infty$ *e* σ*-finita se è possibile ricoprire l'insieme* X *con insiemi misurabili* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*:*

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

tali che per ogni i: $\mu X_i < \infty$*.*

Un insieme misurabile E è di *misura finita* se $\mu E < \infty$ ed è di misura σ-finita se è unione di una famiglia numerabile di insiemi di misura finita.

4.2.3 Definizione *Uno spazio* $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *è* completo *(e la misura* μ *si dice* completa*) se* $\mathcal{B}$ *contiene tutti i sottoinsiemi degli insiemi di misura nulla:*

$$\forall E \in \mathcal{B}\ \forall A \subset E \quad \mu E = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{B}$$

4.2.4 Esempio *La misura* μ *indotta (per restrizione) da una misura esterna* μ^* *sulla* σ*-algebra dei suoi insiemi misurabili è completa.*

4.2.5 Teorema *Se $(X, \mathcal{B}, \mu)$ è uno spazio di misura allora esiste uno spazio di misura $(X, \widetilde{\mathcal{B}}, \widetilde{\mu})$ tale che*

(1) $\mathcal{B} \subset \widetilde{\mathcal{B}}$.

(2) *Se $E \in \mathcal{B}$ allora $\mu E = \widetilde{\mu} E$.*

(3) *$E \in \widetilde{\mathcal{B}}$ se e solo se esistono $B \subset \mathcal{B}$ e $A \subset C$ con $C \in \mathcal{B}$ tali che $\mu C = 0$ e $E = A \cup B$.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo la σ-algebra $\mathcal{B}_0$ generata da $\mathcal{B}$ e $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ ove

$$\mathcal{N} := \{N \in \mathcal{B} \mid \mu N = 0\}$$

Mostriamo che questa σ-algebra è $\widetilde{\mathcal{B}}$, i.e. che è caratterizzata dalla (3). Che sia $\widetilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}_0$ è ovvio. Dimostriamo allora che $\widetilde{\mathcal{B}}$ è una σ-algebra: dovrà quindi contenere $\mathcal{B}_0$ per definizione di σ-generata da una famiglia di insiemi.

Un elemento di $\widetilde{\mathcal{B}}$ può scriversi come $E = A \cup B$ con $A \cap B = \emptyset$ (sostituendo se necessario C con $E \setminus C$. Allora il complementare di E è

$$\complement(B \cup C) \cup (\complement A \cap C)$$

Ma $B, C \in \mathcal{B}$ e quindi $\complement A \cap N \subset N$ i.e. $\complement A \cap C \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$, cioè il complementare di E sta in $\widetilde{\mathcal{B}}$. Infine, che l'unione numerabile di elementi di $\widetilde{\mathcal{B}}$ stia in $\widetilde{\mathcal{B}}$ è ovvio.

Ora definiamo $\widetilde{\mu}$: se $\mathcal{B}$ è completa allora $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$ e basta porre $\widetilde{\mu} = \mu$. Altrimenti, se $E \in \widetilde{\mathcal{B}}$ è $E = A \cup B$, con $B \in \mathcal{B}$ e $A \subset C$ e $\mu C = 0$; poniamo

$$\widetilde{\mu}(E) := \mu(B)$$

Questa definizione è ben posta: se $E = A' \cup B'$ con $A' \subset C'$ allora

$$B \subset B \cup A = B' \cup A' \subset B' \cup C' \in \mathcal{B}$$

e quindi $\mu B \le \mu B'$. Scambiando B on B' si ha $\mu B = \mu B'$.

Verifichiamo che si tratta di una misura: se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono disgiunti, allora ciascuno è della forma $E_n = A_n \cup B_n$ e quindi gli B_n debbono essere disgiunti, quindi

$$\widetilde{\mu}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\mu}(E_n)$$

QED

4.2.6 Esempio *La misura di Lebesgue è il completamento della misura di Borel ottenuta restringendo la misura esterna di Lebesgue alla classe dei boreliani.*

Per concludere stabiliamo un risultato fondamentale, che ci fornisce un metodo molto potente per costruire misure.

4.2.7 Definizione *Se $\mathcal{A}$ è un'algebra di insiemi, una* misura *su $\mathcal{A}$ è una funzione $\overline{\mu} : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ tale che*

(1) $\overline{\mu}\emptyset = 0$.

(2) *Se $\{A_n\}$ è una successione di elementi di $\mathcal{A}$ disgiunti tale che $\bigcup A_n \in \mathcal{A}$ allora*
$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu} A_n$$

L'unica differenza con le misure propriamente dette è che queste ultime sono definite sulle σ-algebre.

Osserviamo ora che, data una misura $\overline{\mu}$ su un'algebra $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di un insieme X, esiste su X una misura esterna μ^* associata a $\overline{\mu}$. Infatti basta porre, per ogni $E \subset X$:
$$\mu^*(E) := \inf_{E \subset \bigcup_i A_i} \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu} A_i$$
(l'inf varia su tutte le successioni $\{A_i\}$ in $\mathcal{A}$).

4.2.8 Lemma *μ^* è una misura esterna e $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \overline{\mu}$.*

DIMOSTRAZIONE: L'unica cosa da dimostrare è la subadditività numerabile. Sia quindi $E = \bigcup_n E_n$ con gli $\{E_n\}$ disgiunti; se per ogni E_n si ha che $\mu^* E_n = \infty$ la subadditività è ovvia. Supponiamo quindi che, per ogni $\varepsilon > 0$ ed ogni n esista la successione $\{A_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ tale che $E_n \subset \bigcup_i A_{n_i}$ e
$$\sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu} A_{n_i} < \mu^* E_n + \frac{\varepsilon}{2}$$
Quindi
$$\mu^* E \leq \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu} A_{n_i} < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* E_n + \varepsilon$$
Per arbitrarietà di ε segue allora la subadditività di μ^*.

La seconda parte del lemma è ovvia.

QED

4.2.9 Teorema di Estensione di Carathéodory *Se $\overline{\mu}$ è una misura su un'algebra $\mathcal{A}$ è μ^* la misura esterna indotta da $\overline{\mu}$ allora la restrizione μ di μ^* alla σ-algebra dei suoi insiemi misurabili è una misura sulla σ-algebra (contenente $\mathcal{A}$) di questi insiemi. Se $\overline{\mu}$ è una misura finita, anche μ lo è, e se $\overline{\mu}$ è una misura σ-finita allora μ è l'unica misura definita sulla σ-algebra generata da $\mathcal{A}$ tale che $\mu|_{\mathcal{A}} = \overline{\mu}$.*

DIMOSTRAZIONE: La prima parte è praticamente già stata dimostrata: data una misura sull'algebra $\mathcal{A}$ abbiamo costruito una misura esterna che quindi dà luogo ad una misura sulla σ-algebra dei suoi insiemi misurabili; l'unica cosa da dimostrare, per avere che effettivamente $\mu|_{\mathcal{A}} = \mu^*$ è che gli elementi di $\mathcal{A}$ sono misurabili rispetto a μ^*. Per questo basta far vedere che, per ogni $A \in \mathcal{A}$, se E è un insieme qualsiasi allora

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \complement A) \leq \mu^* E$$

(la disuguaglianza opposta è vera sempre per subadditività di μ^*). Sia dunque $\{A_n\}$ una successione in $\mathcal{A}$ tale che $E \subset \bigcup_n A_n$ tale che, per ogni $\varepsilon > 0$ (se ciò non è possibile ogni E_i ha misura esterna infinita è non abbiamo nulla da dimostrare):

$$\sum \overline{\mu} A_n < \mu^* E + \varepsilon$$

Per additività di $\overline{\mu}$ su $\mathcal{A}$ abbiamo

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \complement A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n \cap \complement A) < \mu^* E + \varepsilon$$

(dato che $E \cap A \subset \bigcup (A_n \cap A)$ e $E \cap \complement A \subset \bigcup (A_n \cap \complement A)$). Per arbitrarietà di ε si ha quindi la misurabilità di A.

Che μ sia finita non appena lo sia $\overline{\mu}$ è ovvio. Resta quindi solo da dimostrare l'unicità di μ nel caso in cui $\overline{\mu}$ sia σ-finita.

Sia dunque ν una misura definita sulla σ-algebra $\mathcal{B}$ generata dall'algebra $\mathcal{A}$, che coincida con μ su $\mathcal{A}$. Se $\mathcal{A}_\sigma$ denota l'insieme delle unioni numerabili di elementi di $\mathcal{A}$, ogni suo elemento può esprimersi come unione numerabile di elementi disgiunti di $\mathcal{A}$: sia ora $B \in \mathcal{B}$ di misura esterna finita e dimostriamo che esiste un $A \in \mathcal{A}_\sigma$ tale che $B \subset A$ e

$$\mu^* A \leq \mu^* B + \varepsilon$$

(basta prendere A come unione di una successione $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ tale che $B \subset \bigcup A_n$). Quindi, dato che $B \subset A$:

$$\nu B \leq \nu A = \mu^* A \leq \mu^* B + \varepsilon$$

e, per arbitrarietà di ε:
$$\forall B \in \mathcal{B} \quad \nu B \leq \mu^* B$$
Ma gli insiemi misurabili rispetto a μ^* sono una σ-algebra contenente $\mathcal{A}$, quindi ogni tale B è misurabile.

Ora, se B è misurabile, $A \in \mathcal{A}_\sigma$, $B \subset A$ e $\mu^* A \leq \mu^* B + \varepsilon$ allora, se $\mu^* B < \infty$:
$$\mu^* A = \mu^* B + \mu^*(A \setminus B) \Rightarrow \nu(A \setminus B) \leq \mu^*(A \setminus B) \leq \varepsilon$$
Per arbitrarietà di ε si ha quindi
$$\mu^* A \leq \nu B \Rightarrow \mu^* B = \nu B$$
A questo punto facciamo intervenire l'ipotesi di σ-finitezza della misura $\overline{\mu}$: se $\{X_i\}$ è una successione di elementi di $\mathcal{A}$ tali che $X = \bigcup_i X_i$ con, per ogni i, $\overline{\mu} X_i < \infty$ allora, per ogni $B \in \mathcal{B}$:
$$B = \bigcup_i (X_i \cap B) \Rightarrow \nu B = \sum_i \nu(X_i \cap B) \qquad \text{e} \qquad \mu B = \sum_i \mu(X_i \cap B)$$
(perché $(X_i \cap B) \cap (X_j \cap B) = \emptyset$). Ma $\mu^*(X_i \cap B) < \infty$ e quindi
$$\mu(X_i \cap B) = \nu(X_i \cap B)$$
QED

4.3 Integrazione

Assumeremo d'ora innanzi che le misure prese in considerazione siano sempre complete, ed adotteremo la seguente efficace terminologia: una proprietà qualsiasi che si riferisca a spazi di misura si dice valere *quasi ovunque* (q.o.) se non vale al più su un insieme di misura nulla.

4.3.1 Definizione *Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ sono spazi di misura, una funzione $f : X \longrightarrow Y$ si dice* misurabile *se per ogni insieme $E \in \mathcal{B}$ l'insieme $f^{-1}(E)$ appartiene alla σ-algebra $\mathcal{A}$.*

Ad esempio, se X e Y sono spazi topologici, una funzione continua è anche misurabile rispetto alle misure di Borel; in particolare, una funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definita su uno spazio misurabile è misurabile se la controimmagine di un aperto è misurabile, e quindi se $g : Y \longrightarrow Z$ è una mappa continua fra spazi topologici e $f : X \longrightarrow Y$ è misurabile dallo spazio misurabile X allo spazio topologico Y allora la composta $g \circ f$ è misurabile.

4.3.2 Proposizione *Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di misura, una funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ è misurabile se e solo se vale uno dei seguenti enunciati equivalenti:*

(1) *Per ogni a $\{x \mid f(x) > a\}$ è misurabile.*

(2) *Per ogni a $\{x \mid f(x) \geq a\}$ è misurabile.*

(3) *Per ogni a $\{x \mid f(x) < a\}$ è misurabile.*

(4) *Per ogni a $\{x \mid f(x) \leq a\}$ è misurabile.*

In questi casi, l'insieme $\{x \mid f(x) = a\}$ è misurabile.

DIMOSTRAZIONE: Si tratta di ovvie verifiche, per le quali è utile osservare che, ad esempio

$$\{x \,|\, f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \,|\, f(x) > a - \frac{1}{n}\right\}$$

e così via, ed il fatto che ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ è unione di intervalli

QED

Ad esempio la funzione caratteristica χ_E di un insieme misurabile è misurabile; viceversa se la funzione caratteristica di un insieme A è misurabile, l'insieme è misurabile.

Usando il teorema precedente è immediato verificare che somme, prodotti e limiti di funzioni misurabili sono ancora funzioni misurabili.

Vogliamo ora definire nel contesto generale degli spazi di misura il concetto di integrale: per farlo considereremo classi sempre più generali di funzioni. Partiamo dalle *funzioni semplici*, cioè quelle della forma

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x)$$

ove c_i sono costanti e gli insiemi E_i sono misurabili.

4.3.3 Teorema *Se $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ è una funzione misurabile allora esiste una successione monotona $\{\varphi_n\}$ di funzioni semplici che converge puntualmente a f. Se la misura su X è σ-finita, possiamo scegliere le φ_n a supporto in insiemi di misura finita.*

DIMOSTRAZIONE: Dato che, per ogni intero positivo n ed ogni numero reale t esiste un unico intero $k_{t,n}$ tale che

$$\frac{k_{t,n}}{2^n} \leq t \leq \frac{k_{t,n}+1}{2^n}$$

possiamo definire

$$s_n(t) := \begin{cases} k_{t,n}2^{-n} & \text{se } 0 \le t < n \\ n & \text{se } n \le t \le \infty \end{cases}$$

Evidentemente si tratta di funzioni misurabili sull'insieme $[0, \infty]$ (sono addirittura boreliane) e tali che, per ogni t: $0 \le s_1(t) \le s_2(t) \le ... \le t$. è anche ovvio che $\lim_{n \longrightarrow \infty} s_n(t) = t$ in $[0, \infty]$ e quindi le funzioni

$$\varphi_n(x) := s_n(f(t))$$

soddisfano la tesi del teorema

QED

Se φ è una funzione semplice non negativa e E un insieme misurabile, definiamo

$$\int_E \varphi d\mu := \sum_{i=1}^n c_i \mu(E \cap E_i)$$

Se $E = X$ si omette ed in genere si omette anche la misura.

Evidentemente una funzione semplice ammette diverse rappresentazioni in termini di diversi insiemi E_i, ma è ovvio verificare che l'integrale così definito non dipende dalla rappresentazione scelta per φ.

Osserviamo che una funzione semplice può definirsi come una funzione misurabile che assume solo un numero finito di valori $\{a_1, ..., a_N\}$; allora possiamo rappresentarla sempre come

$$\varphi = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{A_i}$$

ove $A_i = \{x \mid \varphi(x) = a_i\}$. In questa rappresentazione gli A_i sono disgiunti e gli a_i distinti e non nulli. La adotteremo sistematicamente.

4.3.4 Proposizione *Se φ e ψ sono funzioni semplici i cui supporti abbiano misure finite, allora*

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \qquad \int (a\varphi + b\psi) = a \int \varphi + b \int \psi$$

e, se $\varphi \ge \psi$ q.o. allora

$$\int \varphi \ge \int \psi$$

DIMOSTRAZIONE: Se consideriamo gli insiemi $E_k = A_i \cap B_j$ ottenuti intersecando in tutti i modi possibili gli insiemi delle rappresentazioni canoniche di φ e ψ, allora

$$\varphi = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{E_k} \qquad \text{e} \qquad \psi = \sum_{k=1}^N b_k \chi_{E_k}$$

quindi

$$a\varphi + b\psi = \sum (aa_k + bb_k)\chi_{E_k}$$

e, per additività della misura si ha il primo enunciato. Per dimostrare il secondo basta notare che

$$\int \varphi - \int \psi = \int (\varphi - \psi) \geq 0$$

QED

4.3.5 Proposizione *Se f è una funzione reale definita e limitata su un insieme misurabile E di misura finita allora*

$$\inf_{f\leq\psi} \int_E \psi = \sup_{\varphi\leq f} \int_E \varphi$$

per tutte le funzioni semplici φ e ψ se e solo se f è misurabile.

DIMOSTRAZIONE: Se $|f| \leq M$ e f è misurabile allora gli insiemi

$$E_k := \left\{ x \,|\, \frac{(k-1)M}{n} < f(x) \leq \frac{kM}{n} \right\}_{-n\leq k\leq n}$$

sono disgiunti, misurabili e la loro unione è E. Quindi

$$\mu(E) = \sum_{i=-n}^{n} \mu(E_k)$$

Evidentemente le funzioni semplici

$$\psi_n(x) := \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} k\chi_{E_k}(x) \qquad \text{e} \qquad \varphi_n(x) := \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k-1)\chi_{E_k}(x)$$

sono tali che $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ e quindi

$$\inf \int_E \psi \leq \int_E \psi_n = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} k\mu(E_k)$$

e

$$\sup \int_E \varphi \leq \int_E \varphi_n = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k-1)\mu(E_k)$$

Quindi, per ogni n:

$$0 \leq \inf \int_E \psi - \sup \int_E \varphi \leq \frac{M}{n}\mu E$$

i.e.

$$\inf \int_E \psi = \sup \int_E \varphi$$

Viceversa, se vale la

$$\inf_{f\le\psi} \int_E \psi = \sup_{\varphi\le f} \int_E \varphi$$

allora, per ogni n, esistono funzioni semplici φ_n e ψ_n tali che $\varphi_n \le f \le \psi_n$ e

$$\int \psi_n - \int \varphi < \frac{1}{n}$$

Allora le funzioni $\psi^* = \inf \psi_n$ e $\varphi^* = \sup \varphi_n$ sono misurabili e $\varphi^* \le f \le \psi^*$. Dunque se

$$D := \{x \mid \varphi^*(x) < \psi^*(x)\}$$

è unione degli insiemi

$$D_\nu = \left\{ x \mid \varphi^*(x) < \psi^*(x) - \frac{1}{\nu} \right\}$$

Ogni tale insieme è contenuto in $\{x \mid \varphi_n(x) < \psi_n(x) - 1/\nu\}$ che ha misura minore di ν/n. Allora, per arbitrarietà di n:

$$\forall \nu \quad \mu D_\nu = 0 \Rightarrow \mu D = 0$$

Dunque $\varphi^* = \psi^*$ q.o. e $\varphi^* = f$ q.o. Ma una funzione uguale q.o. ad una funzione misurabile è pure misurabile, per definizione.

QED

4.3.6 Definizione *Se $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ è misurabile sullo spazio di misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ allora definiamo l'*integrale *di f come*

$$\int f d\mu := \sup_{0\le\varphi\le f} \int \varphi d\mu$$

ove φ varia fra le funzioni semplici.

Una conseguenza immediata della definizione è che

$$f \le g \Rightarrow \int f \le \int g$$

e che

$$\forall c \in \mathbb{R} \quad c \int f = \int cf$$

Vogliamo ora dimostrare i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale per l'integrale che abbiamo appena definito.

4.3.7 Lemma di Fatou *Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni misurabili non negative che converge q.o in un insieme E ad una funzione f allora*

$$\int_E f \leq \underline{\lim} \int_E f_n$$

DIMOSTRAZIONE: Possiamo assumere che $f_n \longrightarrow f$ ovunque. Allora basta mostrare che se φ è una funzione semplice non negativa tale che $\varphi \leq f$ allora

$$\int_E \varphi \leq \underline{\lim} \int_E f_n$$

Se $\int_E \varphi = \infty$ allora esiste un insieme misurabile $A \subset E$ con $\mu A = \infty$ e tale che su A $0 < a < \varphi$. Poniamo allora

$$A_n = \{x \in E \,|\, \forall k \geq n \;\, f_k(x) > a\}$$

ottenendo così una successione crescente di insiemi misurabili la cui unione contiene A, dato che $\varphi \leq \lim f_n$. Quindi $\lim \mu A = \infty$ e, essendo

$$\int_E f_n \geq a\mu A_n$$

allora

$$\lim \int_E f_n = \infty = \int_E \varphi$$

Se $\int_E \varphi < \infty$ allora l'insieme $A = \{x \in E \,|\, \varphi(x) > 0\}$ è misurabile ed ha misura finita; se $\varphi \leq M$ e $\varepsilon > 0$, gli

$$A_n := \{x \in E \,|\, \forall k \geq n \;\, f_k(x) > (1-\varepsilon)\varphi(x)\}$$

definiscono una successione crescente di insiemi la cui unione contiene A; quindi $\{A \setminus A_n\}$ è una successione descrescente di insiemi la cui intersezione è vuota. Ne segue che $\mu(A \setminus A_n) = 0$ e quindi esiste n tale che, per $k \geq n$ $\mu(A \setminus A_n) < \varepsilon$. Quindi, per $k \geq n$:

$$\begin{aligned}\int_E f_k \geq \int_{A_k} f_k \geq (1-\varepsilon)\int_{A_k} \varphi \geq (1-\varepsilon)\int_E \varphi - \int_{A \setminus A_k} \varphi \\ \geq \int_E \varphi - \varepsilon\left(\int_E \varphi + M\right)\end{aligned}$$

Dunque

$$\underline{\lim} \int_E f_n \geq \int_E \varphi - \varepsilon\left(\int_E \varphi + M\right)$$

e, per arbitrarietà di ε:

$$\underline{\lim} \int_E f_n \geq \int_E \varphi$$

QED

4.3.8 Teorema della Convergenza Monotona (B.LEVI) *Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni misurabili non negative che converge q.o. ad una funzione f e tale che per ogni n $f_n \leq f$ allora*

$$\int f = \lim \int f_n$$

DIMOSTRAZIONE: Dato che $f_n \leq f$ si ha $\int f_n \leq \int f$ e quindi, per il lemma di Fatou:

$$\int f \leq \underline{\lim} \int f_n \leq \overline{\lim} \int f_n \leq \int f$$

QED

4.3.9 Proposizione *Se f e g sono funzioni misurabili non negative e $a, b > 0$ costanti allora*

$$\int (af + bg) = a \int f + b \int g$$

Inoltre si ha q.o:

$$0 \leq \int f$$

con $\int f = 0$ se e solo se $f = 0$ q.o.

DIMOSTRAZIONE: Per dimostrare il primo asserto usiamo il teorema di convergenza monotona: consideriamo due successioni $\{\varphi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ crescenti di funzioni semplici non negative convergenti a f e g, col che la successione $\{a\varphi_n + b\psi_n\}$ soddisfa le stesse ipotesi e converge a $af + bg$. Allora

$$\int (af + bg) = \lim \int (a\varphi_n + b\psi) = \lim \left(a \int \varphi_n + b \int \psi_n \right) = a \int f + b \int g$$

Che sia $0 \leq \int f$ è ovvio; se poi è $\int f = 0$ presi gli insiemi

$$A_n = \{x \,|\, f(x) > \frac{1}{n}\}$$

si ha che, essendo $\chi_A / n \leq f$ è $\mu A_n = \int \chi_{A_n} = 0$ e quindi l'insieme dei valori positivi di f ha misura nulla.

QED

4.3.10 Corollario *Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni misurabili non negative allora*

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$$

4.3.11 Definizione *Una funzione non negativa f si dice* integrabile *su un insieme E misurabile se*

$$\int_E f < \infty$$

Se f non è non negativa possiamo comunque dire se è integrabile: lo è se e solo se lo sono la sua parte positiva f_+ e parte negativa f_- definite come

$$f_+(x) = \max(f(x), 0) \qquad \text{e} \qquad f_-(x) = \min(f(x), 0)$$

L'integrale di una funzione integrabile qualsiasi è

$$\int f = \int f_+ - \int f_-$$

4.3.12 Teorema della convergenza dominata (LEBESGUE) *Se g è integrabile e $\{f_n\}$ è una successione di funzioni misurabili convergenti q.o. a f su un insieme E e tali che, su E si abbia*

$$|f_n| \leq g$$

allora

$$\int_E f = \lim \int_E f_n$$

DIMOSTRAZIONE: Basta applicare il lemma di Fatou alle successioni $\{g + f_n\}$ e $\{g - f_n\}$.

QED

Osserviamo infine che, avendo a disposizione il concetto di integrale per funzioni positive, possiamo estenderlo a funzioni reali e complesse qualsiasi, semplicemente ponendo, se f è una funzione misurabile reale:

$$\int_E f d\mu = \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu$$

e, se $f = u + iv$ è una funzione misurabile complessa:

$$\int_E f d\mu = \int_E u d\mu + i \int_E v d\mu$$

4.4 Misure con segno, complesse e misure prodotto.

Osserviamo che, se μ_1 e μ_2 sono misure definite sullo stesso spazio $(X, \mathcal{A})$ possiamo considerare una loro combinazione lineare a coefficienti positivi:

$$\mu(E) := c_1\mu_1(E) + c_2\mu_2(E)$$

per $c_1, c_2 \geq 0$. Quello a cui vogliamo dare senso, sono tuttavia anche misure del tipo

$$\nu(E) := \mu_1(E) - \mu_2(E)$$

Ovviamente, dobbiamo supporre che sia μ_1 che μ_2 siano *misure finite*[1].

4.4.1 Definizione *Una* misura con segno *sullo spazio misurabile* $(X, \mathcal{A})$ *è una funzione* $\nu : \mathcal{A} \longrightarrow [-\infty, \infty]$ *tale che*

(1) ν *assume al più uno fra i due valori* $\pm\infty$.

(2) $\nu(\emptyset) = 0$.

(3) *Se* $\{E_n\}$ *è una successione di insiemi misurabili e disgiunti allora*

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$$

ove il segno = significa che la serie converge assolutamente se $\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$ *è finito e diverge positivamente altrimenti.*

Quindi una misura con segno non è una misura nel senso fin qui inteso. Un insieme A è *positivo* (*negativo*) se è misurabile e per ogni suo sottoinsieme $E \subset A$ misurabile si ha che $\nu(E) \geq 0$ (≤ 0). Un insieme è *nullo* se è sia positivo che negativo., ovvero se ogni suo sottoinsieme misurabile ha misura nulla: evidentemente un insieme nullo è di misura nulla, mentre un insieme di misura nulla può benissimo essere unione di un insieme positivo ed un insieme negativo.

4.4.2 Lemma

(1) *Ogni sottoinsieme misurabile di un insieme positivo è positivo.*

(2) *L'unione numerabile di insiemi positivi è positivo.*

(3) *Se* E *è misurabile e* $0 < \nu(E) < \infty$ *allora esiste un insieme positivo* $A \subset E$ *con* $\nu(A) > 0$.

[1] è impossibile dare senso, anche a livello puramente convenzionale, ad espressioni della forma $\infty - \infty$!

DIMOSTRAZIONE: La (1) è ovvia. La (2) segue facilmente considerando una successione $\{a_n\}$ di insiemi positivi la cui unione sia A; allora per ogni insieme $E \subset A$ misurabile si ha che

$$E_n := E \cap A_n \cap \complement A_{n-1} \cap ... \cap \complement A_1$$

sono misurabili e quindi $\nu(E_n) \geq 0$; sono anche disgiunti e la loro unione è E, da cui

$$\nu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) \leq 0$$

Qundi A è positivo.

Dimostriamo la (3): E è positivo oppure deve contenere un insieme di misura negativa in modo che $n-1$ sia il più piccolo intero positivo tale che esista un insieme misurabile $E_1 \subset E$ con $\nu(E_1) < -1/n_1$; ricorsivamente, se $E \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i$ non è positivo, sia n_k il più piccolo intero positivo tale che esista un insieme misurabile $E_k \subset E \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i$ e $\nu(E_k) < -1/n_k$.

Ponendo

$$A := E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

allora E è unione disgiunta di A e degli E_i, quindi

$$\nu(E) = \nu(A) + \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i)$$

(la serie converge assolutamente per finitezza di $\nu(E)$. Quindi la serie $\sum 1/n_k$ converge ed in particolare $n_k \longrightarrow \infty$.

Ora dimostriamo che A è positivo. Sia $\varepsilon > 0$; allora possiamo scegliere k tale che

$$\frac{1}{n_k - 1} < \varepsilon$$

(perché n_k tende ad ∞). Ma $A \subset E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} E_i$ e quindi non può contenere insiemi misurabili di misura minore di $-1/(n_k - 1)$ che è maggiore di $-\varepsilon$. Per arbitrarietà di ε A non può quindi contenere insiemi misurabili di misura negativa.

QED

4.4.3 Teorema (DECOMPOSIZIONE DI HAHN) *Se ν è una misura con segno su uno spazio misurabile $(X, \mathcal{A})$ allora esiste un insieme positivo A ed un insieme negativo B tali che $X = A \cup B$ con $A \cap B = \emptyset$.*

Dimostrazione: Supponiamo ad esempio che ν non assuma il valore $+\infty$; se λ è il sup di $\nu(A)$ al variare di tutti gli insiemi positivi A, dato che $\emptyset$ è positivo, si ha che $\lambda \geq 0$. Se $\{A_n\}$ è una successione di insiemi positivi tali che

$$\lambda = \lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(A_n)$$

e se A è l'unione degli A_n allora per il lemma 4.4.2(2) A è positivo e quindi $\lambda \geq \nu(A)$. Ma $A \setminus A_i \subset A$ e quindi $\nu(A \setminus A_i) \geq 0$ col che

$$\nu(A) = \nu(A_i) + \nu(A \setminus A_i) \geq \nu(A_i) \geq \lambda$$

Quindi $\nu(A) = \lambda < \infty$.

Se $B = \complement A$ e $E \subset B$ è positivo allora $A \cap E = \emptyset$ e $E \cup A$ è positivo, sicché

$$\lambda \geq \nu(E \cup A) = \nu(E) + \nu(A) = \nu(E) + \lambda$$

i.e. $\nu(E) = 0$ dato che $\lambda \in [0, \infty)$. Allora B non può contenere nessun insieme positivo di misura positiva e quindi per il lemma 4.4.2(3) nessun sottoinsieme di misura positiva. Quindi B è negativo.

QED

La decomposizione di Hahn non è necessariamente unica. Lo è a meno di insiemi nulli, come si può facilmente osservare.

4.4.4 Definizione *Due misure μ_1 e μ_2 su uno spazio misurabile $(X, \mathcal{A})$ si dicono* mutuamente singolari *se esistono insiemi A e B disgiunti tali che $X = A \cup B$ e $\mu_1(A) = \mu_2(B) = 0$. Si scrive in tal caso $\mu_1 \perp \mu_2$.*

4.4.5 Teorema (decomposizione di Jordan) *Se ν è una misura con segno sullo spazio misurabile $(X, \mathcal{A})$ allora esistono uniche due misure mutuamente singolari ν^* e ν^- su $(X, \mathcal{A})$ tali che $\nu = \nu^+ - \nu^-$.*

Dimostrazione: Se $X = A \cup B$ è una decomposizione di Hahn definiamo

$$\nu^+(E) := \nu(E \cap A) \qquad \text{e} \qquad \nu^-(E) := -\nu(E \cap B)$$

Per definizione queste misure sono mutuamente singolari. La loro unicità è pure un fatto semplice: se μ^+ e μ^- sono due misure che pure soddisfano la decomposizione di Jordan, allora possiamo considerare gli insiemi C e D disgiunti e tali che $X = C \cup D$ e $\mu^+(C) = \mu^-(D) = 0$. Evidentemente questi insiemi danno luogo ad una decomposizione di Hahn, e quindi le misure μ^+, ν^+ e μ^- e ν^- differiscono solo su insiemi di misura nulla.

QED

La decomposizione di Jordan di una misura ci consente di definire il *valore assoluto* (o *variazione totale*) di una misura con segno ν come

$$|\nu|(E) := \nu^+(E) + \nu^-(E)$$

Si tratta ovviamente di una misura; gli insiemi nulli sono esattamente gli insiemi E tali che $|\nu|(E) = 0$.

4.4.6 Definizione *Se μ e ν sono misure definite su uno spazio misurabile $(X, \mathcal{A})$ si dice che ν è* assolutamente continua *rispetto a μ se per ogni A tale che $\mu(A) = 0$ si ha che $\nu(A) = 0$. Si scrive in questo caso $\nu \ll \mu$.*

In caso di misure con segno, la mutua singolarità e l'assoluta continuità si riferiscono ai loro valori assoluti.

Il risultato fondamentale sull'assoluta continuità delle misure, il teorema di Radon–Nikodym, verrà dimostrato usando il teorema di rappresentazione di Riesz per funzionali lineari su uno spazio di Hilbert.

Considerando le misure di Lebesgue su $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$,...,$\mathbb{R}^n$ è lecito chiedersi se non si possano definire tutte in termini della misura su $\mathbb{R}$ utilizzando la decomposizione $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\times \ldots \times\mathbb{R}$. Ci chiediamo cioè se si possa effettuare il prodotto nella categoria degli spazi di misura.

Siano quindi $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ spazi di misura *completi* e consideriamo l'insieme $X \times Y$. Se $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$ chiamiamo l'insieme $A \times B$ un *rettangolo misurabile*. La famiglia dei rettangoli misurabili

$$\mathcal{R} := \{A \times B\}_{A\in\mathcal{A}, B\in\mathcal{B}}$$

non è una σ-algebra e nemmeno un'algebra in generale: tutto quello che possiamo dire è che l'intersezione di elementi di $\mathcal{R}$ appartiene a $\mathcal{R}$ dato che

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \times D)$$

e che il complementare di un elemento di $\mathcal{R}$ è unione disgiunta di elementi di $\mathcal{R}$[2], avendosi:

$$\complement(A \times B) = (\complement A \times B) \cup (A \times B) \cup (\complement A \times \complement B)$$

Possiamo comunque definire una funzione su $\mathcal{R}$ come

$$\lambda(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$$

[2]Si dice che $\mathcal{R}$ è una *semialgebra di insiemi*.

4.4.7 Lemma *Se $\{(A_n \times B_n)\}$ è una successione di elementi di $\mathcal{R}$ a due a due disgiunti, la cui unione sia $A \times B$ allora*

$$\lambda(A \times B) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_n \times B_n)$$

DIMOSTRAZIONE: Se $x \in A$ allora, per ogni $y \in B$ esiste un unico n_y tale che $(x, y) \in A_{n_y} \times B_{n_y}$ e quindi

$$\sum \nu B_n \cdot \chi_{A_n}(x) = \nu B \cdot \chi_A(x)$$

(per additività numerabile di ν). Per il corollario 4.3.10 si ha quindi

$$\sum \int \nu B_i \chi_{A_i} d\mu = \int \nu B \chi_A d\mu$$

i.e.

$$\sum \nu B_n \cdot \mu A_n = \nu B \cdot \mu A$$

QED

4.4.8 Lemma *Esiste un'unica misura $\overline{\lambda}$ sull'algebra $\mathcal{A}$ generata dalla famiglia $\mathcal{R}$.*

DIMOSTRAZIONE: $\mathcal{A}$ contiene l'insieme vuoto, e ogni suo elemento è unione finita disgiunta di elementi di $\mathcal{R}$. Definiamo allora

$$\overline{\lambda} A := \sum_{i=1}^{n} \lambda R_i$$

se $A = R_1 \cup ... \cup R_n$ e $R_i \in \mathcal{R}$. Dato che la decomposizione di A in elementi disgiunti di $\mathcal{R}$ non è unica bisogna dimostrare che questa definizione è ben posta e dà luogo ad un'unica $\overline{\lambda}$.

Intanto notiamo che la funzione λ è non negativa e ovviamente $\lambda\emptyset = 0$. Inoltre, per il lemma, se $A \in \mathcal{A}$ è unione disgiunta di due famiglie $\{R_i\}$ e $\{S_i\}$ in $\mathcal{R}$ allora

$$\sum \lambda C_i = \sum \lambda D_i$$

(infatti $\lambda C_i = \sum \lambda(C_i \cap D_i)$). Inoltre, sempre per il lemma, $\overline{\lambda}$ è numerabilmente additiva su $\mathcal{A}$; quindi l'estensione $\overline{\lambda}$ è ben definita e unica.

QED

Abbiamo quindi una misura $\overline{\lambda}$ su un'algebra, e quindi, per il teorema di estensione di Carathéodory, una misura *completa* λ sulla σ-algebra $\mathcal{S}$ generata da $\mathcal{A}$: questa misura si dice *misura prodotto* delle μ e ν e si denota con $\mu \otimes \nu$: è finita (o σ-finita) se lo sono μ e ν.

La misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^2$ è definita quindi come $dx \otimes dy$, ove dx e dy sono misure di Lebesgue sui fattori $\mathbb{R}$.

Il teorema fondamentale sulle misure prodotto è dovuto a Fubini. Per dimostrarlo avremo bisogno di alcuni lemmi preliminari: il seguente è un sottoprodotto della dimostrazione del teorema di estensione di Carathéodory.

4.4.9 Lemma *Se $\overline{\mu}$ è una misura su un'algebra $\mathcal{A}$ e μ^* la misura esterna indotta da μ, allora per ogni insieme $E \subset X$ e $\varepsilon > 0$ esiste un $A \in \mathcal{A}_\sigma$ (l'insieme delle unioni numerabili di elementi di $\mathcal{A}$) tale che $E \subset A$ e*

$$\mu^* A \leq \mu^* E + \varepsilon$$

ed esiste un $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ (l'insieme delle intersezioni numerabili di elementi di $\mathcal{A}_\sigma$) tale che $E \subset B$ e

$$\mu^* E = \mu^* B$$

DIMOSTRAZIONE: La prima parte del lemma è provata nel corso della dimostrazione del teorema di Carathéodory.

Il secondo enunciato si dimostra considerando, per ogni numero naturale n, un insieme $A_n \in \mathcal{A}$ con $E \subset A_n$ e $\mu^* A_n \leq \mu^* E + 1/n$, e ponendo $B = \bigcap A_n$. Ovviamente $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ e $E \subset B$. Infine

$$\mu^* E \leq \mu^* B \leq \mu^* A_n \leq \mu^* E + \frac{1}{n}$$

e, per arbitrarietà di n, $\mu^* E = \mu^* B$.

QED

Definiamo, se $E \subset X \times Y$ le *sezioni* di E in x e y come

$$E_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in E\} \qquad \text{e} \qquad E_y := \{x \in X \mid (x, y) \in E\}$$

Osserviamo che se $E \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ allora è ν-misurabile. Se $E \in \mathcal{R}$ questo è ovvio. Se $E = \bigcup E_n \in \mathcal{R}_\sigma$ segue da

$$\chi_{E_x}(y) = \chi_E(x, y) = \sup_n \chi_{E_n}(x, y) = \sup_n \chi_{(E_n)_x}(y)$$

(gli $E_n \in \mathcal{R}$ sono misurabili). Analogamente se $E = \bigcap_n E_n \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ segue da

$$\chi_{E_x}(y) = \chi_E(x, y) = \inf_n \chi_{E_n}(x, y) = \inf_n \chi_{(E_n)_x}(y)$$

(gli $E_n \in \mathcal{R}_\sigma$ sono misurabili come si è appena visto).

4.4.10 Lemma *Se $E \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ e $\mu \otimes \nu(E) < \infty$ allora la funzione $g(x) := \nu E_x$ è misurabile in $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e*

$$\int g d\mu = \mu \otimes \nu(E)$$

DIMOSTRAZIONE: Se $E \in \mathcal{R}$ il lemma è banale. Se $\{E_n\}$ è una successione in $\mathcal{R}$ di insiemi a due a due disgiunti e se

$$g_n(x) := \nu(E_n)_x \qquad \text{e} \qquad g := \sum_n g_n$$

allora g è misurabile e, dato che $g_n \geq 0$, per il teorema della convergenza monotona di B.Levi:

$$\int g d\mu = \sum_n \int g_n d\mu = \sum_n \mu \otimes \nu(E_n) = \mu \otimes \nu(E)$$

quindi il lemma è vero per $E \in \mathcal{R}_\sigma$. Infine, se $E \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ ha misura finita, allora esiste una successione $\{E_n\} \subset \mathcal{R}_\sigma$ con $E_{n+1} \subset E_n$ e $E = \bigcap_n E_n$. Quindi, per il lemma precedente, possiamo assumere $\mu \otimes \nu(E_1) < \infty$. Poniamo

$$g_n(x) := \nu(E_n)_x$$

Dato che

$$\int g_1 d\mu = \mu \otimes \nu(E_1) < \infty$$

si ha $g_1 < \infty$ q.o: se dunque x è tale che $g(x) < \infty$ allora la successione $\{(E_n)_x\}$ è descrescente e la sua intersezione è E_x. Per la proposizione 4.2.1(2) si ha

$$g(x) = \nu(E_x) = \lim_n \nu(E_n)_x = \lim_n g_n(x)$$

i.e. $g_n \longrightarrow g$ q.o., da cui la misurabilità di g. Infine, essendo $0 \leq g_n \leq g_1$, per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue (e di nuovo per la proposizione 4.2.1(2)):

$$\int g d\mu = \lim_n \int g_n d\mu = \lim_n \mu \otimes \nu E_n = \mu \otimes \nu E$$

QED

Diciamo che una funzione misurabile $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ su uno spazio di misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è *integrabile* se

$$\int_X |f| d\mu < \infty$$

L'insieme delle funzioni integrabili modulo la relazione che identifica due funzioni se sono uguali quasi ovunque è uno spazio vettoriale (rispetto alla somma e moltiplicazione per uno scalare delle classi di equivalenza definite come $[f]+[g] = [f+g]$ e $a[f] = [af]$, che si indica con $L^1(X, \mu)$.

4.4.11 Teorema (FUBINI) *Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(X, \mathcal{B}, \nu)$ sono spazi completi di misura e $f \in L^1(X \times Y, \mu \otimes \nu)$ allora*

(1) *per quasi ogni x la funzione $f_x(y) := f(x, y)$ appartiene a $L^1(Y, \nu)$ e*

$$\int_Y f_x(y) d\nu(y) \in L^1(X, \mu)$$

(2) *per quasi ogni y la funzione $f_y(x) := f(x, y)$ appartiene a $L^1(Y, \mu)$ e*

$$\int_X f_y(x) d\mu(x) \in L^1(Y, \nu)$$

(3)

$$\int_X \int_Y f_x d\nu d\mu = \int_{X\times Y} f d\mu \otimes \nu = \int_Y \int_X f_y d\mu d\nu$$

DIMOSTRAZIONE: Data la simmetria fra x e y nell'enunciato basta dimostrare la (1) e la prima uguaglianza della (3); inoltre basta limitarsi a funzioni non negative, perché se il teorema vale per funzioni qualsiasi, evidentemente vale anche per le loro differenze.

L'idea della dimostrazione è di verificare il teorema per classi sempre più vaste di funzioni. Iniziamo col verificarne la validità per le funzioni caratteristiche di insiemi misurabili di misura finita.

Per il lemma 4.4.9 esiste un $F \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ contenente E e tale che $\mu \otimes \nu(F) = \mu \otimes \mu(E)$: l'insieme $G := F \setminus E$ è misurabile (lo sono E e F) e

$$\mu \otimes \nu(F) = \mu \otimes \nu(E) + \mu \otimes \nu(G)$$

e quindi $\mu \otimes \nu(G) = 0$. Ora, a sua volta, esiste un insieme $H \subset \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ contenente G e con $\mu \otimes \nu(H) = \mu \otimes \nu(G) = 0$; quindi, per il lemma 4.4.10, $\nu(H_x) = 0$ per quasi ogni $x \in X$ e quindi $(G_x \subset H_x)$ $\nu(G_x) = 0$ (per completezza di ν). Quindi

$$g(x) = \nu(E_x) = \nu(F_x) \qquad \text{q.o.}$$

e quindi (ancora per il lemma 4.4.10) g è misurabile e

$$\int g d\mu = \mu \otimes \nu(F) = \mu \otimes (E)$$

Ne segue:

$$\int_X \int_Y (\chi_E)_x d\nu d\mu = \int_{X\times Y} \chi_E d\mu \otimes \nu$$

Il teorema è quindi dimostrato per funzioni caratteristiche di insiemi misurabili di misura finita, e quindi (per linearità) per funzioni semplici nulle fuori da insiemi di misura finita; ma, per il teorema 4.3.3, ogni ogni funzione *integrabile* non negativa è limite di una successione crescente di tali funzioni: $f = \lim_n \varphi_n$ e quindi $f_y = \lim_n (\varphi_n)_y$, dunque, per il teorema della convergenza monotona di B. Levi (si noti che le φ_n sono integrabili, essendolo la f):

$$\int_Y f_x(y) = d\nu(y) = \lim_n \int_Y (\varphi_n)_x(y)dy$$

In altri termini questo integrale è una funzione misurabile della x e, di nuovo per il teorema della convergenza monotona:

$$\int_X \int_Y f d\nu d\mu = \lim_n \int_X \int_Y (\varphi_n)_y d\nu d\mu = \lim_n \int_{X\times Y} \varphi d\mu \otimes \nu = \int_{X\times Y} f d\mu \otimes \nu$$

QED

Questo teorema è visibilmente di fondamentale importanza: tuttavia spesso non è immediata la verifica della sua applicabilità. A questo scopo è spesso utile considerare un criterio che permette di dedurre le ipotesi del teorema di Fubini:

4.4.12 Teorema (TONELLI) *Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(X, \mathcal{B}, \nu)$ sono spazi di misura σ-finiti e f è una funzione misurabile su $X \times Y$ e non negativa, allora*

(1) *per quasi ogni x la funzione $f_x(y) := f(x, y)$ è misurabile e*

$$\int_Y f_x(y)d\nu(y) \qquad \text{è misurabile}$$

(2) *per quasi ogni y la funzione $f_y(x) := f(x, y)$ è misurabile e*

$$\int_X f_y(x)d\mu(x) \qquad \text{è misurabile}$$

(3)

$$\int_X \int_Y f_x d\nu d\mu = \int_{X\times Y} f d\mu \otimes \nu = \int_Y \int_X f_y d\mu d\nu$$

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo semplicemente che, nella dimostrazione del teorema di Fubini l'unico punto nel quale si usa l'ipotesi di integrabilità della f (rispetto a $\mu \otimes \nu$) è per dedurre l'integrabilità delle funzioni semplici $\varphi_n\}$ che approssimano la f: nel nostro caso non è necessario, perché basta la σ-finitezza degli spazi di misura in questione per dedurre l'esistenza delle $\{\varphi_n\}$. Quindi la stessa dimostrazione del teorema di Fubini fornisce, con questa modifica, il teorema di Tonelli.

QED

4.5 Misure di Borel, Radon e integrale di Stieltjes.

Vogliamo qui accennare a qualche procedimento che consente la costruzione di misure di Borel.

Consideriamo uno spazio topologico X localmente compatto di Hausdorff: in questo paragrafo ogni spazio topologico sarà di questo tipo. Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, il suo *supporto* è l'insieme

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$$

L'insieme $C_c(X)$ delle funzioni reali continue a supporto compatto è uno spazio vettoriale, e costituisce il protagonista della teoria dell'integrazione su X.

4.5.1 Definizione *La σ-algebra degli* insiemi di Radon *è la σ-algebra $\mathcal{R}(X)$ di sottoinsiemi di X tali che gli elementi di $C_c(X)$ siano funzioni misurabili.*

Quindi $\mathcal{R}(X)$ è generata da insiemi della forma

$$\{x \mid f(x) \geq a\}$$

con $f \in C_c(X)$. Se $a > 0$ questi sono insiemi compatti G_δ e, dato che i compatti G_δ sono evidentemente insiemi di Radon, $\mathcal{R}(X)$ è generata da essi.

Ricordiamo che

4.5.2 Definizione *La σ-algebra degli* insiemi di Borel *è la σ-algebra $\mathcal{B}(X)$ generata dagli insiemi chiusi.*

Quindi $\mathcal{R}(X) \subset \mathcal{B}(X)$. Il viceversa vale se X è uno spazio metrico separabile localmente compatto.

4.5.3 Definizione *Una* misura di Radon *su X è una misura completa sulla σ-algebra $\mathcal{R}(X)$ tale che ogni insieme compatto abbia misura finita.*

(Come sappiamo la richiesta di completezza può sempre soddisfarsi, completando la misura data). Ricordiamo che una misura di Borel è una misura sui boreliani di X: spesso considereremo il suo completamento e lo chiameremo sempre misura di Borel.

4.5.4 Definizione *Una misura μ su una σ-algebra $\mathcal{A}$ contenente $\mathcal{R}(X)$, si dice* quasi-regolare *se*

$$\text{(1)} \qquad \forall E \in \mathcal{A} \quad \mu E = \inf_{\substack{E \subset A \\ A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{T}}} \mu A$$

($\mathcal{T}$ denota la topologia di X) e

$$\text{(2)} \qquad \forall A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{T} \quad \mu A = \inf_{\substack{K \subset A \\ K \in \mathcal{A} \text{ compatto}}} \mu K$$

Se la (2) vale per ogni $A \in \mathcal{A}$ la misura si dice regolare.

Ad esempio, la misura di Lebesgue sulla retta reale è regolare. Mimando la costruzione della misura di Lebesgue vogliamo ora definire delle misure quasi-regolari sul nostro spazio X localmente compatto di Hausdorff.

4.5.5 Definizione *Una misura esterna μ^* su X si dice* topologicamente regolare *se*

$$\forall E \subset X \quad \mu^* E = \inf_{\substack{E \subset A \\ A \subset \mathcal{T}}} \mu^* A \tag{1}$$

$$\forall A_1, A_2 \in \mathcal{T} \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow \mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^* A_1 + \mu^* A_2 \tag{2}$$

$$\forall A \in \mathcal{T} \quad \mu^* A = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ compatto}}} \mu^* K \tag{3}$$

4.5.6 Teorema *Se μ^* è una misura esterna topologicamente regolare su X allora ogni boreliano è μ^*-misurabile.*

DIMOSTRAZIONE: Dato che gli insiemi misurabili rispetto ad una misura esterna formano una σ-algebra, basterà mostrare che i chiusi F sono μ^*-misurabili.

Sia A un aperto di misura finita e $\varepsilon > 0$; allora $A \cap \complement F$ è aperto e ha misura esterna finita. Ora, per la (3) nella definizione di regolarità topologica della μ^*, si ha che

$$\forall A \in \mathcal{T} \quad \mu^* A = \sup_{\substack{\overline{U} \subset A \\ U \in \mathcal{T} \\ \overline{U} \text{ compatto}}} \mu^* U$$

i.e. esiste un U aperto tale che $\overline{U} \subset A \cap \complement F$ e

$$\mu^* U > \mu^*(A \cap \complement F) - \varepsilon$$

Allora, se $V := A \setminus \overline{U}$, $V \cap U = \emptyset$ e $A \cap F \subset V$, quindi

$$\mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap \complement F) < \mu^* V + \mu^* U + \varepsilon < \mu^*(U \cup V) + \varepsilon < \mu^* A + \varepsilon$$

(per la (2) nella definizione di regolarità topologica). Per arbitrarietà di ε si ha dunque la misurabilità di F:

$$\mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap \complement F) \leq \mu^* A$$

(la disuguaglianza opposta è vera per monotonia della μ^*).

QED

4.5.7 Teorema *Se $\overline{\mu} : \mathcal{T} \longrightarrow [0,\infty]$ è una funzione definita sugli aperti di X tale che*

(1) *Se $\overline{A}$ è compatto allora $\overline{\mu}A < \infty$.*

(2) *Se $A_1 \subset A_2$ allora $\overline{\mu}A_1 \le \overline{\mu}A_2$.*

(3) *Se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ allora $\overline{\mu}(A_1 \cup A_2) = \overline{\mu}A_1 + \overline{\mu}A_2$.*

(4) $\overline{\mu}\left(\bigcup_n A_n\right) \le \sum_n \overline{\mu}A_n$.

(5) $\overline{\mu}A = \sup_{\substack{\overline{U}\subset A \\ \overline{U}\ compatto}} \overline{\mu}U$.

Allora la funzione

$$\mu^* E := \inf_{E\subset A\subset\mathcal{T}} \overline{\mu}A$$

è una misura esterna topologicamente regolare.

DIMOSTRAZIONE: La monotonia e subadditività numerabile della μ^* sono immediate per le (2) e (4); inoltre, se $A \in \mathcal{T}$:

$$\mu^* A = \overline{\mu}A$$

e quindi, per la (5), la (3) della definizione di regolarità topologica è vera per i K che siano chiusure di aperti, e quindi è vera per ogni compatto. Infine le (1) e (2) della definizione di regolarità topologica seguono dalla definizione di μ^* e dalla (3).

QED

Quindi, a partire da una funzione definita sugli aperti, possiamo definire una misura sui boreliani associata alla misura esterna del teorema precedente: la regolarità topologica della misura esterna garantisce la quasi-regolarità della misura indotta.

Alternativamente, si può partire da una funzione definita sui compatti e cercare di estenderla ad una funzione che soddisfi le ipotesi del teorema precedente; per questi ed altri approfondimenti si rimanda ai testi specialistici di teoria della misura.

Consideriamo ora le misure di Radon sulla retta reale $\mathbb{R}$: si tratta evidentemente di misure finite sui sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}$; quindi, ad ogni tale misura μ possiamo associare una funzione

$$F(x) := \mu(-\infty, x]$$

che si dice[3] *funzione di distribuzione* della misura μ. Viceversa, data una funzione F possiamo definire

$$\mu(a, b] := F(b) - F(a)$$

[3]Dato l'esteso utilizzo che se ne fa in teoria delle probabilità, usiamo il termine probabilistico.

4.5.8 Teorema *La distribuzione associata ad una misura di Radon è una funzione monotona crescente, limitata, continua da destra e tale che*

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} F(x) = 0$$

Viceversa, una funzione F monotona crescente e continua da destra induce una misura di Radon la cui distribuzione è esattamente la F.

DIMOSTRAZIONE: Per le proprietà di μ è evidente che F è una funzione monotona crescente a valori reali. Inoltre

$$\mu(a,b] = F(b) - F(a)$$

e, dato che $(a,b] = \bigcap_n (a, b + 1/n]$, per la proposizione 4.2.1(2):

$$\mu(a,b] = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\left(a, b + \frac{1}{n}\right]$$

i.e.

$$F(b) = \lim_{n\longrightarrow\infty} F\left(b + \frac{1}{n}\right) = F(b+)$$

il che significa che la funzione di distribuzione è *continua da destra* (o *superiormente*). Si noti che

$$\mu\{b\} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(b - \frac{1}{n}, b\right] = F(b) - F(b-)$$

Quindi F è continua in b se e solo se l'insieme $\{b\}$ ha misura nulla. Nel caso $x = -\infty$ si trova, dato che $\bigcap_n(-\infty, -n) = \emptyset$:

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} F(x) = 0$$

Viceversa, sia F una funzione monotona crescente e continua da destra: allora la

$$\mu(a,b] = F(b) - F(a)$$

definisce una funzione sulla classe $\mathcal{I}$ degli intervalli aperti a sinistra e chiusi a destra; questa classe non è una σ-algebra (non è neanche un'algebra) tuttavia, procedendo come nel lemma 4.4.2, possiamo estendere μ ad una misura sull'algebra generata da $\mathcal{I}$, dato che, se $(a,b] \subset \bigcup_n (a_n, b_n]$, allora

$$F(b) - F(a) \leq \sum_{n=1}^{\infty} F(b_n) - F(a_n)$$

Allora, usando il teorema di estensione di Carathéodory, abbiamo una misura sulla σ-algebra dei boreliani (che è quella generata da $\mathcal{I}$) il cui completamento è una misura di Radon; questa estensione è unica, dato che $\mathbb{R}$ è unione numerabile di elementi di $\mathcal{I}$ e quindi μ è σ-finita.

QED

Quindi, se φ è una funzione boreliana su $\mathbb{R}$ possiamo integrarla rispetto ad una funzione F monotona crescente continua da destra ponendo

$$\int \varphi dF := \int \varphi d\mu$$

ove μ è la misura di Radon associata a F; questo integrale si dice *integrale di Lebesgue–Stieltjes*.

Uno spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tale che $P(\Omega) = 1$ si dice *spazio di probabilità* e la misura P si dice *probabilità* su Ω; ad esempio, l'intervallo $[0, 1]$ con la misura di Lebesgue è uno spazio di probabilità. In questo caso le distribuzioni delle misure di Radon soddisfano alla

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} F(x) = 1$$

Una funzione misurabile $X : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice in questo contesto *variabile aleatoria*: ad una variabile aleatoria possiamo associare una funzione di distribuzione ponendo

$$F(x) = P(X < x) := P\{y \mid X(y) < x\}$$

La F permette di calcolare le grandezze fondamentali associate ad una variabile aleatoria, come la *speranza matematica*

$$\mathbb{E}X := \int x dF(x)$$

e la *varianza*

$$\mathbb{D}X := \int (x - \mathbb{E}X)^2 dF(x)$$

che infatti valgono

$$\mathbb{E}X = \int xF'(x)dx$$

e

$$\mathbb{D}X = \int (x - \mathbb{E}X)F'(x)dx$$

Se ad esempio $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione boreliana, avremo una nuova variabile aleatoria $Y = \varphi \circ X$, la cui speranza è

$$\int x dG(x)$$

(ove G è la distribuzione di Y): ma se φ è integrabile rispetto alla misura di Radon associata alla funzione di distribuzione di X, allora

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}\varphi(X) = \int \varphi(x)dF(x)$$

Quindi la conoscenza di F determina la conoscenza delle distribuzioni di tutte le variabili aleatorie ottenute trasformando X con funzioni boreliane.

4.6 Spazi L^p.

Da ultimo introduciamo gli *spazi* L^p: sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura; definiamo, per $1 \leq p < \infty$.

$$L^p(X,\mu) := \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{C} \,|\, f \text{ misurabile e } \int |f|^p d\mu < \infty \right\} / \equiv$$

come lo spazio delle classi di equivalenza (modulo la relazione $f \equiv g \iff f = g$ q.o.) di funzioni la cui potenza p-sima abbia integrale finito in modulo. Per $p = \infty$ definiamo

$$L^\infty(X,\mu) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \,|\, f \text{ misurabile e misurabile}\}$$

Si tratta ovviamente di spazi vettoriali.

Per brevità scriviamo

$$||f||_p := \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

e

$$||f||_\infty := \operatorname{esssup}_{x\in X} |f(x)|$$

ove il *supremo essenziale* è l'inf del sup di g per ogni g che sia uguale a f q.o:

$$\operatorname{esssup}_{x\in X} g(x) := \inf\{M \,|\, \mu\{x \,|\, M < f(x)\}\}$$

Nel séguito gli spazi L^p costituiranno l'esempio classico di spazi di Banach: per il momento limitiamoci a dimostrare i risultati classici che permettono di effettuare il calcolo in L^p: ricordiamo intanto la

4.6.1 Definizione *Una* funzione convessa *è una funzione* $\varphi : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *(con* $-\infty \leq a < b \leq \infty$*) tale che*

$$\forall x, y \in (a, b)\ \forall\lambda \in [0, 1] \quad \varphi((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y)$$

Ovviamente φ è convessa se e solo se

$$(C) \qquad \forall s,t,u\in[a,b] \quad \frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}\le\frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}$$

Da questo segue la continuità di φ in (a,b).

4.6.2 Lemma (DISUGUAGLIANZA DI JENSEN) *Se $(X,\mathcal{A},\mu)$ è uno spazio di misura con $\mu(X)=1$ e $f\in L^1(X,\mu)$ ha valori in (a,b) e φ è convessa in (a,b) allora*

$$\varphi\left(\int_X f d\mu\right)\le\int_X\varphi\circ f d\mu$$

DIMOSTRAZIONE: Poniamo

$$t:=\int_X f d\mu$$

(da cui $t\in(a,b)$) e $\beta=\sup_{s\in(a,b)}(t-s)$. Allora

$$\forall s\in(a,b)\quad \varphi(t)+\beta(s-t)\le\varphi(s)$$

i.e.

$$\forall x\in X\quad \varphi(f(x))-\varphi(t)-\beta(f(x)-t)\ge0$$

Dato che φ è continua, $\varphi\circ f$ è misurabile e quindi, integrando la disuguaglianza precedente abbiamo

$$\varphi(t)\mu(X)+\beta(\int_X f d\mu-t\mu(X))\le\int_X\varphi\circ f d\mu$$

i.e. la tesi, dato che $\mu(X)=1$ e $t=\int_X f d\mu$.

QED

4.6.3 Teorema (DISUGUAGLIANZA DI HÖLDER) *Se $p,q>0$ sono tali che $1/p+1/q=1$ (oppure se $p=1$ e $q=\infty$) e $(X,\mathcal{A},\mu)$ uno spazio di misura, per ogni coppia di funzioni $f,g:X\longrightarrow[0,\infty]$ misurabili si ha*

$$\int_X fg d\mu\le\left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

DIMOSTRAZIONE: Siano

$$A:=\left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{e} \qquad B:=\left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

Se $A = 0$ allora $f = 0$ q.o. quindi $fg = 0$ q.o. ed il teorema è dimostrato; se $A > 0$ e $B = \infty$ pure il teorema è banale. Possiamo dunque supporre che siano $A, B \in (0, \infty)$. Poniamo

$$F := \frac{f}{A} \qquad \text{e} \qquad G = \frac{g}{B}$$

in modo che

$$\int_X F^p d\mu = \int_X G^q d\mu = 1$$

Ora, se $F(x), G(x) \in (0, \infty)$, allora esistono $s, t \in \mathbb{R}$ tali che $F(x) = e^{s/p}$ e $G(x) = e^{t/q}$; ma $1/p + 1/q = 1$ e la funzione esponenziale è convessa: quindi

$$e^{\frac{s}{p} + \frac{t}{q}} \leq \frac{e^s}{p} + \frac{e^t}{q}$$

i.e.

$$\forall x \in X \quad F(x)G(x) \leq \frac{F(x)^p}{p} + \frac{G(x)^q}{q}$$

e, integrando:

$$\int_X FG d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

cioè la tesi.

QED

4.6.4 Corollario (DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ) *Se* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio di misura, per ogni coppia di funzioni* $f, g : X \longrightarrow [0, \infty]$ *misurabili si ha*

$$\int_X fg d\mu \leq \sqrt{\int_X f^2 d\mu} \sqrt{\int_X g^2 d\mu}$$

4.6.5 Teorema (DISUGUAGLIANZA DI MINKOWSKI) *Se* $p, q > 0$ *sono tali che* $1/p + 1/q = 1$ *(oppure se* $p = 1$ *e* $q = \infty$*) e* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio di misura, per ogni coppia di funzioni* $f, g : X \longrightarrow [0, \infty]$ *misurabili si ha*

$$\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

DIMOSTRAZIONE: Applichiamo all'identità

$$(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$$

la disuguaglianza di Hölder:

$$\int_X f(f+g)^{p-1} d\mu \le \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X (f+g)^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

ma $(p-1)q = p$ e quindi

$$\int_X (f+g)^p d\mu \le \left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

Ora, supponiamo che in questa disuguaglianza la parte sinistra sia non nullo e la parte destra non infinito (altrimenti il teorema è banale): dato che la funzione t^p è convessa per $t \in (0, \infty)$:

$$\left(\frac{f+g}{2}\right)^p \le \frac{1}{2}(f^p + g^p)$$

e quindi

$$\frac{\int_X (f+g)^p d\mu}{\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}} \le \left(\left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

cioè, dato che $1 - 1/q = 1/p$, la disuguaglianza di Minkowski.

QED

Vogliamo infine dimostrare dei risultati molto utili di approssimazione per le funzioni in L^p: consideriamo uno spazio di Hausdorff localmente compatto X, $\mathcal{A}$ una σ-algebra su X contenente i boreliani e μ una misura regolare su X.

4.6.6 Teorema *Se $1 \le p < \infty$ per ogni funzione $f \in L^p(X, \mu)$ esiste una funzione continua a supporto compatto g tale che*

$$||f - g||_p \longrightarrow 0$$

Cioè ogni funzione L^p è approssimabile con funzioni continue a supporto compatto.

DIMOSTRAZIONE: Dimostreremo in realtà di più: ogni funzione L^p si approssima con funzioni "di salto", cioè con funzioni semplici s che hanno supporto in insiemi

di misura finita. Sia S l'insieme delle funzioni $s : X \longrightarrow \mathbb{C}$ misurabili semplici tali che
$$\mu(\{x \in X \mid s(x \neq 0)\} < \infty$$
Dimostriamo che gli elementi di questo insieme approssimano L^p. Intanto è ovvio che $S \subset L^p(X,\mu)$; consideriamo poi, data $f : X \longrightarrow [0,\infty)$ in $L^p(X,\mu)$, una successione $\{s_n\}$ monotona di funzioni semplici che converga a f (teorema 4.3.3); dato che $f - s_n \leq f$ (stiamo considerando funzioni reali positive in L^p: basta dimostrare il teorema per esse):
$$|f - s_n|^p \leq f^p$$
Quindi possiamo usare il teorema della convergenza dominata:
$$\lim ||f - s_n||_p = \int_X \lim |f - s_n|^p d\mu = 0$$
Per dimostrare il teorema ci basta sapere che, dato $\varepsilon > 0$, per ogni funzione $s \in S$ esiste $g \in C_c(X)$ tale che
$$\mu\{x \mid g(x) \neq f(x)\} < \varepsilon$$
e $|g| \leq ||s||_\infty$: infatti in questo caso
$$||f - g||_p = ||f - g + s - s|| \leq ||f - s||_p + ||g - s||_p < \varepsilon + 2\varepsilon^{\frac{1}{p}}||s||_\infty$$
Ora consideriamo la nostra $s \in S$ e l'insieme $A = \{x \mid s(x) \neq 0\}$: sappiamo che è diversa da zero su un insieme di misura finita, quindi, per regolarità della misura, possiamo supporre che esista un compatto K un aperto U tali che $K \subset U$, $s|_U = 0$ e $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$. Allora, per il lemma di Uryshon, esiste una funzione continua h tale che $h|_K = 1$ e $g|_{\complement U} = 0$: evidentemente
$$\mu\{x \mid g(x) \neq s(x)\} < \varepsilon$$
La g è la funzione cercata.

QED

Implicita nella dimostrazione di questo risultato è quella del seguente

4.6.7 Teorema (LUSIN) *Una funzione misurabile su un insieme di misura finita è approssimabile con funzioni continue a supporto compatto.*

Capitolo 5

GRUPPI, ALGEBRE E RAPPRESENTAZIONI

In questo capitolo collezioniamo alcune definizioni, teoremi ed esempi relativi alle strutture algebriche più pervasive nella matematica: i gruppi, le algebre e le loro rappresentazioni. Diamo solo alcune conseguenze quasi immediate della definizione di gruppo (nella III parte studieremo a fondo le strutture di gruppo che intervengono in meccanica quantistica: i gruppi topologici e di Lie), mentre per le algebre ci limitiamo alle definizioni ed agli esempi di dimensione finita, dato che una classe importante di algebre a dimensione infinita, le algebre di operatori, saranno esaminate dettagliatamente nella II parte. Le rappresentazioni sono pure introdotte nel caso di dimensione finita: in appendice 5.6 è data una trattazione elementare dei prodotti tensoriali per rendere autosufficiente l'esposizione di questi concetti.

5.1 Gruppi

5.1.1 Definizione *Un insieme G dotato di una operazione $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ si dice un* gruppo *se l'operazione $\cdot$ (che si indicherà semplicemente per giustapposizione dei suoi operandi) è:*

(1) *associativa, cioè $g(g'g'') = (gg')g''$;*

(2) *possiede identità $e \in G$, cioè $ge = eg = g$;*

(3) *ogni elemento g possiede un inverso, cioè esiste $g^{-1} \in G$ tale che $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.*

5.1.2 Definizione *Un gruppo si dice* abeliano *(o* commutativo*) se l'operazione è commutativa (i.e. $gg' = g'g$). Se un gruppo è finito, la sua cardinalità si dice* ordine *del gruppo.*

5.1.3 Esempio

(1) *Uno spazio vettoriale rispetto alla somma di vettori è un gruppo abeliano.*

(2) *L'insieme S_X delle funzioni biunivoche di un insieme X in sé è un gruppo (non abeliano a meno che* $\operatorname{Card} X \leq 2$*).*

(3) *L'insieme degli interi $\mathbb{Z}$ è un gruppo rispetto alla somma, come pure il "reticolo" $\mathbb{Z}^n$ dei vettori in $\mathbb{R}^n$ a coordinate intere.*

(4) *Se V è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita, l'insieme delle applicazioni lineari invertibili (isomorfismi lineari) di V n sé è un gruppo $GL(V)$ rispetto alla composizione, che si dice* gruppo lineare generale*; se fissiamo una base in V, i.e. un isomorfismo $V \cong \mathbb{R}^n$ allora $GL(V) = GL_n(\mathbb{R})$ è il* gruppo delle matrici invertibili di ordine n*: l'operazione di gruppo è in questo caso il prodotto di matrici (righe per colonne).*

Se G e H sono gruppi e $f : G \longrightarrow H$ è una funzione, si dice che f è un *omomorfismo*[1] se $f(gg') = f(g)f(g')$. Se inoltre f è iniettiva (risp. suriettiva, biunivoca) si dice che è un *monomorfismo* (risp. *epimorfismo, isomorfismo*) del gruppo G nel gruppo H. Gruppi isomorfi sono da considerarsi equivalenti ed ovviamente la classe dei gruppi rispetto agli omomorfismi forma una categoria.

5.1.4 Esempio *Se G è il gruppo dei numeri reali rispetto alla somma e H il gruppo dei numeri reali positivi rispetto al prodotto, allora la funzione esponenziale $x \in G \longmapsto e^x \in H$ è un isomorfismo.*

Se G è un gruppo e $S, T \subset G$ sono sottoinsiemi, definiamo

$$ST := \{s \cdot t \mid s \in S, t \in T\}$$

Se $f : G \longrightarrow H$ è un omomorfismo allora la sua immagine $\operatorname{im} f = f(G)$ è un sottoinsieme di H tale che $(\operatorname{im} f)(\operatorname{im} f) \subset \operatorname{im} f$ dato che $f(g)f(g') = f(gg')$.

5.1.5 Definizione *Un sottoinsieme H di un gruppo G tale che $HH \subset H$ si dice* sottogruppo *di G e si scrive in questo caso $H < G$.*

Anche il *nucleo* del morfismo f

$$\ker f := \{g \in G \mid f(g) = e\}$$

è un sottogruppo, che gode anche della proprietà $(\ker f)G = G(\ker f)$ (infatti se $k \in \ker f$ e $g \in G$: $f(kg) = f(k)f(g) = f(g) = f(g)f(k) = f(gk)$). In altri termini, se $g \in G$ e $k \in \ker f$ allora $gkg^{-1} \in \ker f$.

[1] Si tratta della nozione analoga a quella di applicazione lineare nel caso degli spazi vettoriali: molte definizioni che si danno per gli spazi vettoriali (funzioni lineari, sottospazi, quozienti, prodotti) si generalizzano ai gruppi..

5.1.6 Definizione *Un sottogruppo $H < G$ tale che $HG = GH$ si dice* normale *e si scrive $H \lhd G$.*

5.1.7 Esempio *Se G è abeliano, ogni sottogruppo è automaticamente normale: in particolare nel caso di uno spazio vettoriale rispetto alla somma.*

Come nel caso degli spazi vettoriali, un omomorfismo $f : G \longrightarrow H$ è iniettivo se e solo se $\ker f = \{e\}$; in generale $i : \ker f \hookrightarrow G$; ovviamente $f : G \longrightarrow \operatorname{im} f$ è un epimorfismo, e la composizione $i \circ f$ è identicamente e. Si esprime questo dicendo che la successione

$$(*) \qquad \{e\} \longrightarrow \ker f \longrightarrow G \longrightarrow \operatorname{im} f \longrightarrow \{e\}$$

è *esatta*. Nel caso degli spazi vettoriali esiste una nozione analoga: se V, W e Z sono spazi vettoriali e $f : V \longrightarrow W$, $g : Z \longrightarrow V$ sono mappe lineari, la successione

$$Z \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$$

è esatta se $\ker f = \operatorname{im} g$; quindi se $Z = 0$ l'esattezza vuol dire l'iniettività di f e se $W = 0$ vuol dire la suriettività di g. La stessa cosa nel caso di gruppi qualsiasi.

Un modo diverso di esprimere la (*) è dire che il gruppo $\operatorname{im} f$ è *quoziente del gruppo G modulo il sottogruppo* $\ker f$.

In generale, se G è un gruppo e $K \lhd G$ è un sottogruppo normale allora l'insieme

$$G/K := \{gK \mid g \in G\}$$

dei sottoinsiemi di G della forma gK è un gruppo rispetto al prodotto

$$(gK)(g'K) = (gg')K$$

e si dice *gruppo quoziente modulo K*. Gli elementi gK di G/K si dicono *classi laterali* (sinistre) di G modulo K.

5.1.8 Proposizione *I sottogruppi normali di G sono esattamente i nuclei dei possibili omomorfismi di G in un altro gruppo.*

DIMOSTRAZIONE: Che se $f : G \longrightarrow H$ è un omomorfismo allora $\ker f \lhd G$ già lo sappiamo; viceversa, se $K \lhd G$ allora la proiezione $p : G \longrightarrow G/K$ è un epimorfismo di nucleo K.

QED

Nel caso della (*) $G/\ker f$ è isomorfo, tramite l'isomorfismo $G/\ker f \longmapsto \operatorname{im} f$, a $\operatorname{im} f$. Si noti che, se H non è normale, G/H non è un gruppo.

Se G e H sono gruppi il prodotto $G \times H$ è un gruppo rispetto a

$$(g,h)(g',h') := (gg', hh')$$

Evidentemente questa definizione si generalizza al prodotto di una famiglia qualsiasi di gruppi; il gruppo $G \times H$ si dice *prodotto diretto* dei gruppi G e H: i fattori si immergono nel prodotto con due immersioni

$$\begin{array}{rrcl}
i_G: & G & \hookrightarrow & G \times H \\
 & g & \longmapsto & (g,e)
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrcl}
i_H: & H & \hookrightarrow & G \times H \\
 & h & \longmapsto & (e,h)
\end{array}$$

che sono monomorfismi: quindi $G < G \times H$ e $H < G \times H$. Inoltre i sottogruppi G e H sono normali, e si ha

$$G \times H/G \cong H \qquad \text{e} \qquad G \times H/H \cong G$$

(un isomorfismo fra i gruppi G e G' si indica con $G \cong G'$). Quindi la struttura di $G \times H$ è in un certo senso determinata da quella di G e H: ogni volta che un gruppo ha sottogruppi normali, passando ai quozienti si trovano gruppi "meno complicati" del gruppo di partenza. Questo motiva la seguente

5.1.9 Definizione *Un gruppo G è* semplice *se non ha sottogruppi normali non banali.*

"Non banali" vuol dire diversi da $\{e\}$ e G stesso, che sono ovviamente sottogruppi normali di G.

Se $H, H' < G$ sono sottogruppi, anche $H \cap H'$ lo è, ovviamente; se $S \subset G$ è un sottoinsieme qualsiasi, il *sottogruppo generato da S* è

$$\langle S \rangle := \bigcap_{S \subset H < G} H$$

l'intersezione di tutti i sottogruppi che contengono S. In particolare, per $S = \{s\}$ si scrive $\langle g \rangle$ per il sottogruppo generato dall'elemento $g \in G$.

Naturalmente g è formato da e, g, gg,... Usiamo la notazione esponenziale scrivendo g^n in luogo di $g \cdots g$ (n volte): allora è ovvio che $g^n g^m = g^{n+m}$ e quindi che $\langle g \rangle$ è abeliano.

5.1.10 Esempio *Consideriamo il gruppo $\mathbb{Z}$ rispetto alla somma: l'identità è $e = 0$; se consideriamo $1 \in \mathbb{Z}$ allora ogni elemento di $\mathbb{Z}$ è della forma $1 + \cdots + 1$ (n volte) e quindi $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$.*

5.1.11 Definizione *Se un gruppo G è generato da un suo elemento $g \in G$, i.e. se $G = \langle g \rangle$, si dice* ciclico.

Quindi $\mathbb{Z}$ è ciclico. Notiamo che possiamo definire un gruppo ciclico finito per ogni numero naturale n: basta considerare un insieme $C_n = \{c_0, ..., c_{n-1}\}$ e definire il prodotto ponendo

$$c_1^k := c_k$$

($k = 0, ..., n-1$.) Otteniamo così un gruppo ciclico generato da c_1 con n elementi, il cui elemento unità è $c_0 = e$.

Un modo familiare di rappresentare questo gruppo è considerare le classi di congruenza di numeri interi modulo n: $\mathbb{Z}_n$. Rispetto alla somma (modulo n) si tratta esattamente di C_n (l'isomorfismo è la mappa $c : \mathbb{Z}_n \longrightarrow C_n$ data da $c(n) = c_n$).

Notiamo che, *se n è un numero primo allora C_n è un gruppo semplice*: in effetti, dato che è abeliano, bisogna mostrare che non ha sottogruppi non banali; sia $C < C_n$ un sottogruppo e sia $c_k \in C$; se $c_1 = c_k$ allora $C = C_n$; altrimenti, C contiene di certo il sottogruppo (ciclico) generato da c_k; ma dato che $c_k^m = e$ per un certo m e $c_k \in C_n$, deve essere $m|n$; se n è primo questo non è possibile a meno che $m = n$ (col che $c_k = c_1$) oppure $m = 1$ (col che $c_k = e$); quindi $C = \{e\}$ oppure $C = C_n$.

Il gruppo $\mathbb{Z}$ lo consideriamo come C_∞; non esistono in effetti gruppi ciclico di cardinalità maggiore al numerabile:

5.1.12 Teorema *Un gruppo ciclico è finito o numerabile e due gruppi ciclici C_n e C_m sono isomorfi se e solo se $n = m$ ($n, m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$).*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\langle g \rangle$ un gruppo ciclico infinito: allora, per definizione, le potenze g^n sono tutte distinte fra loro, e quindi la mappa

$$g^n \longmapsto n$$

è un isomorfismo fra $\langle g \rangle$ e $\mathbb{Z}$: è ovviamente biunivoca, ed è un omomorfismo perché $g^n g^m = g^{n+m}$.

Se invece $\langle g \rangle$ è un gruppo ciclico finito, esiste un n tale che $g^n = e$; sia n minimo rispetto a questa proprietà; allora la mappa $c : g^n \longmapsto c_n$ è un isomorfismo di $\langle g \rangle$ in C_n.

QED

Nei gruppi, a differenza che negli spazi vettoriali, può manifestarsi il fenomeno della torsione, vale a dire, un elemento $g \in G$ può avere una potenza pari all'unità e: $\exists n > 0\ g^n = e$. Il minimo intero che soddisfa questa relazione si dice *ordine* *dell'elemento g*. Ad esempio nel caso di un gruppo ciclico finito, il suo generatore ha ordine pari all'ordine del gruppo.

Esiste, nel caso dei gruppi, una nozione analoga a quella di base per gli spazi vettoriali. Se ogni elemento di G si esprime come prodotto di numero finito di elementi di un certo sottoinsieme fissato $S \subset G$, si dice che gli elementi di S *generano il gruppo*. In altri termini, S è un insieme di generatori di G se

$$G = \langle S \rangle$$

In generale la cardinalità di un sistema di generatori potrà variare, non si può cioè parlare di "dimensione" di un gruppo. Tuttavia un gruppo può essere *finitamente generato*, cioè può avere un insieme finito di generatori. Un teorema fondamentale, per il quale si rimanda ai testi specialistici, afferma che *un gruppo abeliano finitamente generato è il prodotto diretto di un gruppo ciclico finito C_n e di un reticolo $\mathbb{Z}^m$ di interi.*

5.2 Azioni di gruppi

Abbiamo visto che se X è un insieme, possiamo considerare l'insieme di tutte le funzioni biunivoche di X in sé: si tratta di un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni (l'elemento unità è la funzione identità $x \longmapsto x$ e l'inverso è la funzione inversa).

In particolare, se X è un insieme finito, otteniamo il *gruppo S_n delle permutazioni* di n oggetti:

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ i(1) & i(2) & i(3) & ... & i(n) \end{pmatrix}$$

Possiamo infatti vedere S_n come l'insieme delle funzioni biunivoche $i : \{1, .., n\} \longrightarrow \{1, .., n\}$.

Questo gruppo è di fondamentale importanza, specie nelle applicazioni in Fisica e Chimica; osserviamo che contiene tutte le permutazioni possibili di n oggetti, quindi ha ordine[2] $n!$.

5.2.1 Teorema (CAYLEY) *Ogni gruppo finito di ordine n è (isomorfo a) un sottogruppo del gruppo simmetrico S_n.*

[2]In effetti per costruire una permutazione i su n oggetti $\{1, 2, ..., n\}$ cominciamo a stabilire quale sia il suo valore $i(1)$ su 1; abbiamo n scelte possibili per questo, e ne restano $(n-1)$ per il valore $i(2)$; una volta assegnato anche questo valore, restano $(n-2)$ scelte possibili per $i(3)$ e così via fino a $i(n)$ che risulterà una scelta obbligata. In definitiva abbiamo $n(n-1)(n-2)...2$ possibili permutazioni.

DIMOSTRAZIONE: Sia G un gruppo finito di ordine n: possiamo supporre che S_n sia l'insieme delle funzioni biunivoche di G in sé (nella definizione di gruppo simmetrico non conta affatto la natura degli elementi che permuta: tutti gli insiemi finiti della stessa cardinalità sono equivalenti da questo punto di vista). Allora, se $g \in G$ definiamo

$$L_g : G \longrightarrow G$$

come

$$L_g(g') := gg'$$

Fissato $g \in G$, L_g è una funzione biunivoca: infatti

$$L_g(g') = L_g(g'') \iff gg' = gg'' \iff g' = g''$$

(poiché esistono gli inversi in un gruppo vale la legge di cancellazione). Quindi $L_g \in S_n$, ed abbiamo quindi definito una funzione

$$L : G \longrightarrow S_n$$

Dimostriamo che si tratta di un monomorfismo di gruppi. Intanto è iniettiva: se $g, g' \in G$ allora

$$\forall h \in G \quad L_g(h) = L_{g'}(h) \iff gh = g'h \iff g = g'$$

(di nuovo per cancellazione), e quindi $L : g \longmapsto L_g$ è iniettiva; infine è un omomorfismo di gruppi:

$$Lgg'(h) = gg'h = g(g'h) = L_g(g'h) = L_gL_{g'}(h)$$

QED

L'idea usata in questa dimostrazione è di fondamentale importanza: la funzione L_g si dice *rappresentazione regolare*, ed è un caso particolare del concetto generale di *rappresentazione*.

Osserviamo intanto che, chiaramente, la dimostrazione si estende al caso di cardinalità qualsiasi: *ogni gruppo G è un sottogruppo del gruppo S_X delle trasformazioni biunivoche di un insieme X, della stessa cardinalità di G, in sé.*

Ovviamente l'insieme S_G è in generale molto misterioso; tuttavia possiamo sempre ridurci a particolari classi di trasformazioni biunivoche, e precisamente a quelle lineari.

Per il momento studiamo comunque il concetto di rappresentazione più in generale.

5.2.2 Definizione *Se G è un gruppo e X un insieme, si dice che G* agisce su X *se esiste un omomorfismo di gruppi $A : G \longrightarrow S_X$ (che si dice* azione del gruppo sull'insieme*).*

Esplicitamente, una azione A soddisfa le

$$\forall g, g' \in G\ \forall x \in X \quad A_{gg'}x = A_g A_{g'}x \tag{5.1}$$
$$\forall x \in X' \quad A_e x = x \tag{5.2}$$

Si scrive più semplicemente gx in luogo di $A_g x$ (o, ancora peggio, di $A(g)x$ che sarebbe la scrittura più pedantemente corretta).

Ad esempio, la rappresentazione regolare L_g è una azione di G su sé stesso; bisognerebbe chiamarla "rappresentazione regolare sinistra", dato che, se il gruppo non è commutativo, $L_g h \neq L_h g$, e si può definire una *rappresentazione regolare destra* come

$$R_g h := hg$$

Un'altra rappresentazione di G in sé è la *rappresentazione coniugata*:

$$A_g h := ghg^{-1}$$

Si noti che $A_g = L_g R_{g^{-1}}$. Un elemento della forma ghg^{-1} si dice *coniugato* di h rispetto a g; il coniugio è una relazione di equivalenza, come è facile verificare (vedremo questo fatto più in generale fra breve).

5.2.3 Definizione *Se G agisce su un insieme X e sia $x \in X$; allora*

(1) *Lo* stabilizzatore *dell'elemento x è il sottogruppo G_x di G definito come*

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\}$$

(2) *L'*orbita *di x in X è il sottoinsieme Gx di X definito come*

$$Gx := \{y \in X \mid \exists g \in G\ gy = x\}$$

Quindi lo stabilizzatore di un elemento è il sottogruppo (che lo sia segue dalle definizioni) formato dagli elementi del gruppo che "fissano" un punto dell'insieme X, mentre l'orbita di un elemento è l'insieme degli altri punti di X che possono "essere spostati" su x agendo con elementi di G. Intuitivamente pensiamo a X come ad uno spazio e a G come ad un gruppo di trasformazioni di quello spazio.

5.2.4 Esempio *Se $X = \mathbb{R}^n$ e $G = GL_n(\mathbb{R})$ allora la moltiplicazione di una matrice per un vettore fornisce una azione di G su $\mathbb{R}^n$.*

5.2.5 Teorema *Le orbite dell'azione di un gruppo G su un insieme X formano la partizione di X in classi rispetto alla relazione di equivalenza*

$$x \approx y \iff \exists g \in G \; gx = y$$

Questo segue dalle definizioni; quindi possiamo sempre decomporre X in unione di sottoinsiemi disgiunti:

$$X = \bigcup_{x \in X} Gx$$

che si chiamano *orbite* dell'azione.

Osserviamo che la rappresentazione regolare può definirsi da G sull'insieme dei sotto-gruppi di G: se $H < G$:

$$gH = \{gh \,|\, h \in H\}$$

i.e. g manda H nella sua classe laterale sinistra gH: evidentemente lo stabilizzatore di H è H stesso

$$G_H = \{g \in G \,|\, gH = H\} = H$$

e l'orbita

$$GH = \{H' < G \,|\, \exists g \in G \; gH' = H\}$$

è in corrispondenza biiunivoca con l'insieme dei laterali sinistri G/H. In particolare, se il gruppo G è finito, abbiamo, per il teorema precedente:

$$\mathrm{Card}\, G = \sum_{gH \in G/H} \mathrm{Card}\, gH$$

Ma gH è in corrispondenza biunivoca con H, quindi le classi hanno tutte la stessa cardinalità $\mathrm{Card}\, H$:

$$\mathrm{Card}\, G = \mathrm{Card}\, H \cdots \mathrm{Card}\, H = [G : H]\, \mathrm{Card}\, H$$

ove $[G : H]$ è l'intero che moltiplicato per $\mathrm{Card}\, H$ dà $\mathrm{Card}\, G$: si dice *indice del sottogruppo* H in G.

In particolare

5.2.6 Teorema (LAGRANGE) *Un sottogruppo H di un gruppo finito G ha ordine che divide l'ordine di G.*

Questo teorema è un criterio notevole per determinare la struttura di un gruppo (e.g: se l'ordine di un gruppo è un numero primo, non possiede sottogruppi non banali).

5.2.7 Definizione *Se un'azione di G su X ha come unica orbita X stesso, si dice* transitiva.

Quindi un'azione è transitiva se ogni elemento di X può essere trasformato in qualsiasi altro per mezzo di qualche $g \in G$.

5.2.8 Lemma *Se G agisce su X e $x, y \in X$ stanno nella stessa orbita allora gli stabilizzatori G_x e G_y sono coniugati.*

Dimostrazione: Se $y \in Gx$ allora esiste $g \in G$ con $gx = y$; consideriamo dunque l'azione di coniugio in g $A_g : h \longmapsto ghg^{-1}$; allora

$$gG_xg^{-1} = G_y$$

dato che se $h \in Gx$ se e solo se $ghg^{-1}y = ghx = gx = y$.

QED

Quindi se $y \in Gx$ esiste $g \in G$ tale che $gx = y$ e questo g è unico a meno di elementi di G_x: infatti $gx = y$ e $g'x = y$ implicano che $gx = g'x$ i.e. $g^{-1}g' \in G_x$. Quindi ogni classe gG_x corrisponde in modo unico ad un elemento $y \in Gx$ tramite la $gG_x \longmapsto gx$. Ne segue il

5.2.9 Teorema *Se G agisce su X e $x \in X$ allora esiste una corrispondenza biunivoca fra Gx e G/G_x.*

Importante è il caso transitivo:

5.2.10 Corollario *Se G agisce transitivamente su un insieme X allora, per ogni $x \in X$, esiste una corrispondenza biunivoca*

$$G/G_x \longleftrightarrow X$$

Ad esempio, consideriamo l'azione di G su se stesso data dal coniugio:

$$g \cdot h = ghg^{-1}$$

Osserviamo che, per ogni gruppo, è definito il suo *centro*

$$Z(G) := \{g \in G \mid \forall g' \in G \ gg' = g'g\}$$

Si tratta cioè del sottoinsieme degli elementi di G che commutano con tutti gli altri. Si tratta evidentemente di un sottogruppo normale, e notiamo che, se $z \in Z(G)$:

$$zhz^{-1} = zz^{-1}h = h$$

Viceversa, se $ghg^{-1} = h$ allora $g \in Z(G)$; quindi $Z(G)$ è il *nucleo* dell'azione di coniugio, secondo la

5.2.11 Definizione *Se G agisce su X, il* nucleo dell'azione *è il sottogruppo normale*

$$Z := \{g \in G \mid \forall x \in X \ gx = x\}$$

In altri termini il nucleo di un'azione è l'intersezione degli stabilizzatori di tutti gli elementi di X:

$$Z = \bigcap_{x \in X} G_x$$

Un'azione che abbia nucleo banale ($Z = \{e\}$) si dice *fedele*: ad esempio la rappresentazione regolare sinistra (o destra) è fedele.

Tornando all'esempio dell'azione di coniugio, chiediamoci come sono fatte le orbite e gli stabilizzatori. Se $h \in G$ allora

$$G_h = \{g \in G \mid gh = hg\} =: Z_h(G)$$

è il *centralizzante* dell'elemento h in G, i.e. il sottogruppo degli elementi che commutano con un elemento fissato h. Le orbite dell'azione coniugata sono

$$Gh = \{h' \in G \mid \exists g \in G \ gh'g^{-1} = h\}$$

e si dicono *classi coniugate* di G contenenti h.

Se il gruppo è finito, allora la decomposizione in orbite

$$G = \bigcup_{g \in G} Gh$$

decompone il gruppo nelle sue classi coniugate: dato che $Ge = Z(G)$ (la classe coniugata dell'identità è il centro), e dato che ogni singola classe è l'orbita, per i teoremi precedenti:

$$\operatorname{Card} G = \operatorname{Card} Z(G) + \sum_g [G : G_g]$$

(g varia in G modulo l'appartenenza ad uno stesso stabilizzatore) ove $[G : H]$ denota l'*indice* del sottogruppo H; questa si chiama *equazione delle classi*, ed è fondamentale in teoria dei gruppi finiti.

Ad esempio deduciamo da essa un lemma della teoria dei *p-gruppi*, importante nell'ambito della teoria dei gruppi finiti.

5.2.12 Teorema *Se G è un p*-gruppo *(i.e. è finito ed ha ordine p^N ove p è un numero primo) allora $Z(G)$ non è banale.*

DIMOSTRAZIONE: Se G è abeliano, si ha per definizione $G = Z(G)$ e quindi il teorema è banale; altrimenti l'equazione delle classi è

$$p^n = \operatorname{Card} Z(G) + \sum [G : G_h]$$

Ma se $\operatorname{Card} G = p^n$, la cardinalità di un suo sottogruppo è della forma p^m con $m < n$ e quindi $\operatorname{Card}[G : H] = p^{n-m}$. Quindi p divide l'ordine di $Z(G)$.

QED

Osserviamo che l'azione di coniugio non solo opera sull'insieme G, ma anche sull'insieme dei sottogruppi di G: se $H < G$ allora

$$A_g H := gHg^{-1}$$

Rispetto a questa azione, lo stabilizzatore di un punto è

$$G_H = \{g < G \mid gHg^{-1} = H\} =: N(H)$$

il *normalizzante* del sottogruppo H: per definizione si tratta del più piccolo sottogruppo di G che contenga H come sottogruppo normale (in particolare, $H \lhd G \iff N(H) = G$). L'orbita di un punto è

$$G \cdot H = \{H' < G \mid \exists g \in G \; gH'g^{-1} = H\}$$

Si noti che la mappa $h \longmapsto ghg^{-1}$ è un isomorfismo del gruppo in sé: quindi gli elementi di GH sono sottogruppi fra loro isomorfi. In particolare, al variare di $g \in G$, l'insieme dei coniugati gHg^{-1} di H è esattamente l'insieme G/H:

$$G \cdot H = G/H$$

5.3 Rappresentazioni di gruppi

Rappresentare un gruppo vuol dire realizzarlo come il gruppo delle trasformazioni di un opportuno insieme X: in realtà, spesso X sarà un insieme dotato di qualche struttura, ad esempio uno spazio topologico, ed in questo caso si richederà che le trasformazioni del gruppo preservino questa struttura, ad esempio che siano degli omeomorfismi.

5.3.1 Definizione *Se V è uno spazio vettoriale, una* rappresentazione lineare *di G è un omomorfismo del gruppo nel gruppo $GL(V)$ delle applicazioni lineari ed invertibili di V in sé.*

Spesso si dice semplicemente che lo spazio V è la rappresentazione del gruppo, qualora sia chiara l'azione di G su $GL(V)$.

Sono possibili altri tipi di rappresentazioni: ad esempio, se X è uno spazio proiettivo, una *rappresentazione proiettiva* di G è un omomorfismo del gruppo nel gruppo $PGL(X)$ delle trasformazioni proiettive invertibili di X in sé.

Tuttavia, nella discussione sulle rappresentazioni di un gruppo ci si limita al caso lineare, ed alle particolarizzazioni di questo (ad esempio le rappresentazioni unitarie, se X non solo è uno spazio vettoriale ma ha anche una struttura euclidea o hermitiana). Questa non è una limitazione troppo forte: se infatti è data una rappresentazione ρ di un gruppo G nel gruppo S_X di tutte le applicazioni (invertibili) di un insieme X in se stesso, possiamo sempre associargli una rappresentazione π lineare ponendo

$$(\pi(g)f)(x) = f(\rho(g^{-1})(x))$$

ove f appartiene allo spazio vettoriale di tutte le funzioni definite su X.

Quindi per noi una rappresentazione di un gruppo G sarà un omomorfismo di G nel gruppo $GL(V)$ di un certo spazio vettoriale *complesso*: potremmo considerare spazi vettoriali su campi qualsiasi, ma la teoria classicamente si sviluppa su $\mathbb{C}$, che ha proprietà notevoli come l'essere algebricamente chiuso e di caratteristica zero; inoltre nel caso di rappresentazioni di dimensione infinita, si usa l'Analisi Funzionale (cfr. capitolo **??**) che essenzialmente ha luogo negli spazi complessi. Per ora limiteremo la discussione al caso di rappresentazioni di dimensione finita, ove la *dimensione di una rappresentazione* è la dimensione dello spazio V. In altri termini, siamo interessati a vedere quanto un gruppo possa considerarsi un gruppo di matrici...

Ad esempio consideriamo un gruppo che già è un gruppo di matrici, $GL(V)$; esiste una rappresentazione ovvia di questo gruppo in V:

$$A \cdot v := Av$$

che si dice *rappresentazione identica*.

In generale gli elementi del gruppo verranno fatti corrispondere a matrici, i cui coefficienti saranno i *coefficienti della rappresentazione*; naturalmente questi coefficienti dipendono dalla scelta della base; tuttavia, il cambiamento di base in V avviene per coniugio rispetto ad elementi di $GL(V)$, così che, se $\pi : G \longrightarrow GL(V)$ è una rappresentazione e $A \in GL(V)$ una matrice di cambiamento di base, allora $\pi(g)v = \pi(g)(Av'A^{-1})$ e quindi la rappresentazione non deve dipendere dalla coniugazione per una matrice:

$$A\pi(g) = \pi(g)A$$

5.3.2 Definizione *Due rappresentazioni* $\pi : G \longrightarrow GL(V)$ *e* $\pi' : G \longrightarrow GL(V')$ *si dicono* equivalenti *se esiste un isomorfismo* $A : V \longrightarrow V'$ *tale che*

$$A\pi(g) = \pi'(g)A$$

Dato che una rappresentazione agisce su uno spazio vettoriale, possiamo provare ad estendere le nozioni dell'Algebra Lineare alla teoria delle rappresentazioni: in particolare considereremo i concetti di sottospazio, quoziente, morfismi, dualità, somma diretta, prodotto tensoriale e prodotto scalare.

Se $\pi : G \longrightarrow GL(V)$ è una rappresentazione del gruppo G, un sottospazio W di V si dice *invariante* se

$$\forall g \in G \quad \pi(g)W \subset W$$

Evidentemente, in questo caso, la restrizione $\pi|_W$ è una rappresentazione $\pi|_W : G \longrightarrow GL(W)$ che si dice *sottorappresentazione* di π.

In modo analogo, sul quoziente V/W di uno spazio per un sottospazio invariante è definita una rappresentazione $\widetilde{\pi} : G \longrightarrow GL(V/W)$ che si dice *quoziente* della rappresentazione π.

5.3.3 Definizione *Se* V *è una rappresentazione di* G *e* W *una sottorappresentazione,* V *si dice* riducibile *se il complemento di* W *in* V *è pure un sottospazio invariante: in questo caso la rappresentazione* π *si decompone in somma diretta delle rappresentazioni* $\pi|_W$ *e* $\pi|_{W^\perp}$.

Se $W \subset V$ è una sottorappresentazione, allora la matrice che rappresenta V sarà a blocchi della forma

$$\pi(g) = \begin{pmatrix} A(g) & B(g) \\ 0 & C(g) \end{pmatrix}$$

ove $A(g) = \pi|_W(g)$ e $C(g)$ è la matrice della rappresentazione quoziente; se V è riducibile, allora possiamo trovare una base in cui la matrice B è zero.

5.3.4 Definizione *Una rappresentazione* V *che non abbia sottorappresentazioni non banali (cioè diverse da* V *stesso e dalla rappresentazione nulla) si dice irriducibile.*

5.3.5 Esempio *Una rappresentazione di dimensione 1 è irriducibile: si tratta semplicemente di un omomorfismo di gruppi*

$$\pi : G \longrightarrow \mathbb{C} \setminus 0 = GL_1(\mathbb{C})$$

ed uno spazio di dimensione 1 non ha sottospazi non banali.

5.3.6 Definizione *Se una rappresentazione V è tale che ogni sua sottorappresentazione ammetta una sottorappresentazione complementare, si dice che V è completamente riducibile.*

Non è affatto detto che una rappresentazione di dimensione finita sia completamente riducibile.

5.3.7 Esempio *Consideriamo $G = \mathbb{R}$ (gruppo additivo dei numeri reali) e la sua rappresentazione bidimensionale*

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allora $V = \mathbb{R}^2$, e $t(x, y) = (x + ty, y)$; il sottospazio $\{(x, 0)\}$ è invariante, mentre $\{(0, y)\}$ non lo è, quindi la rappresentazione non è completamente riducibile.

5.3.8 Esempio *Se $G = \mathbb{R}$ è ancora il gruppo additivo dei numeri reali e $V = \mathbb{R}[x]$ lo spazio dei polinomi su $\mathbb{R}$, possiamo considerare la rappresentazione di G in V (che ha dimensione infinita):*

$$(\pi(t)p)(x) := p(x + t)$$

Se V_k è il sottospazio di V dei polinomi di grado al più k, evidentemente è un sottospazio invariante per π. Le rappresentazioni V_k sono tutte riducibili (per $k \geq 1$) me non completamente riducibili, dato che in esse i sottospazi invarianti V_{k-1} non hanno complementi invarianti.

Gli elementi di $\hom_G(V_k, V_h)$ sono operatori differenziali a coefficienti costanti: da questo segue che

$$\dim \hom_G(V_k, V_h) = 1 + \min(h, k)$$

per ogni k, h, e quindi anche $\dim \hom_G(V_k, V) = 1 + k$.

D'altra parte si trova che $\dim \hom_G(V, V_k) = 0$: infatti ogni polinomio f può scriversi come derivata $(k+1)$-ma di un altro polinomio F e se $A \in \hom_G(V_k, V)$ allora deve commutare con le traslazioni, e quindi anche con le derivate, sicché

$$Af = A\frac{d^{k+1}f}{dx^{k+1}} = \frac{d^{k+1}Af}{dx^{k+1}} = 0$$

(dato che $Af \in V_k$).

5.3.9 Definizione *Se* $\pi_1 : G \longrightarrow GL(V_1)$ *e* $\pi_2 : G \longrightarrow GL(V_2)$ *sono rappresentazioni di un gruppo* G *negli spazi vettoriali* V_1 *e* V_2*, l'insieme degli operatori* di allacciamento *è*

$$(\pi_1, \pi_2) := \{A \in \hom(V_1, V_2) \mid A\pi_1 = \pi_2 A\}$$

Questo insieme si denota anche $\hom_G(V_1, V_2)$ *ed i suoi elementi si dicono anche* morfismi *fra le rappresentazioni* π_1 *e* π_2*.*

L'insieme delle rappresentazioni di un gruppo forma una categoria rispetto ai morfismi di rappresentazioni, come è immediato verificare.

Evidentemente A è un morfismo fra la rappresentazione $\pi_1 : G \longrightarrow GL(V_1)$ e la rappresentazione $\pi_2 : G \longrightarrow GL(V_2)$ se e solo se il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi_1(g)"'] & V_2 \arrow[d, "\pi_2(g)"] \\ V_1 \arrow[r, "A"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

è commutativo per ogni $g \in G$.

La dimensione dello spazio vettoriale $\hom_G(V_1, V_2)$ si dice *numero di allacciamento* delle rappresentazioni π_1 e π_2.

Per rappresentazioni di dimensione finita, si ha che

$$\dim \hom_G(V_1, V_2) = \dim \hom_G(V_2, V_1)$$

5.3.10 Definizione *Se* $\dim \hom_G(V_1, V_2) = 0$ *le rappresentazioni si dicono* disgiunte.

Ovviamente

5.3.11 Proposizione *Le rappresentazioni sono equivalenti se e solo se l'insieme dei morfismi* $\hom_G(V_1, V_2)$ *contiene un isomorfismo.*

Osserviamo che se due rappresentazioni di dimensione finita sono equivalenti, allora le loro dimensioni coincidono, ed è possibile trovare basi in questi spazi vettoriali tali che le matrici che rappresentano gli operatori della rappresentazione coincidano. Il risultato fondamentale sulle rappresentazioni irriducibili è il

5.3.12 Lemma (Schur) *Se* V_1 *e* V_2 *sono rappresentazioni irriducibili di un gruppo* G *allora ogni elemento (non nullo) di* $\hom_G(V_1, V_2)$ *è invertibile.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $A \in \hom_G(V_1, V_2)$ non nullo: allora il nucleo di A è un sottospazio di V_1:

$$\ker A = \{v \in V_1 \mid Av = 0\}$$

Dato che $g \cdot Av = Ag \cdot v$ allora se $v \in \ker A$: $Ag \cdot v = gAv = 0$, quindi $gv \in \ker A$. Dunque $\ker A$ è una sottorappresentazione di V_1, che però è irriducibile. Ne segue che $\ker A = 0$ oppure $\ker A = V_1$.

Se $\ker A = V_1$ allora $A = 0$ per definizione; se $\ker A = 0$ allora A è invertibile. Ma l'immagine di A è un sottospazio di V_2

$$\operatorname{im} A = \{w \in V_2 \mid \exists v \in V_1 \ Av = w\}$$

ed è una sottorappresentazione di V_2: infatti se $w \in \operatorname{im} A$ allora $gw = gAv = Agv$, quindi gw è immagine di gv tramite A i.e. $gw \in \operatorname{im} A$. Per irriducibilità di V_2 segue che $\operatorname{im} A = 0$ oppure $\operatorname{im} A = V_2$; ma A era invertibile, quindi $\operatorname{im} A \neq 0$, i.e. $\operatorname{im} A = V_2$ sicché A è un isomorfismo.

QED

In altri termini, un morfismo fra due rappresentazioni irriducibili è zero oppure è un isomorfismo: in particolare due rappresentazioni irriducibili distinte non possono essere contenute l'una nell'altra. Questo ci dice che le rappresentazioni irriducibili sono le più semplici possibili: in effetti una rappresentazione irriducibile si chiama anche *semplice*.

Consideriamo ora una rappresentazione $\pi : G \longrightarrow GL(V)$ di un gruppo; osserviamo che, se $\dim V = 1$ allora $V = \mathbb{K}$ e quindi

$$\forall g \in G \quad \pi(g) = id_{\mathbb{K}}$$

(infatti $\pi(g)(k) = k\pi(g)(1) = k$: cioè $\operatorname{im} \pi = \{id_V\}$ è il sottogruppo banale formato dal solo isomorfismo $v \longmapsto v$). Una rappresentazione la cui immagine si riduca al solo elemento id_V si dice *banale*; abbiamo appena visto che su uno spazio vettoriale di dimensione 1 esiste solo la rappresentazione banale π_0. Se $\pi : G \longrightarrow GL(V)$ è una rappresentazione allora gli operatori di (π, π_0) sono quindi funzionali lineari $f \in V^*$ tali che $f\pi = f$.

5.3.13 Definizione *Gli elementi di* (π, π_0) *si dicono* invarianti *della rappresentazione.*

In realtà è significativo considerare come invarianti non solo le funzioni lineari su V, ma anche i polinomi su V, che possono esser visti come gli elementi dell'algebra simmetrica $\operatorname{Sym}(V^*)$.

Se $\pi : G \longrightarrow GL(V)$ è una rappresentazione, possiamo considerare sullo spazio duale V^* una rappresentazione $\pi^* : G \longrightarrow GL(V^*)$ definita come:

$$\langle \pi^*(g)(A), v\rangle = \langle f, \pi(g^{-1})v\rangle$$

($\langle, \rangle$ è la dualità fra V e V^*). è immediato verificare che si tratta in effetti di una rappresentazione, che viene detta *duale* (o *controgradiente*) di π: in coordinate, la matrice di $\pi^*(g)$ è la trasposta di $\pi(g^{-1})$.

Torniamo ora alle sottorappresentazioni: se V è una rappresentazione (di dimensione finita) e $V_1 \subset V$ una sottorappresentazione che ammette un complementare, questo vuol dire che il sottospazio vettoriale $V_2^{\perp} \subset V$ (i.e. lo spazio tale che $V_1 \oplus V_2 = V$) è pure una sottorappresentazione: in questo caso V di decompone in *somma diretta di sottorappresentazioni*. La matrice che rappresenta un elemento di G in $GL(V)$ è della forma

$$\pi(g) = \begin{pmatrix} A_1(g) & 0 \\ 0 & A_2(g) \end{pmatrix}$$

ove A_1 è la matrice che rappresenta G in $GL(V_1)$ e A_2 è la matrice che rappresenta G in $GL(V_1)$.

Una rappresentazione che si decompone in somma diretta di sottorappresentazioni irriducibili si dice talvolta *semisemplice*: dimostriamo ora che le rappresentazioni semisemplici sono esattamente quelle completamente riducibili: lo faremo per rappresentazioni di dimensione qualsiasi.

5.3.14 Lemma *Se V è una rappresentazione completamente riducibile allora ogni sua sottorappresentazione è completamente riducibile.*

Dimostrazione: Sia V una rappresentazione completamente riducibile, e W una sottorappresentazione di V: allora ogni sottorappresentazione Z di W è anche una sottorappresentazione di V, quindi esiste una sottorappresentazione Z' di V tale che $Z' \oplus Z = V$; dato che $Z \subset W \subset V$ allora

$$Z' \cap W = (0)$$

Inoltre $W = Z + (Z' \cap W)$ e questa somma è diretta; quindi $Z' \cap W$ è una sottorappresentazione complementare di Z in W.

QED

5.3.15 Lemma *Se V è una rappresentazione completamente riducibile allora possiede una sottorappresentazione irriducibile.*

Dimostrazione: Se V ha dimensione finita questo si vede facilmente per induzione; dimostriamolo tuttavia in generale: se $V \neq 0$ esisterà $v \in V \setminus 0$; sia $\mathcal{R}(v)$ l'insieme delle sottorappresentazioni di V che non contengono v. $\mathcal{R}(v)$ è non vuoto, dato che 0 è una sottorappresentazione che non contiene v, ed è un insieme parzialmente ordinato dall'inclusione: dimostriamo che soddisfa le ipotesi del

Lemma di Zorn. Se $\{R_i\}$ è un sottoinsieme totalmente ordinato di $\mathcal{R}(v)$ l'unione $\bigcup_i R_i$ è chiaramente una sottorappresentazione di V che non contiene v, ed è un confine superiore per gli $\{R_i\}$: quindi possiamo applicare il lemma di Zorn e dedurre l'esistenza di un massimale $R \subset V$ che non contenga v. Ora, dato che V è completamente riducibile, esiste una sottorappresentazione Q complementare a R, che contiene v. Dimostriamo che è irriducibile.

Supponiamo che Q contenga una sottorappresentazione Q_1: allora (essendo Q completamente riducibile per il lemma precedente) esiste una sottorappresentazione Q_2 di Q tale che $Q = Q_1 \oplus Q_2$; supponiamo che $v \notin Q_1$. Allora $Q_1 + R$ è una sottorappresentazione di V che non contiene v e contiene R, il che contraddice la massimalità di R. Quindi una tale decomposizione di Q non esiste e Q è irriducibile.

QED

5.3.16 Teorema *Una rappresentazione è completamente irriducibile se e solo se si decompone in somma diretta di rappresentazioni irriducibili.*

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamo che se V è somma diretta di sottorappresentazioni irriducibili allora è completamente riducibile: sia W una sottorappresentazione di V; dobbiamo mostrare che ammette una sottorappresentazione complementare. Sia $\mathcal{R}$ l'insieme di tutte le sottorappresentazioni irriducibili S tali che $S \cap W = 0$ e consideriamo la famiglia $\mathcal{S}$ degli elementi della forma $\oplus_i S_i$ con $S_i \in \mathcal{R}$; $\mathcal{S}$ è non vuota (non lo è $\mathcal{R}$: contiene 0) ed è ordinata dall'inclusione: dimostriamo che soddisfa le ipotesi del lemma di Zorn. Se $\{R_j\}$ è una sottofamiglia di $\mathcal{S}$ totalmente ordinata, basta porre $R = \bigoplus_j R_j$ per avere un confine superiore in questa famiglia. Quindi per il lemma di Zorn esiste un elemento massimale in $\mathcal{S}$, i.e. una somma diretta $\bigoplus_i S_i$ di sottorappresentazioni irriducibili di V tali che $S_i \cap W = 0$. Dimostriamo che $V = \bigoplus_i S_i \oplus W$. Sappiamo per ipotesi che V è

$$V = \bigoplus_j V_j$$

ove le V_j sono irriducibili e quindi, per ogni i, $S_i = \bigoplus S_i \cap V_j$ i.e. $S_i = V_{j_i}$ per qualche j_i (per irriducibilità delle S_i e V_j ed il lemma di Schur). Quindi

$$V = \bigoplus_i S_i \oplus \bigoplus_{j \neq j_i} V_j$$

Ci basta quindi dimostrare che $W = \bigoplus_{j \neq j_i} V_j$. Ora certamente $W \subset \bigoplus_{j \neq j_i} V_j$; se l'inclusione fosse stretta, esisterebbe $j \neq j_i$ tale che $W \cap V_j = 0$ (infatti V_j è irriducibile); ma allora $V_j \oplus \bigoplus_i S_i$ sarebbe un elemento di $\mathcal{S}$ il che contraddice la massimalità di $\oplus_i S_i$. Quindi $W = \bigoplus_{j \neq j_i} V_j$.

Viceversa, se V è completamente riducibile consideriamo la somma diretta W di tutte le sottorappresentazioni irriducibili di V (si tratta di un sottospazio $\neq 0$ per il lemma 5.3.15): vogliamo dimostrare che $W = V$. In effetti, se $W \subset V$, allora, per completa riducibilità di V, W avrebbe una sottorappresentazione complementare $W^{\perp}$; ma questa sottorappresentazione è completamente riducibile per il lemma 5.3.14 e quindi deve possedere una sottorappresentazione irriducibile Z (per il lemma 5.3.15) quindi Z è una sottorappresentazione irriducibile di V, e, per definizione, $Z \subset W$. Il che è assurdo ($W \cap W^{\perp} = 0$) a meno che $W^{\perp} = 0$ e quindi $W = V$.

QED

Assieme alla somma diretta, la costruzione più importante dell'Algebra Lineare è il prodotto tensoriale (cfr. 5.6): ci limitiamo nella discussione seguente al caso di dimensione finita.

Se $\pi_i : G \longrightarrow GL(V_i)$ $(i = 1, 2)$ sono rappresentazioni di un gruppo G, definiamo una funzione $\pi_1 \otimes \pi_2 : G \longrightarrow GL(V_1 \otimes V_2)$

$$\pi_1 \otimes \pi_2(g)(v_1 \otimes v_2) := (\pi_1(g)v_1) \otimes (\pi_2(g)v_2)$$

che di dice *prodotto tensoriale delle rappresentazioni*.

5.3.17 Proposizione *Se V_1 e V_2 sono rappresentazioni di un gruppo allora il prodotto tensoriale $V_1 \otimes V_2$ è una rappresentazione del gruppo.*

Dimostrazione: Ovviamente $\pi_1 \otimes \pi_2(e)(v_1 \otimes v_2) = v_1 \otimes v_2$. Inoltre

$$\begin{aligned} \pi_1 \otimes \pi_2(gh)(v_1 \otimes v_2) =& \pi_1(gh)v_1 \otimes \pi_2(gh)v_2 \\ =& \pi_1(g)\pi_1(h)v_1 \otimes \pi_2(g)\pi_2(h)v_2 \\ =& \pi_1 \otimes \pi_2(g)\pi_1 \otimes \pi_2(h)(v_1 \otimes v_2) \end{aligned}$$

QED

Il prodotto tensoriale di rappresentazioni è legato al prodotto diretto di gruppi:

5.3.18 Teorema *Ogni rappresentazione irriducibile (di dimensione finita) V del prodotto diretto $G = G_1 \times G_2$ è equivalente al prodotto tensoriale di rappresentazioni irriducibili V_i dei gruppi G_i.*

Dimostrazione: V_1 e V_2 sono rappresentazioni irriducibili di G_i se e solo se $V_1 \otimes V_2$ è una rappresentazione irriducibile di G: infatti ogni rappresentazione $V_1 \otimes V_2$ induce due rappresentazioni ottenute considerando gli operatori $id_{V_1} \otimes \pi_2(g)$ e $\pi_1(g) \otimes id_{V_2}$.

L'unica cosa che dobbiamo verificare è che ogni rappresentazione di $G_1 \times G_2$ sia della forma $V_1 \otimes V_2$; sia π una rappresentazione in V di $G_1 \times G_2$, e siano

$$V_1 = \pi(g, e)(V) \qquad \text{e} \qquad V_2 = \pi(e, g)(V)$$

Si tratta di rappresentazioni, rispetto alle restrizioni di π sul primo e sul secondo fattore diretto di $G_1 \times G_2$; ovviamente

$$\pi(g, h)(v_1, v_2) = (\pi(g, e)(v_1), \pi(e, h)v_2)$$

e quindi abbiamo una famiglia di funzioni bilineare $V_1 \times V_2 \longrightarrow V$ data da

$$\pi(g, h)(v_1, v_2) = \pi(g, h)(v_1, v_2)$$

Per la proprietà del prodotto tensoriale abbiamo quindi $V = V_1 \otimes V_2$.

QED

Si noti che se V e W sono rappresentazioni irriducibili di G non è affatto vero che $V \otimes W$ sia irriducibile per G: lo è solo per $G \times G$. In generale decomporre un prodotto tensoriale in somma di rappresentazioni irriducibili è un problema fondamentale (teoria di Clebsh–Gordan) per il quale si rimanda ai testi specialistici.

Infine consideriamo ancora una costruzione degli spazi vettoriali che ha un significativo riverbero in teoria delle rappresentazioni: supponiamo infatti che lo spazio V sia unitario, i.e. che (sia complesso e) possegga un prodotto hermitiano (v, w) definito positivo (i.e. quella che si dice una *forma sesquilineare*: $(av+bw) = a\overline{b}(v, w)$). Ricordiamo che una trasformazione lineare $A : V \longrightarrow V$ è *unitaria* se

$$\forall v, w \in V \quad (Av, Aw) = (v, w)$$

In termini di matrici questo significa, ovviamente, che

$$\overline{A^T}A = I$$

In particolare $|\det A| = 1$ i.e. $\det A \in \mathbb{T} = \{|z| = 1\}$ e quindi una matrice unitaria è invertibile, cioè determina necessariamente un isomorfismo di V in sé. Dunque le matrici unitarie formano un sottogruppo del gruppo lineare generale (complesso[3])

$$U(V) = \{A : V \longrightarrow V \,|\, \overline{A^T}A = I\} \subset GL(V)$$

[3]Si noti che $GL_n(\mathbb{C}) \subset GL_{2n}(\mathbb{R})$: infatti una struttura complessa su uno spazio vettoriale è sempre una struttura di spazio vettoriale reale $2n$-dimensionale, mentre non ogni matrice reale $2n \times 2n$ preserva la struttura complessa, i.e. la moltiplicazione per i numeri complessi.

5.3.19 Definizione *Una rappresentazione* $\pi_G \longrightarrow GL(V)$ *è* unitaria *se* V *è uno spazio unitario e* $\operatorname{im}\pi \subset U(V)$*.*

In altri termini, π è unitaria se G agisce per operatori unitari su V. Scriveremo A^* in luogo di $\overline{A^T}$.

Le rappresentazioni unitarie sono le più importanti, perché vige il seguente

5.3.20 Teorema *Una rappresentazione unitaria (di dimensione finita) è completamente riducibile.*

Dimostrazione: Consideriamo una rappresentazione unitaria V di un gruppo G; se $W \subset V$ è un sottospazio invariante per G basta costruire un complementare invariante per avere la completa riducibilità. Consideriamo quindi il complemento ortogonale $W^\perp$ rispetto al prodotto hermitiano di V. Allora

$$\forall v \in W\ \forall w \in W^\perp \quad (\pi(g)w, v) = (\pi(g)^{-1}\pi(g)w, \pi(g)^{-1}v) = (w, \pi(g)^{-1}v) = 0$$

dato che $\pi(g) \in U(V)$ e v è invariante; quindi $\pi(g)w \in W^\perp$ e $W^\perp$ è invariante.

QED

Abbiamo quindi una condizione sufficiente per la completa riducibilità di una rappresentazione: che sia equivalente ad una rappresentazione unitaria.

5.3.21 Definizione *Due rappresentazioni* π_1, π_2 *qualsiasi di un gruppo* G *in uno stesso spazio unitario* V *sono* unitariamente equivalenti *se esiste un operatore unitario* $A \in (\pi_1, \pi_2)$*.*

Questa condizione, per rappresentazioni unitarie, non è più restrittiva della semplice equivalenza:

5.3.22 Proposizione *Se due rappresentazioni unitarie sono equivalenti allora sono unitariamente equivalenti.*

Dimostrazione: Utilizziamo un fatto ben noto dall'Algebra Lineare: la decomposizione polare di un operatore: supponiamo che A sia un isomorfismo di V in sé appartenente a (π_1, π_2); allora

$$A = U|A|$$

ove $|A|$ è un operatore hermitiano (i.e. $|A| + |A|^* = 0$) e U è unitario. Quindi la $\pi_1(g)A = A\pi_2(g)$ diviene

$$\pi_1(g)U|A| = U|A|\pi_2(g)$$

Sostituendo g^{-1} e tenendo conto che $\pi(g^{-1}) = \pi(g)^*$ abbiamo che $\pi_1(g)^*U|A| = U|A|\pi_2(g)^*$ i.e. applicando * e tenendo conto che $A^*B^*) = (BA)^*$:

$$|A|^*U\pi_1(g) = \pi_2(g)|A|^*U$$

i.e. $(U^*U = I)$

$$\begin{aligned}|A|^2\pi_2(g) =&|A|^*U^*U|A|\pi_2(g) = |A|U^*A\pi_2(g)\\ =&|A|U^*\pi_1(g)U|A| = |A|^*U\pi_1(g)U|A| =\\ =&\pi_2(g)|A|^*UU|A| = \pi_2(g)|A|^2\end{aligned}$$

quindi $|A|^2$ (e dunque anche $|A|$) commuta con $\pi_2(g)$. Allora

$$U\pi_2(g)|A| = U|A|\pi_2(g) = \pi_1(g)U|A|$$

e, dato che $|A|$ è invertibile

$$\pi_1(g)U = U\pi_2(g)$$

i.e. $U \in (\pi_1, \pi_2)$ e quindi le rappresentazioni sono unitariamente equivalenti.

QED

Concludiamo con un risultato cruciale per la teoria dei gruppi finiti:

5.3.23 Teorema *Ogni rappresentazione di dimensione finita di un gruppo finito è equivalente ad una rappresentazione unitaria.*

DIMOSTRAZIONE: Sia V una rappresentazione di G: possiamo considerare su V un prodotto hermitiano qualsiasi, ad esempio fissando una base $(e_1, ..., e_n)$ di V e ponendo, se $v = \sum_i v_i e_i$ e $w = \sum_i w_i e_i$:

$$(v, w) = \sum_{i=1}^{n} v_i \overline{w_i}$$

Ovviamente rispetto a questo prodotto non è affatto detto che la rappresentazione sia unitaria: possiamo comunque definire un nuovo prodotto hermitiano per il quale lo è: basta considerare[4] (il gruppo è finito)

$$(v, w)' := \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g\in G} (\pi(g)v, \pi(g)w)$$

[4]Stiamo sommando sul gruppo, cioè "integrando": in effetti questo ragionamento si estende a tutti i gruppi sui quali esista una misura invariante, e.g. i gruppi compatti.

$(.)'$ è un prodotto hermitiano: è lineare perché lo sono π, $(.)$ e la somma; inoltre è definito positivo perché lo è $(.)$; infine la rappresentazione è unitaria rispetto ad esso:

$$\begin{aligned}(\pi(h)v, \pi(h)w)' &= \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g \in G} (\pi(g)\pi(h)v, \pi(g)\pi(h)w) \\ &= \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g \in G} (\pi(gh)v, \pi(gh)w) \\ &= \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{k \in G} (\pi(k)v, \pi(k)w) = (v, w)'\end{aligned}$$

ove $k = gh$; se g descrive G anche gh descrive G con h costante.

QED

5.3.24 Corollario *Ogni rappresentazione di dimensione finita un gruppo finito è completamente riducibile.*

5.4 Algebra di gruppo

Approfondiamo ora la teoria delle rappresentazioni dei gruppi finiti: G sarà sempre un gruppo finito con elemento neutro e.

Molti concetti che svilupperemo sono validi in generale, come la nozione di *carattere*. Ricordiamo dall'Algebra Lineare le proprietà della traccia

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

di una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ su un campo $\mathbb{K}$ (ad esempio sui numeri complessi):

5.4.1 Proposizione

(1) $\operatorname{tr}(aA + bB) = a \operatorname{tr} A + b \operatorname{tr} B$ *se* $a, b \in \mathbb{C}$ *e* $A, B \in M_n(\mathbb{C})$

(2) $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$

(3) $\operatorname{tr} I = n$

(4) $\operatorname{tr} ABA^{-1} = \operatorname{tr} B$

(5) *La traccia di A è la somma degli autovalori di A contati con le loro molteplicità.*

Consideriamo ora una rappresentazione $\pi : G \longrightarrow GL(V)$ di un gruppo finito: per la (4) della proposizione, per ogni operatore $F \in End(V)$ è ben definita la sua traccia, come la traccia di una qualsiasi matrice che rappresenti F in qualche base di V.

5.4.2 Definizione *Il* carattere *della rappresentazione* π *è la funzione* $\chi_\pi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ *data da*

$$\chi_\pi(g) = \operatorname{tr} \pi(g)$$

Evidentemente il carattere di una rappresentazione ha valori in $GL(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\backslash 0$, ed è un invariante nel senso seguente

5.4.3 Proposizione *I caratteri di due rappresentazioni equivalenti coincidono.*

(Questo segue direttamente da $\operatorname{tr} ABA^{-1} = \operatorname{tr} B$). Inoltre

$$\chi\pi^*(g) = \chi_\pi(g^{-1})^*$$

e quindi, se π è unitaria

$$\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$$

Notiamo anche che

$$\chi_{\pi_1 \oplus \pi_2} = \chi_{\pi_1} + \chi_{\pi_2}$$

Per il prodotto vale la

5.4.4 Proposizione $\chi_{\pi_1 \otimes \pi_2} = \chi_{\pi_1} \chi_{\pi_2}$.

DIMOSTRAZIONE: Basta fissare due basi $(e_1, ..., e_n)$ di V_1 e $(f_1, ..., f_m)$ di V_2; allora

$$\pi_1(g) = ((a_{ij})) \qquad \pi_2(g) = ((b_{rs}))$$

e quindi $\pi_1 \otimes \pi_2(g)$ è una matrice i cui indici sono coppie di indici: $((c_{irjs})) = ((a_{ij} b_{rs}))$; ne segue che

$$\chi_{\pi_1 \otimes \pi_2} = \sum_{i,r=1}^{n} c_{irir} = \sum_{i,r=1}^{n} a_{ii} b_{rr} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \sum_{i=1}^{n} b_{rr} = \chi\pi_1 \chi_{\pi_2}$$

QED

La traccia si dice essere una "funzione di classe", perché è invariante rispetto alla coniugazione di matrici: il riverbero di questo fatto a livello di caratteri è il

5.4.5 Teorema *Il carattere di una rappresentazione è costante sulle classi coniugate del gruppo.*

Ricordiamo ora che ogni rappresentazione finito-dimensionale di un gruppo finito G è completamente riducibile: vogliamo trovare una tale decomposizione per ogni rappresentazione: i caratteri giocano un ruolo in questa ricerca.

Consideriamo la *rappresentazione regolare sinistra* del gruppo, che già ci è venuta in soccorso, ad esempio nel dimostrare che il gruppo è un sottogruppo di S_n:

$$L_g(h) = gh$$

Questa rappresentazione ne induce una sullo spazio di tutte le funzioni del gruppo:

$$\mathbb{C}[G] = \mathbb{C}^G = \{F : G \longrightarrow \mathbb{C}\}$$

come

$$(L_g(F))(h) = F(gh)$$

Lo spazio $\mathbb{C}[G]$ è uno spazio vettoriale di dimensione $\operatorname{Card} G$ rispetto alla somma di funzioni, e quindi è una rappresentazione, ed è unitaria rispetto al prodotto hermitiano

$$(F, G)_F = \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g\in G} F(g)\overline{G(g)}$$

dato che $\sum_{g\in G} H(hg) = \sum_{g\in G} H(g)$ (invarianza per traslazioni). Vedremo che tutte le rappresentazioni irriducibili del gruppo sono sottorappresentazioni di $\mathbb{C}[G]$.

Sia $\pi : G \longrightarrow GL(V)$ una rappresentazione (di dimensione finita) di G, e consideriamo lo spazio degli invarianti di V

$$V^G := \{v \in V \mid \forall g \in G\ \pi(g)v = v\}$$

e la funzione di *media*

$$I(v) := \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g\in G} \pi(g)(v)$$

Ora, $I : V \longrightarrow V^G$ è un epimorfismo di spazi vettoriali: infatti è per definizione lineare, e se $v \in V^G$ allora, sempre per definizione

$$v = \pi(g)v = \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g\in G} \pi(g)v$$

quindi I è una proiezione sul sottospazio V^G:

$$I(I(v)) = I(v) = v$$

Rammentiamo che V può supporsi unitaria (il gruppo è finito) e quindi completamente riducibile: il metodo della media ci dà uno spunto per tentare di decomporre V nelle sue sottorappresentazioni irriducibili.

Dato che $I^2 = I$ su V^G:

$$\dim V^G = \dim \operatorname{im} I = \operatorname{tr} I = \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g \in G} \operatorname{tr} \pi(g) = \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g \in G} \chi(g)$$

Osserviamo che, se V è irriducibile, dato che V^G è una sottorappresentazione, si ha $V^G = V$ oppure $V^G = 0$: nel primo caso V è la rappresentazione banale $\pi(g) = id_V$, nel secondo

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = 0$$

Ora consideriamo due rappresentazioni irriducibili $\pi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\rho : G \longrightarrow GL(W)$, e la loro rappresentazione associata $\hom(V, W)$ (si noti che è $\hom(V, W) = V^* \otimes W$); dato che è il prodotto tensoriale di W per la rappresentazione duale di V abbiamo che

$$\chi_{\hom(\pi,\rho)} = \overline{\chi_\pi} \chi_\rho$$

Osserviamo inoltre che

$$\hom(V, W)^G = (\pi, \rho)$$

e quindi, per il lemma di Schur, $\dim \hom(V, W)^G = \delta_{VW}$ è zero se le rappresentazioni non sono equivalenti e 1 se lo sono. Dalla formula precedente per la dimensione di V^G segue che

5.4.6 Teorema (ORTOGONALITÀ DEI CARATTERI) *Se V e W sono rappresentazioni irriducibili di dimensione finita di un gruppo finito allora*

$$\frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g \in G} \chi_W(g) \overline{\chi_V(g)} = \begin{cases} 1 & \textit{se } V \cong W \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Dato che $\chi \in \mathbb{C}[G]$, questo si scrive anche

$$(\chi_W, \chi_W)_F = \delta_{VW}$$

Quindi i caratteri sono un insieme ortonormale in $\mathbb{C}[G]$: di più, sono una base ortonormale nel sottospazio delle funzioni costanti sulle classi coniugate.

5.4.7 Corollario *Il numero di rappresentazioni irriducibili di un gruppo finito G è minore o uguale al numero di classi coniugate di G.*

Infatti, due rappresentazioni irriducibili sono equivalenti se e solo se i loro caratteri coincidono, la corrispondenza che assegna ad una rappresentazione il suo carattere è iniettiva.

5.4.8 Esempio *Se il gruppo è abeliano, le classi coniugate coincidono con gli elementi del gruppo: in questo caso i caratteri delle rappresentazioni irriducibili sono una base ortonormale di $\mathbb{C}[G]$ e le rappresentazioni irriducibili sono di dimensione 1; in definitiva coincidono con i loro caratteri, e questi sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi del gruppo.*

5.4.9 Corollario *Una rappresentazione qualsiasi è determinata dal suo carattere*

DIMOSTRAZIONE: Se V è irriducibile questo è l'ortogonalità; altrimenti V sarà somma diretta di rappresentazioni irriducibili

$$V = \oplus_{i=1}^k V_i^{\oplus m_i}$$

ove V_i è irriducibile e m_i è la molteplicità con la quale figura nella decomposizione di V; ma allora

$$\chi_V = \sum_{i=1}^k m_i \chi_{V_i}$$

e le χ_{V_i} sono linearmente indipendenti.

QED

Si noti in particolare, che se $V_i = V_j$ allora $1 = (\chi_{V_i}, \chi_{V_j})_F = \sum_i m_i^2$ e quindi

5.4.10 Corollario *V è irriducibile se e solo se $(\chi_V, \chi_V)_F = 1$.*

Evidentemente

$$m_i = (\chi_V, \chi_{V_i})_F$$

Dimostriamo ora un teorema fondamentale:

5.4.11 Teorema *Se $V_1, ..., V_n$ sono tutte le rappresentazioni irriducibili di G (a meno di equivalenza) allora i coefficienti a_{ij}^k delle matrici $\pi_k(g)$ sono una base ortogonale dello spazio $\mathbb{C}[G]$.*

DIMOSTRAZIONE: L'ortogonalità degli elementi segue dall'ortonormalità dei caratteri delle rappresentazioni V_i: dato che il carattere è la traccia, se $\dim V_i = n_i$ allora

$$(a_{ij}^k, a_{rs}^h) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq h \text{ o } i \neq r \text{ o } j \neq s \\ \frac{1}{n_k} & \text{se } k = n, i = r, j = s \end{cases}$$

Dimostriamo ora che le funzioni $a_{ij}^k : G \longrightarrow \mathbb{C}$ sono una base di $\mathbb{C}[G]$; consideriamo la rappresentazione regolare sinistra: sappiamo che è completamente riducibile, dato che è unitaria (per definizione del prodotto hermitiano $(.)_F$) e quindi

$$\mathbb{C}[G] = X_1 \oplus ... \oplus X_p$$

ove X_j sono sottorappresentazioni tali che la restrizione L_j della rappresentazione regolare ad esse è irriducibile: quindi, poiché le V_i esauriscono le rappresentazioni irriducibili di G, L_j è equivalente ad una certa V_{i_j}: allora esiste una base $(e_1^j, ..., e_{n_{i_j}}^j)$ di X_j nella quale la matrice che rappresenta L_j ha come coefficienti $a_{rs}^{i_j}$, quindi

$$e_s^j(gh) = L(g)e_s^j(h) = L_j(g)e_s^j(h) = \sum_r a_{rs}^{i_j}(h)e_r(g)$$

Per $g = e$ e $c_{sj} = e_s^j(e)$ si ha

$$e_s^j(h) = \sum_r c_{sj} a_{rs}^{i_j}(h)$$

Dunque ciascuna funzione e_s^j appartiene ad una base di X_j (e quindi ciascuna funzione su X_j) è combinazione lineare delle $a_{rs}^{i_j}$. Dato che $\mathbb{C}[G]$ è somma diretta degli X_j si ottiene la tesi.

QED

Definiamo ora sullo spazio vettoriale $\mathbb{C}[G]$ una operazione, la *convoluzione di funzioni*:

$$F * G(g) = \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{h \in G} F(h)G(gh^{-1})$$

5.4.12 Teorema *L'operazione $*$ è associativa, possiede un elemento neutro ed è commutativa se e solo se lo è il prodotto del gruppo.*

DIMOSTRAZIONE: Basta osservare che una base dello spazio vettoriale $\mathbb{C}[G]$ sono gli elementi del gruppo G, e che la convoluzione su essi coincide con il prodotto del gruppo. L'elemento neutro è lo stesso del gruppo.

QED

Dato che $\mathbb{C}[G]$ è lo spazio della rappresentazione regolare, si decompone in sottorappresentazioni irriducibili di G: questa decomposizione rispetta la struttura algebrica di $\mathbb{C}[G]$. Per formulare correttamente questi risultati, dobbiamo introdurre alcuni concetti algebrici generali.

5.5 Algebre associative

Gli esempi fondamentali di gruppi che abbiamo considerato erano il gruppo delle trasformazioni biunivoche di uno spazio in sé, in particolare i gruppi simmetrici S_n, ed il gruppo degli isomorfismi lineari di uno spazio vettoriale $GL(V)$.

In generale ha interesse considerare trasformazioni che non siano necessariamente biunivoche: ad esempio, nel caso degli spazi vettoriali, ha interesse considerare lo spazio $End(V)$ di tutte le funzioni lineari di V in sé che, nel caso di dimensione finita, corrisponde allo spazio di tutte le matrici $M_n(\mathbb{C})$. Questo non è semplicemente uno spazio vettoriale, ma i suoi elementi possono essere moltiplicati fra loro, componendo le mappe lineari o (equivalentemente) moltiplicando le matrici righe per colonne.

Motivati da questi esempi diamo la

5.5.1 Definizione *Uno spazio vettoriale $\mathcal{A}$ su un campo $\mathbb{K}$ (che per noi sarà sempre $\mathbb{C}$ o al più $\mathbb{R}$) si dice un'*algebra *se è data una funzione*

$$\mu : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

bilineare (il prodotto *dell'algebra). Si scrive ab in luogo di $\mu(a, b)$.*

Questo concetto è estremamente generale: notiamo che, per bilinearità del prodotto μ, possiamo scrivere

$$\mu : A \otimes A \longrightarrow A$$

5.5.2 Esempio

(1) *I numeri complessi, le matrici complesse e gli endomorfismi di uno spazio vettoriale sono esempi di algebre complesse.*

(2) *Se X è un insieme, lo spazio vettoriale $F(X)$ delle funzioni $X \longrightarrow \mathbb{C}$ possiede un prodotto, definito come segue: se $f, g \in F(X)$ allora*

$$fg(x) = f(x)g(x)$$

(prodotto di numeri complessi).

(3) *$\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ non è un'algebra solo per il prodotto AB di matrici; ponendo*

$$[A, B] := AB - BA$$

otteniamo un nuovo prodotto [.] *su* $\mathcal{A}$*, che si dice* prodotto di Lie*. Una ulteriore struttura di algebra sulle matrici è data dal* prodotto di Jordan*:*

$$(A, B) = AB + BA$$

(4) *Lo spazio dei polinomi complessi* $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ *è un'algebra rispetto al prodotto:*

$$PQ(x_1, ..., x_n) := P(x_1, ..., x_n)Q(x_1, ..., x_n)$$

come si verifica immediatamente.

(5) *Più in generale, lo spazio delle funzioni continue su uno spazio topologico è un'algebra rispetto alla stessa moltiplicazione (punto per punto).*

Notiamo che in questi esempi, i prodotti godono di proprietà differenti: ad esempio il prodotto di funzioni è commutativo: $fg = gf$, mentre il prodotto di matrici non lo è; il prodotto di matrici verifica tuttavia l'*identità associativa*

$$A(BC) = (AB)C$$

mentre il prodotto di Lie di matrici non lo è, ma verifica invece la

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0$$

(*identità di Jacobi*) e la *anticommutatività*:

$$[A, B] = -[B, A]$$

Il prodotto di Jordan verifica invece l'*identità di Jordan*:

$$((A, B), (A, A)) = (A, (B, (A, A)))$$

5.5.3 Esempio *Si consideri* $\mathcal{A} = C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ *(algebra delle funzioni differenziabili) e si definisca il prodotto*

$$\{f, g\}(x_1, ..., x_{2n}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_{i+n}} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_{i+n}} \right)$$

(parentesi di Poisson). Il classico teorema di Jacobi afferma che queste parentesi verificano l'identità di Jacobi.

5.5.4 Definizione *Un'algebra* $\mathcal{A}$ *si dice*

(1) associativa *se il prodotto verifica la proprietà associativa;*

(2) commutativa *se il prodotto verifica la proprietà commutativa;*

(3) di Lie *se il prodotto verifica le proprietà anticommutativa e di Jacobi;*

(4) di Jordan *se il prodotto verifica le proprietà commutativa e di Jordan.*

Questi assiomi sono indipendenti fra loro, ma si possono utilmente combinare: ad esempio l'algebra dei polinomi è associativa e commutativa.

5.5.5 Definizione *Un'algebra (associativa) si dice* con identità *o* con unità *se possiede un* elemento neutro $e \in \mathcal{A}$ *tale che*

$$\forall a \in \mathcal{A} \quad ea = ae = a$$

Ad esempio le algebre delle matrici e dei polinomi posseggono gli elementi neutri I e 1. Un'algebra anticommutativa (e.g. un'algebra di Lie) non può possedere un elemento neutro e, dato che $a = ae = ea = -ae$ implica $a = ae = 0$.

Se un'algebra associativa non possiede elemento neutro è sempre possibile aggiungerglielo, considerando $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \oplus \mathbb{K}$ col prodotto

$$(a, k)(a', k') = (aa' + ka' + k'a, kk')$$

Si vede facilmente che $(0, 1)$ è un elemento neutro per $\widetilde{\mathcal{A}}$ e che $\mathcal{A}$ è la sottoalgebra di $\widetilde{\mathcal{A}}$ degli elementi $(a, 0)$.

Convenzione. *Supporremo nel seguito che le nostre algebre, se non altrimenti specificato, siano algebre associative con elemento neutro e di dimensione finita.*

5.5.6 Esempio *Lo spazio $\mathbb{C}[G]$ della rappresentazione regolare di un gruppo finito è un'algebra rispetto al prodotto di convoluzione; sappiamo che si tratta di un'algebra associativa con elemento neutro, commutativa se e solo se lo è il gruppo.*

5.5.7 Definizione *Un elemento a di un'algebra con unità $\mathcal{A}$ si dice* invertibile *se esiste un $b \in \mathcal{A}$ tale che $ab = ba = e$. Si scrive $b = a^{-1}$.*

Ovviamente in un'algebra (associativa, con unità) l'insieme $\mathcal{A}^{-1}$ degli elementi invertibili forma un gruppo rispetto al prodotto dell'algebra: ad esempio se $\mathcal{A} = End(V)$ allora $\mathcal{A}^{-1} = GL(V)$.

5.5.8 Definizione *Se in un'algebra $\mathcal{A}$ ogni elemento è invertibile, $\mathcal{A}$ si dice un* corpo.

Ad esempio $\mathbb{C}$ è un corpo commutativo, cioè un campo (notiamo che si tratta di una $\mathbb{R}$-algebra oltre che di una $\mathbb{C}$-algebra).

5.5.9 Esempio *Consideriamo il* corpo dei quaternioni*: partiamo dallo spazio vettoriale reale* $\mathcal{H} = \mathbb{R}^4$ *con la base* $(1, i, j, k)$*:*

$$1 = (1, 0, 0, 0) \quad i = (0, 1, 0, 0) \quad j = (0, 0, 1, 0) \quad k = (0, 0, 0, 1)$$

Per definire un prodotto basta definirlo sui generatori ed estenderlo per bilinearità: sia

$$ij = k = -ji \quad jk = i = -kj \quad ki = j = -ik \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

e 1 *l'elemento neutro. Un elemento* $a1 + bi + cj + dk \in \mathcal{H}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ *si dice* quaternione *e può essere rappresentato con una matrice (come spazi vettoriali* $\mathbb{R}^4 \cong M_2(\mathbb{C})$*)*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \tag{Q}$$

ove $a, b \in \mathbb{C}$*; allora il prodotto di quaternioni è il prodotto di queste matrici. Non ogni matrice* 2×2 *(ovviamente) è un quaternione, ed infatti la sottoalgebra di* $M_2(\mathbb{C})$ *dei quaternioni è un corpo: infatti ogni matrice della forma (Q) ammette come inversa la*

$$\frac{1}{|a|^2 + |b|^2} \begin{pmatrix} \overline{a} & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

(ove $|a|^2 = a\overline{a}$ *è il modulo del numero complesso* a*).*

Dato che il prodotto in un'algebra qualsiasi $\mathcal{A}$ è bilineare, resta completamente determinato una volta che lo si sia definito su una base dello spazio vettoriale $\mathcal{A}$. Ad esempio, se $\dim \mathcal{A} < \infty$ e se $(e_1, ..., e_n)$ ne è una base, i coefficienti del sistema di equazioni

$$e_i e_j = \sum_k c_{ij}^k e_k$$

si dicono *costanti di struttura* dell'algebra e la determinano completamente.

In analogia con i gruppi, avremo i concetti di *sottoalgebra*, *morfismo* e *quoziente* di algebre. Una sottoalgebra $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ è un sottospazio vettoriale tale che $\mathcal{B}\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$ (se $S, T \subset \mathcal{A}$ sono sottoinsiemi di un'algebra scriviamo ST per l'insieme $\{st \,|\, s \in S, t \in T\}$), un morfismo fra algebre è una mappa lineare

$$f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

tale che

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

Sia il nucleo

$$\ker f = \{a \in \mathcal{A} \,|\, f(a) = 0\}$$

che l'immagine $\operatorname{im} f$ di un morfismo sono sottoalgebre di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ rispettivamente. Inoltre il nucleo è un ideale nel senso della

5.5.10 Definizione *Una sottoalgebra $\mathcal{B}$ di un'algebra $\mathcal{A}$ è un* ideale destro *se $\mathcal{BA} \subset \mathcal{B}$ e un* ideale sinistro *se $\mathcal{AB} \subset \mathcal{B}$; se è un ideale sia destro che sinistro si dice* bilatero.

Dato che $\mathcal{B}$ è un ideale sinistro se per ogni $a \in \mathcal{A}$ e $b \in \mathcal{B}$: $ba \in \mathcal{B}$. Quindi se $\mathcal{B}$ è un ideale di $\mathcal{A}$ sullo spazio vettoriale quoziente $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ il prodotto di $\mathcal{A}$ induce un prodotto e quindi una struttura di algebra.

È inoltre ovvio che il quoziente è un'algebra associativa.

5.5.11 Teorema *Un'algebra commutativa è un campo se e solo se è priva di ideali non banali.*

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo che un ideale $\mathcal{I}$ non può contenere e altrimenti per ogni $a \in \mathcal{A}$ $ea \in \mathcal{I}$ i.e. $\mathcal{I} = \mathcal{A}$. Per lo stesso motivo non può contenere un elemento invertibile, dato che in questo caso $a^{-1}a \in \mathcal{I}$ i.e. $e \in \mathcal{I}$.

Ora, se $\mathcal{A}$ è un corpo, ogni elemento non nullo è invertibile e quindi un ideale non può contenere elementi non nulli, i.e. non può che essere 0. Viceversa, se $\mathcal{I}$ è un ideale non banale, un suo elemento non nullo non può essere invertibile, quindi $\mathcal{A}$ non è un corpo.

QED

A differenza del caso dei gruppi, in un'algebra associativa commutativa non è vero che le sottoalgebre sono ideali; ad esempio, in ogni algebra esiste il *centro*:

$$\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \{z \in \mathcal{A} \,|\, \forall a \in \mathcal{A} az = za\}$$

In generale non si tratta di un ideale: se $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ e $a, b \in \mathcal{A}$ allora $a(bz) = azb \neq bza$. Se l'algebra è commutativa allora $\mathcal{A} = \mathcal{Z}(\mathcal{A})$.

All'opposto abbiamo il concetto di algebra semplice, motivato anche dal teorema precedente, che è falso nel caso non commutativo: mostreremo fra breve, ad esempio, che l'algebra delle matrici non possiede ideali non banali (ma ovviamente non è un campo).

5.5.12 Definizione *Un'algebra $\mathcal{A}$ si dice* semplice *se non possiede ideali bilateri non banali.*

Le algebre semplici, come suggerisce il nome, sono "prive di struttura interna" e sono usate per produrre nuove algebre per mezzo della somma diretta, ad esempio.

Se $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ è una famiglia di algebre (sullo stesso campo e dello stesso tipo) sul prodotto diretto di spazi vettoriali $\bigoplus_\alpha \mathcal{A}_\alpha$ v'è un ovvia struttura di algebra:

$$ab(\alpha) = a(\beta)b(\beta)$$

(si rammenti che il prodotto è l'insieme delle applicazioni dall'insieme degli indici alla totalità degli addendi diretti). Ad esempio, su $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ abbiamo

$$(a \oplus b)(a' \oplus b') = (aa') \oplus (bb')$$

Ogni addendo diretto è un ideale del prodotto.

5.5.13 Definizione *Un'algebra si dice* semisemplice *se è somma diretta di algebre semplici.*

Diamo ora qualche esempio.

5.5.14 Teorema *L'algebra associativa delle matrici $M_n(\mathbb{K})$ è semplice.*

DIMOSTRAZIONE: Sia J in ideale in $M_n(\mathbb{K})$ non nullo e sia $A \in J$ una matrice non nulla, che possiamo esprimere in termini di matrici "elementari" E_{ij} (ove E_{ij} è la matrice $((\delta_{ij}))$ che ha zero in ogni entrata, tranne che nell'elemento della riga i e della colonna j ove ha 1):

$$A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}$$

Se h, k sono tali che $a_{hk} \neq 0$ ($A \neq 0$) allora

$$\forall r, s \in \{1, ..., n\} \quad E_{rs} = a_{hk}^{-1} E_{rh} A E_{ks} \in J$$

e quindi ogni matrice $E_{rs} \in J$ cioè $J = M_n(\mathbb{K})$.

QED

Si noti che la dimostrazione funziona per l'algebra delle matrici a coefficienti in un corpo $\mathbb{K}$ qualsiasi. Notiamo inoltre che $M_n(\mathbb{K})$ possiede centro non banale:

$$\mathcal{Z}(M_n(\mathbb{K})) = \{kI \mid k \in \mathbb{K}\}$$

(di dimensione 1) formato dai multipli costanti della matrice I.

Dal teorema segue che le somme dirette di algebre di matrici sono semisemplici.

5.5.15 Esempio *Consideriamo le matrici triangolari superiori:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Quest'algebra non è semisemplice, dato che possiede molti ideali: ad esempio quello delle matrici triangolari i cui elementi diagonali siano tutti nulli (il quoziente è l'algebra delle matrici diagonali).

Il fatto che i nostri esempi siano tutti basati sulle matrici non è un caso:

5.5.16 Teorema *Ogni algebra associativa di dimensione n su un campo* $\mathbb{K}$ *è isomorfa ad una sottoalgebra di* $M_k(\mathbb{K})$ *con* $k \leq n+1$.

DIMOSTRAZIONE: Sia $\mathcal{A}$ un'algebra associativa con unità 1 e consideriamo la rappresentazione regolare sinistra

$$L : \mathcal{A} \longrightarrow End(\mathcal{A}) = M_n(\mathbb{K})$$

definita da $L(a)(b) = ab$; si tratta evidentemente di un omomorfismo di $\mathcal{A}$ nell'algebra associativa $End(\mathcal{A})$: dimostriamo che è iniettivo, il che ci fornisce la tesi. Se $L(a)(b) = 0$ per ogni $b \in \mathcal{A}$ allora $ab = 0$ per ogno b e quindi per $b = 1$, da cui $a = 0$; cioè il nucleo di L è banale.

Se $\mathcal{A}$ non possiede l'unità, possiamo considerare lo spazio vettoriale $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \oplus \mathbb{K}$, e definire su di esso un prodotto

$$(a+k, b+h) = (ab + kb + ha, kh)$$

associativo; evidentemente l'algebra $\widetilde{\mathcal{A}}$ possiede un elemento neutro: $(0,1)$. Ma allora $\widetilde{\mathcal{A}}$ (e quindi anche $\mathcal{A}$, per restrizione) si immerge in $M_k(\mathbb{K})$.

QED

Questo teorema è analogo al teorema di Cayley per i gruppi: l'idea è la stessa e ci dà lo spunto per parlare di rappresentazioni di algebre; prima facciamo un'ulteriore convenzione:

Convenzione. *D'ora in avanti un'algebra sarà un'algebra associativa con elemento neutro di dimensione finita sui numeri complessi:* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

5.5.17 Definizione *Una funzione* $a \longmapsto A^*$ *in un'algebra* A *si dice una* involuzione *se*

(1) $a^{**} = a$

(2) $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$ *se* $\lambda \in \mathbb{C}$.

(3) $(a+b)^* = a^* + b^*$

(4) $(ab)^* = b^* a^*$

5.5.18 Definizione *Un'algebra dotata di involuzione* $*$ *si dice una* *-algebra.

L'esempio ispiratore è l'algebra delle matrici complesse: l'involuzione è semplicemente la coniugazione della trasposta:

$$A^* = \overline{A^T}$$

Si noti che, sebbene ogni algebra sia una sottoalgebra delle matrici, non è detto che sia una sotto-*-algebra. Anche le matrici reali rispetto alla semplice trasposizione sono una *-algebra.

5.5.19 Definizione *Un elemento* $a \in A$ *si dice* autoaggiunto *se* $a^* = a$ *e si dice* normale *se* $a^*a = aa^*$.

Ovviamente ogni elemento $a \in \mathcal{A}$ si scrive in modo unico come

$$a = a_1 + ia_2$$

ove a_1, a_2 sono autoaggiunti: basta porre

$$a_1 = \frac{1}{2}(a + a^*) \qquad \text{e} \qquad a_2 = \frac{1}{2i}(a - a^*)$$

Inoltre per ogni a, a^*a e aa^* sono autoaggiunti, come pure autoaggiunto è e.

Ora vogliamo dare per una *-algebra il concetto di rappresentazione: ovviamente un omomorfismo di *-algebre è un omomorfismo φ tale che

$$\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$$

e si dice anche **-omomorfismo*.

5.5.20 Definizione *Un* modulo *su una *-algebra* $\mathcal{A}$ *è uno *-omomorfismo di *-algebre*

$$\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow End(M)$$

ove M *è uno spazio vettoriale complesso.*

In altri termini, se scriviamo

$$am := \varphi(a)(m)$$

allora

(1) $(\lambda a + \mu b)m = \lambda(am) + \mu(bm)$ se $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathcal{A}$ e $m \in M$;

(2) $(ab)m = a(bm)$

(3) $1m = m$

Il concetto è del tutto analogo a quello di rappresentazione, ed infatti, come nel caso delle rappresentazioni abbiamo i concetti di

(1) *sottomodulo*, cioè di $\mathcal{A}$-modulo N che sia un sottospazio di M;

(2) *modulo irriducibile*, cioè di $\mathcal{A}$-modulo M che non possiede sottomoduli diversi da 0 e M;

(3) *morfismo di moduli*, cioè di applicazione lineare $A : M \longrightarrow N$ fra due sottomoduli tale che $A(am) = a(Am)$ per ogni $a \in \mathcal{A}$ e $m \in M$; l'insieme dei morfismi si denota con $\hom_{\mathcal{A}}(M, N)$;

(4) *somma diretta di moduli*, del tutto ovvia;

(5) *completa riducibilità di moduli*, cioè un modulo è completamente riducibile se è somma diretta di sottomoduli irriducibili.

Esattamente come nel caso delle rappresentazioni dei gruppi abbiamo il

5.5.21 Lemma (SCHUR) *Se M e N sono $\mathcal{A}$-moduli irriducibile allora ogni morfismo di moduli $F : M \longrightarrow N$ è un isomorfismo oppure è zero.*

5.5.22 Corollario *Se M è un $\mathcal{A}$-modulo irriducibile allora* $\hom_{\mathcal{A}}(M, M) = \mathbb{C}$.

Osserviamo che se lo spazio M possiede una struttura hermitiana (.), si dice uno **-modulo* se

$$(am, m') = (m, a^* m')$$

ovvero $a^* m = (am)^*$. Esattamente come per le rappresentazioni unitarie, si dimostra il seguente

5.5.23 Teorema *Uno *-modulo su una *-algebra $\mathcal{A}$ è completamente riducibile.*

Ad esempio l'algebra di gruppo di un gruppo finito è completamente riducibile, dato che

5.5.24 Teorema *Se G è un gruppo, esiste una corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{C}[G]$-moduli e rappresentazioni di G: ai moduli irriducibili corrispondono rappresentazioni irriducibili.*

DIMOSTRAZIONE: Se $\pi : G \longrightarrow GL(V)$ è una rappresentazione di G possiamo estenderla per linearità ad una funzione

$$\varphi(\sum_g a_g g) = \sum_g a_g \varphi(g)$$

su $\mathbb{C}[G]$ ottenendo così una funzione $\mathbb{C} \longrightarrow End(V)$

$$(\sum_g a_a g)(v) := \sum_g a_g \varphi(g)(v)$$

che si verifica facilmente essere una struttura di $\mathbb{C}[G]$-modulo su V.

Per ricostruire la rappresentazione del gruppo a partire dall'algebra basta restringere la rappresentazione di $\mathbb{C}[G]$ a $G \subset \mathbb{C}[G]$.

QED

Dimostriamo ora che l'algebra di gruppo è semisemplice: in effetti vale molto di più: ogni rappresentazione di un'algebra semisemplice è completamente riducibile (teorema di Wedderburn) ed è somma diretta di algebre di matrici, che ne costituiscono i "fattori"; ogni tale fattore $\mathcal{F}$ verifica la relazione $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' = \mathbb{C}$ ove $\mathcal{F}' = \{A \in \mathcal{A} \mid \forall F \in \mathcal{F}\ AF = FA\}$ è il *commutante* del fattore $\mathcal{F}$. La teoria ammette una vastissima generalizzazione al caso di dimensione infinita, generalizzazione dovuta a von Neumann e Murray.

5.5.25 Teorema *Se G è un gruppo finito, l'algebra $\mathbb{C}[G]$ è somma diretta delle algebre*

$$M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus ... \oplus M_{n_k}(\mathbb{C})$$

ove n_i sono le dimensioni delle rappresentazioni irriducibili di G e k è il loro numero.

DIMOSTRAZIONE: Siano $\pi_1 : G \longrightarrow GL(V_1), ..., \pi_k : G \longrightarrow GL(V_k)$ le rappresentazioni irriducibili non equivalenti di G e supponiamo che sia $\dim V_i = n_i$; allora, se poniamo

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{C}[G] &\longrightarrow M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus ... \oplus M_{n_k}(\mathbb{C}) \\ g &\longmapsto (\pi_1(g), ..., \pi_k(g)) \end{aligned}$$

(definendola su G, che è una base di $\mathbb{C}[G]$ ed estendendola per linearità) abbiamo un omomorfismo di algebre: si tratta di uno *-omomorfismo, dato che le rappresentazioni V_i sono unitarie.

Per vedere che è un isomorfismo ci basta dunque mostrare che è iniettivo e suriettivo. è iniettivo perché se $\ker \Phi \neq 0$ allora

$$\pi_i(a) = 0$$

e quindi tutti i coefficienti delle matrici $\pi_i(g)$ sono nulli; ma questi sono una base dello spazio $\mathbb{C}[G]$ e quindi $a = 0$.

Dimostriamo infine che è suriettivo: abbiamo che, se $a = \sum_g a(g)g$:

$$\pi_i(a) = \sum_{g \in G} a(g)\pi_i(g)$$

Se quindi $A_1 \oplus ... \oplus A_k$ è un generico elemento di $\bigoplus M_{n_i}(\mathbb{C})$ allora vogliamo mostrare che esiste $a \in \mathbb{C}[G]$ tale che $\Phi(a) = A_1 \oplus ... \oplus A_k$.

Sia perciò $A_1 \oplus ... \oplus A_k$ un elemento di $\bigoplus M_{n_i}(\mathbb{C})$; le matrici A_i sono matrici delle rappresentazioni $\pi_i(g)$ rispetto a certe basi di V_i; sappiamo che questi elementi generano come spazio vettoriale $\mathbb{C}[G]$, dato che ne costituiscono una base ortogonale, quindi ogni elemento a di $\mathbb{C}[G]$ è, in una certa base, combinazione lineare di queste funzioni, da cui

$$\Phi(a) = \Phi\left(\sum_{g\in G} a(g)g\right) = \sum_{g\in G} a(g)(\pi_1(g) \oplus ... \oplus \pi_k(g)) = \sum_{g\in G} a(g)A_1 \oplus ... \oplus A_k$$

QED

5.6 Appendice: Cenni di algebra tensoriale

In questa appendice supporremo di avere a che fare con spazi vettoriali di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$, che potremo limitarci a pensare come i numeri reali $\mathbb{R}$ o complessi $\mathbb{C}$.

5.6.1 Algebra tensoriale

Consideriamo quindi due spazi vettoriali V e W. Vogliamo costruire a partire da questi due un nuovo spazio vettoriale di dimensione finita che abba il diritto di dirsi "prodotto" dei due dati. L'idea è che i suoi elementi, che saranno formati a partire dagli elementi di V e W non dovranno soddisfare altre relazioni se non quelle di bilinearità.

Ricordiamo che una mappa bilineare fra gli spazi vettoriali V, W e Z è una applicazione

$$f : V \times W \longrightarrow Z$$

tale che, fissato un qualsiasi $v \in V$ la mappa $w \longmapsto f(v, w)$ sia lineare da W a Z e, fissato un qualsiasi $w \in W$ la mappa $v \longmapsto f(v, w)$ sia lineare da V a Z.

Quando $Z = \mathbb{K}$, f si dice *forma bilineare*. Ad esempio un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale è una forma bilineare.

Il problema che ora ci poniamo è di trovare uno spazio vettoriale "universale" rispetto al concetto di bilinearità, e la risposta è fornita dal seguente

5.6.1 Teorema *Se V e W sono spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ allora esiste uno spazio vettoriale T su $\mathbb{K}$ ed una mappa bilineare*

$$\tau : V \times W \longrightarrow T$$

tale che

(1) *Per ogni mappa bilineare* $f : V \times W \longrightarrow Z$ *esiste un'unica mappa lineare* $f_* : T \longrightarrow Z$ *tale che* $f = f_* \circ \tau$, *i.e. che il seguente diagramma*

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "f"'] & & T \arrow[dl, "f_*"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

(2) *Se* $(v_1, ..., v_n)$ *è una base di* V *e* $(w_1, ..., w_m)$ *è una base di* W *allora* $\{\tau(v_i, w_j)\}_{i,j}$ *è una base di* T.

DIMOSTRAZIONE: Questa dimostrazione non è la più raffinata ma ha il pregio della concretezza: consideriamo la base $(v_1, ..., v_n)$ di V e la base $(w_1, ..., w_m)$ di W, ed associamo ad ogni coppia (v_i, w_j) un simbolo τ_{ij}. Allora lo spazio vettoriale T generato su $\mathbb{K}$ dai simboli τ_{ij} ha dimensione nm, ed è formato da tutti le combinazioni lineari formali

$$\sum_{i,j} a_{ij}\tau_{ij}$$

con $a_{ij} \in \mathbb{K}$. In altri termini le $\{\tau_{ij}\}$ sono per definizione una base di T.

Definiamo ora la mappa τ su una coppia qualsiasi di vettori di V e W, espressi in termini delle loro basi come $v = \sum_i x_i v_i$ e $w = \sum_j y_j w_j$, nel modo seguente:

$$\tau(v, w) := \sum_{i,j} x_i y_j \tau_{ij}$$

Per definizione questa mappa è bilineare. Verifichiamo ora i due enunciati del teorema.

Sia dunque f la nostra mappa bilineare. Se definiamo

$$f_*(\tau_{ij}) := f(v_i, w_j)$$

questo determina un'unica mappa lineare su T (infatti l'abbiamo definita sulla sua base $\{\tau_{ij}\}$) e per definizione si ha $f = f_* \circ \tau$.

Per dimostrare il secondo enunciato, basta considerare due altre basi di V e W: $(v'_1, ..., v'_n)$ e $(w'_1, ..., w'_n)$. Dobbiamo dimostrare che gli elementi $\{\tau(v'_i, w'_j)\}$ costituiscono una base di T. Ma di certo questi elementi generano T, in quanto, per ogni coppia $(v, w) \in V \times W$ esistono dei coefficienti in $\mathbb{K}$ tali che

$$v = \sum x_i v'_i \qquad \text{e} \qquad w = \sum y_i w'_i$$

Sicché, per bilinearità di τ:

$$\tau(v, w) = \sum_{i,j} x_i y_j \tau(v'_i, w'_j)$$

e quindi ogni elemento di T si esprime come combinazione lineare degli $\{\tau(v'_i, w'_j)\}$. Inoltre, dato che questi elementi sono nm e che la dimensione di T pure è nm, devono necessariamente costituirne una base.

QED

Osserviamo che la definizione di T è ben posta in virtù del secondo enunciato del teorema, non dipende cioè dalla scelta delle basi fissate in V e W per costruire i generatori di T.

Un altro corollario immediato del teorema è che lo spazio T è unico a meno di isomorfismi: infatti se ne esiste un altro, diciamo T', soddisfacente alla proprietà (1) del teorema, possiamo applicare il teorema a T' con $Z = T$ e $f = \tau$ ed a T con $Z = T'$ e $f = \tau'$, ottenendo così due mappe τ_* e τ'_* che sono ovviamente l'una l'inversa dell'altra e dunque realizzano un isomorfismo di T con T'.

D'ora in poi indicheremo lo spazio T associato a V e W con $V \otimes W$, e lo chiameremo *prodotto tensoriale* di V e W. Inoltre al posto di $\tau(v, w)$ scriveremo $v \otimes w$ e chiameremo gli elementi di $V \otimes W$ *tensori*.

Per costruzione si ha

$$\dim V \otimes W = \dim(V) \dim(W)$$

è ovvia la verifica dell'esistenza dei seguenti isomorfismi canonici (tutto ciò che bisogna usare è il teorema 1):

$$V \otimes W \cong W \otimes V$$
$$V \otimes (W \otimes Z) \cong (V \otimes W) \otimes Z)$$

5.6.2 Proposizione $V^* \otimes W \cong \hom(V, W)$.

Dimostrazione: Definiamo esplicitamente:

$$\begin{aligned} F : V^* \otimes W &\longrightarrow \hom(V, W) \\ \varphi \otimes w &\longmapsto (v \longmapsto \varphi(v)w) \end{aligned}$$

Cioè, al tensore $\varphi \otimes w$ (ove $\varphi \in V^*$ e $w \in W$) assegnamo la mappa lineare $F_{\varphi\otimes w} : V \longrightarrow W$ che calcolata su un elemento v dà come risultato $\varphi(v)w$. è un'ovvia verifica che F è ben definita, lineare e iniettiva, dunque un isomorfismo.

QED

Il seguente fatto è banale, ma molto importante, ed esprime la funtorialità del prodotto tensoriale: se $f : V \longrightarrow U$ e $g : W \longrightarrow Z$ sono mappe lineari di spazi vettoriali allora è definita la mappa lineare

$$f \otimes g : V \otimes W \longrightarrow U \otimes Z$$

come
$$(f \otimes g)(v \otimes w) := f(v) \otimes g(w)$$
In altri termini, tensorizzare per uno spazio vettoriale fissato è un funtore nella categoria degli spazi vettoriali: il prodotto tensoriale lo possiamo vedere come un "funtore in due variabili".

5.6.3 Proposizione

(1) $V \otimes \mathbb{K} \cong V$

(2) $V^* \otimes W^* \cong (V \otimes W)^*$

(3) *Se V è uno spazio vettoriale reale, possiamo considerare $V^{\mathbb{C}} := V \otimes \mathbb{C}$ ove $\mathbb{C}$ è visto come spazio reale bidimensionale. Allora $V^{\mathbb{C}}$ è uno spazio vettoriale complesso.*

DIMOSTRAZIONE: V soddisfa evidentemente la proprietà universale del prodotto tensoriale $V \otimes \mathbb{K}$ rispetto alla mappa $F : V \times \mathbb{K} \longrightarrow V$ data da $F(v, k) = kv$.

La (2) è pure ovvia: se $F : V^* \times W^* \longrightarrow (V \otimes W)^*$ è data da
$$F(\varphi, \psi)(v \otimes w) := \varphi(v)\psi(w)$$
allora la proprietà universale di $V^* \otimes W^*$ è verificata da $(V \otimes W)^*$.

Infine, se $V^{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C}$, vediamo che è definita una moltiplicazione fra gli elementi di $V^{\mathbb{C}}$ e quelli di $\mathbb{C}$ che rende $V^{\mathbb{C}}$ uno spazio complesso: basti porre
$$\forall v \in V^{\mathbb{C}}\ \forall z \in \mathbb{C} \quad zv = v \otimes z$$
Le proprietà del prodotto tensoriale dicono esattamente che lo spazio $V^{\mathbb{C}}$ è complesso. Si noti che $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}}$: in effetti una $\mathbb{R}$-base $(e_1, ..., e_n)$ di V è anche una $\mathbb{C}$-base di $V^{\mathbb{C}}$.

QED

Per concludere questa discussione del prodotto tensoriale notiamo il motivo per quale lo si può considerare una versione intrinseca del concetto di multilinearità: ha luogo infatti l'isomorfismo
$$(V \otimes W)^* \cong Bil(V, W)$$
ove $Bil(v, W)$ denota lo spazio delle forme bilineari su $V \times W$. Questo isomorfismo è semplicemente un modo differente di esprimere la proprietà (1) del Teorema 1.

In modo del tutto analogo, considerando per uno spazio vettoriale V le sue potenze tensoriali $V^{\otimes 2} := V \otimes V$, $V^{\otimes 3} := V \otimes V \otimes V$,... possiamo identificare le forme multilineari sullo spazio vettoriale V con le forme lineari sui tensori di V.

Introduciamo ora un oggetto molto importante, l'*algebra tensoriale*. Partiamo dal solito spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$. Scriviamo $V^{\otimes 2}$ in luogo di $V \otimes V$. Ovviamente possiamo iterare il prodotto tensoriale quante volte vogliamo, e così considerare le potenze tensoriali di V: $V^{\otimes 0} := \mathbb{K}$, $V^{\otimes 1} = V$,...,$V^{\otimes n}$, ...

Lo spazio vettoriale (di dimensione infinita)

$$T(V) := \bigoplus_{n=1}^{\infty} V^{\otimes n}$$

si chiama algebra tensoriale. è infatti un'algebra associativa rispetto ad un ovvio prodotto che possiamo definire nel modo seguente: se $(v_1, ..., v_n)$ è una base di V, allora un tipico elemento di $T(V)$ è della forma

$$\sum_k \sum_{i_1,...,i_k} a_{i_1,...,i_k} v_{i_1} \otimes ... \otimes v_{i_k}$$

ove la somma su k è finita e gli indici possono anche essere ripetuti, ed i coefficienti stanno ovviamente in $\mathbb{K}$. Cioè i tensori che stanno in $T(V)$, che sono tutti i tensori possibili su V, sono una specie di polinomi nelle variabili $\{v_i\}$, con la notevole eccezione di non essere commutativi, in quanto ovviamente $v \otimes w \neq w \otimes v$. Che $T(V)$ sia uno spazio vettoriale è vero per costruzione, mentre la struttura di algebra si ha considerando il prodotto definito come:

$$v_{i_1} \otimes ... \otimes v_{i_k} \cdot v_{j_1} \otimes ... \otimes v_{j_h} := v_{i_1} \otimes ... \otimes v_{i_k} \otimes v_{j_1} \otimes ... \otimes v_{j_h}$$

Questo è ovviamente un prodotto associativo ed ha un'unità che è poi l'1 di $\mathbb{K} \subset T(V)$.

L'algebra tensoriale è ovviamente di dimensione infinita (possiamo pensare i suoi elementi come "polinomi non commutativi" negli elementi di V), e graduata, nel senso che si decompone in somma diretta di sottospazi vettoriali (per costruzione). Ha così senso parlare di grado di un tensore: un elemento $x \in T(V)$ ha grado n se si scrive come somma di elementi di potenze tensoriali di V non maggiori della n-ma (del tutto analogamente al grado dei polinomi: l'algebra $\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$ è infatti graduata ed il grado è quello usuale dei polinomi).

5.6.2 Algebra simmetrica

Mostriamo ora come possiamo considerare i polinomi su V (le funzioni polinomiali $V \longrightarrow \mathbb{K}$) come quoziente dell'algebra tensoriale.

Consideriamo in $T(V)$ l'ideale I(V) generato dagli elementi della forma $v \otimes w - w \otimes v$ con $v, w \in V$, e quindi il quoziente

$$\mathrm{Sym}(V) := T(V)/I(V)$$

Denotiamo l'immagine di un tensore $v_{i_1} \otimes ... \otimes v_{i_k} \in T(V)$ nel quoziente $\wedge(V)$ con la scrittura $v_{i_1} \cdot ... \cdot \wedge v_{i_k}$. Poichè l'ideale $I(V)$ è graduato, nel senso che se $I^k(V) := I(V) \cap V^{\otimes k}$ allora

$$I(V) = \bigoplus_k I^k(V)$$

anche l'algebra $\mathrm{Sym}(V)$ è graduata:

$$\mathrm{Sym}(V) = \bigoplus_k S^k(V)$$

con

$$S^k(V) = V^{\otimes k}/I^k(V)$$

Questa nuova algebra è stata costruita in modo che i suoi elementi, oltre a soddisfare le relazioni multilineari dei tensori qualsiasi, soddisfino anche la commutatività, cioè se v e w sono in V allora

$$vw = wv$$

Gli elementi di $\mathrm{Sym}(V)$ si dicono *tensori simmetrici*, e $\mathrm{Sym}(V)$ si dice *algebra simmetrica* su V.

Si tratta effettivamente di un'algebra associativa con elemento neutro perché l'ideale $I(V)$ è un ideale per la struttura associativa. Inoltr el'algebra simmetrica è per definizione commutativa.

Notiamo che l'algebra simmetrica può ottenersi considerando la rappresentazione di S_n su V^n data da

$$\sigma(v_1 \otimes ... \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(n)}$$

e considerando gli invarianti della rappresentazione, i,e, gli elementi v di $V^{\otimes n}$ tali che $\sigma v = v$: si tratta degli elementi di $S^n(V)$.

Ora ci concentreremo sui singoli addendi $S^k(V)$ dell'algebra simmetrica. Consideriamo cioè il solito spazio vettoriale V di dimensione n con la solita base $(v_1, ..., v_n)$, e l'algebra simmetrica di grado k su V: S^kV.

Vogliamo caratterizzare questo spazio in termini di mappe multilineari, come abbiamo fatto per i tensori. Intanto osserviamo che S^kV si ottiene da $V^{\otimes k}$ quozientando per il sottospazio generato dai vettori $v \otimes v - w \otimes v$, e quindi i suoi elementi, che hanno la forma

$$\sum_{i_1,...,i_k} a_{i_1...i_k} v_{i_1} ... v_{i_k}$$

verificano la commutatività, i.e. si può sempre scrivere

$$v_{i_1}...v_{i_k} = v_{j_1}...v_{j_k}$$

se $\{i_1, ..., i_k\} = \{j_1, ..., j_k\}$. Ora consideriamo le applicazioni multilineari simmetriche di V in sé, cioè le funzioni

$$f : V^k \longrightarrow W$$

multilineari e tali che

$$f(v_1, ..., v_k) = f(v_{i_1}, ..., v_{i_k}) = 0$$

per ogni permutazione $i : j \longrightarrow i_j$ degli interi $\{1, ..., n\}$.

Se $W = \mathbb{K}$ abbiamo il concetto di forma multilineare simmetrica in k variabili: ad esempio un prodotto scalare è una forma bilineare simmetrica.

Notiamo ora che

5.6.4 Proposizione *I tensori $S^k(V)$ sono esattamente i polinomi omogenei di grado k negli elementi di V.*

Dimostrazione: Basta osservare che, dato che un elemento di $S^k(V)$ è della forma

$$s = \sum_{i_1,...,i_k} a_{i_1...i_k} v_{i_1}...v_{i_k}$$

Quindi se $(e_1, ..., e_n)$ è una base di V allora

$$s = \sum_{j_1,...,j_n} a_{j_1...j_n} e_1^{j_1}...e_n^{j_n}$$

convenendo che j_k possa anche essere zero, ed in tal caso $e_k^{j_k}$ venga omesso.

QED

Dunque l'algebra simmetrica $\mathrm{Sym}(V)$ può vedersi come l'algebra dei polinomi $\mathbb{K}[V]$ ovvero $\mathbb{K}[e_1, ..., e_n]$; in particolare, $\mathrm{Sym}(V^*)$ sono le funzioni polinomiali su V, quindi i polinomi nel senso elementare del termine. Si noti che $\mathbb{K}[V \times W] = \mathbb{K}[V] \otimes \mathbb{K}[W]$.

L'algebra simmetrica verifica una proprietà universale:

5.6.5 Teorema *Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{K}$ e se k è un intero positivo allora esiste un unico spazio vettoriale Σ di dimensione finita su $\mathbb{K}$, ed una mappa multilineare simmetrica*

$$\sigma : V^k \longrightarrow \Sigma$$

tale che

(1) *Se W è uno spazio vettoriale e se $f : V^k \longrightarrow W$ è una mappa multilineare simmetrica, allora esiste un'unica mappa lineare $f_* : \Sigma \longrightarrow W$ tale che $f = f_* \circ \sigma$, i.e. che il seguente diagramma*

$$\begin{tikzcd} V^k \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "f"'] & & \Sigma \arrow[dl, "f_*"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

(2) *Se $(v_1, ..., v_n)$ è una base di V allora $\{\sigma(v_{i_1}, ..., v_{i_k})\}$ con $1 \leq i_1 \leq ... \leq i_k$ è una base di W.*

DIMOSTRAZIONE: Procediamo in modo analogo al teorema 5.6.1, considerando per ogni sottoinsieme S di $\{1, ..., n\}$ di k elementi anche ripetuti[5] (ad esempio può essere $S = (1, 1, ..., 1)$ e si noti che $(2, 1, 1, .., 1)$ e $(1, 2, 1, ..., 1)$ corrispondono alla stessa scelta) un simbolo σ_S, e prendendo lo spazio vettoriale generato da questi simboli su $\mathbb{K}$, che ha dimensione $\binom{n+1+k}{k}$, e che denotiamo Σ. Se $\{v_1, ..., v_n\}$ è una base di V, allora S è lo spazio delle combinazioni lineari

$$\sum_{i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_k} a_{i_1 ... i_k} v_{i_1} ... v_{i_k}$$

Sia ora $v \in V^k$ della forma

$$v = \sum_{i_1, ..., i_k} a_{i_1 ... i_k} (v_{i_1}, ..., v_{i_k})$$

e definiamo la mappa σ come

$$\sigma(v) := \sum_{i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_k} a_{i_1 ... i_k} (i_1, ..., i_k)$$

(S è generato da elementi del tipo $(i_1, ..., i_k)$). Che si tratti di una mappa multilineare simmetrica segue dalla definizione, ed è pure un fatto ovvio che

$$\sigma(v_{i_1}, ..., v_{i_k}) = \sigma_S$$

se $S = \{i_1, ..., i_k\}$ con $i_1 \leq ... \leq i_k$.

La dimostrazione della (1) si riduce alla semplice osservazione che se $f : V^k \longrightarrow W$ è multilineare simmetrica, la mappa

$$f_*(\sigma_S) := f(v_{i_1}, ..., v_{i_k})$$

[5] Si tratta sostanzialmente dei monomi di grado k nelle indeterminate $1, .., n$.

è ben definita su una base di Σ e quindi si estende ad un'unica mappa lineare da Σ in W.

Per la dimostrazione della (2) basta notare che gli elementi $\{\sigma(v_{i_1}, ..., v_{i_k})\}$ generano Σ e sono esattamente $\binom{n+k+1}{k}$.

QED

Di nuovo possiamo dedurre l'unicità dello spazio Σ dalla sua proprietà universale, ed è evidente che la potenza simmetrica $S^k(V)$ soddisfa questa proprietà: ne segue che abbiamo una naturale identificazione

$$\Sigma \cong S^k(V)$$

che, a livello di basi, è

$$\sigma(v_{i_1}, ..., v_{i_k}) \longleftrightarrow v_{i_1}...v_{i_k}$$

Osserviamo che il risultato precedente può riformularsi dicendo che lo spazio delle forme multilineari simmetriche è isomorfo allo spazio duale dei tensori simmetrici:

$$\mathrm{Sym}(V^k, \mathbb{K}) \cong (S^k(V))^*$$

Inoltre, è possibile associare ad una mappa $f : V \longrightarrow W$ lineare la sua potenza simmetrica k-sima $S^k f : S^k V \longrightarrow S^k W$ definita come

$$S^k f(u_1, ..., u_k) = f(u_1)...f(u_k)$$

Notiamo che l'algebra simmetrica completa $\bigoplus_k S^k(V)$ è di dimensione infinita e corrisponde all'algebra dei polinomi su V.

5.6.3 Algebra esterna

Costruiamo ora un'altra algebra tensoriale: l'*algebra esterna*. Consideriamo in $T(V)$ l'ideale I(V) generato dagli elementi della forma $v \otimes v$ per $v \in V$, e quindi il quoziente

$$\wedge(V) := T(V)/I(V)$$

Denotiamo l'immagine di un tensore $v_{i_1} \otimes ... \otimes v_{i_k} \in T(V)$ nel quoziente $\wedge(V)$ con la scrittura $v_{i_1} \wedge ... \wedge v_{i_k}$. Poichè l'ideale $I(V)$ è graduato, nel senso che se $I^k(V) := I(V) \cap V^{\otimes k}$ allora

$$I(V) = \bigoplus_k I^k(V)$$

anche l'algebra $\wedge(V)$ è graduata:

$$\wedge(V) = \bigoplus_k \wedge^k(V)$$

con
$$\wedge^k(V) = V^{\otimes k}/I^k(V)$$
Questa nuova algebra è stata costruita in modo che i suoi elementi, oltre a soddisfare le relazioni multilineari dei tensori qualsiasi, soddisfino anche quelle antisimmetriche, cioè se v e w sono in V allora
$$v \wedge w = -w \wedge v$$
e quindi
$$v \wedge v = 0$$
Da qui per induzione:
$$\forall x \in \wedge^k(V)\ \forall y \in \wedge^h(V) \quad x \wedge y = (-1)^{kh} y \wedge x$$
Gli elementi di $\wedge(V)$ si dicono *tensori antisimmetrici*, e $\wedge(V)$ si dice *algebra esterna* su V. Si tratta di un'algebra associativa, che per definizione è anticommutativa.

Notiamo che $w^k(V)$ può essere costruito considerando la rappresentazione del gruppo A_n su $V^{\otimes n}$ data da
$$\sigma(v_1 \otimes ... \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(n)}$$
e considerandone gli invarianti.

Ora ci concentreremo sui singoli addendi $\wedge^k(V)$ dell'algebra esterna. Consideriamo cioè il solito spazio vettoriale V di dimensione n con la solita base $(v_1, ..., v_n)$, e l'algebra esterna di grado k su V: $\wedge^k V$.

Vogliamo caratterizzare questo spazio in termini di mappe multilineari, come abbiamo fatto per i tensori. Intanto osserviamo che $\wedge^k V$ si ottiene da $V^{\otimes k}$ quozientando per il sottospazio generato dai vettori $v \otimes v$, e quindi i suoi elementi, che hanno la forma
$$\sum_{i_1,...,i_k} a_{i_1...i_k} v_{i_1} \wedge ... \wedge v_{i_k}$$
verificano relazioni del tipo:
$$v_{i_1} \wedge ... \wedge v_{i_j} \wedge ... \wedge v_{i_j} \wedge ... \wedge v_{i_k} = 0$$
Ora consideriamo le applicazioni multilineari alterne di V in sé, cioè le funzioni
$$f : V^k \longrightarrow W$$
multilineari e tali che
$$f(v_{i_1}, ..., v, ..., v, ..., v_{i_k}) = 0$$

il che ovviamente implica

$$f(v_{i_1}, ..., v, ..., w, ..., v_{i_k}) = -f(v_{i_1}, ..., w, ..., v, ..., v_{i_k})$$

Se $W = \mathbb{K}$ abbiamo il concetto di forma multilineare alternante in k variabili.

5.6.6 Esempio *Se guardiamo ad una matrice A come alla successione ordinata dei vettori colonna che la compongono, $A = (A^1, ..., A^n)$, il determinante*

$$\det : V^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

è multilineare alternante, e si può completamente caratterizzare aggiungendo la condizione

$$\det(1) = 1$$

che il determinante della matrice identica sia 1.

5.6.7 Esempio *Consideriamo i tensori di grado due, i.e. degli elementi di $V \otimes V$: ogni tale tensore è comma di un tensore antisimmetrico e di un tensore simmetrico, in altri termini*

$$V \otimes V = S^2(V) \oplus \wedge^2(V)$$

Il determinante interviene nella dimostrazione del seguente teorema:

5.6.8 Teorema *Se V e W sono spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ e se*

$$f : V^k \longrightarrow W$$

è una funzione multilineare alternante, dati qualsiasi $w_1, ..., w_k \in V$ e se $A = ((a_{ij}))$ è una matrice e

$$u_1 = \sum_{i=1}^k a_{1i} w_i \, , \qquad \dots \qquad u_k = \sum_{i=1}^k a_{ki} w_i$$

allora

$$f(u_1, .., u_k) = \det(A) f(w_1, ..., w_k)$$

Dimostrazione: Intanto si ha

$$f(u_1, .., u_k) = f(\sum_{i=1}^k a_{1i} w_i, ..., \sum_{i=1}^k a_{ki} w_i)$$

e, per multilinearità, si ottiene

$$\sum_{\sigma} f(a_{1,\sigma(1)}w_{\sigma(1)}, ..., a_{1,\sigma(k)}w_{\sigma(k)})$$

ove la somma è estesa a tutte le possibili mappe $\sigma : \{1, ..., k\} \longrightarrow \{1, ..., k\}$ che riordinano k elementi. Questa somma è pari a

$$\sum_{\sigma} a_{1,\sigma(1)}...a_{k,\sigma(k)}f(w_{\sigma(1)}, ..., w_{\sigma(k)})$$

sempre per multilinearità. Osserviamo che la somma in realtà non è estesa a tutte le combinazioni possibili di elementi, ma solo alle permutazioni, cioè alle mappe σ biunivoche, perché nel caso di una combinazione di termini che non sia una permutazione, nel termine $f(w_{\sigma(1)}, ..., w_{\sigma(k)})$ due o più argomenti sono uguali e quindi il termine è nullo, per alternanza di f. Otteniamo cioè

$$\sum_{\sigma\in S_k} a_{1,\sigma(1)}...a_{k,\sigma(k)}f(w_{\sigma(1)}, ..., w_{\sigma(k)})$$

ove S_k è il gruppo simmetrico su k elementi. Ora, ogni permutazione $\sigma\in S_k$ si può ottenere come una sequenza di scambi fra coppie di elementi: quando scambiamo due argomenti nel termine $f(w_{\sigma(1)}, ..., w_{\sigma(k)})$ il segno cambia (per alternanza) e quindi una volta effettuata la permutazione, otteniamo un fattore $(-1)^{sgn(\sigma)}$ ove il segno di una permutazione è il numero di scambi che la compongono.

Insomma, trasformare il termine $f(w_{\sigma(1)}, ..., w_{\sigma(k)})$ in $f(w_1, ..., w_k)$ comporta unicamente l'apparizione di un segno $(-1)^{sgn(\sigma)}$, e quindi la somma precedente si trasforma in

$$f(u_1, ..., u_k) = \sum_{\sigma\in S_k} (-1)^{sgn(\sigma)} a_{1,\sigma(1)}...a_{k,\sigma(k)}f(w_1, ..., w_k)$$

che è uguale a

$$\det(A)f(w_1, ..., w_k)$$

QED

Il fatto che il determinante di A sia definito come

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_k} (-1)^{sgn(\sigma)} a_{1,\sigma(1)}...a_{k,\sigma(k)}$$

segue dal familiare sviluppo di Laplace, e costituisce un esercizio di calcolo combinatorio (nel farlo può essere utile esaminare i casi $k = 2$ e $k = 3$ separatamente...)

La comprensione del teorema precedente è cruciale per capire le forme alternanti. Abbiamo comunque bisogno di una versione più generale di questo teorema, la cui dimostrazione proveremo a lasciare per esercizio, non prima d'aver messo in grado il lettore di risolverlo, per via delle seguenti osservazioni.

Consideriamo una matrice A di dimensioni $k \times n$ e con $k \leq n$ ed un sottoinsieme S dell'insieme di interi $\{1, ..., n\}$ con k elementi. Di tali sottoinsiemi ve ne sono

$$\binom{n}{k}$$

come noto dal calcolo combinatorio. Se questi elementi sono $S = \{i_1, ..., i_k\}$ allora possiamo assumere che siano ordinati: $i_1 < ... < i_k$. Consideriamo una funzione

$$\sigma : \{1, ..., k\} \longrightarrow S$$

cioè un modo di associare ad un numero fra 1 e k un elemento di S e supponiamo che questa funzione sia iniettiva. Allora è biunivoca (perché?) e quindi definisce una permutazione di S.

5.6.9 Esempio *Se $n = 4$ e $k = 3$, e $S = \{1, 3, 4\}$, la permutazione σ definita da*

$$\sigma(1) = 4 \qquad \sigma(3) = 1 \qquad \sigma(4) = 3$$

ha segno +1.

Se chiamiamo $P(S)$ l'insieme delle permutazioni degli elementi di S (che è dire l'insieme delle biiezioni di S in sé, e se torniamo alla nostra matrice $A = ((a_{ij}))$, per ogni insieme S di cardinalità k possiamo considerare il minore $k \times k$ di A costituito dagli elementi a_{ij} tali che $j \in S$. Denotiamo con

$$\det_S(A)$$

il determinante di questo minore. Allora è

$$\det_S(A) = \sum_{\sigma \in P(S)} (-1)^{sgn(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} ... a_{k,\sigma(k)}$$

Ora siano $w_1, ..., w_n$ elementi in V, e per ognuno degli insiemi S definiamo

$$w_S = (w_{i_1}, ..., w_{i_k})$$

ove gli elementi di S sono tali che $i_1 < ... < i_k$. A questo punto, usando le notazioni introdotte, il lettore dovrebbe dimostrare il seguente

5.6.10 Teorema *Se V e W sono $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, e se*

$$f : V^k \longrightarrow W$$

è una mappa multilineare alternante, se $w_1, ..., w_n$ sono elementi di V e A è una matrice $k \times n$ e se

$$u_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} w_i\,, \qquad \dots \qquad u_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} w_i$$

allora

$$f(u_1, .., u_k) = \sum_S \det_S(A) f(w_S)$$

(Come suggerimento si osservi che la dimostrazione è simile a quella del teorema precedente, salvo in un punto nel quale bisogna spezzare la somma $\sum_\sigma$ come $\sum_S \sum_{\sigma \in P(S)}$).

Siamo ora in grado di dimostrare una proprietà universale dei prodotti esterni, analoga al teorema 5.6.1:

5.6.11 Teorema *Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{K}$ e se k è un intero tale che $1 \leq k \leq n$ allora esiste un unico spazio vettoriale Λ di dimensione finita su $\mathbb{K}$, ed una mappa multilineare alternante*

$$\lambda : V^k \longrightarrow \Lambda$$

tale che

(1) *Se W è uno spazio vettoriale e se $f : V^k \longrightarrow W$ è una mappa multilineare alternante, allora esiste un'unica mappa lineare $f_* : \Lambda \longrightarrow W$ tale che $f = f_* \circ \lambda$, i.e. che il seguente diagramma*

$$\begin{tikzcd} V^k \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "f"'] & & \Lambda \arrow[dl, "f_*"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

(2) *Se $(v_1, ..., v_n)$ è una base di V allora $\{\lambda(v_{i_1}, ..., v_{i_k})\}$ con $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$ è una base di W.*

DIMOSTRAZIONE: Procediamo in modo analogo al teorema 5.6.1, considerando per ogni sottoinsieme S di $\{1, ..., n\}$ di k elementi un simbolo λ_S, e prendendo lo spazio vettoriale generato da questi simboli su $\mathbb{K}$, che ha dimensione $\binom{n}{k}$, e che denotiamo Λ. Se ora $\{v_1, ..., v_n\}$ è una base di V, se $\{u_1, ..., u_k\}$ sono elementi di V e la matrice A è definita come

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$$

allora la mappa λ si definisce come:

$$\lambda(u_1, ..., u_k) := \sum_S \det_S(A) \lambda_S$$

Che si tratti di una mappa multilineare alternante segue dalle proprietà dei determinanti, ed è pure un fatto ovvio che

$$\lambda(v_{i_1}, ..., v_{i_k}) = \lambda_S$$

se $S = \{i_1, ..., i_k\}$ con $i_1 < ... < i_k$.

La dimostrazione della (1) si riduce alla semplice osservazione che se $f : V^k \longrightarrow W$ è multilineare alternante, la mappa

$$f_*(\lambda_S) := f(v_{i_1}, ..., v_{i_k})$$

è ben definita su una base di Λ e quindi si estende ad un'unica mappa lineare da Λ in W.

Per la dimostrazione della (2) basta notare che gli elementi $\{\lambda(v_{i_1}, ..., v_{i_k})\}$ generano Λ e sono esattamente $\binom{n}{k}$.

QED

Di nuovo possiamo dedurre l'unicità dello spazio Λ dalla sua proprietà universale, ed è evidente che la potenza esterna $\wedge^k(V)$ soddisfa questa proprietà: ne segue che abbiamo una naturale identificazione

$$\Lambda \cong \wedge^k(V)$$

che, a livello di basi, è

$$\lambda(v_{i_1}, ..., v_{i_k}) \longleftrightarrow v_{i_1} \wedge ... \wedge v_{i_k}$$

Osserviamo che il risultato precedente può riformularsi dicendo che lo spazio delle forme multilineari alternanti è isomorfo allo spazio duale dei tensori antisimmetrici:

$$Alt(V^k, \mathbb{K}) \cong (\wedge^k(V))^*$$

Inoltre, è possibile associare ad una mappa $f : V \longrightarrow W$ lineare la sua potenza esterna k-ma $\wedge^k f : \wedge^k V \longrightarrow \wedge^k W$ definita come

$$\wedge^k f(u_1, ..., u_k) = f(u_1) \wedge ... \wedge f(u_k)$$

In particolare, dato che

$$\dim \wedge^k(V) = \binom{\dim V}{k}$$

osserviamo che la massima potenza esterna ($k = n$) di V è unidimensionale: inoltre, dato che $v \wedge v = 0$, non possono esservi potenze esterne $(n+1)$-dimensionali o più, e quindi l'algebra esterna è finito dimensionale! Questa è una profonda differenza rispetto all'algebra simmetrica.

Dato che $\wedge^n(V) \cong \mathbb{K}$, una sua base è data da un qualsiasi scalare non nullo: una scelta naturale è proprio la funzione determinante, che si caratterizza con la condizione $\det(1) = 1$.

5.6.12 Proposizione *Se* $\dim V = n$ *e se* $f : V \longrightarrow V$ *è una mappa lineare, allora la mappa* $\wedge^n f : \wedge^n(V) \longrightarrow \wedge^n(V)$ *è semplicemente una mappa lineare di* $\mathbb{K}$ *in sè, cioè la moltiplicazione per uno scalare, e precisamente*

$$(\wedge^n f)(x) = \det(f)x$$

Si tratta di una riformulazione dello sviluppo di Laplace del determinante.

Per finire vogliamo osservare che un caso particolare di prodotto esterno è certo noto al lettore: si tratta del prodotto vettoriale. Ricordiamo infatti che se V ha dimensione 3, è definito il prodotto vettoriale di due suoi elementi:

$$[v, w] := \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}$$

se $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$. Ma si ha

$$[v, w] = v \wedge w$$

Infatti $\dim \wedge^2 V = \dim V = 3$ (*in questo caso e solo in questo caso* la dimensione di V coincide con quella della sua seconda potenza esterna), e dato che il prodotto vettoriale è una funzione bilineare alternante, per universalità si ha la formula precedente.

L'algebra $\mathbb{R}^3$ col prodotto $\wedge$ verifica l'identità di Jacobi

$$(v_1 \wedge v_2) \wedge v_3 + (v_3 \wedge v_1) \wedge v_2 + (v_2 \wedge v_3) \wedge v_1 = 0$$

cioè, ponendo

$$[v, w] = v \wedge w$$

$\mathbb{R}^3$ diviene un'algebra di Lie. Si tratta dell'algebra $\mathfrak{so}(3)$ associata al gruppo delle rotazioni del piano.

Parte II

Analisi Funzionale

Capitolo 6

SPAZI NORMATI ED OPERATORI LINEARI

I principali esempi di spazi vettoriali di dimensione infinita sono tutti spazi di funzioni: come abbiamo visto, questi spazi sono in genere anche spazi metrici, e spesso possiedono la proprietà di essere completi rispetto alla loro metrica: si può dare una teoria generale per gli spazi vettoriali che soddisfino queste proprietà, che generalizza profondamente quella degli spazi con prodotto scalare in dimensione finita. In questo capitolo gettiamo le fondamenta di questa teoria, e diamo numerosi esempi.

6.1 Spazi di Hilbert e di Banach

6.1.1 Definizione *Uno spazio vettoriale $\mathcal{H}$ sul campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi si dice* spazio pre-hilbertiano *se è data una funzione $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$, il cui valore scriveremo come (x, y), tale che, se $x, y, z \in \mathcal{H}$ e $a, b \in \mathbb{C}$:*

- $(x, y) = \overline{(y, x)}$
- $(ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z)$
- $x \neq 0 \implies (x, x) > 0$

La mappa $(-, -)$ si dice prodotto hilbertiano *in $\mathcal{H}$.*

Notiamo che la (3) ha senso, dato che $(x, x) = \overline{(x, x)}$ è un numero reale. In generale, se V e W sono spazi vettoriali complessi, una funzione $f : V \times W \longrightarrow \mathbb{C}$ che soddisfi le (1)–(2) si dice *funzione sesquilineare*: le (1)–(2) equivalgono alla

$$f(au + bv, cw + dz) = acf(u, w) + a\overline{d}f(u, z) + \overline{b}cf(v, w) + \overline{bd}f(v, z)$$

6.1.2 Esempio *I seguenti sono spazi pre-hilbertiani:*

- *Lo spazio vettoriale complesso* $\mathbb{C}^n$ *con il prodotto*

$$(z, z') := \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{z_i}$$

- *Lo spazio delle funzioni a quadrato sommabile* $L^2(\mathbb{R}, ds)$ *rispetto alla misura di Lebesgue sulla retta reale rispetto al prodotto*

$$(f, g) := \int_{\mathbb{R}} f(s)\overline{g(s)}ds$$

- *lo spazio* $l^2(\mathbb{N})$ *delle funzioni* $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ *non nulle solo in un numero finito di punti con il prodotto*

$$(\varphi, \psi) := \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)\overline{\psi(n)}$$

Se $x, y \in X$ (spazio pre-hilbertiano) e $a, b \in \mathbb{C}$ allora

$$(ax + by, ax + by) \geq 0$$

(l'eguaglianza vale, con a e b opportuni, se x e y sono linearmente dipendenti). Si osservi che

$$(ax + by, ax + by) = a\overline{a}(x, x) + a\overline{b}(y, x) + \overline{a}b(x, y) + b\overline{b}(y, y)$$

è la forma quadratica associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} (x, x) & (x, y) \\ (y, x) & (y, y) \end{pmatrix}$$

e quindi

$$0 \leq \det(A) = (x, x)(y, y) - \overline{(x, y)}(y, y)$$

(il segno $=$ vale se x e y sono linearmente dipendenti) cioè abbiamo la *diseguaglianza di Cauchy–Schwartz*:

$$(x, x)(y, y) \geq |(x, y)|^2$$

6.1.3 Definizione *La* norma *di* $x \in X$ *(spazio pre-hilbertiano) è il numero* $||x|| := \sqrt{(x, x)}$.

6.1.4 Proposizione *Se X è uno spazio pre-hilbertiano:*

- *Per ogni $x \in X$: $||x|| \geq 0$ e, se $x \neq 0$ allora $||x|| > 0$.*
- *Per ogni $x \in X$ e $a \in \mathbb{C}$: $||ax|| = |a| \cdot ||x||$.*
- *Per ogni $x, y \in X$:*
$$||x+y||^2 \leq (||x|| + ||y||)^2$$

Si tratta di riformulare le proprietà precedenti in termini della norma.

6.1.5 Definizione *Uno spazio vettoriale X sul campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ si dice* spazio normato *se è data una mappa $||-|| : X \longrightarrow \mathbb{C}$ (la* norma *di X) che verifichi le (1)–(3) della proposizione precedente.*

Ponendo $z = x + y$ nella (3) si ottiene

$$\big| ||x|| - ||z|| \big| \leq ||z - x||$$

Quindi se $(X, ||-||)$ è uno spazio normato possiamo renderlo uno spazio metrico con la distanza
$$d(x, y) = ||x - y||$$

Dunque possiamo considerare in uno spazio normato il concetto di *convergenza*: in particolare ha senso chiedersi se la convergenza relativa alla distanza d indotta dalla norma sia o meno completa.

6.1.6 Esempio *Lo spazio pre-hilbertiano X delle successioni $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ di numeri complessi a supporto finito (cioè $s_n \neq 0$ per un numero finito di n: possiamo dunque immaginarle come successioni di numeri complessi definitivamente nulle) rispetto al prodotto*
$$(s, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n \overline{t_n}$$
(la serie è in realtà una somma finita) non è completo, dato che la successione $\{s_n\}$ degli elementi di X dati da $s_n(m) = 0$ se $n \neq m$ e $1/2^n$ se $n = m$ è di Cauchy ma non ammette limite in X.

6.1.7 Definizione *Uno spazio normato completo si dice* spazio di Banach *ed uno spazio pre-hilbertiano completo si dice* hilbertiano *o* spazio di Hilbert.

6.1.8 Esempio

- *Lo spazio $\mathbb{C}^n$ è di Hilbert, come noto dall'Analisi elementare.*

- *Lo spazio* $l^2(\mathbb{N})$ *delle successioni* $\{a_n\}$ *di numeri complessi tali che*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 < \infty$$

  è uno spazio pre-hilbertiano rispetto al prodotto

$$(\{a_n\}, \{b_n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \overline{b_n}$$

  Dimostreremo fra breve che si tratta di uno spazio di Hilbert[1]*.*

- *Lo spazio* $l^p(\mathbb{N})$ *delle successioni* $\{a_n\}$ *di numeri complessi tali che*

$$||a||_p := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

  e lo spazio $l^\infty(\mathbb{N})$ *delle successioni complesse limitate con la norma*

$$||a||_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

  sono pure spazi normati: sempre fra breve dimostreremo che si tratta di spazi di Banach.

- *In generale, se* A *è un insieme qualsiasi possiamo definire* $l^p(A)$ *come l'insieme delle successioni generalizzate indicizzate da* A *di numeri complessi che verifichino le condizioni di finitezza precedenti: si tratterà sempre di spazi di Banach.*

Come noto, ogni spazio metrico (X, d) ammette un unico completamento $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ ed è dotato di una isometria $\Psi : X \longrightarrow \widetilde{X}$ la cui immagine sia densa in $\widetilde{X}$: applicando questa costruzione al caso di uno spazio normato (o pre-hilbertiano) si ottiene un unico spazio di Banach (o di Hilbert) che si dice *completamento* di X, con relativa isometria Ψ.

6.1.9 Proposizione *Uno spazio normato* X *è di Banach se e solo se ogni serie assolutamente convergente in* X *è convergente.*

DIMOSTRAZIONE: Per definizione la serie $\sum_n x_n$ è assolutamente convergente in X se la serie numerica $\sum_n ||x_n||$ è convergente.

[1]Non è difficile dimostrarlo "a mano", cfr. [20], pp. 24–25.

Ora, sia X uno spazio di Banach e sia la serie $\sum_n x_n$ assolutamente convergente; allora per

$$z_N := \sum_{n=1}^{N} x_n$$

si ha

$$||z_N - z_M|| = \Big|\Big| \sum_{n=N}^{M} x_n \Big|\Big| \leq \sum_{n=M}^{N} ||x_n||$$

da cui segue la convergenza della serie per il criterio di Cauchy.

Supponiamo invece che ogni serie assolutamente convergente in X sia convergente: vogliamo dimostrare che ogni successione $\{x_n\}$ di Cauchy sia convergente in X. Ma se poniamo $y_n = x_{m_n}$ ove la sottosuccessione $\{m_n\}$ venga scelta dalla definizione di successione di Cauchy:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m_n\ \forall i, j > m_n \quad ||x_i - x_j|| < \frac{1}{2^{n+1}}$$

allora la successione $\{y_n\}$ converge: infatti la serie

$$y - 1 + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + ...$$

converge (perché converge assolutamente).

QED

Possiamo ad esempio, usando questo criterio, dimostrare il teorema di Riesz–Fischer secondo il quale gli spazi L^p sono di Banach.

Ricordiamo che se $(X, \mathcal{B}, \mu)$ è uno spazio di misura completo lo spazio vettoriale $L^p(X, \mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ è l'insieme delle funzioni misurabili e tali che

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty$$

modulo la relazione che identifica due funzioni che coincidano quasi ovunque.

6.1.10 Teorema (Riesz–Fischer) *Rispetto alle norme*

$$||f||_p := \left(\int_X |f|^P d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

e

$$||f||_\infty := \text{esssup}\,|f|$$

$L^p(X, \mu)$ sono spazi di Banach.

DIMOSTRAZIONE: Il caso $p = \infty$ è elementare: si tratta di applicare la disuguaglianza triangolare per i moduli delle somme.

Sia quindi $1 \leq p < \infty$. Le diseguaglianze di Minkowski e di Hölder implicano che L^p è uno spazio normato rispetto a $||-||_p$. Basta dimostrarne la completezza. Sia dunque $\{f_n\}$ una successione assolutamente convergente in L^p:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||f_n||_p = M < \infty$$

e definiamo

$$g_n(x) := \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|$$

Per la diseguaglianza di Minkowski:

$$||g_m|| \leq \sum_{k=0}^{n} ||f_k|| \leq M$$

i.e.

$$\int (g_n)^p \leq M^p$$

Per ogni x la successione $\{g_n(x)\}$ è crescente (a valori in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) e quindi deve convergere ad un elemento $g(x) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. La funzione così definita g è misurabile e, dato che $g_n \geq 0$ si ha che

$$\int g^p \leq m^p$$

(per il Lemma di Fatou). Quindi g^p è integrabile (i.e. sta in L^1) e $g(x)$ è finita quasi ovunque.

Nei valori di x per i quali g è finita, la serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge assolutamente ad un numero reale $s(x)$. Ponendo $s(x) = 0$ per gli x tali che $g(x) = \infty$ abbiamo definito così una funzione s che è quasi ovunque limite delle somme parziali $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. È quindi misurabile e

$$|s_n(x)| \leq g(x) \Rightarrow |s(x)| \leq g(x)$$

Dunque $s \in L^p$ e

$$|s_n(x) - s(x)|^p \leq 2^p (g(x))^p$$

Ma $2^p g^p \in L^1$ e $|s_n(x) - s(x)| \longrightarrow 0$ per quasi ogni x sicché per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue:

$$\int |s_n - s|^p \longrightarrow 0$$

Dunque $||s_n - s||^p \longrightarrow 0$ i.e. $||s_n - s|| \longrightarrow 0$. La serie $\{f_n\}$ converge quindi in L^p che è quindi uno spazio di Banach.

QED

6.1.11 Esempio *La stessa tecnica, applicata allo spazio di misura $(A, \mathcal{P}(A), \#)$ con la misura che conta $\#$ consente di dimostrare che gli spazi $l^p(A)$ sono spazi di Banach.*

6.1.12 Esempio *L'insieme $C(X)$ delle funzioni continue a valori reali (o complessi) definite su uno spazio topologico compatto di Hausdorff X, è uno spazio di Banach rispetto alla norma:*

$$||f|| := \max_{x \in X} |f(x)|$$

Evidentemente si tratta di uno spazio normato, e la completezza segue dal fatto che la condizione $||f_n - f_m|| \longrightarrow 0$ implica la convergenza uniforme della successione $\{f_n\}$ che tende quindi ad una funzione continua, cioè ad un elemento di $C(X)$.

Infine osserviamo che ogni spazio vettoriale (reale o complesso) di dimensione finita è uno spazio di Banach:

6.1.13 Teorema (Tichonov) *Se X è uno spazio vettoriale di dimensione finita allora tutte le norme possibili su di esso lo rendono uno spazio di Banach e sono equivalenti.*

Dimostrazione: Possiamo fissare una base $(e_1, ..., e_n)$ di X, e le coordinate indotte da questa base:

$$\forall x \in X \exists x_1, ..., x_n \in \mathbb{R} \quad x = x_1 e_1 + .. + x_n e_n$$

stabiliscono un isomorfismo di spazi vettoriali $\iota : X \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$. Dimostriamo che questo isomorfismo è un omeomorfismo rispetto alle topologie indotte dalle norme. Per ogni $x \in X$:

$$||x|| = ||\sum_{i=1}^n x_i e_i|| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \ ||e_i|| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n ||e_i||^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = c||\iota(x)||$$

i.e.

$$||x - y|| \leq c||\iota(x) - \iota(y)||$$

ove c è una costante che non dipende né da x né da y.

Stabiliamo la disuguaglianza opposta: sulla sfera unitaria $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ consideriamo la funzione

$$f(\iota(x)) = f(x_1, ..., x_n) = ||x||$$

Evidentemente $f > 0$ perché $\sum x_i^2 = 1$ e e_i sono una base; la disuguaglianza

$$|f(x_1, ..., x_n) - f(y_1, ..., y_n)| = \big| ||x|| - ||y|| \big| \leq ||x - y|| \leq c||\iota(x) - \iota(y)||$$

mostra la continuità di f, che quindi, sul compatto $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ammette un minimo α, che deve ovviamente essere positivo. Quindi, se $i(x) \in S^{n-1}$ si ha che $f(\iota(x)) = ||x|| \geq \alpha$ e, per ogni $x \in X$:

$$f(\iota(x)) = ||\iota(x)|| \left|\left| \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i e_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}} \right|\right| \geq \alpha||\iota(x)||$$

Quindi la ι è un omeomorfismo.

QED

6.1.14 Corollario *Un sottospazio vettoriale di uno spazio normato di dimensione finita è chiuso.*

6.1.15 Corollario *Ogni spazio normato localmente compatto è di dimensione finita.*

DIMOSTRAZIONE: Se X è localmente compatto e U è un intorno dello zero a chiusura compatta e tale che, per ogni $|\alpha| < 1$ si abbia $\alpha U \subset U$, allora, possiamo ricoprire $\overline{U}$ con un numero finito di intorni ottenuti traslando U per degli elementi $x_1, ..., x_n \in X$:

$$\overline{U} \subset x_1 + \frac{1}{3}U \cup ... \cup x_n + \frac{1}{3}U$$

Allora, ogni elemento di X si ottiene come combinazione lineare degli $\{x_1, ..., x_n\}$. Scegliendo n minimo, questi elementi formano quindi una base di X.

QED

6.2 Somme e complementi ortogonali

Abbiamo visto in precedenza una caratterizzazione degli spazi di Banach fra gli spazi normati: un altro quesito che è naturale porsi è quando uno spazio di Banach sia di Hilbert: la risposta è data dalla seguente

6.2.1 Proposizione *Uno spazio normato* $(X, ||-||)$ *è uno spazio pre-hilbertiano rispetto ad un prodotto scalare* $(-)$ *se e solo se vale la seguente* identità di polarizzazione, *che definisce il prodotto* $(-)$*:*

$$\sum_{\varepsilon} \overline{\varepsilon}||x+\varepsilon y||^2 = 4(x,y)$$

ove ε *varia nell'insieme* $\{1,-1,i,-i\}$.

Dimostrazione: Si tratta di osservare che, nell'ovvia identità

$$||ax+by||^2 = |a|^2(x,x) + |b|^2(y,y) + 2\,\mathrm{Re}\,(\overline{a}b(x,y))$$

ponendo $a = 1$ e $b = \pm 1$ e sommando, si ottiene

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right)$$

(*identità del parallelogramma*). Moltiplicando per $\pm 1, \pm i$ e ripetendo il ragionamento per $b = \pm i$ si ottiene l'identità di polarizzazione.

QED

Se $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ sono spazi di pre-hilbertiani anche la loro somma diretta $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ lo è rispetto al prodotto

$$(x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2) := (x_1, y_1)_1 + (x_2, y_2)_2$$

Se $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ sono di Hilbert anche $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ lo è, dato che

$$\begin{aligned} ||x_n \oplus y_n - x_m \oplus y_m||^2 &= ||(x_n - x_m) \oplus (y_n - y_m)||^2 \\ &= \left|(x_n - x_m) + (y_n - y_m)\right|^2 \end{aligned}$$

In modo analogo la somma diretta di spazi di Banach è uno spazio di Banach con una delle norme

$$\begin{aligned} ||x \oplus y||_p &:= (||x||^p + ||y||^p)^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \le p \le \infty \\ ||x \oplus y||_\infty &:= \sup(||x||, ||y||) \end{aligned}$$

Tutte queste norme sono *equivalenti*, nel senso che inducono le medesime topologie).

Possiamo generalizzare questa costruzione nel modo seguente: sia A un insieme arbitrario di indici e $\{\mathcal{H}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia di spazi di Hilbert indicizzata da A. Allora[2]

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{\alpha \in A} \mathcal{H}_\alpha = \{x : A \longrightarrow \bigcup_\alpha \mathcal{H}_\alpha | x(\alpha) \in \mathcal{H}_\alpha \text{ e } \sum_{\alpha \in A} ||x(\alpha)||^2 < \infty\}$$

[2]Per definizione si ha $\sum_{\alpha \in A} ||x(\alpha)||^2 := \sup_{I \subset A} \sum_{i \in I} ||x(i)||^2$ ove gli insiemi I sono finiti.

è uno spazio di Hilbert. Le operazioni di somma e prodotto sono definite punto per punto: $(ax+by)(\alpha) = ax(\alpha)+by(\alpha)$ e l'identità del parallelogramma implica che rendono $\mathcal{H}$ uno spazio vettoriale. Il prodotto si definisce pure punto per punto:

$$(x, y) := \sum_{\alpha\in A}(x(\alpha), y(\alpha))$$

Questo ha senso, dato che $|(x, y)| \leq ||x||\,||y|| \leq \frac{1}{2}\left(||x||^2 + ||y||^2\right)$ e quindi

$$\sum_{\alpha\in A} |(x, y)| \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha\in A} ||x(\alpha)||^2 + ||y(\alpha)||^2\right)$$

col che (x, y) è definita da una somma assolutamente convergente. La completezza del prodotto segue osservando che, se[3] $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per $n, m > n_\varepsilon$ si abbia $||x_n - x_m||^2 < \varepsilon^2$ allora

$$\sum_{\alpha\in A} ||x_n(\alpha) - x_m(\alpha)||^2 < \varepsilon^2$$

e quindi, per ogni $\alpha\in A$: $||x_n(\alpha)-x_m(\alpha)||^2 < \varepsilon^2$. Dunque, fissato α la successione $\{x(\alpha)\}$ è di Cauchy in $\mathcal{H}_\alpha$ e, per completezza di $\mathcal{H}_\alpha$, converge ad un elemento $x(\alpha) \in \mathcal{H}_\alpha$. Allora

$$\sup_{I\subset A} \sum_{i\in I} ||x_n(i) - x_m(i)||^2 < \varepsilon^2$$

sicché

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 &< \lim_m \sup_{I\subset A} \sum_{i\in I} ||x_n(i) - x_m(i)||^2 = \sum_{\alpha\in A} \lim_m ||x_n(\alpha) - x_m(\alpha)||^2 \\ &= \sum_{\alpha\in A} ||x_n(\alpha) - x(\alpha)||^2 \leq \varepsilon^2\end{aligned}$$

Dunque la funzione $\alpha \longmapsto (x_n(\alpha) - x(\alpha))$ appartiene a $\mathcal{H}$: $x_n - x \in \mathcal{H}$, da cui $x \in \mathcal{H}$ (dato che $x_n \in \mathcal{H}$).

Infine[4]

$$||x_n - x||^2 = \sum_{\alpha\in A} ||x_n(\alpha) - x(\alpha)||^2 \leq \varepsilon^2$$

e quindi $x_n \longmapsto x$ appartiene a $\mathcal{H}$ che risulta per questo essere completo.

[3] Osserviamo che la cardinalità dell'insieme $\{\alpha|\ ||x(\alpha)|| \neq 0\}$ è numerabile, dato che $\{\alpha|\ ||x(\alpha)|| \neq 0\} = \bigcup_n A_n$ ove $A_n = \{\alpha|\ ||x(\alpha)|| > \frac{1}{n}\}$ sono ovviamente finiti.

[4] È un fatto generale che dalla $||x_n - x|| \longrightarrow 0$ seguano le $y + x_n \longrightarrow x + y$ e $||x_n|| \longrightarrow ||x||$.

Osserviamo che gli spazi $\mathcal{H}_\alpha$ si immergono isometricamente in $\mathcal{H}$: infatti se $x \in \mathcal{H}_\alpha$ e se, per $\alpha' \in A$, poniamo

$$\psi_\alpha(x)(\alpha') := \delta_{\alpha\alpha'} x$$

(delta di Kronecker) allora le $\psi_\alpha : \mathcal{H}_\alpha \longrightarrow \mathcal{H}$ sono isometrie. Naturalmente, per completezza di $\mathcal{H}$, i sottoinsiemi $\mathcal{H}_\alpha \subset \mathcal{H}$ sono chiusi.

Inoltre, se $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ i sottospazi $\psi_{\alpha_1}(\mathcal{H}_{\alpha_1})$ e $\psi_{\alpha_2}(\mathcal{H}_{\alpha_2})$ sono ortogonali fra loro.

Osserviamo che il sottospazio vettoriale di $\mathcal{H}$ generato dai sottospazi $\{\psi_\alpha(\mathcal{H}_\alpha)\}$ (cioè la somma $\sum \psi_\alpha(\mathcal{H}_\alpha)$ definita come insieme delle funzioni a supporto finito $: A \longrightarrow \bigcup_\alpha \psi_\alpha(\mathcal{H}_\alpha)$) è denso in $\mathcal{H}$. Infatti se $\varepsilon > 0$ allora esiste un sottoinsieme $A_\varepsilon \subset A$ finito e tale che[5]

$$\sum_{\alpha \in A \setminus A_\varepsilon} ||x(\alpha)||^2 < \varepsilon^2$$

Quindi, la

$$x_\varepsilon(\alpha) := \begin{cases} x(\alpha) & \text{se } \alpha \in A_\varepsilon \\ 0 & \text{se } \alpha \notin A_\varepsilon \end{cases}$$

è una funzione a supporto finito (dunque in $\sum \psi_\alpha(\mathcal{H}_\alpha)$) tale che

$$||x - x_\varepsilon||^2 < \varepsilon^2$$

Questo significa che $\overline{\sum \psi_\alpha(\mathcal{H}_\alpha)} = \mathcal{H}$.

Ad esempio, se per ogni $\alpha \in A$, si ha che $\mathcal{H}_\alpha = \mathbb{C}$ allora la somma diretta $\mathcal{H}$ è lo spazio

$$l^2(A) := \{f : A \longrightarrow \mathbb{C} | \sum |f(\alpha)|^2 < \infty\}$$

che dunque risulta essere uno spazio di Hilbert.

In modo perfettamente analogo si definisce la somma di spazi di Banach e si dimostra essere uno spazio di Banach.

6.2.2 Definizione *Se $S \subset \mathcal{H}$ è un sottoinsieme di uno spazio di Hilbert, il suo* ortogonale *è l'insieme*

$$S^\perp := \{y \in \mathcal{H} | \ \forall x \in S \ (y, x) = 0\}$$

Evidentemente, se $S \subset \mathcal{H}$ è M è il sottospazio vettoriale generato da S in $\mathcal{H}$ allora

$$S^\perp = M^\perp$$

[5]Si ricordi che $\sum_\alpha ||x(\alpha)||^2 = ||x||^2 < \infty$.

e possiamo dunque limitarci a considerare sottospazi vettoriali, nelle questioni di ortogonalità.

Si osservi inoltre che la diseguaglianza di Cauchy–Schwartz implica che, se x_n converge a x in $\mathcal{H}$ allora, per ogni $y \in \mathcal{H}$:

$$(y, x_n) \longrightarrow (y, x)$$

(questo significa semplicemente che il prodotto hilbertiano (x, y) è una funzione continua nelle due variabili x e y). Quindi

$$M^\perp = \overline{M}^\perp$$

e il sottospazio vettoriale $M^\perp$ risulta sempre essere chiuso.

I sottospazi chiusi di uno spazio di Hilbert sono interessanti e naturali da considerare, in virtù del seguente

6.2.3 Teorema (RIESZ) *La somma diretta*[6] *di un sottospazio $M \subset \mathcal{H}$ e del suo ortogonale $M^\perp$ esaurisce l'intero spazio di Hilbert: $M + M^\perp = \mathcal{H}$.*

DIMOSTRAZIONE: Basta ovviamente dimostrare che per ogni $x \in \mathcal{H}$ esista un $x_M \in M$ tale che $(x - x_M, M) = 0$; questo equivale a dimostrare che esiste una successione $\{x_n\}$ *di Cauchy* in M tale che[7] $d(x, x_n) \longrightarrow d(x, M) =: d$.Infatti, in questo caso, detto x_M il limite di $\{x_n\}$, (che esiste perché $\mathcal{H}$ è completo), si avrebbe $x - x_M \in M^\perp$ (dato che $d(x - x_M) = 0$ e M è chiuso).

Dimostriamo dunque che

- Se $x_n \longrightarrow x$ allora $x - x_M \in M^\perp$.
- $\{x_n\}$ è di Cauchy.

(1) L'ipotesi significa che $\lim ||x - x_n|| = d$ e quindi, se $y \in M$, $x_M + y \in M$, da cui $||x - (x_m + y)||^2 \geq d^2$, e

$$d^2 \leq ||(x - x_M) + y||^2 = ||y||^2 + 2\,\mathrm{Re}(y, x - x_M) + ||x - x_M||^2$$

Ma, per ogni $a \in \mathbb{C}$: $||ay||^2 + 2\,\mathrm{Re}(ay, x - x_M) \geq 0$ e quindi $\mathrm{Re}(y, x - x_M) = 0$ (per arbitrarietà di a). In modo analogo si vede che $\mathrm{Im}(y, x - x_M) = 0$, e quindi $(y, x - x_M) = 0$ per $y \in M$.

(2) Si ha che $||x_n - x_m||^2 = ||(x_n - x) - (x_m - x)||^2$ e quindi

$$||x_n - x_m||^2 + ||x_n + x_m - 2x||^2 = s||x - x_n||^2 + 2||x - x_m||^2$$

[6] Come spazi vettoriali e non di Hilbert.

[7] Ricordiamo che la distanza $d(x, M)$ di un punto da un insieme è definita come l'$\inf_{y \in M}\{d(x, y)\}$ e che un punto x che abbia distanza nulla da un insieme M appartiene a M se e solo se $M = \overline{M}$.

Ma $\{x_n\} \subset M$, quindi $\frac{x_n+x_m}{2} \in M$, i.e.

$$4d^2 \leq 4\left|\left|\frac{x_n + x_m}{2} - x\right|\right|^2 = ||x_n + x_m - 2x||^2$$

col che si ha

$$||x_n - x_m||^2 \leq 2(||x - x_n||^2 - d^2) + 2(||x - x_m||^2 - d^2)$$

e, dato che $d = \lim ||x - x_n||$:

$$||x_n - x_m||^2 \longrightarrow 0$$

QED

Osserviamo che la somma diretta nel teorema di Riesz risulta essere in realtà una somma di spazi di Hilbert: infatti se $x = x_M + x_{M^\perp}$ è ovvio che $(x_M, x_{M^\perp}) = 0$ e quindi che $||x||^2 = ||x_M||^2 + ||x_{M^\perp}||^2$ (che $M \cap M^\perp = \{0\}$ è ovvio).

Se M è un sottospazio vettoriale chiuso di $\mathcal{H}$, dato che per ogni $S \subset \mathcal{H}$: $S \subset S^{\perp\perp}$, si ha che $M \subset M^{\perp\perp}$; ma per il teorema di Riesz è $M \oplus M^\perp = \mathcal{H} = M^\perp \oplus M^{\perp\perp}$ e quindi $M = M^{\perp\perp}$. Rileviamo esplicitamente che, come conseguenza di questo fatto, se $S \subset \mathcal{H}$ allora

$$S^{\perp\perp} = \{\text{sottospazio di } \mathcal{H} \text{ generato da } S\}$$

6.3 Funzionali lineari

6.3.1 Definizione *Se X è uno spazio normato, un* funzionale lineare *è una mappa lineare $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ di spazi vettoriali. Se, come applicazione fra spazi topologici, f è continua, si dice* funzionale lineare continuo *e se, come applicazione fra spazi metrici, è limitata, si dice* funzionale lineare limitato.

Osserviamo che un funzionale lineare è limitato se, per definizione, esiste una costante L tale che

$$\forall x \in X \quad |f(x)| \leq L||x||$$

Ovviamente questo implica la continuità nel punto $0 \in X$ e, dato che la somma è una applicazione continua e ogni punto si scrive come somma di se stesso e dello zero, in tutto lo spazio. Quindi

6.3.2 Proposizione *Un funzionale lineare limitato è continuo.*

Ad esempio, in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, per $y \in \mathcal{H}$ fissato, il funzionale $f(x) := (y, x)$ è limitato; si tratta in un certo senso del caso più generale, come afferma il

6.3.3 Teorema di Rappresentazione (RIESZ) *Se $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ è un funzionale lineare limitato su uno spazio di Hilbert, allora esiste un unico elemento $x_f \in \mathcal{H}$ tale che*

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad f(x) = (x_f, x)$$

DIMOSTRAZIONE: f è continuo, essendo limitato, quindi l'insieme

$$\mathcal{N}_f := \{x \in \mathcal{H} \mid f(x) = 0\}$$

(il *nucleo* di f) è un sottospazio vettoriale *chiuso*. Possiamo supporre che sia $\mathcal{N}_f \neq \mathcal{H}$ (altrimenti il teorema è banalmente verificato con $x_f = 0$) e quindi

$$\mathcal{N}_f^\perp \neq 0$$

Se $x_0 \in \mathcal{N}_f^\perp$ possiamo supporre, a meno di normalizzare dividendo per uno scalare, che sia $f(x_0) = 1$. Ora sia

$$g(x) := (x_0, x)$$

Si tratta di un funzionale lineare limitato, tale che $\mathcal{N}_f \subset \mathcal{N}_g$ (ovvio!) e quindi f deve essere proporzionale[8] a g, dato che $\operatorname{codim} \mathcal{N}_f = 1$ per ogni funzionale lineare (evidentemente l'insieme degli zeri di un funzionale è un iperpiano di $\mathcal{H}$):

$$g(x) = (x_0, x) = (x_0, x_0) f(x)$$

cioè $f(x) = (x_f, x)$ se $x_f := \frac{x_0}{(x_0, x_0)}$.

QED

6.3.4 Corollario *Se f è un funzionale lineare, $||f|| = ||x_f||$.*

Come notevole applicazione di questo teorema diamo la dimostrazione di von Neumann[9] del teorema di Radon–Nikodym.

6.3.5 Definizione *Se μ e ν sono misure definite su uno spazio misurabile $(X, \mathcal{A})$ si dice che ν è* assolutamente continua *rispetto a μ se per ogni A tale che $\mu(A) = 0$ si ha che $\nu(A) = 0$. Si scrive in questo caso $\nu \ll \mu$.*

In caso di misure con segno, l'assoluta continuità si riferisce ai loro valori assoluti.

Ad esempio, se μ è una misura su $(X, \mathcal{A})$ e f una funzione misurabile non negativa su X, la misura

$$\nu(E) := \int_E f d\mu$$

(che è finita se e solo se f è integrabile) è assolutamente continua rispetto a μ. Il teorema di Radon–Nikodym fornisce delle condizioni per le quali ogni misura assolutamente continua è di questo tipo.

[8] Infatti $x = x - f(x)x_0 + f(x)x_0$ e $x - f(x)x_0 \in \mathcal{N}_f \subset \mathcal{N}_g$, i.e. $g(x) = f(x)g(x_0)$.

[9] *On Rings of Operators III* Ann. Math. 41 (1950) pp. 124–130.

6.3.6 Teorema (RADON–NIKODYM) *Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di misura σ-finito e $\nu \ll \mu$ allora esiste una funzione non negativa misurabile su X tale che, per ogni $E \in \mathcal{A}$:*

$$\nu(E) = \int_E f d\mu$$

La funzione f è unica μ-q.o.

DIMOSTRAZIONE: (von Neumann) Osserviamo che, assumendo il risultato vero nel caso di misure finite, segue facilmente il caso σ-finito: infatti decomponiamo $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ con $\mu A_i < \infty$ e $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ con $\nu B_i < \infty$ ove possiamo assumere che le successioni $\{A_i\}$ e $\{B_i\}$ siano formate da insiemi a due a due disgiunti. Dato che

$$X = \bigcup_{i,j} (A_i \cap B_j)$$

possiamo assumere che $X = \bigcup_i X_i$ con $\mu X_i, \nu X_i < \infty$. Ora definiamo le σ-algebre

$$\mathcal{A}_n := \{E \cap X_n\}_{E \in \mathcal{A}}$$

sugli insiemi X_n e le restrizioni μ_n, ν_n si μ e ν agli spazi misurabili $(X_n, \mathcal{A}_n)$. Supponendo vero il teorema nel caso finito, esistono le funzioni misurabili non negative $\{f_n\}$ tali che

$$\forall F \in \mathcal{A}_n \quad \nu(F) = \int_F f_n d\mu$$

Allora decomponendo un insieme $E \in \mathcal{A}$ come $E = \bigcup E_n$ ed $E_n \in \mathcal{B}_n$ definendo una funzione f in modo che $f|_{X_n} = f_n$ si ottiene un funzione non negativa e misurabile (l'unione delle funzioni $\{f_n\}$) tale che

$$\forall E \in \mathcal{A} \quad \nu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

Basta quindi dimostrare il teorema nel caso di misure finite.

Per prima cosa si osservi che, se μ e ν sono misure finite sullo spazio misurabile $(X, \mathcal{A})$ tali che $\lambda = \mu + \nu$, allora il funzionale

$$F(f) := \int f d\mu$$

è lineare e continuo sullo spazio di Hilbert $L^2(X, d\lambda)$. Infatti, se $f \in L^2(X, d\lambda)$, per la disuguaglianza di Schwartz:

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu \leq \int_X |f| d\lambda \leq \left(\int_X |f|^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\lambda(X)}$$

e $\lambda(X) < \infty$. Quindi $F(f) := \int_X f d\mu$ è lineare e continuo su $L^2(X,\lambda)$.

Ora, per il teorema di Riesz, esiste una $g \in L^2(X,\lambda)$ tale che $F(f) = (f,g) := \int_X fgd\lambda$; inoltre $0 \leq g \leq 1$: infatti, per $f = \chi_E$ (ove E sia misurabile con $\lambda E > 0$)

$$\mu E = \int_X \chi_E d\mu = \int_E g d\lambda$$

per cui (avendosi $0 \leq \mu \leq \lambda$):

$$0 \leq \frac{1}{\lambda E}\int_E g d\lambda = \frac{\mu E}{\lambda E} \leq 1$$

Dunque $g \in [0,1]$ λ-q.o. Possiamo allora scrivere

$$\nu E = \int_E (1-g) d\lambda$$

Osserviamo che, se $\nu \ll \mu$ allora $\lambda \ll \mu$ e $g \neq 0$ μ-q.o. In questo caso

$$\lambda E = \int_E g^{-1} d\mu$$

In effetti

$$\int_E g^{-1} d\mu = \int_X \chi_E g^{-1} d\mu = \int_X \chi_E g^{-1} g d\lambda = \int_E d\lambda = \lambda E$$

Infine, se $\nu \ll \mu$ allora $(1-g)g^{-1} \in L^1(X,\mu)$: infatti

$$\begin{aligned}\left|\int_X (1-g)g^{-1} d\mu\right| &\leq \int_X |1-g|\ |g|^{-1} d\mu \\ &\leq \left(\int_X |1-g|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X |g|^{-2} d\mu\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\end{aligned}$$

(si rammenti che $g \in L^2(\lambda)$ e che $\mu \leq \lambda$, quindi $g \in L^2(\mu)$). Si trova allora che

$$\begin{aligned}\nu E &= \int_E (1-g) d\lambda = \lambda E - \int_E g d\lambda = \int_E g^{-1} d\mu - \int_E 1 d\mu \\ &= \int_E (1-g)g^{-1} d\mu\end{aligned}$$

QED

La funzione f si dice *derivata di Radon–Nikodym* e si denota

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}$$

Il nome si giustifica esaminandone alcune proprietà elementari.

6.3.7 Proposizione *Se μ, ν e λ sono misure σ-finite allora:*

- *Se $\nu \ll \mu$ e f è misurabile non negativa:*
$$\int f d\nu = \int f \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$$

- $$\frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu}$$

- *Se $\nu \ll \mu \ll \lambda$ allora*
$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}$$

- *Se $\nu \ll \mu$ e $\mu \ll \nu$ allora*
$$\frac{d\nu}{d\mu} = \left(\frac{d\mu}{d\nu}\right)^{-1}$$

6.4 Operatori lineari

I funzionali lineari sono un caso particolare degli *operatori lineari*: è noto dall'Algebra Lineare che un operatore lineare fra due spazi vettoriali qualsiasi è una applicazione $A : X \longrightarrow Y$ tale che

$$A(ax + by) = aA(x) + bA(y)$$

Se gli spazi X e Y sono normati ha senso chiedersi se A è continuo o meno. Ovviamente, se A è continuo allora se $x_n \longrightarrow 0$ anche $A(x_n) \longrightarrow 0$.

6.4.1 Definizione *Un operatore lineare $A : X \longrightarrow Y$ fra spazi normati è* limitato *se esiste un $L \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\forall x \in X \quad ||Ax||_Y \leq L||x||_X$$

6.4.2 Teorema *Le tre seguenti condizioni sono equivalenti per un operatore $A : X \longrightarrow Y$ fra spazi normati:*

- *A è continuo.*
- *A è continuo nell'origine $0 \in X$.*
- *A è limitato.*

DIMOSTRAZIONE: (1) $\Rightarrow$ (2) è ovvio.

(3) $\Rightarrow$ (1) segue dal fatto che $||A(x-x_0)|| \leq L||x-x_0||$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Per ipotesi, se $x \in X$ è tale che $||x|| < \delta$ allora $||Ax|| < 1$ e quindi

$$||A\delta(||x||+\varepsilon)^{-1}x|| < 1$$

i.e. $||Ax|| < \delta^{-1}(||x||+\varepsilon) \Rightarrow ||Ax|| < \delta^{-1}||x||$.

QED

Lo spazio vettoriale[10]

$$\mathcal{B}(X,Y) := \{A : X \longrightarrow Y \,|\, A \text{ operatore lineare limitato}\}$$

è normato dalla

$$||A|| := \inf\{M \,|\, \forall x \in X \ ||Ax|| \leq L||x||\}$$

che può scriversi come

$$\begin{aligned} ||A|| :&= \sup\{||Ax|| \,|\, \forall x \in X \ ||x|| \leq 1\} = \sup\{||Ax|| \,|\, \forall x \in X \ ||x|| = 1\} \\ &= \sup\{||Ax|| \,|\, \forall x \in X \ ||x|| < 1\} \end{aligned}$$

Naturalmente se A è limitato lo è pure aA e

$$||aA|| = |a| \cdot ||A||$$

Inoltre

$$||(A+B)x|| \leq ||Ax|| + ||Bx||$$

da cui (per $||x|| = 1$)

$$||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$$

e

$$||A|| = 0 \Rightarrow A = 0$$

6.4.3 Teorema *Se Y è uno spazio di Banach, anche $\mathcal{B}(X,Y)$ è uno spazio di Banach.*

DIMOSTRAZIONE: Se $\{A_n\}$ è una successione di Cauchy in $\mathcal{B}(X,Y)$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che se $n, m > n_\varepsilon$ allora

$$||A_n - A_m|| < \varepsilon$$

[10] Ovviamente si pone $(aA+bB)(x) = aAx + bBx$.

i.e.

$$\forall x \in X \quad ||A_n(x) - A_m(x)|| < \varepsilon ||x||$$

Ma allora $\{A_n x\}$ è una successione di Cauchy in Y (per ogni x), che è uno spazio completo, quindi deve esistere un $y_x \in Y$ che ne sia il limite.

Evidentemente la mappa $x \longmapsto y_x$ è lineare e quindi possiamo scrivere

$$y = Ax$$

ove A è un operatore lineare $A : X \longrightarrow Y$.

Mostriamo che A è continuo: per continuità della norma in uno spazio normato si ha che, per $n > n_\varepsilon$:

$$\varepsilon ||x|| \geq \lim_m ||A_n x - A_m x|| = ||A_n x - |x|| = ||(A_n - A)x||$$

Dunque $A_n - A$ è limitato e $||A_n - A|| \leq \varepsilon$, i.e

$$A = A_n - (A_n - A) \in \mathcal{B}(X, Y)$$

e si ha $||A_n - A|| < \varepsilon$, cioè $\lim_n A_n = A$.

QED

Il seguente risultato spiega perché nel teorema precedente non interviene la completezza dello spazio X:

6.4.4 Teorema *Se X è uno spazio normato e $\widetilde{X}$ il suo completamento (rispetto alla distanza indotta dalla norma di X) allora per ogni $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ esiste $\widetilde{A} \in \mathcal{B}(\widetilde{X}, Y)$ tale che $\widetilde{A}|_X = A$ e $||\widetilde{A}|| = ||A||$. In altri termini, la mappa*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\widetilde{X}, Y) &\longmapsto \mathcal{B}(X, Y) \\ \widetilde{A} &\longmapsto \widetilde{A}|_X \end{aligned}$$

è un operatore lineare isometrico e suriettivo.

Dimostrazione: Consideriamo la mappa $A \longmapsto \widetilde{A}$: che sia lineare è ovvio. Dimostriamo che $||\widetilde{A}|| = ||A||$. Se $x \in \widetilde{X}$ allora esiste una successione $\{x_n\} \subset X$ che converge ad X e quindi

$$||\widetilde{A}x|| = \lim ||\widetilde{A}x_n|| = \lim ||Ax_n|| \leq ||A|| \; ||x||$$

(per continuità di $|| - ||$, $\widetilde{A}$). Cioè $||\widetilde{A}|| \leq ||A||$.

Ma $\widetilde{A}$ estende A e quindi $||A|| \leq ||\widetilde{A}||$ (per definizione di estremo superiore!) dunque $||\widetilde{A}|| = ||A||$.

Dimostriamo infine la suriettività: sia $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ allora per $x \in \widetilde{X}$ e per una successione di Cauchy $\{x_n\}$ in X che converga a x in $\widetilde{X}$ la successione $\{Ax_x\}$ è di Cauchy in Y, che è completo, dunque converge ad un elemento $y_x \in Y$. La mappa $x \longmapsto y_x$ è manifestamente lineare e quindi possiamo scrivere

$$y = Ax$$

in modo che

$$||y|| \leq ||A|| \, ||\lim x_n|| = ||A|| \, ||x||$$

Cioè A è la restrizione a X di un $\widetilde{A} \in \mathcal{B}(\widetilde{X}, Y)$.

QED

Due casi particolari ma notevoli si hanno per $Y = \mathbb{C}$ ovvero per Y e X ambedue spazi di Banach.

6.4.5 Definizione *Il* duale topologico *di uno spazio normato X è lo spazio di Banach $X^* := \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$.*

La norma in X^* è definita come

$$||f|| = \sup_{||x||=1} \{|f(x)|\}$$

Osserviamo esplicitamente che, nel caso di spazi di Hilbert, il teorema di Riesz implica che

$$\mathcal{H} \text{ spazio di Hilbert } \Rightarrow \mathcal{H}^* \text{ spazio di Hilbert e } \mathcal{H}^* \cong \overline{\mathcal{H}}$$

In particolare uno spazio di Hilbert è *riflessivo*, cioè è canonicamente isomorfo al suo biduale

$$\mathcal{H} \cong \mathcal{H}^{**}$$

In generale, lo spazio normato $X^{**} = \mathcal{B}(\mathcal{B}(X, \mathbb{C}), \mathbb{C})$ è sempre di Banach e l'immersione naturale (che ha luogo per X spazio vettoriale qualsiasi)

$$\begin{aligned} X &\hookrightarrow X^{**} \\ x &\longmapsto (f \longmapsto f(x)) \end{aligned}$$

è ovviamente una isometria.

In vista del prossimo esempio enunciamo il[11]

[11] Non dimostreremo questo teorema, perché in seguito ne daremo una versione più generale, dovuta a Markov, che caratterizza i funzionali lineari e continui su $C(X)$ ove X è un qualsiasi spazio di Hausdorff compatto.

6.4.6 Teorema (Riesz) *Un elemento $F \in C([0,1])^*$ è sempre della forma*

$$F(f) = \int_0^1 f(t)dg(t)$$

ove g è una funzione a variazione limitata (integrale di Stieltjes).

6.4.7 Esempio *Lo spazio di Banach $C([0,1])$ delle funzioni continue a valori reali sull'intervallo compatto [0,1] non è riflessivo. Infatti, supponiamo per assurdo che lo sia: allora ogni funzionale lineare definito sullo spazio V delle funzioni a variazione limitata deve essere della forma*

$$\forall F \in C[0,1]^* \quad \varphi_f(F) = F(f)$$

ove $f \in C[0,1]$. Ma usando il teorema di Riesz otteniamo

$$\varphi_f(F) = F(f) = \int_0^1 f(t)dg(t)$$

Consideriamo allora

$$\psi(F) := g(t_0 + 0) - g(t_0 - 0)$$

Si tratta di un funzionale additivo e

$$|\psi(F)| = |g(t_0 + 0) - g(t_0 - 0)| \leq V_0^1(g)$$

Quindi $\psi(F)$ è limitato e di norma ≥ 1. Evidentemente non è il funzionale nullo: basti calcolarlo sulla

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t \leq t_0 \\ 1 & \text{se } t_0 < t \leq 1 \end{cases}$$

Di nuovo per il teorema di Riesz, deve esistere una $f_0 \in C[0,1]$ tale che

$$\psi(f) = \varphi_{f_0}(f) = \int_0^1 f_0(t)dg(t)$$

Se ora consideriamo la funzione

$$F_0(t) = \int_0^t f_0(\tau)d\tau$$

dato che è continua si ha $\varphi_{f_0}(F_0) = 0$. Ma da $\psi(F) \neq 0$ segue $f_0 \neq 0$ e

$$\Phi_{f_0}(F_0) = \int_0^1 f_0(t)df_0(t) = \int_0^1 f_0^2(t)dt > 0$$

Questo assurdo dimostra che non ogni funzionale su $C[0,1]^*$ è della forma Φ_F e quindi che $C[0,1]$ non è riflessivo.

Esempi di spazi riflessivi sono gli $L^p(X, \mu)$ per $1 < p < \infty$. Di nuovo il risultato fondamentale è dovuto a Riesz:

6.4.8 Teorema (RIESZ) *Se F è un funzionale lineare continuo su $L^p(X,\mu)$ con $1\le p<\infty$ e μ misura σ-finita, allora esiste un unico $g\in L^q(X,\mu)$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ tale che*

$$F(f)=\int_X fgd\mu$$

e tale che $||F||=||g||_q$.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo prima il caso di misure finite. Allora ogni funzione misurabile limitata sta in L^p e possiamo definire una funzione definita sui sottoinsiemi misurabili di X come

$$\nu E:=F(\chi_E)$$

Se E è unione numerabile degli insiemi misurabili e disgiunti $\{E_n\}$, poniamo $\alpha_n=\operatorname{sgn}F(\chi_E)$ e $f=\sum\alpha_n\chi_{E_n}$. Allora, dato che F è limitato:

$$\sum_{n=1}^\infty|\nu E_n|=F(f)<\infty$$

e

$$\sum_{n=1}^\infty\nu E_n=F(\chi_E)=\nu E$$

Quindi ν è una misura con segno che, per definizione, è assolutamente continua rispetto a μ: allora per il teorema di Radon–Nikodym, esiste una funzione misurabile g tale che, per ogni insieme misurabile, E si abbia

$$\nu E=\int_E gd\mu$$

Ma ν è finita e quindi g integrabile.

Ora dimostriamo che g soddisfa la relazione dell'enunciato. Prima verifichiamolo sulle funzioni semplici: se φ è semplice, per linearità si ha

$$F(\varphi)=\int_X\varphi gd\mu$$

Ma il $|F(\varphi)|\le||F||\ ||\varphi||_p$ e, se $\{\psi_n\}$ è una successione crescente di funzioni semplici non negative che tende a $|g|^q$, per $\varphi_n=\psi_n^{1/p}\operatorname{sgn}g$ si ha

$$\begin{aligned}\int\psi_n\le\int\varphi_n g&\le||F||\ ||\varphi_n||_p\\&\le||F||\left(\int\psi_n\right)^{1/p}\end{aligned}$$

i.e. $\int \psi_n \leq ||F||^q$ e, per il teorema della convergenza monotona:

$$\int |g|^q d\mu \leq ||F||^q$$

e quindi $g \in L^q$.

Ora se G è un funzionale lineare limitato che si annulla sul sottospazio delle funzioni semplici, per densità di queste in L^P, deve aversi $F = G$, i.e. per ogni $f \in L^p$:

$$F(f) = \int_X fg d\mu$$

Che sia $||F|| = ||G|| = ||g||_q$ è ovvio.

Passiamo ora al caso σ-finito: sia $\{X_n\}$ una successione crescente di spazi misurabili di misura finita la cui unione sia X. Per il risultato nel caso di misura finita, per ogni n esiste una funzione $g_n \in L^q$ che si annulla fuori da X_n e tale che

$$\forall f \in L^p(X_n) \quad F(f) = \int_X f g_n d\mu$$

Inoltre, $||g_n||_q \leq ||F||$ e dato che ogni g_n con questa proprietà è unica su X_n (a meno di insiemi di misura nulla) possiamo assumere che su X_n sia $g_n = g_{n+1} = ...$ (essendo $X_n \subset X_{n+1}$).

Così possiamo porre $g(x) = g_n(x)$ se $x \in X_n$ ed ottenere una funzione misurabile ben definita tale che $\{|g_n\}$ tenda a $|g|$. Quindi per il teorema ella convergenza monotona:

$$\int |g|^q d\mu = \lim \int |g_n|^q d\mu \leq ||F||^q$$

i.e. $g \in L^q$. Infine, da $f \in L^p$ e f_n è definita essere uguale a f su X_n e zero fuori da X_n allora $f_n \longrightarrow f$ in L^p, e dato che $|fg|$ è integrabile e $|f_n g| \leq |fg|$ per il teorema della convergenza dominata:

$$\int fg d\mu = \lim \int f_n g d\mu = \lim \int f_n g_n d\mu = \lim F(f_n) = F(f)$$

QED

Questo dimostra la riflessività di $L^p(X, \mu)$ per $1 < p < \infty$: nel caso $p = 1$ possiamo dire che $(L^1(x, \mu)^* = L^\infty(X, \mu)$ ma non abbiamo la riflessività: lo dimostreremo nel prossimo paragrafo dopo aver discusso il teorema di Hahn–Banach.

Osserviamo inoltre che la riflessività degli L^p implica che siano spazi di Banach, dato che li presenta come duali di spazi normati.

Nei casi generali, sui funzionali lineari, partendo solo dalla definizione, sappiamo molto poco: in realtà non è chiara nemmeno la loro esistenza, in uno spazio normato qualsiasi. Un principio fondamentale che è indispensabile al loro studio è il teorema di Hahn–Banach, sul quale faremo una digressione nel prossimo paragrafo.

6.5 I tre principi di Banach

Trattando con spazi di dimensione infinita, seppure normati, molti fatti che, in dimensione finita sono evidenti o facilmente verificabili usando le coordinate, risultano ardui da dimostrare e talvolta cessano di essere validi. Per procedere nella teoria, classicamente si enunciano tre principi, dovuti a S. Banach, che costituiscono gli strumenti più indispensabili per uno studio più approfondito degli spazi di Banach.

Il primo di questi principi ha validità estremamente generale, e per enunciarlo ci occorre una definizione, peraltro interessante di per sé.

6.5.1 Definizione *Una* seminorma *su uno spazio vettoriale reale X è una funzione $p : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tale che*

- $\forall x, y \in X \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.
- $\forall x \in X\ \forall a \geq 0 \quad p(ax) = ap(x)$.

Osserviamo che la (2) implica che $p(0) = 0$.

Ad esempio, ogni norma $|| - ||$ su uno spazio vettoriale è una seminorma. Precisamente, una seminorma p è una norma se e solo se per ogni $x \in X \setminus (0)$ $p(x)$ è un numero reale non nullo.

6.5.2 Esempio *Se B è un sottoinsieme di X, il suo* funzionale di Minkowski *è la seminorma*

$$p_B(x) := \inf_{\substack{a>0 \\ x\in aB}} a$$

(se $x \notin aB$ poniamo $p_B(x) := \infty$).

6.5.3 Lemma *Se B è un insieme convesso ed equilibrato*[12]*, allora p_B è una seminorma, e viceversa, se p è una seminorma, l'insieme $B_p := \{x \in X \mid p(x) \leq 1\}$ è convesso ed equilibrato.*

[12] Cioè per ogni $a \in \mathbb{R}$ con $|a| \leq 1$ si ha che se $x \in U$ anche $ax \in U$.

DIMOSTRAZIONE: La (2) nella definizione di seminorma è ovviamente verificata. Resta solo da dimostrare la (1): per questo useremo la convessità.

Siano $x, y \in X$; se $p_B(x)$ o $p_B(y)$ sono ∞ non c'è nulla da dimostrare. Se $p_B(x) = 0$ allora per ogni $a > 1$ $ax \in B$ e quindi se $y \in B$ allora

$$\forall \varepsilon \in (0,1) \quad (1-\varepsilon)y + x(1-\varepsilon)y + \varepsilon\frac{y}{\varepsilon} \in B$$

e dunque la $p_B(y) < 1$ implica che $p_B((1-\varepsilon)y + x) \leq 1$ e quindi la (1).

Resta solo il caso in cui sia $p_B(x)$ che $p_B(y)$ sono diversi da zero. Allora prendiamo gli elementi di X:

$$x_\varepsilon := \frac{1-\varepsilon}{p_B(x)}x \quad \text{e} \quad y_\varepsilon := \frac{1-\varepsilon}{p_B(y)}$$

Per definizione di p_b si ha che $x_\varepsilon, y_\varepsilon \in B$ se $\varepsilon > 0$. Ma B è convesso e quindi

$$\forall t \in [0,1] \quad tx_\varepsilon + (1-t)y_\varepsilon \in B$$

Per $t = \frac{p_B(x)}{p_B(x)+p_B(y)}$ si ha

$$\frac{1-\varepsilon}{p_B(x) + p_b(y)}(x+y) \in B$$

Quindi

$$p_B(x+y) \leq \frac{p_B(x) + p_B(y)}{1-\varepsilon}$$

per $\varepsilon > 0$, da cui segue la (1).

Così abbiamo dimostrato la prima asserzione; il viceversa è ovvio.

QED

6.5.4 Teorema (HAHN–BANACH) *Se p è una seminorma su uno spazio vettoriale reale X e f un funzionale lineare definito su un sottospazio S di X tale che*

$$\forall s \in S \quad f(s) \leq p(s)$$

allora esiste un funzionale lineare $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

- $\forall x \in X \quad F(x) \leq p(x)$.
- $\forall s \in S \quad F(s) = f(s)$.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo l'insieme $\mathcal{F}$ dei funzionali lineari g definiti su un sottospazio di X e tali che, per ogni punto x ove g sia definito, si abbia $g(x) \leq p(x)$. L'insieme $\mathcal{F}$ è parzialmente ordinato dalla relazione

$$g < g' \iff g' \text{ estende } g$$

i.e. se e solo se il dominio di definizione di g' contiene quello di g e sul dominio di definizione di g si abbia $g = g'$.

Osserviamo intanto che $\mathcal{F} \neq \emptyset$ dato che certamente $f \in \mathcal{F}$. Inoltre l'insieme ordinato $(\mathcal{F}, <)$ soddisfa alle ipotesi del lemma di Zorn, dato che se $\{f_\alpha\}$ è un sottoinsieme totalmente ordinato di $\mathcal{F}$, la funzione $\bigcup_\alpha f_\alpha$ (che ristretta al dominio si f_α coincide per definizione con f_α per ogni α) è evidentemente un confine superiore per l'insieme $\{f_\alpha\}$.

Quindi l'insieme $\mathcal{F}$ ha un massimale F. Sia L il sottoinsieme di X sul quale F è definito. Per dimostrare il teorema basta dunque far vedere che F è definito per su tutto X, i.e. che $L = X$. Supponiamo allora che esista un $x \in X \setminus L$. Dimostreremo allora che, sullo spazio vettoriale $L \oplus x\mathbb{R}$, è possibile costruire una estensione del funzionale F contraddicendone così la massimalità. Una tale estensione F' di F dovrebbe soddisfare l'equazione

$$F'(l + ax) := F(l) + aF(x)$$

Dunque per determinarlo basta dire quanto vale sull'elemento x.

Per $l, l' \in L$ abbiamo:

$$F(l) + F(l') = f(l + l') \leq p(l + l') \leq p(l - x) + p(x - l')$$

Dunque

$$-p(l - x) + F(l) \leq p(l' + x) - F(l')$$

sicché

$$\sup_{l \in L} (-p(l - x) + F(l)) \leq \inf_{l \in L} (p(l + x) - F(l))$$

Definiamo allora $F'(x) = a$ ove a è un numero reale tale che

$$\sup_{l \in L} (-p(l - x) + F(l)) \leq a \leq \inf_{l \in L} (p(l + x) - F(l))$$

Dobbiamo a questo punto solo dimostrare che, se $b \in \mathbb{R}$

$$F'(l + bx) = ba + F(l) \leq p(l + bx)$$

Ma, per $b > 0$:

$$\begin{aligned} ab + F(l) &= b(a + F(l/b)) \leq b(((p(l/b + x) - F(l/b)) + F(l/b) \\ &= bp(l/b + x) = p(l + bx) \end{aligned}$$

mentre per $b = -c < 0$:

$$\begin{aligned} -ac + F(l) &= c(-a + F(l/c)) \le c((p(l/c - x) - F(l/c)) + F(l/c)) \\ &= cp(l/c - x) = p(l - cx) \end{aligned}$$

e quindi $F'(l + ax) \le p(l + ax)$, contro la massimalità di F.

QED

Questo risultato è estremamente potente: ad esempio ci dice che ogni spazio normato ha “abbastanza funzionali lineari per separare i suoi punti”:

6.5.5 Corollario *Se $x, y \in X$ sono punti distinti allora esiste un funzionale f tale che $f(x) \neq f(y)$.*

DIMOSTRAZIONE: Infatti, dato che $x \neq y$, esiste un intorno U dello zero in X che non contiene $x - y$. Possiamo supporre che questo intorno sia convesso ed equilibrato e quindi, per il lemma, il suo funzionale di Minkowski p_U è una seminorma. Ora applichiamo il teorema di Hahn–Banach al funzionale f definito sul sottospazio $(x - y)\mathbb{R}$ come $f(x - y) = 1$. Allora esiste un funzionale F su X tale che $f(x) - f(y) = 1$ e $|f(x)| \le p_U(x)$.

QED

6.5.6 Corollario *Se $x \in X$ spazio normato allora esiste un funzionale lineare f su X tale che*

$$f(x) = ||f||\ ||x||$$

DIMOSTRAZIONE: Definiamo su $x\mathbb{R}$ il funzionale $f(cx) = c||x||$. Per il teorema di Hahn–Banach (applicato alla seminorma $p = ||-||$) esiste una estensione di f a X in modo che $f(y) \le ||y||$. Ma si ha pure $f(-y) \le ||y||$ i.e. $||f|| \le 1$. Inoltre $f(x) = ||x|| \le ||f||\ ||x||$ e quindi $||f|| = 1$ e $f(x) = ||f||\ ||x||$.

QED

6.5.7 Esempio *Possiamo ora dimostrare quanto avevamo promesso in precedenza parlando della dualità negli spazi $L^p[0,1]$, e cioè che il duale di $L^\infty[0,1]$ non è isomorfo a $L^1[0,1]$; in particolare non possiamo rappresentare, come avviene nel caso $1 < p < \infty$, un funzionale lineare su L^∞ per mezzo di elementi di L^1: l'idea è che le funzioni continue $C[0,1]$ sono un sottospazio chiuso di $L^\infty[0,1]$ e che se f è il funzionale lineare su $C[0,1]$ che al punto $x \in C[0,1]$ assegna il numero $x(0)$, questo funzionale ha norma 1 e possiamo estenderlo ad un funzionale limitato F su tutto $L^\infty[0,1]$. Ma non esiste alcun $y \in L^1[0,1]$ tale che*

$$\forall x \in C[0,1] \quad F(x) = \int_0^1 xydt$$

Infatti se $\{x_n\}$ *è una successione in* $C[0,1]$ *di funzioni limitate da 1 e tali che* $x_n(o) = 1$ *e per ogni* $t \neq 0$ $x_n(t) \longrightarrow 0$*, allora per ogni* $y \in L^1[0,1]$ *si ha che*

$$\int_0^1 x_n y \longrightarrow 0$$

mentre $F(x_n) \longrightarrow 1$.

Tornando al concetto generale di riflessività, è semplice ora dimostrare come l'immersione $j : X \longrightarrow X^{**}$ che all'elemento x associa il funzionale su X^*: $f \longmapsto f(x)$ sia in realtà una isometria:

$$||j(x)|| = \sup_{||f||=1} |j(x)(f)| \geq ||x|| \geq ||j(x)||$$

Osserviamo, a proposito del concetti di riflessività di uno spazio normato X, che X può essere isometrico con X^{**} senza essere tuttavia riflessivo, cioè senza che la mappa canonica $j : X \longrightarrow X^{**}$ sia un isomorfismo isometrico.

Concludiamo la discussione del teorema di Hahn–Banach osservando che ne esiste una versione per spazi vettoriali complessi, che poggia su quella reale: in questo caso una seminorma è una funzione $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

- $\forall x, y \in X \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.
- $\forall x \in X\ \forall a \in \mathbb{C} \quad p(ax) = |a|p(x)$.

6.5.8 Teorema (HAHN–BANACH COMPLESSO) *Se* p *è una seminorma su uno spazio vettoriale complesso* X *e* f *un funzionale lineare definito su un sottospazio* S *di* X *tale che*

$$\forall s \in S \quad |f(s)| \leq p(s)$$

allora esiste un funzionale lineare $F : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *tale che*

- $\forall x \in X \quad |F(x)| \leq p(x)$.
- $\forall s \in S \quad F(s) = f(s)$.

DIMOSTRAZIONE: Vogliamo usare il teorema di Hahn–Banach reale, e possiamo farlo osservando che uno spazio vettoriale complesso è anche uno spazio vettoriale reale, nel quale semplicemente si ignora la moltiplicazione per scalari complessi. Dato che anche $\mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale reale, il funzionale $F : X \longrightarrow \mathbb{C}$ può vedersi come una applicazione lineare fra spazi vettoriali reali. Osserviamo che, viceversa, una applicazione $\mathbb{R}$-lineare $F : X \longrightarrow \mathbb{C}$ è anche un funzionale lineare (complesso) se e solo se per ogni $x \in X$ $F(ix) = iF(x)$.

Ora, il funzionale f definito su S come nelle ipotesi del teorema, dà luogo a due funzionali reali g e h su S, semplicemente ponendo

$$f(x) = g(x) + ih(x)$$

Ma allora, per ogni $s \in S$, $g(s) \leq |f(s)| \leq p(s)$ e così possiamo estendere g ad un funzionale $G : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $G(x) \leq p(x)$. Poniamo

$$F(x) := G(x) - iG(ix)$$

Evidentemente $F(s) = f(s)$ per ogni $s \in S$, e dato che

$$F(ix) = G(ix) - iG(i^2x) = i(G(x) - iG(ix)) = iF(x)$$

F è un funzionale lineare complesso su X.

Infine scegliamo, per ogni $x \in X$, un numero complesso z_x tale che $|z_x| = 1$ e $z_x F(x) = |F(x)$. Allora

$$|F(x)| = z_x F(x) = F(z_x x) = G(z_x x) \leq p(z_x x) = p(x)$$

il che dimostra completamente il teorema.

QED

Il secondo principio che vogliamo esporre vale negli spazi di Banach, ed è il cosiddetto *teorema del grafo chiuso*; per dimostrarlo avremo bisogno di qualche preliminare. Intanto ricordiamo che, in uno spazio normato, la *palla* di centro $x \in X$ e raggio $r \in \mathbb{R}$ è il sottospazio

$$B(r, x) = B_r(x) := \{y \in X \mid ||y - x|| < r\}$$

La palla $B_1(0)$ si dice *palla unitaria* di X.

6.5.9 Lemma *Se $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ è un operatore lineare continuo e suriettivo fra gli spazi di Banach X e Y, allora l'immagine di A della palla unitaria di X contiene una palla di centro l'origine di Y.*

Dimostrazione: Siano

$$S_n := \{x \mid ||x|| < \frac{1}{2^n}\}$$

Dato che A è suriettivo, e che, come spazio metrico, $X = \bigcup_{k\geq 1} kS_1$, si ha che

$$Y = \bigcup_{k\geq 1} kA(S_1)$$

Ora usiamo il fatto che lo spazio completo Y non è di prima categoria, e quindi che $A(S_1)$ non può essere mai denso, sicché $\overline{A(S_1)}$ deve contenere qualche palla, ad esempio la

$$B_\eta(z) = \{y \,|\, ||y - z|| < \eta\}$$

Quindi $\overline{A(S_1)} - z$ deve contenere la palla $B_\eta(0)$. Ma

$$\overline{A(S_1)} - z \subset \overline{A(S_1)} - \overline{A(S_1)} \subset 2\overline{A(S_1)} = \overline{A(S_0)}$$

e quindi $\overline{A(S_0)}$ contiene una palla di centro l'origine e raggio η. Ma A è lineare, sicché $\overline{A(S_n)}$ contiene una palla di centro 0 e raggio $\eta/2^n$.

Ora dimostriamo che $A(S_0)$ contiene una palla di centro l'origine e raggio $\eta/2$: sia $y \in Y$ con $||y|| < \eta/2$. Dato che $y \in \overline{A(S_1)}$ possiamo scegliere $x_1 \in S_1$ tale che

$$||y - A(x_1)|| < \frac{\eta}{4}$$

e, proseguendo, un $x_2 \in S_2$ tale che

$$||y - A(x_1) - A(x_2)|| < \frac{\eta}{8}$$

è così via (usando l'assioma di scelta) per ogni $n \in \mathbb{N}$; il generico $x_n \in S_n$ è tale che

$$\Big|\Big|y - \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\Big|\Big| < \frac{\eta}{2^{n+1}}$$

Ma $||x_n|| < 1/2^n$ e quindi la serie $\sum_k x_k$ converge assolutamente[13] ad un elemento $x \in S_0$. Inoltre

$$Ax = A\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} A(x_k) = y$$

da cui $y \in A(S_0)$ e quindi $B_{\frac{\eta}{2}}(0) \subset A(S_0)$.

QED

6.5.10 Teorema della mappa aperta (BANACH) *Un operatore lineare continuo e suriettivo $A : X \longrightarrow Y$ fra spazi di Banach è necessariamente aperto, come mappa fra spazi topologici. In particolare, se A è biunivoco allora è un isomorfismo di spazi di Banach.*

[13]Evidentemente in uno spazio normato la convergenza di una serie si definisce in termini della convergenza della successione delle ridotte.

DIMOSTRAZIONE: Sia S un aperto si X e $y \in A(S)$. Allora esiste $x \in S$ tale che $y = Ax$ per suriettività di A, e, dato che S è aperto, deve contenere una palla di centro x. Ma allora, per il lemma, $A(S - x)$ deve contenere una palla di centro l'origine, i.e. $A(S)$ deve contenere una palla di centro y.

Così, per ogni $y \in A(S)$ abbiamo esibito una palla di centro y completamente contenuta in $A(S)$, che risulta dunque essere aperto.

Ne segue che la controimmagine per tramite dell'operatore A di un aperto di Y è un aperto di X.

QED

6.5.11 Corollario *Se X è uno spazio vettoriale e $||-||_1$, $||-||_2$ sono norme per le quali X è di Banach, e se esiste una costante C tale che*

$$\forall x \in X \quad ||x||_1 \leq C||x||_2$$

allora le norme sono equivalenti, i.e. esiste un'altra costante C' tale che

$$\forall x \in X \quad ||x||_2 \leq C'||x||_1$$

DIMOSTRAZIONE: La mappa identità fra gli spazi di Banach $(X, ||-||_1)$ e $(X, ||-||_2)$ è lineare, continua e biunivoca, quindi un isomorfismo, i.e. la sua inversa pure è continua.

QED

6.5.12 Teorema del grafo chiuso (BANACH) *Supponiamo che $A : X \longrightarrow Y$ sia un operatore lineare fra gli spazi di Banach X e Y, che goda della seguente proprietà: se per ogni successione $\{x_n\} \subset X$ convergente ad un $x \in X$ e la successione $\{Ax_n\} \subset Y$ converge ad un punto $y \in Y$ allora $y = Ax$. Allora A è continuo.*

DIMOSTRAZIONE: Definiamo in X una norma

$$||x||_1 := ||x|| + ||Ax||$$

Dimostriamo che lo spazio X è completo anche per la norma $||-||_1$: se $||x_n - x_m||_1 \longrightarrow 0$ allora $||x_n - x_m|| \longrightarrow 0$ e $||Ax_n - Ax_m|| \longrightarrow 0$; dunque ($X$ e Y sono completi) esistono $x \in X$ e $y \in Y$ tali che $||x_n - x|| \longrightarrow 0$ e $||Ax_n - y|| \longrightarrow 0$. Ma l'operatore A soddisfa la proprietà enunciata nell'ipotesi del teorema, sicché $y = Ax$, il che vuol dire $||x_n - x||_2 \longrightarrow 0$. Quindi X è completo per la norma $||-||_2$.

Ora possiamo applicare il corollario del teorema della mappa aperta alle norme $||-||$ e $||-||_1$ ottenendone l'equivalenza:

$$\exists C \quad ||x|| + ||Ax|| \leq C||x||$$

Dunque A è limitato.

QED

Se $A : X \longrightarrow Y$ è una applicazione, il suo *grafo* è l'insieme $\{(x, Ax)\}_{x\in X} \subset X \times Y$. Allora l'ipotesi del teorema precedente equivale a dire che il grafo di A è chiuso in $X \times Y$.

Il terzo pilastro sul quale poggia la teoria degli spazi di Banach è il *principio di uniforme limitatezza*, che segue dalla teoria della categoria negli spazi metrici. Per dimostrarlo utilizziamo un principio analogo di natura puramente topologica:

6.5.13 Lemma *Se $\mathcal{F}$ è una famiglia di funzioni continue reali definite su uno spazio metrico X, tale che, per ogni $x \in X$ esista una costante M_x in modo che*

$$\forall f \in \mathcal{F} \quad |f(x)| \leq M_x$$

allora esistono un aperto non vuoto $S \subset X$ ed una costante M tali che

$$\forall f \in \mathcal{F}\forall s \in S \quad |f(s)| \leq M$$

DIMOSTRAZIONE: Sia, per ogni $m \in \mathbb{N}$:

$$E_f^m := \{x \,|\, |f(x)| \leq m\}$$

e poniamo

$$E^m := \bigcap_{f\in\mathcal{F}} E_f^m$$

Per continuità di f ciascun E_f^m è chiuso e dunque anche E^m lo è. Per conseguenza esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che $x \in E^m$, i.e.

$$X = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E^m$$

Ma X è uno spazio metrico completo, e quindi, per il teorema di Baire, deve esistere un m per il quale E^m non sia mai denso. Dato che questo E^m è chiuso, deve contenere qualche palla S, e, per ogni $s \in S$ deve aversi

$$\forall f \in \mathcal{F} \quad |f(s)| \leq m$$

QED

6.5.14 Teorema di Uniforme Limitatezza (BANACH–STEINHAUS) *Se X è uno spazio di Banach, Y uno spazio normato e $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(X, Y)$ una famiglia di operatori lineari limitati da X in Y tale che, per ogni $x \in X$ esista una costante M_x tale che*

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad ||Ax|| \leq M_x$$

Allora gli operatori di $\mathcal{F}$ sono uniformemente limitati, cioè esiste una costante M tale che

$$\forall f \in \mathcal{F} \quad ||A|| \leq M$$

DIMOSTRAZIONE: Per ogni $A \in \mathcal{F}$, la funzione

$$f(x) := ||Ax||$$

è continua su X e dato che la famiglia di queste funzioni (al variare di $A \in \mathcal{F}$) soddisfa le ipotesi del teorema precedente e X è completo, ne segue che esistono un aperto $S \subset X$ ed una costante M tali che

$$\forall s \in S \quad ||As|| \leq M$$

Sia ora $y \in S$. Dato che S è aperto, esiste una palla $B_\delta(y)$ contenuta in S; se $||z|| \leq \delta$ allora $Az = A(z + y) - Ay$ con $z + y \in B_\delta(y) \subset S$ e quindi

$$||Az|| \leq ||A(z + y)|| + ||Ay|| \leq M + M_y$$

in modo che

$$\forall f \in \mathcal{F} \quad ||A|| \leq \frac{M + M_y}{\delta}$$

QED

Capitolo 7

SPAZI DI HILBERT E TEORIA DI FOURIER

In questo capitolo ci concentriamo sugli spazi di Hilbert: per questi spazi si possono generalizzare molte nozioni geometriche valide negli spazi euclidei, ad esempio i procedimenti di ortogonalizzazione, che forniscono i sistemi ortonormali completi: questi ultimi si inquadrano nella teoria di Fourier, della quale ci occuperemo in fondo al capitolo, e che costituisce il primo e principale esempio di applicazione degli spazi di Hilbert

7.1 Basi ortonormali negli spazi di Hilbert

Uno spazio di Hilbert, come ogni spazio vettoriale, possiede delle basi, che tuttavia si dimostrano inadatte a descriverne la geometria, dato che "ignorano" l'esistenza del prodotto hilbertiano; il concetto "giusto" di base per uno spazio di Hilbert è quello di sistema ortonormale completo.

7.1.1 Definizione *Un* sistema ortonormale *in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ è una famiglia $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ di elementi di $\mathcal{H}$ di norma 1 ($\forall\alpha\in A \quad ||e_\alpha|| = 1$) tali che*

$$\forall\alpha,\beta\in A \quad (e_\alpha, e_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$$

A priori un sistema ortonormale può essere del tutto insufficiente a descrivere la totalità degli elementi di uno spazio di Hilbert; per questo diamo la

7.1.2 Definizione *Un sistema ortonormale $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ si dice* base ortonormale *(b.o.) se il sottospazio $\sum_\alpha e_\alpha\mathbb{C}$ (generato dalla famiglia $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$) è denso in $\mathcal{H}$.*

7.1.3 Proposizione *Se $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è un sistema ortonormale in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *è una base ortonormale.*
- *Se* $\forall x \in \mathcal{H}$ $\forall \alpha \in A \quad (e_\alpha, x) = 0$ *allora* $x = 0$.
- $\forall x \in \mathcal{H} \quad ||x||^2 = \sum_\alpha |(e_\alpha, x)|^2$ *(identità di Parceval).*
- $\forall x \in \mathcal{H} \quad x = \sum_\alpha (e_\alpha, x)e_\alpha$.

DIMOSTRAZIONE: (1) $\iff$ (2) è ovvio per definizione di densità.

(1) $\iff$ (4) Segue dal fatto che $\overline{M} = M^{\perp\perp}$; infatti se $B \subset A$ è finito e N è il sottospazio generato da $\{e_\beta\}_{\beta\in B}$, che è chiuso, allora per $x \in \mathcal{H}$:

$$x_N = \sum_{\beta\in B} (e_\beta, x)e_\beta$$

e, se M_0 è il sottospazio (non chiuso!) generato da $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$, si ha che, per $x \in M_0$:

$$x = \sum_{\alpha\in A} (e_\alpha, x)e_\alpha$$

e

$$||x||^2 = \sum_{\alpha\in A} |(e_\alpha, x)|^2$$

(ove le somme sono estese ad un numero finito di termini non nulli). Consideriamo ora il sottospazio N_0 denso in $l^2(A)$ definito come

$$N_0 := \{f : A \longrightarrow \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Card}\{\alpha \in A \,|\, f(\alpha) \neq 0\} < \infty\}$$

L'applicazione

$$\begin{aligned} \Phi : N_0 &\longrightarrow M_0 \\ f &\longmapsto \sum_{\alpha\in A} f(\alpha)e_\alpha \end{aligned}$$

è una isometria lineare e suriettiva. Ma sia $L^2(A)$ che $\mathcal{H}$ sono completi e quindi Φ si estende per continuità ad una funzione

$$\widetilde{\Phi} : l^2(A) \longrightarrow \mathcal{H}$$

lineare isometrica e suriettiva, i.e. un isomorfismo di spazi di Hilbert. Quindi, per ogni $x \in M$ esiste $f \in l^2(A)$ tale che $x = \sum_{\alpha\in A} f(\alpha)e_\alpha$ e quindi esiste $\alpha_0 \in A$ tale che $f(\alpha_0) = (e_{\alpha_0}, x)$. Quindi (1) $\iff$ (4).

Inoltre

$$||x_{M^\perp}||^2 = ||x||^2 - ||x_M||^2 = ||x||^2 - \sum_{\alpha\in A} |(x, e_\alpha)|^2$$

da cui, per ogni $x \in \mathcal{H}$:

$$\sum_{\alpha\in A} |(x, e_\alpha)|^2 \leq ||x||^2$$

e quindi l'equivalenza (1) $\iff$ (3).

QED

Notiamo due conseguenze della dimostrazione:

7.1.4 Corollario *Se $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è una base ortonormale in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ allora $\mathcal{H} \cong l^2(A)$.*

Cioè spazi di Hilbert che ammettano basi della stessa cardinalità sono isomorfi a $l^2(A)$ e quindi fra loro.

7.1.5 Corollario (IDENTITÀ DI BESSEL)

$$\sum_{\alpha\in A} |(x, e_\alpha)|^2 \leq ||x||^2$$

7.1.6 Teorema *Uno spazio di Hilbert ha sempre una base ortonormale.*

DIMOSTRAZIONE: La famiglia $\mathcal{S}$ formata dai sistemi ortonormali in $\mathcal{H}$ è un insieme parzialmente ordinato dall'inclusione (e non vuoto, visto che un qualsiasi vettore di norma 1 forma da solo un sistema ortonormale). Se Σ è una catena in $\mathcal{S}$ (i.e. per ogni $S, S' \in \Sigma$ si ha $S \subset S'$ oppure $S' \subset S$) allora l'insieme unione di Σ:

$$\bigcup_{S\in\Sigma} S$$

è un sistema ortonormale: se $x, y \in \bigcup_{S\in\Sigma} S$ allora esistono $S, S' \in \Sigma$ tali che $x \in S$ e $y \in S'$ e quindi, dato che Σ è una catena, si ha $x, y \in S \subset S'$ oppure $x, y \in S' \subset S$: in ogni caso x, y appartengono ad un medesimo sistema ortonormale (che sia S o S') e quindi devono verificare la $(x, y) = \delta_{x,y}$.

Inoltre l'insieme $\bigcup_{S\in\Sigma} S$ è evidentemente un confine superiore della famiglia Σ rispetto all'ordine $\subset$ e quindi, per il lemma di Zorn, l'insieme $\mathcal{S}$ dei sistemi ortonormali ammette un elemento massimale: per definizione di massimalità (e per la (2) della proposizione precedente) questo massimale deve essere una base ortonormale; infatti la massimalità di una base è ovvia, mentre un sistema ortonormale massimale S che non sia una base è tale che $S^\perp \neq 0$ e quindi deve esistere $e \in S^\perp$ con $||e|| = 1$ in modo che $S \cup \{e\}$ sia un sistema ortonormale, contro la massimalità di S.

QED

7.1.7 Definizione *La cardinalità di una base ortonormale in uno spazio di Hilbert si dice* dimensione hilbertiana *dello spazio.*

Evidentemente se la dimensione di $\mathcal{H}$ come spazio vettoriale è finita allora anche la dimensione hilbertiana lo è e questi due numeri coincidono. In generale questo non sarà vero: molti spazi di funzioni, ad esempio $L^2(\mathbb{R})$, avranno dimensione hilbertiana numerabile (lo vedremo fra breve rammentando che si tratta di uno spazio separabile): tuttavia $L^2(\mathbb{R})$, come spazio vettoriale, ha dimensione continua: i suoi punti sono parametrizzati dagli elementi di $\mathbb{R}$.

Nel caso generale non è ovvio nemmeno che tutte le basi ortonormali abbiano la stessa cardinalità.

7.1.8 Teorema *Tutte le basi ortonormali in uno spazio di Hilbert hanno la stessa cardinalità, che è poi pari alla dimensione hilbertiana.*

DIMOSTRAZIONE: Siano $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ e $\{f_\beta\}_{\beta\in B}$ basi ortonormali di $\mathcal{H}$, allora

$$\forall\alpha\in A \quad e_\alpha = \sum_{\beta\in B}(f_\beta, e_\alpha)f_\beta$$

Ma l'insieme

$$G_\alpha := \{\beta\in B \,|\, (f_\beta, e_\alpha)\neq 0\}$$

è numerabile, quindi l'unione $B = \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$ è una unione di insiemi numerabili indicizzata da A:

$$\mathrm{Card}(B) \leq \mathrm{Card}(A)\cdot\aleph_0 = \mathrm{Card}(A)$$

(stiamo supponendo $\mathrm{Card}(A)$ infinita, i.e. $\geq\aleph_0$).

Viceversa, scrivendo gli elementi f_β in termini della base $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ otteniamo

$$\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B)$$

e quindi, per il teorema di Cantor–Bernstein: $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$.

QED

7.1.9 Teorema *Gli spazi di Hilbert di dimensione hilbertiana numerabile (o finita) sono tutti e soli quelli separabili*[1].

DIMOSTRAZIONE: Il caso di dimensione finita segue ovviamente da quello di dimensione numerabile.

[1] Cioè che contengono una successione densa.

Sia la dimensione hilbertiana di $\mathcal{H}$ numerabile: allora esiste una base ortonormale $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ed, evidentemente, il sottospazio

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{Q}+i\mathbb{Q})e_n$$

è denso in $\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{C}e_n$, la cui chiusura è $\mathcal{H}$.

Sia viceversa lo spazio $\mathcal{H}$ è separabile; dimostreremo che possiede una base ortonormale indicizzata da $\mathbb{N}$. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di vettori totale[2], che deve esistere per l'ipotesi di separabilità: usando un procedimento alla Gram–Schmidt la renderemo ortonormale in modo da avere la base voluta.

Basta per questo osservare che il sottospazio M_n generato dall'insieme finito di vettori $\{x_1,...,x_n\}$ è chiuso (perché ha dimensione finita e quindi è completo) e ovviamente non contiene x_{n+1}. Decomponiamo allora x_{n+1} secondo la somma diretta $M_n+M_n^\perp$ e chiamiamo y_{n+1} la componente di x_{n+1} in $M_n^\perp$. Ponendo per ogni $n\in\mathbb{N}$:

$$e_n := \frac{y_{n+1}}{||y_{n+1}||}$$

otteniamo ovviamente un sistema ortonormale in $\mathcal{H}$

QED

La seguente definizione è di fondamentale importanza:

7.1.10 Definizione *Un* operatore unitario *fra due spazi di Hilbert $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ è un operatore $U:\mathcal{H}_1\longrightarrow\mathcal{H}_2$ lineare isometrico tale che*

$$U^* = U^{-1}$$

Un operatore unitario è una realizzazione concreta di un isomorfismo fra spazi di Hilbert: in particolare

7.1.11 Teorema *Se due spazi di Hilbert $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ hanno la stessa dimensione hilbertiana allora esiste un operatore unitario $U:\mathcal{H}_1\longrightarrow\mathcal{H}_2$.*

DIMOSTRAZIONE: Possiamo per ipotesi scegliere due basi ortonormali $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ e $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ in $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ indicizzate dallo stesso insieme A. Quindi esistono gli isomorfismi di spazi di Hilbert

$$\Phi_1:\mathcal{H}_1\longrightarrow l^2(A) \qquad \text{e} \qquad \Phi_2:\mathcal{H}_2\longrightarrow l^2(A)$$

(per il corollario 7.1.4) e componendo l'uno con l'inverso dell'altro otteniamo l'operatore unitario voluto.

QED

[2] Cioè gli $\{x_n\}$ sono linearmente indipendenti ed il sottospazio vettoriale che generano è denso.

Ad esempio, se $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{N})$, e se consideriamo come insieme di indici i numeri naturali pari $2\mathbb{N}$, allora esiste un operatore unitario in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ isometrico su un sottospazio *proprio*:

$$Ue_n := e_{2n}$$

tale che

$$||Ux||^2 = ||x||^2$$

e quindi $(Ux, Ux) = (x, U^*Ux) = (x, x)$ i.e. $U^*U = I$. Tuttavia U *non è unitario*, dato che non è suriettivo.

Osserviamo inoltre che se $A = \{1, 2, 3, 4, ...\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ allora esiste un operatore

$$\begin{aligned} S : \mathcal{H} &\longrightarrow L^2(A) \\ e_n &\longmapsto e_{n+1} \end{aligned}$$

tale che $\operatorname{im}(S)^\perp = \mathbb{C}e_0$ e che si dice *shift unilatero*. Si tratta di un operatore isometrico.

7.2 Operatori di proiezione negli spazi di Hilbert

Consideriamo uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ ed un suo sottospazio vettoriale chiuso M. Per il teorema di Riesz ogni elemento $x \in \mathcal{H}$ si decompone come $x = x_M + x_{M^\perp}$. Quindi la mappa

$$x \longmapsto x_M$$

è lineare[3] e suriettiva. Denotiamola E_M.

Osserviamo che $E_M^2 = E_M$, cioè che l'operatore $E : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ è idempotente: infatti $E_M^2(x) = E_M(x_M) = x_M$. Questo è un fatto del tutto generale che si verifica ogni qual volta uno spazio vettoriale X si decomponga in somma di sottospazi e si considerino le proiezioni di X su questi suoi sottospazi.

Un altro fatto generale che probabilmente è ben noto al lettore è che, viceversa, se X è uno spazio vettoriale e $E : X \longrightarrow X$ un operatore lineare idempotente, X si decompone in somma diretta di due sottospazi, precisamente l'immagine $M = \operatorname{im}(E)$ di E ed il suo conucleo $N = \operatorname{im}(I - E)$ (ove I è l'operatore identità su X).

Nel caso di un sottospazio chiuso M di uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ la proiezione $E_M : X \longrightarrow X$ è un operatore continuo:

$$||x||^2 = ||x_M||^2 + ||x_{M^\perp}||^2$$

[3] Se X è un qualsiasi spazio vettoriale che sia somma diretta di due sottospazi M e N allora la decomposizione di un elemento $x \in X$ come somma di un elemento $x_M \in M$ ed un elemento $x_N \in N$ è unica, e quindi le mappe $x \longmapsto x_M$ e $x \longmapsto x_N$ sono lineari.

da cui segue $||E_M x|| = ||x_M|| \leq ||x||$.

Osserviamo esplicitamente che, $E \neq 0$ se e solo se $\mathrm{im}(E) \neq (0)$, il che avviene se e solo se esiste un elemento $x_0 \in \mathcal{H}$ non nullo tale che $Ex_0 = x_0$. Dunque $||E|| = 1$.

Naturalmente

$$(y, Ex) = (y_M + y_{M^\perp}, x_M) = (y_M, x_M) = (Ey, Ex) = (y, E^*Ex)$$

e quindi un proiettore E è autoaggiunto. Dunque

$$E = E^*E \iff \begin{cases} E = E^2 \\ E = E^* \end{cases}$$

sono condizioni equivalenti all'essere E un proiettore su un sottospazio chiuso.

7.2.1 Definizione *Una* isometria parziale *in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ è un elemento $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tale che l'operatore*

$$W|_{\mathcal{N}(W)^\perp}$$

sia una isometria (si ricordi che $\mathcal{N}(A)$ è il nucleo dell'operatore *A, i.e. l'insieme $\{x \in \mathcal{H} \,|\, Ax = 0\}$).*

Ad esempio, se M e N sono sottospazi chiusi di $\mathcal{H}$ della stessa dimensione allora esiste un operatore unitario

$$W_0 : M \longrightarrow N$$

che possiamo comporre ad esempio con il proiettore E_M ottenendo

$$W := W_0 E_M$$

che è evidentemente una isometria parziale.

7.2.2 Proposizione *Esiste una corrispondenza biunivoca*

$$\{M \subset \mathcal{H} \,|\, M = \overline{M}\} \longleftrightarrow \{E \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \,|\, E = E^*E\}$$

DIMOSTRAZIONE: Se $E \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è tale che $E = E^*E$ allora prendiamo $M = \mathrm{im}(E)$ e $N = \mathrm{im}(I - E)$. Ovviamente $\mathcal{H} = M + N$. Inoltre $M \cap N = (0)$, dato che $M = N^\perp$: $(Ey, (I - E)x) = (y, (E^* - E^*E)x) = 0$, ed analogamente $N = M^\perp$.

QED

Se M_1 e M_2 sono sottospazi chiusi di $\mathcal{H}$, con proiettori E_1, E_2, allora

$$M_1 \subset M_2^\perp \iff E_1E_2 = 0$$

Infatti $0 = (E_x, E_2y) \iff (x, E_1^*E_2y) = 0 \iff E_1^*E_2 = 0 \iff E_1E_2 = 0$ (essendo i proiettori autoaggiunti). Ovviamente $E_1E_2 = 0 \iff E_2E_1 = 0$ e $M_1 \subset M_2^\perp \iff M_2 \subset M_1^\perp$.

Osserviamo che in generale la somma $E_1 + E_2$ non è necessariamente idempotente, ma tuttavia, se $M_1 \perp M_2$:

$$(E_1 + E_2)^2 = E_1^2 + E_1E_2 + E_2E_1 + E_2^2 = E_1 + E_2$$

e quindi $E_1 + E_2$ è in questo caso il proiettore di $M_1 + M_2$.

QED

Questi fatti si estendono al caso di n proiettori, così ad esempio, se $M_1, ..., M_n$ sono sottospazi chiusi mutuamente ortogonali, allora $\sum E_i$ è il proiettore dello spazio $\sum M_i$. In particolare la somma di sottospazi chiusi è chiuso.

Ancora più in generale, se $\{M_\alpha\}$ è una famiglia qualsiasi di sottospazi vettoriali chiusi di $\mathcal{H}$ mutuamente ortogonali:

$$\forall \alpha \neq \beta \quad M_\alpha \perp M_\beta$$

allora lo spazio $\sum M_\alpha$ può non essere affatto chiuso. Bisogna considerare esplicitamente la sua chiusura in $\mathcal{H}$.

Ad esempio, si noti che se $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sono idempotenti autoaggiunti (non nulli!) e tali che

$$\forall i \neq j \quad E_iE_h = 0$$

allora $\sum_{i\in\mathbb{N}} E_i$ *non converge in norma*. Se così non fosse si avrebbe infatti, per ogni $\varepsilon > 0$ e per $n, m > n_\varepsilon$:

$$||\sum_{i=1}^n E_i|| < \varepsilon$$

il che è assurdo, visto che l'idempotente autoaggiunto $\sum E_i$ ha norma 1.

Questo esempio mostra come sia necessario considerare topologie alternative sullo spazio degli operatori lineari.

7.2.3 Definizione *Se X è uno spazio di Banach e $\{A_n\} \subset \mathcal{B}(X)$ allora si dice che la successione $\{A_n\}$* converge fortemente *a A, e si scrive*

$$A_n \xrightarrow{f} A$$

se per ogni $x \in X$: $\lim_n A_nx = Ax$.

Osserviamo che se $||A_n - A|| \longrightarrow 0$ allora $\sup_{||x||=1} |A_n x - Ax| \longrightarrow 0$ e quindi (scriviamo $A_n \xrightarrow{||-||} A$ per la convergenza in norma):

$$A_n \xrightarrow{||-||} A \iff A_n \xrightarrow{f} A \text{ uniformemente sulla palla unitaria in } \mathcal{H}$$

Ricordando la definizione di topologia debole su uno spazio topologico (definizione 2.1.22), diamo la

7.2.4 Definizione *La* topologia forte *sullo spazio $\mathcal{B}(X)$ è la topologia debole definita dalla famiglia di funzioni*

$$\{f : \mathcal{B}(X) \longrightarrow X \,|\, \forall A \in \mathcal{B}(X) \quad f(A) = Ax\}_{x\in X}$$

Per capire meglio la definizione, scriviamo come sono fatti gli intorni di un operatore A nella topologia forte:

$$U_{x_1,\dots,x_n}(A) = \{B \in \mathcal{B}(X) \,|\, \forall k = 1, \dots, n \ ||(B - A)x_k|| \leq 1\}$$

(l'intorno U dipende da A e da n elementi $x_1, \dots, x_n \in X$).

Evidentemente questa topologia non possiede una base numerabile di intorni, e non può dunque caratterizzarsi semplicemente con i limiti di successioni, bensì con i limiti di successioni generalizzate.

Supponiamo quindi di avere una famiglia di proiettori $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ con $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ relativi sottospazi e consideriamo l'insieme

$$B := \{\beta \subset A \,|\, \mathrm{Card}(\beta) < \infty\}$$

parzialmente ordinato dalla relazione di inclusione $\subset$. Si tratta di un insieme diretto e quindi possiamo definire la successione generalizzata

$$F_\beta := \sum_{\alpha\in\beta} E_\beta$$

il cui limite (se esiste) è $\sum_{\alpha\in A} E_\alpha$.

7.2.5 Proposizione *La serie*

$$\sum_{\alpha\in A} E_\alpha =: E$$

converge nella topologia forte.

DIMOSTRAZIONE: Dobbiamo dimostrare che per ogni $x \in \mathcal{H}$ esiste un $\beta_0 \in B$ tale che se $\beta_0 \subset \beta$ allora

$$||F_\beta x - Ex|| < 1$$

Sia $x \in M$ con

$$M := \overline{\sum_{\alpha \in A} M_\alpha}$$

Dato che M è chiuso deve esistere $x' \in \sum_{\alpha \in \beta_0} M_\alpha$ arbitrariamente vicino a x (in norma) i.e. $x' = \sum_{\alpha \in A} E_\alpha x$. Dunque

$$x - \sum_{\alpha \in \beta} E_\alpha x = x - \sum_{\alpha \in \beta} E\_Ea(x - x') + \sum_{\alpha \in \beta} E_\alpha x' = x - x' + F_\beta(x - x')$$

i.e.

$$||x - \sum_{\alpha \in \beta} E_\alpha x|| \leq ||x - x'|| + ||F_\beta(x - x')|| \longrightarrow 0$$

per $||x - x'|| \longrightarrow 0$. Dunque, se $x \in M$ allora $x = \sum_{\alpha \in A} E_\alpha x$.

Se ora $x \in \mathcal{H}$ è qualsiasi, $Ex \in M$ e quindi, applicando il ragionamento precedente (tenendo conto che $E_\alpha E x = E_\alpha x$, avendosi $M_\alpha \subset M$) si trova

$$Ex = \sum_{\alpha \in A} E_\alpha E x = \sum_{\alpha \in A} E_\alpha x$$

QED

Osserviamo che, se $\beta \subset A$ (con $\mathrm{Card}(\beta) < \infty$), allora

$$\Big|\Big| \sum_{\alpha \in \beta} E_\alpha x \Big|\Big|^2 = \sum_{\alpha \in \beta} \Big|\Big| E_\alpha x \Big|\Big|^2$$

Se $x \in \mathcal{H}$, per la proposizione precedente si ha

$$||Ex||^2 = \lim_\beta \Big|\Big| \sum_{\alpha \in \beta} E_\alpha x \Big|\Big|^2 = \sum_\alpha ||E_\alpha x||^2$$

Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti[4]:

- $\overline{\sum_{\alpha \in A} M_\alpha} = \mathcal{H}$.
- $\mathcal{H} = M$.
- $\sum_\alpha E_\alpha = I$ (nella topologia forte).

[4]Un sottoinsieme è totale se il suo inviluppo lineare, il sottospazio vettoriale che genera, è denso.

- $\bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha$ è un *sottoinsieme totale* in $\mathcal{H}$.
- $(\bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha)^\perp = 0$ (S è totale se e solo se $S^\perp = 0$).

Non appena una di esse sia verificata allora ha luogo l'isomorfismo di spazi di Hilbert
$$\mathcal{H} \cong \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$$
realizzato dalla mappa $x \longmapsto \{\alpha \in A \longmapsto \chi(\alpha) = E_\alpha x \in M_\alpha\}$. Si noti che
$$\sum_\alpha ||\chi(\alpha)||^2 = ||x||^2$$
e si osservi che, se ciascuno degli spazi M_α è di dimensione 1, allora la teoria che abbiamo svolto è semplicemente quella delle basi ortonormali in $\mathcal{H}$.

Concludiamo la nostra analisi di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ indagandone alcune particolarità della struttura algebrica. Prima svolgiamo qualche semplice osservazione sui proiettori e sui loro sottospazi associati:

7.2.6 Proposizione *$(x, Ex) = (x, x) \iff x \in M$.*

DIMOSTRAZIONE: Basta osservare che
$$(Ex, Ex) = (x, Ex) = (x, x) = (Ex, Ex) + ((I - E)x, (I - E)x)$$
e che $(I - E)x = 0 \iff x = Ex$.

QED

Se M e N sono sottospazi chiusi, allora
$$M \subset N \iff E_M E_N = E_M$$
Ma EF è autoaggiunto se e solo se $EF = FE$ i.e. $E_M E_N = E_M \iff E_N E_M = E_M$:
$$M \subset N \Rightarrow E_M E_N = E_N E_M$$
Inoltre
$$M \perp M \Rightarrow E_M E_N = E_N E_M$$
Se poi $M = M_1 + M_2$ allora $E_1 + E_2 = E_M := E$ e dunque, se $F := E_N$, $EF = FE$.

In $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ c'è una relazione di ordine parziale che possiamo determinare stabilendo quali sono gli elementi positivi:
$$\mathcal{B}(\mathcal{H})_+ := \{B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \,|\, \forall x \in \mathcal{H} \quad (x, Bx) \geq 0\}$$
Evidentemente, per l'identità di polarizzazione:
$$B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+ \Rightarrow B = B^*$$
Ad esempio per ogni $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'operatore AA^* è semi-definito positivo: $AA^* \geq 0$.

In particolare, un autoaggiunto idempotente E è positivo.

7.2.7 Proposizione $M \subset N \iff E_M E_N = EM \iff E_M \leq E_N$.

DIMOSTRAZIONE: Dato che $N = M + (M^\perp \cap N)$ si ha $E_N = E_M + E_{M^\perp \cap N}$ e quindi:

$$(x, E_N x) = (x, E_M x) + (x, E_{M^\perp \cap N} x)$$

quindi, dato che il secondo addendo del secondo membro è ≥ 0, troviamo $(x, E_N x) \geq (x, E_M x)$.

Viceversa, $x \in M \iff (x, E_M x) = (x, x)$. Ma se $E_M \leq E_N$ allora

$$(x, x) = (x, E_M x) \leq (x, E_N x) = (E_N x, E_N x) \leq ||x||^2 = (x, x)$$

(dato che E_N è un proiettore). Quindi, per la proposizione precedente:

$$M \subset N$$

QED

7.2.8 Teorema *Se E e F sono idempotenti autoaggiunti in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (e quindi esistono i sottospazi chiusi M e N in modo che $E = E_M$ e $F = E_N$) allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- $EF = FE$.
- $EF = E_{M \cap N}$.
- $N = (N \cap N) + (N \cap M^\perp)$.

DIMOSTRAZIONE: (3) $\Rightarrow$ (1) è già stato dimostrato.

(1) $\Rightarrow$ (2): $EF = FE \Rightarrow EF = (EF)^*$ e $\Rightarrow (EF)^2 = E^2F^2 = EF$. Quindi EF è un proiettore se $EF = FE$.

Ma, se $x \in M \cap N$ allora $Ex = x = Fx$ e quindi $EFx = x$, cioè $M \cap N \subset \mathrm{im}(EF)$. Inoltre, se $x \in \mathrm{im}(EF)$ allora $x = EFx$ e $Ex = E(EF)x = E^2Fx = x$. Scambiando il ruolo di E e F si ottiene anche $Fx = x$ e quindi $M \cap N = \mathrm{im}(EF)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) è banale.

(2) $\Rightarrow$ (3): Se $EF = E_{M \cap N}$ allora:

$$F = (F - EF) + EF = F(I - E) + EF$$

Ma vale (1) (perché vale (2)) e quindi F e $I - E$ commutano:

$$F(I - E) = E_{N \cap M^\perp}$$

e $EF = E_{N \cap M}$, sicché

$$F = E_{N \cap M^\perp} + E_{N \cap M} \Rightarrow N = M^\perp \cap N + M \cap N$$

QED

Possiamo formulare quanto fin qui ottenuto dicendo che *il reticolo dei sottospazi chiusi (o equivalentemente degli idempotenti autoaggiunti) di uno spazio di Hilbert è un'algebra di Boole.*

7.3 Serie di Fourier

Correddiamo ora la teoria con gli esempi fondamentali: le serie e l'integrale di Fourier[5].

Vogliamo considerare funzioni $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ periodiche, di periodo 2π (come le classiche funzioni trigonometriche): $f(t) = f(t + 2\pi)$; il modo più naturale di procedere non è considerare queste funzioni definite sulla retta reale ma sulla circonferenza $\mathbb{T} = \{|z| = 1\} \subset \mathbb{C}$. Osserviamo che $\mathbb{T}$ è lo spazio topologico (compatto) ottenuto dall'intervallo $[0, 2\pi]$ identificandone gli estremi $0 \approx 2\pi$, ovvero è il quoziente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (via la mappa $t \longmapsto e^{it}$).

Consideriamo dunque lo spazio $\mathbb{T}$, con la misura di Lebesgue: ricordiamo che la misura di Lebesgue è invariante per traslazioni:

$$\int_{\mathbb{T}} f(t-s)dt = \int_{\mathbb{T}} f(t)dt$$

per ogni $0 \le s < 2\pi$ (integrare su $\mathbb{T}$ è come integrare sull'intervallo $(0, 2\pi)$).

Consideriamo lo spazio $L^1(\mathbb{T})$ con la norma di Banach

$$||f||_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|dt$$

(supponiamo che le funzioni abbiano valori complessi).

Ad esempio sia

$$p(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$$

(una tale funzione si dice *polinomio trigonometrico*). I coefficienti a_n del polinomio sono tutto ciò che dobbiamo conoscere per determinarlo completamente; inoltre si possono ricavare dal polinomio stesso, per mezzo della formula

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} p(t)e^{-int}dt$$

Questa formula segue direttamente dalle relazioni di ortogonalità

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{int}dt = \delta_{n0}$$

[5]Si tratta degli esempi che storicamente hanno dato impulso sia alla teoria della misura di Lebesgue che alla teoria degli spazi di Hilbert.

7.3.1 Definizione *Una* serie trigonometrica *è una espressione formale*

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$$

con $a_n \in \mathbb{C}$.

Notiamo che si tratta di una serie formale, nel senso che può benissimo non convergere; tuttavia, motivati dall'esempio dei polinomi trigonometrici, ci chiediamo se una tale serie non possa rappresentare una funzione.

Sia $f \in L^1(\mathbb{T})$ e definiamo l'n-simo *coefficiente di Fourier* di f come

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int}dt$$

Se f è un polinomio otteniamo esattamente il suo coefficiente in grado n; in generale abbiamo non un polinomio ma una serie trigonometrica

$$S_f := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{int}$$

che si dice *serie di Fourier* associata alla funzione f. Si verificano immediatamente le seguenti proprietà:

7.3.2 Proposizione *Siano* $f, g \in L^1(\mathbb{T})$*;*

- $\widehat{f+g}(n) = \widehat{f}(n) + \widehat{g}(n)$.
- $\forall z \in \mathbb{C}$ $\widehat{zf}(n) = z\widehat{f}(n)$.
- *Se la traslata di* $t \in \mathbb{T}$ *della funzione* f *è la funzione*

  $$f_t(s) := f(s-t)$$

  allora $\widehat{f_t}(n) = \widehat{f}(n)e^{-int}$.
- $$|\widehat{f}(n)| \leq ||f||_1$$

Forse solo la (4) merita un commento:

$$|\widehat{f}(n)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int}dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|dt = ||f||_1$$

(ricordiamo che e^{it} è un numero complesso di modulo 1, se $t \in \mathbb{R}$). Evidentemente, se $\{f_n\}$ è una successione convergente in $L^1(\mathbb{T})$ allora $\widehat{f_n}$ converge uniformemente.

Definiamo ora una operazione sullo spazio $L^1(\mathbb{T})$ che riflette il fatto che $\mathbb{T}$ è un gruppo rispetto alla somma (modulo 2π).

7.3.3 Lemma *Se $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ allora, per quasi ogni $s \in \mathbb{T}$, la funzione $t \longmapsto f(t)g(s-t)$ è integrabile.*

DIMOSTRAZIONE: La funzione di due variabili $(s,t) \longmapsto f(t)g(s-t)$ è misurabile (è prodotto di funzioni misurabili!) e quindi, per quasi ogni t, la funzione $s \longmapsto f(t)g(s-t)$ è multiplo costante di g_t e quindi è integrabile e

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(t)g(s-t)|dsdt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(t)|\,||g||_1 dt = ||f||_1||g||_1$$

Quindi $f(t)g(s-t)$ è integrabile (per il teorema di Fubini) come funzione di t, per quasi ogni s.

QED

Abbiamo quindi, per ogni $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ la loro *convoluzione* $f * g \in L^1(\mathbb{T})$ definita come

$$f * g(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)g(s-t)dt$$

Ovviamente

$$||f * g||_1 \leq ||f||_1||g||_1$$

dato che

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int |f * g(s)|ds &= \frac{1}{2\pi}\int\frac{1}{2\pi}\int |f(t)g(s-t)|dtds \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2}\iint |f(t)g(s-t)dt \otimes ds = ||f||_1||g||_1\end{aligned}$$

7.3.4 Proposizione $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$

DIMOSTRAZIONE: Si tratta di un semplice cambiamento di variabile nell'integrale combinato col teorema di Fubini:

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int f * g(s)e^{-ins}ds = \frac{1}{4\pi^2}\iint f(t)e^{-int}g(s-t)e^{-in(s-t)}dsdt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int f(t)e^{-int}dt\frac{1}{2\pi}\int g(s)e^{-ins}ds = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)\end{aligned}$$

QED

A questo punto, usando calcoli analoghi a quelli fin qui svolti, è un facile esercizio dimostrare la

7.3.5 Proposizione *Rispetto alla convoluzione, lo spazio $L^1(\mathbb{T})$ diviene un'algebra associativa e commutativa.*

7.3.6 Esempio *Calcoliamo la convoluzione di una funzione $f \in L^1(G)$ con un polinomio trigonometrico p:*

$$\begin{aligned} f * p(t) &= \frac{1}{2\pi}\int f(s)\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{i(t-s)n} ds = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}\frac{1}{2\pi}\int f(s)e^{-ins} ds \\ &= \sum_{n=-N}^{N} a_n \widehat{f}(n) e^{int} \end{aligned}$$

Consideriamo ora una successione di funzioni in $L^1(\mathbb{T})$ (si tratta di polinomi trigonometrici) nota come *nucleo di sommabilità di Fejér*:

$$K_N(t) := \sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e^{int} \tag{†}$$

7.3.7 Proposizione *Il nucleo di Fejér soddisfa alle proprietà seguenti:*

- *Per ogni $N \in \mathbb{N}$:*
$$\frac{1}{2\pi}\int K_N(t)dt = 1$$
- *Esiste una costante c tale che*
$$\frac{1}{2\pi}\int |K_N(t)|dt \leq c$$
- *Se $0 < \delta < \pi$:*
$$\lim_{N\longrightarrow\infty}\int_\delta^{2\pi-\delta} |K_N(t)|dt = 0$$
- $K_N(t) \geq 0$.

DIMOSTRAZIONE: La (2) e la (4) sono ovvie, dato che $|e^{int}| = 1$. La (1) segue dal fatto che $\int e^{int} = \delta_{n0}$:

$$\frac{1}{2\pi}\int K_M(t)dt = \sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{1+N}\right)\frac{1}{2\pi}\int e^{int} = \sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{1+N}\right)\delta_{n0} = 1$$

La (3) segue dalla formula

$$K_N(t) = \frac{1}{1+N}\left(\frac{\sin\frac{N+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$$

che si dimostra osservando che

$$\left(-\frac{1}{4}e^{-it}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{it}\right)\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{1+N}\right)e^{int} = \\ = \frac{1}{1+N}\left(-\frac{1}{4}e^{-i(N+1)t}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{i(N+1)t}\right)$$

ed utilizzando l'identità trigonometrica

$$\sin^2\frac{t}{2} = \frac{1-\cos^2 t}{2} = -\frac{1}{4}e^{-it}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{it}$$

QED

Una successione di funzioni che verifichi queste proprietà si dice *nucleo (positivo) di sommabilità*. Notiamo che, per la (†):

$$f * K_N(t) = \sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N+1}\right)\widehat{f}(n)e^{int}$$

Il nucleo di Fejér è di fondamentale utilità: ad esempio possiamo dimostrare per mezzo di esso[6] il

7.3.8 Teorema di Approssimazione (WEIERSTRASS) *Ogni funzione $f \in C(\mathbb{T})$ è limite uniforme di polinomi trigonometrici.*

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo che una funzione continua è in $L^1(\mathbb{T})$ e che

$$||f||_1 \leq ||f||_0$$

ove $||.||_0$ è la norma dello spazio di Banach $C(\mathbb{T})$:

$$||f||_0 = \max_{t\in\mathbb{T}}|f(t)|$$

Infatti

$$||f||_1 = \frac{1}{2\pi}\int|f(t)|dt \leq \frac{1}{2\pi}\int||f||_0 dt = \frac{1}{2\pi}\frac{||f||_0}{2\pi} = ||f||_0$$

[6]Questo teorema seguirà immediatamente da un risultato generale, il teorema di Stone–Weierstrass 9.2.9, che daremo in seguito: ci sembra interessante darne comunque una dimostrazione particolare in questa sede.

Quindi la convergenza in L^1 implica la convergenza uniforme; ora se $f \in C(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ dimostriamo che si può approssimare con i polinomi trigonometrici $f * K_N$. Dobbiamo dimostrare che $||f - f * K_N||_1 \longrightarrow 0$, il che faremo in due passi: prima dimostreremo che, se $k \in C(\mathbb{T})$ e $f \in L^1(\mathbb{T})$ allora

$$(*) \qquad \frac{1}{2\pi}\int k(t) f_t dt = f * k$$

e poi dimostreremo che

$$(**) \qquad f = \lim_{N\longrightarrow\infty} \frac{1}{2\pi}\int K_N(t) f_t dt$$

(limite nella norma $||.||_1$). Da (*) e (**) segue la tesi.

Dimostriamo (*): se $f \in C(\mathbb{T})$ scriviamo l'integrale alla Riemann:

$$\frac{1}{2\pi}\int k(t) f_t dt = \frac{1}{2\pi} \lim \sum_n (t_{n+1} - t_n) k(t_n) f_{t_n}$$

per una partizione $\{t_n\}$ di $[0, 2\pi)$: ma

$$\frac{1}{2\pi} \lim \sum_n (t_{n+1} - t_n) k(t_n) f(t - t_n) = f * k(t)$$

(limite nella norma uniforme) sempre per definizione di integrale di Riemann: quindi per funzioni continue il teorema è dimostrato. Ma le funzioni continue approssimano le funzioni $L^1(\mathbb{T})$, e, se $f \in L^1(\mathbb{T})$ e $g \in C(\mathbb{T})$ è tale che $||f - g|| \leq \varepsilon$ allora, dato che la (*) vale per le funzioni continue:

$$\frac{1}{2\pi}\int k(t) f_t t - f * k = \frac{1}{2\pi}\int k(t)(f - g)_t dt - (f - g) * k$$

da cui

$$\left|\left|\frac{1}{2\pi}\int k(t) f_t dt - f * k\right|\right|_1 \leq 2\varepsilon ||k||_1$$

Questo dimostra la (*); passiamo alla (**): ricordiamo che f è continua su un compatto ($\mathbb{T}$), quindi uniformemente continua. Cioè, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste δ_ε tale che se $|s - t| < \delta_\varepsilon$ allora $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$. Allora, ricordando le proprietà del nucleo di Fejér (proposizione 7.3.7), se $0 < \delta < \pi$:

$$\begin{aligned}
|f * K_N(s) - f(s)| =& \left| \frac{1}{2\pi} \int K_n(t) f(t-s) dt - \frac{1}{2\pi} \int f(s) K_N(t) dt \right| \\
\leq& \frac{1}{2\pi} \int |f(t-s) - f(s)| K_N(t) dt \\
=& \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\delta |f(t-s) - f(s)| K_N(t) dt + \right. \\
&+ \int_\delta^{2\pi-\delta} |f(t-s) - f(s)| K_N(t) dt + \\
&\left. + \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} |f(t-s) - f(s)| K_N(t) dt \right) \\
<& \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\delta \varepsilon K_N(t) dt + \int_\delta^{2\pi-\delta} |f(t-s) - f(s)| K_N(t) dt + \right. \\
&\left. + \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} \varepsilon K_N(t) dt \right) \\
<& \frac{1}{2\pi} \left(2\delta\varepsilon c + \int_\delta^{2\pi-\delta} M_s K_N(t) dt \right) \\
<& C\varepsilon
\end{aligned}$$

(ove $M_s = \max_{t\in\mathbb{T}} |f(t-s) - f(s)|$ e $\int |K_N(t)| \leq c$).

QED

Osserviamo che l'algebra $L^1(\mathbb{T})$ non ha elemento neutro, ma che il nucleo di Fejér può essere considerato una "identità approssimante".

I coefficienti di Fourier $\widehat{f}(n)$ di una funzione $f \in L^1(\mathbb{T})$ soddisfano un "teorema di unicità":

7.3.9 Teorema *Se $f \in L^1(\mathbb{T})$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\widehat{f}(n) = 0$ allora $f = 0$.*

DIMOSTRAZIONE: Dato che si tratta di un polinomio trigonometrico, i coefficienti di $f * K_N = 0$ sono tutti nulli essendo multipli dei $\widehat{f}(n)$) e, dato che $f * K_N \longrightarrow f$, ne segue $f = 0$.

QED

In altri termini, se due funzioni hanno eguali coefficienti di Fourier, debbono coincidere: la serie di Fourier determina univocamente la funzione stessa. Inoltre la successione $\{\widehat{f}(n)\}$ è infinitesima:

7.3.10 Lemma (RIEMANN–LEBESGUE) *Se* $f \in L^1(\mathbb{T})$ *allora*

$$\lim_{|n|\longrightarrow\infty} \widehat{f}(n) = 0$$

DIMOSTRAZIONE: Se p è un polinomio trigonometrico che approssima $f \in L^1(\mathbb{T})$ per meno di ε:

$$||f - p||_1 < \varepsilon$$

e se $|n|$ è maggiore del grado di p, allora

$$|\widehat{f}(n)| = |\widehat{f - p}(n)| \leq ||f - p||_1 < \varepsilon$$

QED

Osserviamo che la serie di Fourier non converge necessariamente: possiamo, usando il teorema di Banach–Steinhaus, dare un esempio di funzione la cui serie di Fourier è non convergente in un punto di $\mathbb{T}$: ricordiamo che la serie

$$S_f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{itn}$$

converge se converge (in norma $||.||_1$) la successione delle sue ridotte N-sime

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{itn}$$

Evidentemente la mappa $S_N : C(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \longmapsto S_N(f)(0) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)$$

è un funzionale lineare continuo sullo spazio di Banach $C(\mathbb{T})$; come esercizio si può dimostrare che la successione di funzionali lineari $\{S_N\}$ non è uniformemente limitata e quindi, per il teorema di Banach–Steinhaus, esiste $f \in C(\mathbb{T})$ tale che $\{S_N(f)(0)\}$ non è limitata e quindi la serie di Fourier diverge in 0.

Ora consideriamo lo spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{T})$: osserviamo che la famiglia di funzioni $\{e^{int}\}$ in $L^2(\mathbb{T})$ forma un sistema ortonormale completo: è completo per il teorema di unicità delle serie di Fourier, dato che

$$(f, e^{int}) = \frac{1}{2\pi}\int f(t)\overline{e^{int}}dt = \widehat{f}(n)$$

ed è ortonormale in virtù delle identità

$$\frac{1}{2\pi}\int e^{int}\overline{e^{imt}}dt = \delta_{nm}$$

Da quello che sappiamo sulle basi ortonormali negli spazi di Hilbert segue il

7.3.11 Teorema *Se $f \in L^2(\mathbb{T})$ allora*

- $\displaystyle\sum_n |\widehat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int |f(t)|^2 dt$
- $||f - S_N(f)||_1 \longrightarrow 0$
- *Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ è una successione in $l^2(\mathbb{Z})$ (i.e. $\sum |a_n|^2 < \infty$) allora esiste un'unica $f \in L^2(\mathbb{T})$ tale che $a_n = \widehat{f}(n)$.*
- *Se $g \in L^2(\mathbb{T})$:*

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int f(t)\overline{g(t)}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)}$$

In altri termini, l'operatore

$$U : L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z})$$

che ad una funzione f fa corrispondere la successione dei suoi coefficienti di Fourier (si noti che $U(f) \in l^2(\mathbb{Z})$ per l'identità di Parceval) è unitario.

Osserviamo inoltre che l'operatore di shift $Se_n := e_{n+1}$ è unitario su $l^2(\mathbb{Z})$ e che

$$\left(U^{-1}SU(f)\right)(z) = zf(z)$$

7.4 Integrale di Fourier

Ora consideriamo le funzioni integrabili su $L^1(\mathbb{R})$; di nuovo la misura di Lebesgue è invariante per traslazioni

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

per ogni $s \in \mathbb{R}$.

Consideriamo sullo spazio $L^1(\mathbb{T})$ la norma di Banach

$$||f||_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt$$

(supponiamo che le funzioni abbiano valori complessi).

Osserviamo che, a differenza di $L^1(\mathbb{T})$, $L^1(\mathbb{R})$ non contiene tutte le funzioni che ha interesse considerare: ad esempio non contiene le funzioni $L^p(\mathbb{R})$ (dato che la misura è infinita). In particolare non abbiamo qualcosa come i polinomi trigonometrici in $\mathbb{R}$: tuttavia, se poniamo

$$\varphi(t) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + 2\pi n)$$

otteniamo una funzione $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$:

$$||\varphi||_1 \leq ||f||_1$$

e quindi possiamo calcolarne i coefficienti di Fourier:

$$\widehat{\varphi}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \varphi(t) e^{-int} dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{T}} f(t + 2\pi m) e^{-int} dt = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{inx} dx$$

(infatti $\mathbb{R} = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} [m, m + 2\pi)$). Osserviamo che in questa formula, n "agisce" su x per moltiplicazione: possiamo allora definire, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^*$ (ovviamente $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^*$ non appena si fissi un numero reale non nullo), la *trasformata di Fourier* di $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\xi(x)} dx$$

Quindi $\widehat{\varphi}$ è semplicemente la restrizione agli interi di $\widehat{f}$. Analizziamo meglio il legame che esiste fra trasformata di Fourier e coefficienti di Fourier: se $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$ associata a f è definita come sopra, consideriamo la

$$\varphi_y(t) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} y f(ty + 2\pi y)$$

Allora, per definizione:

$$\widehat{\varphi_y}(n) = \widehat{f}\left(\frac{n}{y}\right)$$

Supponendo che la serie di Fourier di φ_y converga a $\varphi_y(0)$ in 0 abbiamo che

$$\varphi_y(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi_y}(n)$$

e quindi la *formula di Poisson*

$$2\pi y \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi n y) = \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}\left(\frac{n}{y}\right)$$

Come nel caso delle serie di Fourier valgono le seguenti proprietà della trasformata di Fourier:

7.4.1 Proposizione *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$;*

- $\widehat{f+g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) + \widehat{g}(\xi)$.
- $\forall z \in \mathbb{C} \quad \widehat{zf}(\xi) = z\widehat{f}(\xi)$.
- *Se la traslata di $x \in \mathbb{R}$ della funzione f è la funzione $f_x(y) := f(y-x)$ allora*
$$\widehat{f_x}(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{-i\xi(x)}$$
- $|\widehat{f}(\xi)| \leq ||f||_1$

Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\widehat{f}$ è uniformemente continua: infatti

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\xi+\eta) - \widehat{f}(\xi)| &= \left| \int f(x)(e^{-i(\xi+\eta)(x)} - e^{-i\xi(x)})dx \right| \\ &\leq \int |f(x)||e^{-i\xi(x)}|\,|e^{-i\eta(x)}|dx \end{aligned}$$

e $|e^{-i\xi(x)}| = 1$, sicché l'integrando $|f(x)||e^{-i\eta(x)}|$ tende a zero per $\eta \longrightarrow 0$ ($|f(x)|$ è limitato).

Definiamo ora una convoluzione sullo spazio $L^1(\mathbb{R})$. Esattamente come nel caso di $L^1(\mathbb{T})$ si dimostra il seguente

7.4.2 Lemma *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ allora, per quasi ogni $y \in \mathbb{R}$, la funzione $x \longmapsto f(x)g(y-x)$ è integrabile.*

Possiamo quindi, per ogni $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ definire la loro *convoluzione* $f*g \in L^1(\mathbb{R})$ come
$$f * g(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(y-x)dx$$
Come nel caso delle serie di Fourier:

$$||f * g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1$$

7.4.3 Proposizione *Rispetto alla convoluzione, lo spazio $L^1(\mathbb{R})$ diviene un'algebra associativa commutativa, ed inoltre*

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$$

7.4.4 Esempio *Calcoliamo la convoluzione di una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ con una funzione $g \in L^1(\mathbb{R})$ della forma:*

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^*} h(\xi)e^{i\xi(x)}d\xi$$

(queste funzioni sono l'analogo dei polinomi trigonometrici[7]*) ove $h \in L^1(\mathbb{R}^*)$. Si ha che*

$$\begin{aligned} f * g(x) = &\int f(y)g(x-y)dy = \frac{1}{2\pi}\int f(y)\int h(\xi)e^{i\xi(x-y)}d\xi dy \\ =&\frac{1}{2\pi}\int h(\xi)e^{i\xi(x)}\int f(y)e^{-i\xi(y)}dyd\xi \\ =&\frac{1}{2\pi}\int h(\xi)\widehat{f}(\xi)e^{i\xi(x)}d\xi \end{aligned}$$

Quindi, se $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^*)$ otteniamo la *formula di inversione di Fourier*:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int \widehat{f}(\xi)e^{i\xi(x)}d\xi$$

(il secondo membro di questa espressione si dice *antitrasformata di Fourier*).

Vogliamo ora costruire l'analogo del nucleo di Fejér nel contesto della trasformata di Fourier: consideriamo la funzione

$$K(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-|\xi|)e^{i\xi(x)}d\xi$$

La famiglia di funzioni

$$K_y(x) = yK(xy)$$

($y \in \mathbb{R}$) si dice *nucleo di Fejér*.

7.4.5 Proposizione *Il nucleo di Fejér soddisfa alle proprietà seguenti:*

- $$\frac{1}{2\pi}\int K_y(x)dx = 1$$

[7]Osserviamo che $\mathbb{R}^*$ gioca il ruolo che $\mathbb{Z}$ ha nelle serie di Fourier: le variabili continue ξ sostituiscono quelle discrete n, gli integrali su $\mathbb{R}^*$ sostituiscono le somme su $\mathbb{Z}$ e così via. Esistono comunque polinomi trigonometrici anche nel caso delle funzioni reali: vengono considerati nell'approssimazione delle funzioni quasi-periodiche, importanti ad esempio in Meccanica Celeste.

- *Per $y \longrightarrow \infty$:*
$$||K_y||_1 = O(1)$$
- *Per ogni $\delta > 0$:*
$$\lim_{y\longrightarrow\infty}\int_{|x|>\delta}|K_y(x)|dx = 0$$

DIMOSTRAZIONE: Calcoliamo la norma $||.||_1$ di $K(x)$, usando la nostra conoscenza del nucleo di Fejér per le serie trigonometriche: sappiamo che

$$\lim_{N\longrightarrow\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 dx = 1$$

Dato che $\int K_y(x)dx = \int yK(yx)dx = \int K(yx)d(yx) = \int K(x)dx$ possiamo prendere $y = N+1$, ottenendo

$$K_y(x) = \frac{1}{2\pi(N+1)}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

e quindi

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin\delta}{\delta}\right)^2\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 dx &< \int_{-\delta}^{\delta}K_y(x)dx\\ &< \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 dx\end{aligned}$$

Per $\delta \longrightarrow 0$ il numero $\int K(x) = \lim_{y\longrightarrow\infty}\int_{-\delta}^{\delta}K_y(x)dx$ è compreso fra $\sin^2\delta/\delta^2$ e 1. Quindi, per arbitrarietà di δ, $\int K(x)dx = 1$.

Questo calcolo implica le (1)–(3).

QED

A questo punto, come nel caso delle serie di Fourier, si trova che

$$\lim_{y\longrightarrow\infty}||f * K_y(x) - f||_1 = 0$$

e si dimostra il

7.4.6 Teorema *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora*

$$f = \lim_{y\longrightarrow 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-y}^{y}\left(1-\frac{|\xi|}{y}\right)\widehat{f}(\xi)e^{i\xi(x)}d\xi$$

(in norma $||.||_1$).
da cui si deduce un "teorema di unicità":

7.4.7 Teorema *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^*$ $\widehat{f}(\xi) = 0$ allora $f = 0$.*
In altri termini, *se due funzioni hanno eguali trasformate di Fourier, debbono coincidere:* la trasformata di Fourier determina univocamente la funzione stessa. Inoltre la funzione $\widehat{f}$ è nulla all'infinito:

Vogliamo ora un analogo del teorema di approssimazione di Weierstrass:

7.4.8 Teorema *Le funzioni la cui trasformata di Fourier ha supporto compatto sono un sottospazio denso in $L^1(\mathbb{R})$.*

DIMOSTRAZIONE: Ogni funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ si approssima con una famiglia $\{f * K_y\}$ di funzioni: dimostriamo che gli elementi di questa famiglia hanno trasformata di Fourier a supporto compatto.

Per la formula di inversione di Fourier applicata al nucleo di Fejér:

$$\widehat{K_y}(\xi) = \max\left(1 - \frac{|\xi|}{y}, 0\right)$$

e, dato che $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$:

$$\widehat{f * K_y}(\xi) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|\xi|}{y}\right)\widehat{f}(\xi) & \text{se } |\xi| \le y \\ 0 & \text{se } |\xi| > y \end{cases}$$

Quindi queste trasformate di Fourier hanno supporto compatto.

QED

Possiamo ora dedurre il

7.4.9 Lemma (RIEMANN–LEBESGUE) *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora*

$$\lim_{|\xi| \longrightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$$

DIMOSTRAZIONE: Se g ha trasformata di Fourier a supporto compatto e approssima $f \in L^1(\mathbb{T})$ per meno di ε:

$$||f - g||_1 < \varepsilon$$

allora

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| = |\widehat{f - g}(\xi)| \le ||f - g||_1 < \varepsilon$$

Ma $|\widehat{g}(\xi)| \longrightarrow 0$ per $|\xi| \longrightarrow \infty$ avendo supporto compatto, quindi anche $\widehat{f}$ è nulla all'infinito.

QED

Sia $A(\mathbb{R}^*)$ lo spazio delle funzioni che sono trasformate di Fourier di funzioni $L^1(\mathbb{R})$.

7.4.10 Teorema *$A(\mathbb{R}^*)$ è un'algebra (rispetto alla moltiplicazione $FG(\xi) = F(\xi)G(\xi)$) di funzioni continue nulle all'infinito.*
Ora consideriamo lo spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R})$: cerchiamo un sistema ortonormale in $L^2(\mathbb{R})$, in analogia a quanto fatto nel caso di $\mathbb{T}$; sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione misurabile tale che

$$|f(x)| \leq ce^{-a|x|}$$

ove C e a sono costanti positive. Ad esempio, la *funzione di Gauss*

$$G(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

verifica questa ipotesi.

7.4.11 Lemma *Se f e xf sono in $L^1(\mathbb{R})$ allora $\widehat{f}$ è derivabile e*

$$\widehat{f}' = \widehat{-ixf}$$

DIMOSTRAZIONE: Basta derivare $\widehat{f}$:

$$\widehat{f}'(\xi) = \frac{d}{dx}\int f(x)e^{-i\xi(x)}dx = -i\int xf(x)e^{-i\xi(x)}dx$$

QED

In generale, se $f, xf, x^2f, ..., x^nf \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\widehat{f}$ sarà derivabile n volte:

$$\widehat{f}^{(n)} = \widehat{(-ix)^n f}$$

7.4.12 Teorema *Le funzioni*

$$f(x),\ xf(x),\ x^2f(x),\ ...,\ x^nf(x),\ ...$$

sono un sistema completo in $L^2(\mathbb{R})$.

DIMOSTRAZIONE: Assumiamo il contrario: allora, per il teorema di Hahn–Banach, deve esistere una funzione non nulla $h \in L^2(\mathbb{R})$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{R}} x^n f(x)\overline{h(x)}dx = 0$$

Ovviamente $f\overline{h} \in L^1(\mathbb{R})$ e quindi anche $e^{a_1|x|}fh \in L^2(\mathbb{R})$ per ogni $a_1 < a$. Ora sia

$$g(\xi) := \widehat{f\overline{h}}$$

Allora, per il lemma, la funzione g è derivabile infinite volte: $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, e tutte le sue derivate sono nulle in 0. Ma la funzione g si prolunga ad una funzione analitica nella striscia del piano complesso $\{\zeta = \xi + i\eta \mid |\eta| < a\}$, perché l'integrale

$$\int f(x)\overline{h(x)}e^{-i\zeta(x)}dx$$

converge e coincide, sulla parte reale della striscia, con g; quindi g è una funzione analitica con tutte le derivate nulle in 0, sicché $g(0) = 0$ e, per il teorema di unicità della trasformata di Fourier:

$$f(x)h(x) = 0 \qquad \text{q.o.}$$

Dunque $h = 0$ in $L^2(\mathbb{R})$, che è assurdo.

QED

Questo dimostra la completezza del sistema di funzioni $\{x^n f(x)\}$, ma noi vorremmo in più un sistema ortogonale.

Nel prossimo capitolo vedremo come la trasformata di Fourier sia un isomorfismo di $L^2(\mathbb{R})$ in sé, e mostreremo come costruire un sistema ortonormale: avremo bisogno, per questo, di considerare spazi di funzioni differenziabili, che non sono spazi di Banach, e che necessitano di una teoria a parte.

Capitolo 8

SPAZI VETTORIALI TOPOLOGICI

Gli spazi di Hilbert e Banach hanno come esempi principali gli spazi di funzioni sommabili e gli spazi di funzioni continue: tuttavia esiste un'altra classe di spazi vettoriali molto importanti in Analisi, gli spazi di funzioni differenziabili, per i quali non è possibile trovare una struttura hilbertiana o di Banach. Per ovviare a questo inconveniente di solito si considerano sottospazi di questi spazi che siano di Hilbert, ad esempio nella teoria delle equazioni a derivate parziali si considerano gli spazi di Sobolev. Tuttavia è possibile dare una teoria per spazi vettoriali topologici non di Banach, i cui esempi sono gli spazi delle funzioni differenziabili: la teoria della dualità di questi spazi conduce al concetto di distribuzione, che generalizza quello di funzione e di misura.

8.1 Topologie e seminorme

Gli spazi di Hilbert e, più in generale, gli spazi normati, sono al tempo stesso spazi vettoriali e spazi topologici, e la loro struttura vettoriale è compatibile con quella topologica, nel senso che le funzioni di somma fra vettori e moltiplicazione per uno scalare sono continue; questo suggerisce la seguente definizione:

8.1.1 Definizione *Se X è uno spazio vettoriale sul campo fissato*[1] $\mathbb{K}$ *e $\mathcal{T}$ una topologia sull'insieme X, la coppia $(X, \mathcal{T})$ si dice uno* spazio vettoriale topologico *se le applicazioni di addizione e prodotto per uno scalare sono continue.*

Una base $\mathcal{U}_0$ di intorni dell'elemento zero $0 \in X$ gode delle proprietà seguenti

- $\mathcal{U}_0$ determina la topologia di X: infatti se $x_0 \in X$, la continuità della somma implica immediatamente che $\{x_0 + U | U \in \mathcal{U}_0\}$ è una base di intorni di x_0, ovvero, la traslazione per un certo vettore di un intorno dello zero fornisce un intorno del vettore dato.

[1] Per noi il campo $\mathbb{K}$ sarà sempre $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$.

- Ogni intorno dello zero $U \in \mathcal{U}_0$ è un *insieme assorbente*, il che significa che

$$\forall x \in X\ \exists k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad kx \in U$$

il che segue immediatamente dalla continuità del prodotto per uno scalare.

è ovvio che possiamo scegliere una base $\mathcal{U}_0$ di intorni dello zero di X tale che ogni suo elemento sia un *insieme equilibrato*, vale a dire tale che

$$\forall U \in \mathcal{U}_0\ \forall k \in \mathbb{R} \quad |k| \leq 1 \Rightarrow kU \subset U$$

8.1.2 Definizione *Uno spazio vettoriale topologico di dice* localmente convesso *se esiste una base $\mathcal{U}_0$ di intorni dello zero* convessi*, cioè tali che*

$$\forall U \in \mathcal{U}_0\ \forall x, y \in X\ \forall a, b \in \mathbb{R}_+ \quad a + b = 1 \Rightarrow ax + by \in U$$

Una conseguenza immediata di questa definizione è che in uno spazio localmente convesso esiste sempre una base di intorni dello zero convessi ed equilibrati.

Finora gli unici esempi che conosciamo di spazi vettoriali topologici sono gli spazi normati, nei quali la topologia è indotta da una metrica; vedremo fra breve tuttavia degli esempi di spazi vettoriali topologici non normati: gli spazi delle funzioni differenziabili.

In generale, se $F(S)$ è un insieme di funzioni da un insieme qualsiasi S in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ munito di somma e prodotto per scalari definiti punto per punto, la stessa base di intorni rende $F(S)$ uno spazio localmente convesso.

In generale uno spazio vettoriale topologico non è di Hausdorff (lo sono certamente gli spazi normati, perché metrizzabili):

8.1.3 Proposizione *In ogni spazio vettoriale topologico X esiste un sottospazio X_0 tale che*

- *Ogni intorno non vuoto di un punto $x \in X$ contiene l'insieme $x + X_0$.*
- *Lo spazio quoziente X/X_0 (con la topologia quoziente*[2] *è di Hausdorff.*

DIMOSTRAZIONE: Definiamo

$$X_0 := \bigcap_{U \in \mathcal{U}_0} U$$

come intersezione degli intorni (non vuoti!) dello zero; allora X_0 è ovviamente (per continuità delle operazioni di somma e prodotto) un sottospazio di X che verifica la (1).

[2]Che ovviamente lo rende uno spazio vettoriale topologico.

Se $x, y \in X/X_0$ deve esistere un intorno $U \subset X/X_0$ dello zero che non contenga $x - y$ e, per continuità della somma, deve quindi esistere un intorno $V \subset X/X_0$ dello zero tale che $V - V \subset U$: allora $x + V$ e $y + V$ sono intorni disgiunti che contengono x e y.

QED

Se la topologia di uno spazio vettoriale topologico è indotta da una distanza $d(x, y)$, allora possiamo definire la funzione $q : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ come

$$q(x) := d(0, x)$$

osserviamo che in questa situazione lo spazio è certamente separabile (si sfrutta la densità di $\mathbb{Q}_+$ in $\mathbb{R}_+$).

Un'altra osservazione immediata è che se la funzione q determina la metrica, cioè se vale la

$$\forall x, y \in X \qquad d(x, y) = q(x - y)$$

allora la funzione q è simmetrica, subadditiva e non degenere, cioè verifica le relazioni

$$(Q) \qquad q(x) = q(-x) \qquad q(x + y) \leq q(x) + q(y) \qquad q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Viceversa, se X è uno spazio vettoriale topologico metrizzabile e $q : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione soddisfacente alle relazioni (Q) e tale che $d(x, y) = q(x-y)$ per una distanza che induca la topologia di X allora q si dice *quasinorma compatibile* per X.

8.1.4 Definizione *Uno spazio vettoriale topologico localmente convesso, metrizzabile e completo si dice* spazio di Fréchet*.*

L'esempio principale è quello degli spazi di funzioni differenziabili; le topologie che vi introdurremo sono definite in termini di seminorme.

Osserviamo che la definizione di seminorma, di funzionale di Minkowski ed il teorema di Hahn–Banach che abbiamo discusso nel capitolo precedente valgono per ogni spazio vettoriale reale (o complesso), quindi possiamo darle per uno spazio vettoriale topologico.

Se $\mathcal{S}$ è una famiglia di seminorme in uno spazio vettoriale X, possiamo considerare la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ generata dalla sottobase di aperti

$$U_{p,\varepsilon}(x) := \{y \in X \mid p(x - y) < \varepsilon\}$$

al variare di $x \in X$, $p \in \mathcal{S}$ e $\varepsilon > 0$. Si dice che $\mathcal{S}$ è una sl sottobase di seminorme per X.

Osserviamo che

8.1.5 Proposizione *La topologia $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ su X è di Hausdorff se e solo se*

$$\forall x \in X\ \forall p \in \mathcal{S} \quad p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

8.1.6 Definizione *Se X è uno spazio vettoriale topologico la cui topologia coincida con $\mathcal{T}(\mathcal{S})$, l'insieme $\mathcal{S}$ si dice* base di seminorme *per X se*

- *Per ogni $p \in \mathcal{S}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$: $\lambda p \in \mathcal{S}$.*
- *Per ogni $p_1, p_2 \in \mathcal{S}$ esiste $p \in \mathcal{S}$ tale che*

$$\forall x \in X \quad p_1(x) \leq p(x) \text{ e } p_2(x) \leq p(x)$$

8.1.7 Teorema *X è uno spazio vettoriale localmente convesso se e solo se è uno spazio vettoriale topologico la cui topologia sia definita da una base di seminorme ed è di Hausdorff. Se $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ sono basi di seminorme per le topologie $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ su X allora la topologia $\mathcal{T}'$ è più fine di $\mathcal{T}$ se e solo se ogni seminorma di $\mathcal{S}$ è maggiorata da qualche seminorma di $\mathcal{S}'$.*

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo intanto che se $\mathcal{S}_0$ è una famiglia di seminorme l'insieme dei multipli positivi delle somme *finite* di elementi di $\mathcal{S}_0$ è una base di seminorme per $\mathcal{T}(\mathcal{S}_0)$. ora sia $\mathcal{S}$ una base di seminorme; una base di intorni dello $0 \in X$ è data dagli aperti

$$\mathcal{U}_{\mathcal{S}}(0) := \{B_p\}_{p \in \mathcal{S}}$$

ove $B_p := \{x \in X \mid p(x) < 1\}$. Ovviamente si tratta di una base di intorni, e, per ogni $x, x_0 \in X$, $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathcal{S}$:

$$p(\lambda x - \lambda_0 x_0) \leq |\lambda| p(x - x_0) + |\lambda - \lambda_0| p(x_0)$$

il che prova che la topologia definita da $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}(0)$ rende X uno spazio vettoriale topologico, localmente convesso perché le p sono seminorme.

Viceversa, se X è localmente convesso e $\mathcal{U}(0)$ è una base invariante per omotetie di intorni dello 0 convessi ed equilibrati, i funzionali di Minkowski

$$\mathcal{S} := \{p_B\}_{B \in \mathcal{U}(0)}$$

sono ovviamente una base di seminorme per la topologia di X perché gli elementi di $\mathcal{U}(0)$ sono aperti e $x \in B \iff p_B(x) < 1$.

Dimostriamo la seconda parte del teorema: che la condizione sia sufficiente è ovvio. Ma $\mathcal{T}$ è meno fine di $\mathcal{T}'$ se e solo per ogni intorno convesso equilibrato dello zero $U \in \mathcal{T}$ contiene un intorno convesso equilibrato dello zero $U' \in \mathcal{T}'$, sicché

$$p_{U'}(x) < 1 \Rightarrow p_U(1) < 1$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha allora che $p_U((p_{U'}(x)+\varepsilon)^{-1}x) < 1$ e quindi

$$\forall x \in X \quad p_U(x) < p_{U'}(x) + \varepsilon$$

Per arbitrarietà di ε si ha che $p_U \leq p_{U'}$.

QED

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto, lo spazio vettoriale $C^\infty(\Omega)$ delle funzioni infinitamente differenziabili su Ω è uno spazio vettoriale topologico, la cui topologia è indotta dalle seminorme

$$p_{Ki}(f) := \max_{x\in K} |\partial^i f(x)|$$

ove $K \subset \Omega$ è un compatto e $i = (i_1, ..., i_h)$ un multiindice rispetto al quale si effettuano le derivate parziali che figurano nella definizione (cioè si deriva i_k volte rispetto alla variabile x_k).

8.1.8 Teorema *Lo spazio $C^\infty(\Omega)$ è di Fréchet.*

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamo che la topologia di $C^\infty(\Omega)$ è indotta da una famiglia numerabile di seminorme. Sia

$$K_m := \left\{ x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{m} \text{ e } d(x,0) \leq m \right\}$$

Ovviamente K_m è compatto, $K_m \overset{o}{\subset\longrightarrow} K_{m+1}$ e $\bigcup_m K_m = \Omega$. Definiamo le seminorme

$$p_m(f) := \sup_{x\in K_m} \sup_{|i|\leq m} |\partial^i f(x)|$$

Se $K \subset \Omega$ è un qualsiasi compatto allora la funzione $\delta(x) := d(x, \partial\Omega)$ è continua e positiva su K, dunque ha un minimo δ_0 su K; analogamente la funzione $\Delta(x) = d(x, 0)$ assume un massimo Δ_0 su K. Allora scegliamo m in modo che

$$\frac{1}{m} < \delta_0 \qquad \text{e} \qquad \Delta_0 < m$$

Con questa scelta di m si ha che $K_m \subset K$ e, se $|i| \leq m$, la seminorma $p_{K,i}$ è maggiorata da p_m. Che poi ogni seminorma p_m sia maggiorata da $\sum_{i=0}^m p_{K_m,i}$ è ovvio.

Quindi la topologia di $C^\infty(\Omega)$ è generata dalle $\{p_m\}$, ed in particolare lo spazio è metrizzabile.

Ora proviamo che $C^\infty(\Omega)$ è completo. Se $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy, il che significa che è di Cauchy rispetto a qualsiasi seminorma p_m che genera la topologia di $C^\infty(\Omega)$. Ma allora la restrizione di $\{f_n\}$ a K_n è una successione di Cauchy di funzioni definite sul compatto K_m: ora sfruttiamo il fatto che lo spazio delle funzioni differenziabili $C^\infty(K)$ su un compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ è di Banach rispetto alla norma

$$||f||_{C^\infty} := \sup_{x \in K} \sup_i |\partial^i f(x)|$$

come si constata facilmente (la convergenza in questo spazio è la convergenza uniforme della f e di tutte le sue derivate parziali). Dunque esiste una funzione $F_m \in C^\infty(K)$ alla quale la successione ristretta a K_m converge. Per definizione di K_m le funzioni F_m così definite coincidono sulle intersezioni $K_m \cap K_l$ e quindi inducono una funzione $F \in C^\infty(\Omega)$ tale che, per definizione,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} p_m(f_n - F_m) = 0$$

QED

In $C^\infty(\Omega)$ è contenuto lo spazio $C_c^\infty(\Omega)$ delle funzioni differenziabili a supporto compatto. Non si tratta di un sottospazio chiuso, quindi non è certo completo per la topologia indotta da quella di $C^\infty(\Omega)$. Definiamo ora su $C_c^\infty(\Omega)$ una topologia più forte di quella indotta da $C^\infty(\Omega)$.

Se K_m è il sistema di compatti definito nella dimostrazione del teorema precedente, ad ogni successione $N = \{N_n\}$ di numeri naturali associamo la seminorma

$$p_N(f) := \sum_{m=1}^{\infty} N_m \sup_{x \in K_m \setminus K_{m-1}} \sup_{|i| \leq N_m} |\partial^i f(x)|$$

(assumiamo $K_0 := \emptyset$).

8.1.9 Teorema *Lo spazio $C_c^\infty(\Omega)$ è completo e non metrizzabile.*

Dimostrazione: Consideriamo una successione di Cauchy $\{f_n\}$; dimostriamo allora che tutte le funzioni f_n appartengono a $C_K^\infty(\Omega)$, ove K è un fissato compatto e $C_K^\infty(\Omega)$ denota lo spazio delle funzioni $f \in C^\infty(\Omega)$ a supporto in K: si tratta di un sottospazio di Fréchet di $C^\infty(\Omega)$, quindi la successione $\{f_n\}$ dovrà convergere ad un elemento di $C_K^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$ col che avremo la prima parte del teorema.

Per assurdo supponiamo dunque che i supporti delle $\{f_n\}$ non stiano in nessun compatto K fissato. Possiamo supporre (a meno di rinumerare le $\{f_n\}$) che sia $\operatorname{supp} f_m \notin K_m$, i.e. che esista $x_m \notin K_m$ con $f_m(x_m) \neq 0$. Allora se

$$V := \left\{ f \in C_c^\infty(\Omega) \mid \forall m \geq 1 \ |f(x_m)| \leq \frac{|f_m(x_m)|}{m} \right\}$$

l'intersezione $V \cap C_K^\infty(\Omega)$ è aperta (dato che ogni compatto K contiene solo un numero finito di x_m e quindi questa intersezione è intersezione finita di aperti) i.e. V è aperto in $C_c^\infty(\Omega)$. Se p_V è il funzionale di Minkowski di V allora, dato che V

è equilibrato e convesso, p_V è una seminorma continua in $C_c^\infty(\Omega)$, precisamente la
$$p_V(f) = \sup_m \left| \frac{mf(x_m)}{f_m(x_m)} \right|$$
Quindi $m \leq p_V(f_m)$ e la successione di Cauchy $\{f_n\}$ non converge in $C_K^\infty(\Omega)$ il che è assurdo.

Dunque lo spazio $C_c^\infty(\Omega)$ è completo nella sua topologia. Dimostriamo che però non è metrizzabile. Se lo fosse, infatti, presa una sua successione $\{f_m\}$ tale che $\operatorname{supp} f_m \notin K_m$ dalla continuità della moltiplicazione per uno scalare si deduce che esiste un numero $\delta_m > 0$ tale che $d(0, \delta_m f_m) < 1/m$ e quindi la successione $\{\delta_m f_m\}$ tende a zero; ma si è visto nelle dimostrazione della prima parte che questo non è possibile a meno che tutte le funzioni $\{f_n\}$ appartengano ad un medesimo spazio $C_K^\infty(\Omega)$ per un compatto K fissato. L'assurdo prova che $C_c^\infty(\Omega)$ non è metrizzabile.

QED

Si può dimostrare che lo spazio $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per $1 \leq p < \infty$ ed in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Limitiamoci qui a fornire un esempio di funzione appartenente a $C_c^\infty(\mathbb{R})$:
$$f(x) = \begin{cases} \exp \frac{2}{x^2-1} \text{ se } |x| < 1 \\ 0 \text{ se } |x| \geq 1 \end{cases}$$
Funzioni di questo tipo sono considerate nella costruzione di partizioni dell'unità e nello studio delle trasformate di Fourier e delle convoluzioni negli spazi di funzioni differenziabili.

8.2 Dualità e topologie deboli

8.2.1 Definizione *Due spazi vettoriali X e Y su $\mathbb{K}$ si dicono* in dualità *se esiste una forma bilineare*
$$\langle , \rangle : V \times W \longrightarrow \mathbb{K}$$
tale che
$$\begin{gathered} \forall x \in X \ (\forall y \in Y \quad \langle x, y\rangle = 0) \Rightarrow x = 0 \\ \forall y \in Y \ (\forall x \in X \quad \langle x, y\rangle = 0) \Rightarrow y = 0 \end{gathered}$$

Evidentemente una dualità fra X e Y induce due applicazioni lineari
$$\begin{aligned} X &\longrightarrow Y^* \\ x &\longmapsto (y \longmapsto \langle x, y\rangle) \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} Y &\longrightarrow X^* \\ y &\longmapsto (x \longmapsto \langle x, y\rangle) \end{aligned}$$

La forma bilineare $\langle,\rangle$ si dice *fortemente non degenere* se queste mappe sono isomorfismi: in questo caso $X = Y^*$.

Se X e Y sono in dualità possiamo considerare una topologia su X, la $\sigma(X,Y)$*-topologia*, che è per definizione la topologia debole rispetto alle applicazioni

$$\{x \longmapsto \langle x, y\rangle\}_{y\in Y}$$

Questa topologia è indotta dalla base di seminorme $\{p_F\}_{F\subset Y \text{ finito}}$ ove

$$p_F(x) := \sum_{y\in F} |\langle y, x\rangle|$$

8.2.2 Lemma *Se X è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e F un funzionale lineare, allora F è continuo se e solo se per ogni base $\mathcal{S}$ di seminorme della topologia di X esiste $p \in \mathcal{S}$ tale che*

$$\forall x \in X \quad |F(x)| \leq p(x)$$

Dimostrazione: Che la condizione sia sufficiente è ovvio. Se poi F è un funzionale lineare continuo, la $x \longmapsto |F(x)|$ è una seminorma continua per X, quindi vale la condizione dell'enunciato.

QED

8.2.3 Proposizione *Se X e Y sono spazi vettoriali in dualità e F è un funzionale lineare su X allora sono equivalenti le*

- *$\exists y \in Y\ \forall x \in X\ F(x) = \langle y, x\rangle$.*
- *F è continuo nella $\sigma(X,Y)$-topologia.*

Dimostrazione: Che (1) implichi (2) è ovvio. Se vale la (2), per il lemma deve esistere un $F = \{y_1, ..., y_n\} \subset Y$ finito tale che

$$\forall x \in X \quad |F(x)| \leq p_F(x)$$

i.e.

$$\forall x \in X \quad \langle y_1, x\rangle = ... = \langle y_n, x\rangle = 0$$

da cui $F(x) = 0$ per dualità. Quindi se M è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ generato dai vettori $\{(\langle y_1, x\rangle, ..., \langle y_n, x\rangle)\}_{x\in X}$ deve esistere un funzionale lineare $f \in M^*$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[dr] & (\langle y_1, x\rangle, ..., \langle y_n, x\rangle) \arrow[d, "f"] \\ & F(x) \end{tikzcd}$$

sia commutativo. Ma ogni tale funzionale f è determinato univocamente da un vettore $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$ in modo che

$$f(r_1, ..., r_n) = \sum_{i=1}^{n} v_i c_i$$

e quindi

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i \langle y_i, x\rangle = \langle y, x\rangle$$

QED

Ovviamente possiamo definire per uno spazio vettoriale topologico qualsiasi, proprio come avevamo fatto per gli spazi normati, lo spazio X^* *duale topologico* dei funzionali lineari continui su X.

Per ogni funzionale $f \in X^*$ esiste la forma bilineare fra X e X^*:

$$x \longmapsto \langle f, x\rangle := f(x)$$

che è una dualità fra X e X^*:

$$\forall x \in X \quad \langle f, x\rangle = 0 \Rightarrow f = 0$$

8.2.4 Definizione *Su uno spazio vettoriale topologico la* topologia debole *è la $\sigma(X, X^*)$-topologia e la* topologia *-debole *è la $\sigma(X^*, X)$-topologia.*

Infatti dato che $X \hookrightarrow X^{**}$ la dualità fra X e X^* induce una dualità fra X^* e X: si noti che ciascuna di queste dualità è fortemente non degenere se e solo se lo spazio X è riflessivo.

Il nome della topologia debole viene dal fatto (evidente) che si tratta di una topologia più debole di quella di X. Per la caratterizzazione precedente dei funzionali lineari e continui abbiamo che

8.2.5 Proposizione *Un funzionale lineare su X è continuo se e solo se è debolmente continuo.*

8.2.6 Definizione *Se X e Y sono spazi vettoriali in dualità, il* polare *di un sottoinsieme $E \subset X$ è il sottoinsieme di Y:*

$$E^o := \{y \in Y \mid \forall x \in X \ \ \mathrm{Re}\langle y, x\rangle \leq 1\}$$

(La parte reale è ovviamente superflua nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Ovviamente:

8.2.7 Proposizione *Il polare è un insieme convesso, chiuso nella $\sigma(Y,X)$-topologia, contenente lo zero e tale che $E \subset E^{oo}$.*

In particolare, se X è localmente convesso, il polare $E^o \subset X^*$ è *-debolmente chiuso e se $F \subset X^*$ il polare $F^o \subset X$ è debolmente chiuso. Se $E \subset X$ allora evidentemente $\overline{E}^o = E^o$.

Prima di affrontare il risultato principale sui polari, diamo alcuni lemmi sulla convessità, che sono in realtà corollari del teorema di Hahn–Banach, applicato a spazi vettoriali topologici.

8.2.8 Lemma *Sia X uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e K un chiuso convesso in X contenente l'origine. Allora se $0 \in K$, per ogni $x_0 \notin K$ esiste un funzionale lineare continuo F su X tale che $\operatorname{Re} f(x_0) > 1$ ma*

$$\forall x \in X \quad \operatorname{Re} f(x) < 1$$

(nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la parte reale è superflua).

Dimostrazione: Dato che per ipotesi $\complement K$ è aperto, deve esistere un intorno V di 0 tale che $x_0 + V \subset \complement K$; ma la topologia di X è localmente convessa, quindi V può scegliersi convesso ed equilibrato, sicché $x_0 + V \cap K = \emptyset$ implica

$$x_0 + \frac{1}{2}V \cap K + \frac{1}{2}V = \emptyset$$

Ora, $U := K + \frac{1}{2}U$ è aperto (essendo unione di aperti) e convesso, dato che, se $k_1, k_2 \in K$, $v_1, v_2 \in V$ e $a + b = 1$ $(a, b > 0)$:

$$a\left(k_1 + \frac{1}{2}v_1\right) + b\left(k_2 + \frac{1}{2}v_2\right) = ak_1 + bk_2 + \frac{av_1 + bv_2}{2} \in U$$

Ma $x_0 \notin \overline{U}$ e, se $M := \mathbb{R}x_0$ e p_U è il funzionale di Minkowski di U, allora per

$$\begin{aligned} f_0 : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ rx_0 &\longmapsto rp_U(x_0) \end{aligned}$$

$(r \in \mathbb{R})$ si ha che

$$f_0(x_0) = p_U(x_0) > 1$$

(perché $x_0 \notin \overline{U}$) e

$$\forall x \in M \quad f_0(x) \leq p_U(x)$$

Ora per il teorema di Hahn–Banach esiste un funzionale lineare f su X che estende f_0 ed è maggiorato dalla seminorma p_U. Ma per definizione $p_U \leq 1$ su U, quindi su U la tesi è verificata. Infine usiamo la linearità di f per ottenere:

$$|f(x)| \leq (p_U(x) + p_U(-x)) = p(x)$$

i.e. la continuità di f.

QED

8.2.9 Teorema del bipolare *Se X è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e $K \subset X$ è un insieme convesso contenente l'origine di X allora la chiusura di K nella topologia di X coincide con la chiusura nella topologia debole e si ha*

$$\overline{K} = \overline{K}^{deb} = K^{oo}$$

(i polari si riferiscono alla dualità fra X e X^*).

DIMOSTRAZIONE: Dato che $\overline{K} \subset \overline{K}^{oo} = K^{oo}$ e K^{oo} è debolmente chiuso, basta dimostrare che $K^{oo} \subset \overline{K}$.

Sia $x \notin \overline{K}$; allora, per il lemma, esiste $f \in X^*$ tale che

$$\forall x \in \overline{K} \quad \mathrm{Re}\langle f, x\rangle < 1$$

i.e. $f \in \overline{K}^o = K^o$ e $\mathrm{Re}\langle f, x_0\rangle > 1$ cioè $x_0 \notin K^{oo}$.

QED

Osserviamo che se $f : X \longrightarrow Y$ è una mappa lineare continua fra spazi vettoriali topologici, possiamo definirne al solito modo la *trasposta* come

$$\begin{aligned} f^* : & Y^* \longrightarrow X^* \\ & \psi \longmapsto (x \longmapsto \psi(f(x))) \end{aligned}$$

che è ovviamente lineare e continua (consideriamo i duali topologici).

8.2.10 Teorema *Se $f : X \longrightarrow Y$ è una mappa lineare continua e iniettiva fra spazi vettoriali topologici allora*

$$\ker f^* = (\mathrm{im}\, f)^o$$

DIMOSTRAZIONE: Se consideriamo le dualità $\langle,\rangle$ fra X e X^*, e Y e Y^*, ovviamente:

$$\forall x \in X \ \forall \psi \in Y^* \quad \langle \psi, f(x)\rangle = \langle f^*(\psi), x\rangle$$

perciò, se $\psi \in (\mathrm{im}\, f)^o$ allora per ogni $x \in X$: $\langle f^*(\psi), x\rangle = 0$ e quindi $f^*(\psi) = 0$; viceversa, se $\psi \in \ker f^*$ allora per ogni $x \in X$; $\langle f^*(\psi), x\rangle = 0$, dunque $\psi \perp \mathrm{im}\, f$.

QED

8.2.11 Corollario *Una mappa lineare continua $f : X \longrightarrow Y$ fra spazi vettoriali topologici, ove Y sia localmente convesso, è biunivoca se e solo se* $\mathrm{im}\, f$ *è denso in Y.*

DIMOSTRAZIONE: Per il teorema di Hahn–Banach: se $M \neq Y$ è un sottospazio vettoriale di Y allora esiste un funzionale lineare continuo non identicamente nullo che si annulla identicamente su M; quindi se $\overline{\mathrm{im}\, f}$ non è denso, esiste un funzionale $\psi \in Y^*$ non nullo che si annulla su $\mathrm{im}\, f$, i.e. tale che $f^*(\psi) = 0$.

QED

Il seguente fondamentale teorema sancisce la compattezza *-debole della palla associata al funzionale di Minkowski p:

$$\{f \in X^* \mid \forall x \in X \ |f(x)| \leq p(x)\}$$

8.2.12 Teorema (ALAOGLU–BANACH–BOURBAKI) *Se X è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e W un intorno convesso ed equilibrato dello zero allora il polare W^o di W in X^* è $\sigma(X, X^*)$-compatto.*

DIMOSTRAZIONE: Sia p il funzionale di Minkowski di W allora per $x \in W$: $p(x) < 1$, e quindi se $|f(x)| \leq p(x)$ la parte reale di $\langle f, x\rangle$ è ≤ 1 e $f \in W^o$; ma W è equilibrato, cioè $|\langle f, x\rangle| \leq p(x)$ e quindi

$$W^o = \{f \in X^* \mid \forall x \in X \ |f(x)| \leq p(x)\}$$

Dimostriamo che si tratta di un insieme *-debolmente compatto. Se, per $x \in X$:

$$K_x := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq p(x)\}$$

Si tratta ovviamente di un compatto in $\mathbb{C}$, quindi, per il teorema di Tychonoff, l'insieme

$$K := \prod_{x \in X} K_x$$

pure è compatto (nella topologia prodotto, che è quella debole rispetto alle proiezioni $p_x : K \longrightarrow K_x$). Se

$$\begin{aligned} \Psi : W^o &\longrightarrow K \\ f &\longmapsto (x \in X \longmapsto f(x) \in K_x) \end{aligned}$$

evidentemente, se $\pi_x : K \longrightarrow \mathbb{C}$ è la proiezione che alla funzione $(X \xrightarrow{\kappa} \bigcup_x \{K_x\}) \in \prod_X K_x$ associa il numero $\kappa(x) \in \mathbb{C}$, allora

$$\Psi(W^o) = \bigcap_{x,y \in X} \bigcap_{z,w \in \mathbb{C}} (\pi_{zx+wy} - z\pi_x - w\pi_y)^{-1}(\{0\})$$

Ma le proiezioni π_x sono continue (per definizione) e quindi lo è la funzione $\pi_{zx+wy} - z\pi_x - w\pi_y : K \longrightarrow \mathbb{C}$; ne segue che la controimmagine tramite essa dell'insieme chiuso $\{0\}$ (cioè $\Psi(W^o)$) è un chiuso in K, che è compatto, dunque a sua volta un compatto. Infine osserviamo che Ψ è biunivoca e quindi[3] è un omeomorfismo. Dunque, essendolo $\Psi(W^o)$, anche W^o è compatto.

QED

[3] Una funzione biunivoca e continua da un compatto ad uno spazio di Hausdorff è un omeomorfismo.

8.3 Compattezza e convessità

8.3.1 Definizione *Un insieme $B \subset X$ in uno spazio vettoriale topologico si dice* limitato *se per ogni intorno dello zero $U \subset X$ esiste un numero $C > 0$ tale che $B \subset CU$.*

Dato che esiste una base di intorni chiusi dello zero, la chiusura di un insieme limitato è limitato: in generale non si tratta di un insieme compatto, a differenza del caso di dimensione finita (teorema di Heine–Borel). Tuttavia:

8.3.2 Teorema *Un insieme compatto in uno spazio vettoriale topologico è limitato.*

DIMOSTRAZIONE: Se $K \subset X$ è compatto e U un intorno equilibrato dello zero allora

$$K \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} nU = X$$

quindi, per compattezza, esiste un insieme finito di interi $\{n_1, ..., n_k\}$ tali che

$$K \subset n_1 U \cup ... \cup n_k U = \left(\max_{j=1,...,k} n_j \right) U$$

QED

Il viceversa non è vero: ad esempio, se X è normato, l'essere un insieme chiuso e limitato compatto implicherebbe la locale compattezza di X e quindi $\dim X < \infty$ (corollario 6.1.15).

8.3.3 Teorema *Uno spazio X localmente convesso di Hausdorff è normato se e solo se possiede un intorno dello zero limitato.*

DIMOSTRAZIONE: Se X è normato, ogni palla centrata nello zero è limitata. Viceversa, se X è Hausdorff e localmente convesso, e se contiene un intorno U dello zero, che possiamo supporre equilibrato, allora la famiglia $\left\{\frac{1}{n}U\right\}$ fornisce una base di intorni dello zero in X: infatti se V è un intorno dello zero, che possiamo assumere equilibrato, c'è un intero $n > 0$ tale che $U \subset nV$. Dato che X è Hausdorff si ha

$$\bigcap_{n>0} \frac{1}{n} U = \{0\}$$

e quindi il funzionale di Minkowski p_U associato a U è in realtà una norma.

QED

In alcuni casi importanti, tuttavia, un insieme limitato ha effettivamente chiusura compatta: ad esempio negli spazi $C^\infty(\Omega)$ e $C_c^\infty(\Omega)$; per dimostrarlo dobbiamo prima trarre una conseguenza dal teorema di Ascoli–Arzelà 3.5.2:

8.3.4 Teorema *Se K è un compatto contenuto in un aperto limitato Ω di $\mathbb{R}^n$ allora la mappa di restrizione, che ad una funzione f in Ω assegna la sua restrizione $f|_K$ a K trasforma insiemi limitati di $C^1(\Omega)$ in insiemi compatti di $C(K)$.*

DIMOSTRAZIONE: Per il teorema di Ascoli–Arzelà basta dimostrare che la restrizione a K di un insieme limitato in $C^1(\Omega)$ è equicontinuo in K (che sia limitato è ovvio): possiamo in effetti limitarci alle palle di centro l'origine in $C^1(\overline{\Omega})$.

Se dunque $f \in C^1(\overline{\Omega})$ allora è un fatto elementare che per ogni $x_0 \in \Omega$ esista un $r_0 > 0$ tale che se $|x - x_0| \leq r_0$ allora $x \in \Omega$ e

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \sup_{y\in\Omega} \left(\sup_{j=1,\dots,n} \left| \frac{\partial f(y)}{\partial x_j} \right| \right) |x - x_0| \leq ||f||_1 |x - x_0|$$

Quindi ogni palla centrata nell'origine di $C^1(\overline{\Omega})$ è equicontinua in Ω e quindi l'immagine di questa palla per tramite della mappa di restrizione è pure un insieme equicontinuo in K.

QED

8.3.5 Teorema *Ogni insieme chiuso e limitato in $C^\infty(\Omega)$ è compatto.*

DIMOSTRAZIONE: Esprimiamo Ω come unione numerabile di compatti $K_0 \subset K_1 \subset \dots$ tali che, se Ω_i è l'interno di K_i allora $K_i \subset \Omega_{i+1}$; dato che in uno spazio metrico un insieme è compatto se e solo se ha un punto di accumulazione, ci basterà dimostrare questa proprietà. Ci servirà il

8.3.6 Lemma *Per ogni $i \geq 1$ ed ogni successione S limitata in $C^\infty(K_i)$ esiste una sottosuccessione $S_1 \subset S$ tale che le restrizioni delle funzioni $f \in S_1$ a Ω_{i-1} formino una successione convergente in $C^\infty(K_i)$.*

Dimostriamo il lemma: che S sia limitata in $C^\infty(K_i)$ vuol dire che per ogni multiindice p la successione sul campo fissato[4] $\mathbb{K}$ e $\mathcal{T}$ una topologia di Hausdorff sull'insieme V

$$\left\{ \frac{\partial^p f}{\partial x^p} \right\}$$

è equilimitata in $C^1(K_i)$ e quindi, per il teorema di Ascoli–Arzelà, possiede una sottosuccessione S_1 tale che per ogni $f \in S_1$, le restrizioni delle $\dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}$ a Ω_{i-1} siano convergenti in $C^1(K_{i-1})$ e, essendo la convergenza uniforme, le derivate qualsiasi degli elementi di S_1 convergono in $C^\infty(K_{i-1})$. Questo dimostra il lemma.

[4] Per noi il campo $\mathbb{K}$ sarà sempre $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$.

Sia ora S una successione limitata in $C^\infty(\Omega)$; la restrizione $S|_{\Omega_1}$ dà luogo ad una successione limitata in $C^\infty(K_1)$ che, per il lemma, ammette una sottosuccessione convergente in $C^\infty(K_0)$. Lo stesso discorso possiamo ripetere per $K_2, K_3, ...$ ottenendo una successione di sottosuccessioni della S:

$$S = S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset ...$$

tale che $S_i|_{\Omega_{i-1}}$ converga in $C^\infty(K_{i-1})$; se $\{f_1, f_2, ...\}$ sono i limiti di queste sottosuccessioni in $C^\infty(K_0), C^\infty(K_1), ...$ allora esistono elementi $g_i \in S_i$ tali che

$$\sup_p \sup_{x\in\Omega_{i-1}} \left| \frac{\partial^p}{\partial x^p}(g_i - f_i) \right| \leq \frac{1}{i}$$

Evidentemente la successione $S' := \{g_i\}$ converge in $C^\infty(\Omega)$ ed il suo limite è la funzione f le cui restrizioni a Ω_{i-1} coincidono con le f_i; quindi $S' \subset S$ è la sottosuccessione convergente voluta.

QED

La nozione di compattezza si rivela particolarmente interessante se combinata con quella di convessità: se K è un compatto convesso in uno spazio vettoriale topologico localmente convesso X, per ogni $f \in X^*$, la funzione reale continua $x \longmapsto \mathrm{Re}\langle f, x\rangle$ assume un massimo α su K; l'iperpiano M determinato dall'equazione lineare

$$\mathrm{Re}\langle f, x\rangle = \alpha$$

è *tangente* a K, cioè, se per ogni $x, y \in K$ tali che, se $a, b > 0$ e $a + b = 1$, $ax + by \in M$ allora $x, y \in M$.

Ovviamente $M \cap K$ è convesso e ogni convesso $F \subset K$ tangente a K si dice una *faccia* di K. Ad esempio, la faccia $M \cap K$ è compatta. Specifichiamo meglio queste nozioni.

8.3.7 Definizione *Una* faccia *di un convesso K è un punto $k \in K$ tale che per ogni $a, b \in [0, 1]$ con $a + b = 1$ e $k', k'' \in K$ tali che*

$$k = ak' + bk'' \qquad e \qquad k \neq k',\ k \neq k'',\ k' \neq k''$$

allora k' e k'' giacciono su uno stesso segmento.

8.3.8 Proposizione *Se K non è ridotto ad un sol punto esiste un iperpiano tangente M tale che $M \cap K \neq K$.*

DIMOSTRAZIONE: Basta osservare che se $k, k' \in K$ sono distinti, scegliendo $f \in X^*$ tale che

$$f(k' - k) = 1$$

(il che è possibile per il lemma 8.2.8) e

$$M = \{x \in X \mid \mathrm{Re}\langle f, x\rangle = \alpha\}$$

ove α è il massimo di $\mathrm{Re}\langle f, x\rangle$ su K. Se $k' \in M \cap K$ allora $\mathrm{Re}\langle f, k\rangle = \alpha = 1$ e $K \notin M \cap K$.

QED

Se $F \subset K$ è una faccia del convesso K e $f' \subset F$ è una faccia del convesso F allora F' è una faccia di K (per definizione!).

8.3.9 Definizione *I* punti estremali *di un convesso K costituiscono l'insieme*

$$\mathrm{Extr}(K) := \left\{ k \in K \,\middle|\, \begin{array}{c} \forall k', k'' \in K \ \forall a, b \in [0,1] \ a + b = 1 \\ e \ k = ak' + bk'' \Rightarrow ab = 0 \ \textit{oppure} \ k' = k'' \end{array} \right\}$$

In altri termini, x è un punto estremale se $\{x\}$ è una faccia di K.

8.3.10 Teorema (di Krejn–Millman) *Se X è uno spazio localmente convesso e $K \subset X$ un sottoinsieme convesso e compatto allora*

- *Ogni iperpiano tangente a K contiene un punto estremale.*
- *L'inviluppo convesso dell'insieme* $\mathrm{Extr}(K)$ *dei punti estremali di K è denso in K (si dice che* genera *K).*

Dimostrazione: (1) Sia M un iperpiano tangente a K; mostriamo che $F = M \cap K$ contiene una faccia chiusa minimale e quindi un punto estremale. Sia $\mathcal{F}$ l'insieme delle facce chiuse di K contenute in F. Ovviamente è un insieme parzialmente ordinato rispetto alla relazione di inclusione, ma, di più, soddisfa anche le ipotesi del lemma di Zorn. Infatti, se $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$ è un sottoinsieme totalmente ordinato di $\mathcal{F}$ mostriamo che esiste un $F_0 \in \mathcal{F}$ contenuto in ogni elemento di $\mathcal{L}$; per farlo usiamo la compattezza di K.

Si noti che $\mathcal{L}$, essendo totalmente ordinato, verifica la proprietà dell'intersezione finita, i.e. $\bigcap \mathcal{L} = F_0 \neq \emptyset$. Ma $F_0 \in \mathcal{F}$, i.e. è una faccia chiusa: proprio l'elemento minimale richiesto dalle ipotesi del lemma di Zorn (ne stiamo applicando una versione "dualizzata" in cui si richiede che ogni sottoinsieme totalmente ordinato abbia un minimo per dedurre l'esistenza di un elemento minimale). L'elemento minimale fornito dal lemma di Zorn è il punto estremale di K richiesto dalla tesi.

(2) Sia K_0 l'inviluppo convesso di $\mathrm{Extr}(K)$, ovvero il più piccolo convesso di X contenente $\mathrm{Extr}(K)$ (i.e. l'intersezione di tutti questi convessi); allora K_0 è

formato dalle combinazioni convesse finite di punti estremali di K. Supponiamo che $0 \in K_0$ (a meno di traslare possiamo sempre farlo).

Per il teorema del bipolare $\overline{K} = K^{oo}$ e quindi basta dimostrare

$$K \subset K_0^{oo}$$

per avere la tesi (dato che $K_0 \subset K$ implica $K_0^{oo} \subset K$), ovvero basta dimostrare che

$$K_0^o \subset K^o$$

Sia dunque $f \in K_0^o$, i.e. $f \in X^*$ tale che

$$\forall x \in K_0 \quad \mathrm{Re}\langle f, x\rangle \leq 1$$

e consideriamo il minimo β della funzione (reale e continua) $x \longmapsto \mathrm{Re}\langle f, x\rangle$ sull'insieme compatto K; vogliamo dimostrare che $f \in K^o$, ovvero che $\beta \leq 1$. Ma l'iperpiano di equazione $\mathrm{Re}\langle f, x\rangle = \beta$ è tangente a K, quindi (per la (1)), contiene un punto estremale $x_o \in \mathrm{Extr}(K) \subset K_0$. Allora

$$\beta = \mathrm{Re}\langle f, x_0\rangle \leq 1$$

(dato che su K_0 $\mathrm{Re}\langle f, x\rangle \leq 1$).

QED

Un risultato fondamentale sugli insiemi compatti e convessi è il seguente teorema, di grande utilità nella ricerca di soluzioni a svariati tipi di equazioni differenziali, che enunciamo senza dimostrazione

Teorema (DEL PUNTO FISSO DI SCHAUDER). *Se X è uno spazio vettoriale localmente convesso e $K \subset X$ un sottoinsieme compatto e convesso allora ogni mappa continua $f : K \longrightarrow K$ possiede un punto fisso, i.e. esiste $x_0 \in K$ tale che $f(x_0) = x_0$.*

Notiamo che la funzione f nel teorema di Schauder può essere non lineare: nel risultato seguente diamo un teorema di punto fisso per una famiglia qualsiasi di applicazioni lineari *che commutino fra loro*.

8.3.11 Teorema (MARKOV–KAKUTANI) *Se X è uno spazio vettoriale topologico e $K \subset X$ un sottoinsieme convesso e compatto, e se $\mathcal{F}$ è una famiglia di applicazioni lineari continue $f : X \longrightarrow X$ tali che*

- $\forall f \in \mathcal{F}\ f(K) \subset K$.
- $\forall x \in X\ \forall f, g \in \mathcal{F}\ f(g(x)) = g(f(x))$.

allora esiste un punto fisso in K comune a tutte le funzioni della famiglia $\mathcal{F}$:

$$\exists x_0 \in K\ \forall f \in \mathcal{F} \quad f(x_0) = x_0$$

DIMOSTRAZIONE: Siano $f \in \mathcal{F}$ e $n \in \mathbb{N}$ e poniamo

$$f^{(n)} := \frac{1}{n+1}(I + f + ... + f^n)$$

(col prodotto fg denotiamo la composizione di applicazioni) e

$$K_{n,f} = f^{(n)}(K)$$

Consideriamo la famiglia $\mathcal{K} = \{K_{n,f}\}_{n\in\mathbb{N}, f\in\mathcal{F}}$. Dato che K è convesso, la (1) implica che $K_{n,f} \subset K$ e la (2) che

$$f^{(n)}g^{(m)}(K) = g^{(m)}f^{(n)}(K)$$

Quindi

$$f^{(n)}g^{(m)} \subset K_{n,f} \cap K_{m,g} \tag{†}$$

Ma K è compatto e $f \in \mathcal{F}$ continua, sicché gli elementi di $\mathcal{K}$ sono chiusi e la famiglia $\mathcal{K}$ verifica la proprietà dell'intersezione finita, come afferma la (†).

Quindi, $\bigcap \mathcal{K} \neq \emptyset$. Esiste dunque un $x_0 \in \bigcap \mathcal{K}$: se $f \in \mathcal{F}$ mostriamo che $f(x_0) = x_0$. Basta far vedere che per ogni intorno U dello 0 in X si ha

$$f(x_0) - x_0 \in U$$

Ma $x_0 \in \bigcap \mathcal{K}$, quindi esiste $x_N \in K$ tale che

$$x_0 = \frac{1}{N}(I + f + ... + f^N)x_N$$

i.e.

$$f(x_0) - x_0 = \frac{1}{N}(T^{N+1}x_N - x_N) \in \frac{1}{N}(K - K)$$

($K - K$ è l'insieme degli elementi di X della forma $k - k'$ con $k, k' \in K$). Quindi basta dimostrare che esiste un N tale che

$$\frac{1}{N}(K - K) \subset U$$

Questo si vede facilmente, dato che $K - K$ è compatto (ad esempio perché è immagine, tramite la mappa continua $(x, y) \longmapsto x - y$, del compatto $K \times K$) e quindi è limitato; la famiglia $\{nU\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento di X perché U è un insieme assorbente, quindi esiste N tale che $K - K \subset NU$.

QED

Si noti che lo spazio X non è stato supposto localmente convesso.

8.4 Distribuzioni

Consideriamo lo spazio delle funzioni $C^\infty(\Omega)$ infinitamente differenziabili in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: sappiamo che è uno spazio di Fréchet, mentre il suo sottospazio $C_c^\infty(\Omega)$ delle funzioni a supporto compatto non è metrizzabile pur essendo completo. In ambedue i casi si tratta di spazi non normabili: vogliamo studiare su essi la teoria della dualità.

8.4.1 Definizione *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto, una* distribuzione *in Ω è un elemento del duale topologico $C_c^\infty(\Omega)^*$.*

La nostra conoscenza della topologia di $C_c^\infty(\Omega)$ ci permette immediatamente di dare un criterio perché un funzionale lineare sia una distribuzione

8.4.2 Proposizione *Se $f \in C_c^\infty(\Omega)^*$, le tre seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- *f è una distribuzione.*
- *Per ogni compatto $K \subset \Omega$ esistono un intero $m \geq 0$ ed una costante $C > 0$ tali che*

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \operatorname{supp}\varphi \subset K \Rightarrow |f(\varphi)| \leq C \sup_{|p|\leq m} \sup_{x\in\Omega} \left| \frac{\partial^p}{\partial x^p}\varphi(x) \right|$$

- *Se la successioni $\{\partial^p/\partial x^p(\varphi_n)\} \subset C_c^\infty(\Omega)$ convergono uniformemente a zero (per ogni multiindice p) e se i supporti delle $\{\varphi_n\}$ sono contenuti in $K \subset \Omega$ (compatto) allora $f(\varphi_n) \longrightarrow 0$.*

8.4.3 Esempio *Se X è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso di funzioni $\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, contenente $C_c^\infty(\Omega)$, e tale che la topologia di X ristretta a $C_c^\infty(\Omega)$ sia meno fine della topologia di $C_c^\infty(\Omega)$, allora, per ogni funzionale lineare continuo $f \in X^*$, $f|_{C_c^\infty(\Omega)}$ è una distribuzione. Evidentemente, se $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in E allora se $f \neq g$ sono elementi di X^*, le loro restrizioni sono distribuzioni diverse, per il teorema di Hahn–Banach.*

8.4.4 Esempio *Se consideriamo lo spazio $X = C_c(\Omega)$ delle funzioni continue complesse a supporto compatto, abbiamo che ogni funzionale μ continuo su X* [5] *induce una distribuzione T_μ.*

[5] Cioè ogni misura di Radon complessa, per il teorema di Riesz–Markov che sarà dimostrato a pagina 289.

In realtà, nell'esempio precedente, la mappa $\mu \longmapsto T_\mu$ è iniettiva (cioè una misura può considerarsi una particolare distribuzione): questo segue dal fatto che ogni funzione continua può approssimarsi con funzioni C^∞ a supporto compatto. Stabiliamo dunque questo risultato.

Preliminarmente consideriamo un esempio di funzione a supporto compatto e infinitamente differenziabile:

$$\rho(x) := \begin{cases} a\exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

ove la costante a è definita come

$$a = \frac{1}{\int_{|x|<1} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) dx}$$

in modo che si abbia

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx = 1$$

La funzione ρ è analitica in ogni punto della palla aperta $\{|x| < 1\}$ ed è ovviamente C^∞ in $\{|x| > 1\}$; verifichiamo che è C^∞ anche sul bordo $\{|x| = 1\}$. Dato che la funzione è invariante per rotazioni basta verificarne la regolarità nel caso $n = 1$, i.e. basta verificare che la funzione

$$f(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t}\right) \text{ se } t > 0 \\ 0 \text{ se } t \leq 0 \end{cases}$$

è C^∞. Ma questo è ovvio:

$$\exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2(1-t)}\right)\exp\left(-\frac{1}{2(1+t)}\right)$$

Se $\varepsilon > 0$, una funzione C^∞ a supporto in $\{|x| \leq \varepsilon\}$ è

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{\rho(\varepsilon x)}{\varepsilon^n}$$

8.4.5 Teorema *Se Ω è un aperto in $\mathbb{R}^n$, ogni funzione in $C(\Omega)$ è limite di una successione di funzioni in $C_c^\infty(\Omega)$.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo una successione di aperti $\{\Omega_i\}$ la cui unione sia Ω e tali che, per $i \geq 1$, $\overline{\Omega_{i-1}}$ sia compatto e contenuto in Ω_i. Possiamo allora considerare la successione numerica $\{d_i\}$, ove

$$d_i := d(\overline{\Omega_{i-1}}, \complement\Omega_i) > 0$$

e la funzione continua

$$g_i(x) := \begin{cases} 1 \text{ se } d(x, \complement\Omega_i) > \dfrac{3d_i}{4} \\ 0 \text{ se } d(x, \complement\Omega_i) < \dfrac{d_i}{2} \end{cases}$$

Scegliamo allora $\varepsilon_i := d_i/4$ e consideriamo la funzione

$$h_i(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \rho_{\varepsilon_i}((x-y)g_i(y)dy$$

Ora sia $x \in \Omega_{i-1}$: allora, per $x - y \in \operatorname{supp} \rho_{\varepsilon_i}$, si ha

$$d(y, \complement\Omega_i) \geq d(x, \complement\Omega_i) - |x-y| \geq d_i - \frac{d_i}{4} = \frac{3d_i}{4}$$

e quindi $g_i(y) = 1$, i.e.

$$h_i(x) = \int \rho_{\varepsilon_i}(x-y)dy = 1$$

Pertanto $h_i|_{\Omega_{i-1}} = 1$. Dato che le $\{h_i\}$ sono ovviamente a supporto compatto e che convergono a $1 \in C^\infty(\Omega)$.

Ora sia $f \in C(\Omega)$: è immediato che possiamo approssimarla con funzioni continue a supporto compatto: infatti $h_i f \in C_c(\Omega)$ e, dato che $fh_i = f$ su Ω_{i-1} la funzione fh_i converge a f in $C(\Omega)$; se $K \subset \Omega$ è compatto, per i grande abbastanza si ha $K \subset \Omega_{i-1}$ e quindi $\operatorname{supp} f \cap K = \operatorname{supp}(fh_i) \cap K$.

Vediamo infine che l'approssimazione può farsi effettivamente con funzioni C^∞: per questo basta mostrare che le funzioni $fh_i \in C_c(\Omega)$ sono approssimabili con funzioni $C_c^\infty(\Omega)$, il che si vede considerando

$$F_{i,\varepsilon}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x-y)f(y)h_i(y)dy$$

Derivando sotto il segno di integrale si trova immediatamente che queste sono funzioni in $C_c^\infty(\Omega)$; dimostriamo che, per $\varepsilon \longrightarrow 0$, la $F_{i,\varepsilon}$ converge uniformemente a fh_i, col che avremo la tesi del teorema.

Dato che le fh_i sono continue a supporto compatto, sono uniformemente continue, quindi per ogni $\eta > 0$ esiste un $\varepsilon > 0$ tale che

$$\forall x, y \ |x-y| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \eta$$

e quindi, dato che $\int \rho_\varepsilon = 1$:

$$f(x)h_i(x) - F_{i,\varepsilon}(x) = \int \rho_\varepsilon(x-y)(f(x)h_i(x) - f(y)h_i(y))dy$$

pertanto

$$|f(x)h_i(x) - F_{i,\varepsilon}(x)| \leq \sup_{|x-y|<\varepsilon} |f(x)h_i(x) - f(y)h_i(y)| \int \rho_\varepsilon(x-y)dy \leq \eta$$

QED

Osserviamo che, se la funzione f è C^∞ nel teorema precedente, la stessa dimostrazione ci permette di approssimarla con funzioni C_c^∞ date dalle fh_i. Quindi

8.4.6 Corollario *$C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $C^\infty(\Omega)$.*
Avvertiamo che nel teorema seguente, col termine "misura di Radon" intendiamo un funzionale lineare e continuo su $C_c(\Omega)$, mentre in precedenza (definizione 4.5.1) avevamo usato un'altra definizione: il già citato teorema di Riesz–Markov 9.2.2, mostrerà l'equivalenza di queste definizioni.

8.4.7 Teorema *Se T è una distribuzione su Ω allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- *T è una misura di Radon.*
- *T è continuo nella topologia su $C_c^\infty(\Omega)$ indotta da quella di $C_c(\Omega)$.*
- *Per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste una costante $C > 0$ tale che*

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \operatorname{supp} \varphi \subset K \Rightarrow |\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)|$$

- *Se una successione di funzioni $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente a zero e se i supporti delle $\{\varphi_n\}$ sono contenuti in un compatto $K \subset \Omega$ allora $\langle T, \varphi_n\rangle \longrightarrow 0$.*

DIMOSTRAZIONE: In vista della proposizione 8.4.2, l'unica cosa che dobbiamo dimostrare per avere il teorema è che T è una (distribuzione indotta da una) misura di Radon se e solo se vale la (1): che la condizione sia necessaria è ovvio; se poi vale la (1), possiamo estendere T (che è continuo nella topologia indotta da $C_c(\Omega)$) in modo unico ad un funzionale lineare continuo su $C_c(\Omega)$ per densità di $C_c^\infty(\Omega)$ in $C_c(\Omega)$.

QED

Quindi le misure di Radon sono casi particolari di distribuzioni (storicamente infatti i primi esempi di distribuzioni sono state le misure di Dirac); in particolare anche le funzioni possono essere viste come distribuzioni. Infatti, se $f \in L^1(K)$, con $K \subset \Omega$ compatto, allora il funzionale

$$T(\varphi) := \int_\Omega \varphi(x) f(x) dx$$

è una distribuzione (modulo uguaglianza q.o.).

Usualmente lo spazio delle distribuzioni su Ω si denota come $\mathcal{D}'(\Omega)$.

8.4.8 Definizione *Una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si dice* svanire *in un aperto $A \subset \Omega$ se*

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \operatorname{supp} \varphi \subset U \Rightarrow \langle T, \varphi \rangle = 0$$

Vogliamo definire il concetto di supporto anche per le distribuzioni: per questo necessitiamo del

8.4.9 Teorema *L'unione degli aperti di Ω nei quali una distribuzione svanisce è un aperto nel quale la distribuzione svanisce.*

che è immediata conseguenza del

8.4.10 Lemma *Se $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è una famiglia di aperti di Ω e $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia di distribuzioni sugli $\{U_\alpha\}$ e se, per ogni $\alpha, \beta \in A$, $T_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = T_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ allora esiste un'unica distribuzione T su $\bigcup_\alpha U_\alpha$ tale che, per ogni $\alpha \in A$: $T|_{U_\alpha} = T_\alpha$.*

DIMOSTRAZIONE: Intanto ricordiamo che $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è paracompatto e quindi esiste un raffinamento $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ di $U := \bigcup_\alpha U_\alpha$ localmente finito. Sappiamo poi che esiste una partizione C^∞ dell'unità subordinata al ricoprimento $\{V_\beta\}$: se $\varphi \in C_c^\infty(U)$, allora

$$\varphi = \sum_{\beta \in B} g_\beta \varphi$$

Poniamo, se α_β è tale che $V_\beta \subset U_{\alpha_\beta}$,

$$\langle T, \varphi \rangle := \sum_{\beta \in B} \langle T_{\alpha_\beta}, g_\beta \varphi \rangle$$

(la somma ha senso perché ha senso quella precedente). Questa definizione non dipende dal raffinamento scelto, perché sulle intersezioni di elementi di $\{U_\alpha\}$ le distribuzioni $\{T_\alpha\}$ coincidono. Dimostriamo che non dipende nemmeno dalla partizione dell'unità $\{g_\beta\}$: se infatti $\{h_\gamma\}$ è un'altra partizione dell'unità subordinata al raffinamento $\{W_\gamma\}$ localmente finito di $\{U_\alpha\}$ allora per ogni γ esiste un indice α_γ tale che $W_\gamma \subset U_{\alpha_\gamma}$ e quindi

$$\sum_\beta \langle T_{\alpha_\beta}, g_\beta \varphi \rangle = \sum_{\beta,\gamma} \langle T_{\alpha_\beta}, g_\beta h_\gamma \varphi \rangle = \sum_{\beta,\gamma} \langle T_{\alpha_\gamma}, g_\beta h_\gamma \varphi \rangle = \sum_\gamma \langle T_{\alpha_\gamma}, h_\gamma \varphi \rangle$$

Vediamo ora che T è effettivamente una distribuzione, cioè che è un funzionale continuo: se $\varphi \in C_c^\infty(K)$ converge a zero uniformemente ($K \subset U$ compatto) allora esiste un sottoinsieme finito $B' \subset B$ tale che

$$\forall \beta \in B' \quad g_\beta \varphi = 0$$

e quindi $g_\beta \varphi \longrightarrow 0$ in $C_c^\infty(U_{\alpha_\beta})$, i.e. $\langle T_{\alpha_\beta}, g_\beta \varphi \rangle \longrightarrow 0$. Quindi T è continuo in $C_c^\infty(U)^*$.

L'unicità segue facilmente dal fatto che le distribuzioni $\{T_\alpha\}$ coincidono sulle intersezioni di elementi della famiglia $\{U_\alpha\}$.

QED

In virtù del teorema appena dimostrato, ha senso la

8.4.11 Definizione *Se T è una distribuzione in Ω, il suo* supporto $\operatorname{supp} T$ *è il complementare dell'unione di tutti gli aperti nei quali T svanisce.*

8.4.12 Esempio *La* misura di Dirac δ_{x_0} *è il funzionale che a $f \in C_c^\infty(\Omega)$ associa $f(x_0)$: il supporto della misura di Dirac δ_{x_0} è il singolo punto $\{x_0\}$. Il supporto della distribuzione $T(\varphi) = \int \varphi(x) f(x) dx$ è il complementare dell'insieme sul quale f è q.o. nulla.*

Dato che $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $C^\infty(\Omega)$, possiamo identificare il duale $\mathcal{E}'(\Omega)$ di $C^\infty(\Omega)$ con un sottospazio di $\mathcal{D}'(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)^*$.

Come è naturale attendersi si ha il

8.4.13 Teorema *Una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ appartiene a $\mathcal{E}'(\Omega)$ se e solo se ha supporto compatto.*

DIMOSTRAZIONE: Se $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ è una distribuzione allora, per definizione della topologia di $C^\infty(\Omega)$, esistono un compatto $K \subset \Omega$, un intero $m \geq 0$ ed una costante $C > 0$ tali che

$$\forall \varphi \in C^\infty(\Omega) \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{|p| \leq m} \sup_{x \in K} \left| \frac{\partial^p}{\partial x^p} \varphi(x) \right|$$

e quindi, se $\operatorname{supp} \varphi \subset \complement K$ allora $\langle T, \varphi \rangle = 0$, i.e. $\operatorname{supp} T \subset K$.

Viceversa, se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è una distribuzione a supporto compatto K, e se $f \in C_c^\infty(\Omega)$ è una funzione identicamente 1 in un intorno U di K [6] allora

$$\forall \varphi \in C^\infty(\Omega) \quad \langle T, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle$$

[6] La cui costruzione è semplicissima: se $W = \Omega \setminus \overline{U}$, allora $\{U, W\}$ è un ricoprimento aperto di Ω localmente finito (!) e quindi esiste una partizione dell'unità $\{g_U, g_W\}$ ad esso subordinata: dato che $g_W = 0$ in U e $g_U + g_W = 1$ deve essere $g_W = 1$ in U; si tratta della nostra funzione g.

$(\operatorname{supp}(1-g)\varphi \subset \complement \operatorname{supp} T)$. Ma su $C_c^\infty(\operatorname{supp} g)$ le topologie indotte da $C^\infty(\Omega)$ e $C_c^\infty(\Omega)$ coincidono allora $g\varphi \longrightarrow 0$ in $C_c^\infty(\Omega)$ per $C^\infty(\Omega)$ e quindi la distribuzione T è continua su $C_c^\infty(\Omega)$ rispetto alla topologia indotta da $C^\infty(\Omega)$: dunque $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$.

QED

Osserviamo ora che, per ogni $m \geq 1$, $C^\infty(\Omega)$ è un sottospazio dello spazio delle funzioni m volte differenziabili $C^k(\Omega)$; un ragionamento analogo a quello del teorema 8.4.5 mostra che $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $C_c^m(\Omega)$; ha quindi senso la

8.4.14 Definizione *Una distribuzione T appartenente allo spazio $\mathcal{D}^m(\Omega) = C_c^m(\Omega)^*$ si dice* di ordine minore di m. *Se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è una distribuzione ed esiste un intero $m \geq 0$ tale che T sia di ordine minore di m allora T si dice* di ordine finito.

8.4.15 Esempio *Le distribuzioni di ordine (minore di) zero sono le misure di Radon.*

Sulle distribuzioni possiamo calcolare gli operatori differenziali, usandone la dualità; ricordiamo che un operatore differenziale è una espressione della forma

$$P = \sum_{|p|\leq m} a_p \frac{\partial^p}{\partial x^p}$$

con $a_p \in C^\infty(\Omega)$ e $p = (p_1, ..., p_r)$ è un multiinidice con $|p| = p_1 + ... + p_r$. Ovviamente P è un operatore lineare e continuo di $C^\infty(\Omega)$ in se stesso. Vogliamo definire il suo operatore "aggiunto"

$$P^* : \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

Sulle distribuzioni della forma $\psi = f(x)dx$ otteniamo, se $\varphi \in C^\infty(\Omega)$,

$$\langle P^*\psi, \varphi\rangle = \int \psi(x) P\varphi(x) dx = \sum_{|p|\leq m} \int a_p(x) \left(\frac{\partial^p}{\partial x^p}\varphi(x)\right) \psi(x) dx$$

Possiamo ora integrare per parti ottenendo (non ci sono integrali sul bordo $\partial\Omega$ perché $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$)

$$\sum_{|p|\leq m} \int \varphi(x)(-1)^{|p|} \frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(a_p(x)\psi(x)\right) dx$$

ottenendo

$$P^*\psi = \sum_{|p|\leq m} \varphi(x)(-1)^{|p|} \frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(a_p(x)\psi(x)\right)$$

Se vogliamo esprimerlo come operatore differenziale, scriviamo

$$P^*\psi = \sum_{|p|\leq m} \varphi(x)(-1)^{|p|}\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(a_p(x)\psi(x)\right) = \sum_{|p|\leq m} b_p(x)\frac{\partial^p}{\partial x^p}$$

dove

$$b_p(x) = \sum_{p\leq q}(-1)^{|q|}\binom{q}{p}\frac{\partial^{q-p}}{\partial x^{q-p}}a_q(x)$$

e dove $q \leq p$ significa $q_1 \leq p_1, ..., q_r \leq p_r$ e

$$\binom{q}{p} := \binom{q_1}{p_1}...\binom{q_r}{p_r}$$

Abbiamo quindi un operatore differenziale lineare continuo P^* sullo spazio delle distribuzioni.

8.4.16 Teorema *Una distribuzione a supporto compatto ha ordine finito.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$; se $U \subset \Omega$ ha chiusura compatta e $\operatorname{supp} T \subset \overline{U}$ allora $T|_U$ è di ordine finito. Infatti è evidente dalle definizioni che la topologia di $C_c^\infty(\Omega)$ è l'intersezione delle topologie di $C_c^m(\Omega)$ e quindi la restrizione di T a $\overline{U}$ è continua in $C_c^\infty(\overline{U})$ nella topologia indotta da $C_c^m(\overline{U})$ per qualche $m \geq 0$, e quindi è continua su $C_c^\infty(U) \subset C_c^\infty(\overline{U})$; ma la topologia di $C_c^m(U)$ è più fine di quella indottavi da $C_c^m(\overline{U})$, dunque T è continua su $C_c^\infty(U)$ rispetto alla topologia indotta da $C_c^m(U)$: ioè $T|_U \in \mathcal{D}^m(U)$.

Ma $T = 0$ su $\complement \operatorname{supp} T$ e quindi T è di ordine finito in tutto Ω.

QED

Concludiamo questa introduzione alla dualità negli spazi $C^m(\Omega)$ dimostrando la proprietà fondamentale delle distribuzioni di ordine finito.

8.4.17 Teorema *Se T è una distribuzione di ordine finito $m < \infty$ in Ω allora, per ogni intorno aperto U di* $\operatorname{supp} T$ *esiste una famiglia di misure di Radon $\{\mu_p\}_{p\in\mathbb{N}^m;|p|<m}$ in Ω tali che*

$$T = \sum_{|p|\leq m}\frac{\partial^p}{\partial x^p}\mu_p$$

e tali che per ogni $p \in \mathbb{N}^n$, $|p| \leq m$: $\operatorname{supp}\mu_p \subset U$.

DIMOSTRAZIONE: Sia $N = N_{n,m}$ il numero di multiindici p con $|p| \leq 1$: esiste allora una inclusione naturale nel prodotto

$$\begin{aligned} \Psi_m : C_c^m(\Omega) &\longrightarrow (C_c(\Omega))^N \\ \varphi &\longmapsto \left(\frac{\partial^p \varphi}{\partial x^p}\right)_{p\in\mathbb{N}^n, |p|\leq m} \end{aligned}$$

Si tratta ovviamente di una applicazione lineare che, pur non essendo suriettiva, è un isomorfismo (su $\operatorname{im}\Psi_m$) fra spazi vettoriali topologici[7]. Dato che $\Psi_m : C_c^m(\Omega) \xrightarrow{\cong} \operatorname{im}\Psi$, ogni funzionale lineare continuo su $C_c^m(\Omega)$ ne determina univocamente uno su $\operatorname{im}\Psi_m$, che può quindi, per il teorema di Hahn–Banach, estendersi ad un funzionale sull'intero spazio $C_c(\Omega)^N$. Ma il duale di un prodotto diretto di spazi vettoriali topologici è canonicamente isomorfo al prodotto dei duali[8] e quindi un funzionale lineare continuo su $C_c(\Omega)^n$ può identificarsi con un insieme di N misure di Radon (λ_p) su Ω tali che

$$\langle (\lambda_p), (\varphi_p)\rangle = \sum_{p\in\mathbb{N};|p|\leq m} \langle \lambda_p, \varphi_p\rangle$$

Questo funzionale estende il funzionale $\varphi \longmapsto \langle T, \varphi\rangle$ su $\operatorname{im}\Psi_m$; quindi, per $\varphi_p := \dfrac{\partial^p\varphi}{\partial x^p}$ (se $\varphi \in C_c^m(\Omega)$):

$$T = \sum_{|p|\leq m} (-1)^{|p|} \frac{\partial^p}{\partial x^p}\lambda_p$$

Ora dobbiamo verificare la condizione sui supporti delle misure λ_p; consideriamo una funzione $g \in C^\infty(\Omega)$ che sia identicamente 1 in un intorno U di $\operatorname{supp} T$ ed identicamente zero fuori da qualche chiuso contenuto in U e consideriamo il prodotto gT: ovviamente $gT = T$ (per definizione, $\langle gT, \varphi\rangle = \langle T, g\varphi\rangle$) i.e.

$$T = gT = \sum_{|p|\leq m} (-1)^{|p|} g\frac{\partial^p}{\partial x^p}\lambda_p$$

[7] φ converge a zero in $C_c^m(\Omega)$ se e solo se ciascuna delle sue derivate di ordine $\leq m$ converge a zero in $C_c(\Omega)$

[8] Se $X_1, ..., X_n$ sono spazi vettoriali topologici, basta considerare l'isomorfismo

$$\begin{aligned} X_1^* \times ... \times X_n^* &\longrightarrow (X_1 \times ... \times X_n)^* \\ (\varphi_1, ..., \varphi_n) &\longmapsto \left((x_1, ..., x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n \langle \varphi_i, x_i\rangle\right) \end{aligned}$$

e, per l'identità di Leibniz:

$$\langle g\frac{\partial^p\lambda_p}{\partial x^p},\varphi\rangle = (-1)^{|p|}\langle\lambda_p,\frac{\partial^p(g\varphi)}{\partial x^p}\rangle = (-1)^{|p|}\sum_{q\le p}\binom{p}{q}\langle\lambda_p,\frac{\partial^{p-q}g}{\partial x^{p-q}}\frac{\partial^q\varphi}{\partial x^q}\rangle$$
$$= \sum_{q\le p}\langle\frac{\partial^q}{\partial x^q}\left((-1)^{|p-q|}\frac{\partial^{p-q}g}{\partial x^{p-q}}\lambda_p\right),\varphi\rangle$$

e quindi

$$g\frac{\partial^p\lambda_p}{\partial x^p} = \sum_{q\le p}\frac{\partial^q}{\partial x^q}\left((-1)^{|p-q|}\frac{\partial^{p-q}g}{\partial x^{p-q}}\lambda_p\right)$$

Sostituendo nell'espressione precedente per la T:

$$T = \sum_{|p|\le m}\sum_{q\le p}(-1)^{|p|}\frac{\partial^q}{\partial x^q}\left((-1)^{|p-q|}\frac{\partial^{p-q}g}{\partial x^{p-q}}\lambda_p\right)$$

con i supporti delle misure $\dfrac{\partial^{p-q}g}{\partial x^{p-q}}\lambda_p$ sono contenuti in $\operatorname{supp} g\subset U$.

QED

Da questo teorema segue che le distribuzioni di ordine $\le m$ sono somme finite di derivate al più di ordine m di misure di Radon.

8.5 Trasformata di Fourier di funzioni differenziabili

Vogliamo esemplificare alcune idee qui introdotte proseguendo la discussione della trasformata di Fourier iniziata alla fine del capitolo precedente: tratteremo direttamente il caso in n dimensioni.

Consideriamo quindi in $\mathbb{R}^n$ la dualità con $\mathbb{R}^{n*}$ data dal prodotto euclideo

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_iy_i$$

Evidentemente, se $(e_1,...,e_n)$ è una base di $\mathbb{R}^n$ e $(e^1,...,e^n)$ una base duale, se $x=\sum_i x_ie_i\in\mathbb{R}^n$ e $\xi=\sum_i\xi_ie^i\in\mathbb{R}^{n*}$:

$$\langle\xi,x\rangle = \sum_{i=1}^n\xi^ix_i$$

In $\mathbb{R}^n$ consideriamo poi la misura di Lebesgue (che è determinata univocamente una volta che si fissi, ad esempio, una base, imponendo che il volume dell'ipercubo avente per vertici i vettori della base sia 1), che determina univocamente la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^{n*}$.

Definiamo ora uno spazio di funzioni "intermedio" fra $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $C^\infty(\mathbb{R}^n)$: si tratta dello *spazio di Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tali che, per ogni coppia di polinomi $P, Q \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| P(x)Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x)\right| < \infty$$

Oltre ad essere (come è ovvio) uno spazio vettoriale, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è localmente convesso rispetto alla famiglia di seminorme

$$p(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| P(x)Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x)\right|$$

Osserviamo che gli elementi di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si dicono anche *funzioni a decrescenza rapida* nel senso che tutte le loro derivate tendono a zero (per $|x| \longrightarrow \infty$) più velocemente di ogni potenza di $|x|^{-1}$. Infatti la condizione $p(f) < \infty$ equivale alla

$$\lim_{|x|\longrightarrow\infty} |x|^k \left| \frac{\partial^p}{\partial x^p} f(x)\right| = 0$$

per ogni multiindice p ed ogni intero $k \geq 0$. Una famiglia di seminorme per la topologia di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è

$$|f|_{m,k} = \sup_{|p|\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left((1+|x|)^k \left| \frac{\partial^p}{\partial x^p} f(x)\right| \right)$$

Così lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è metrizzabile; osserviamo che la sua topologia è più fine di quella indotta da $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Una successione $\{f_i\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tende infatti a zero se e solo se le funzioni

$$(1+|x|)^k \left| \frac{\partial^p}{\partial x^p} f_i(x)\right|$$

convergono uniformemente (ovunque in $\mathbb{R}^n$) a zero per ogni k e p. In particolare questo implica la convergenza uniforme delle derivate e quindi della successione $\{f_i\}$ in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

8.5.1 Teorema $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *è uno spazio di Fréchet.*

DIMOSTRAZIONE: Dobbiamo mostrare la completezza della topologia di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; se $\{f_i\}$ è una successione di Cauchy in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, a maggior ragione lo è in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$

e quindi converge ad una $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dato che la successione è di Cauchy, per ogni m e k, esiste un intero $N = N_{m,k}$ tale che

$$\forall i \geq N \quad |f_i - f_N|_{m,k} \leq 1$$

e quindi

$$\forall i \quad |f_i|_{m,k} \leq 1 + \sup_{j=1,\dots,N} |f_j|_{m,k}$$

i.e. esiste una costante $M_{m,k}$ tale che

$$\forall i \quad |f_i|_{m,k} \leq M_{m,k}$$

In altri termini

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \sup_{|p|\leq m} \left| \frac{\partial^p}{\partial x^p} f_i(x) \right| \leq \frac{M_{m,k}}{(1+|x|)^k}$$

Ma le derivate delle f_i convergono uniformemente alle corrispondenti derivate della f e quindi

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \sup_{|p|\leq m} \left| \frac{\partial^p}{\partial x^p} f(x) \right| \leq \frac{M_{m,k}}{(1+|x|)^k}$$

Quindi $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; che, infine, la convergenza avvenga anche nella topologia di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è ovvio.

QED

Ovviamente, sebbene abbiamo considerato la scelta di una base per definire la topologia di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ la definizione è intrinseca.

Osserviamo che, se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ allora anche

$$x \longmapsto e^{-2\pi i\langle \xi, x\rangle} f(x)$$

(per ξ fissato) è a decrescenza rapida. Possiamo ripetere allora una definizione che già conosciamo per $L^1(\mathbb{R})$:

8.5.2 Definizione *La* trasformata di Fourier *di una funzione $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è la funzione*

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle \xi, x\rangle} f(x)dx$$

Notiamo il fattore 2π: nel caso $n = 1$ lo avevamo inglobato nel prodotto scalare (che era semplicemente il prodotto di numeri reali).

Ricordiamo le seguenti proprietà seguenti della trasformata di Fourier:

8.5.3 Proposizione *Se* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*:*

- $\widehat{f+g} = \widehat{f} + \widehat{g}$.
- $\widehat{af} = a\widehat{f}$ *per* $a \in \mathbb{C}$.
- $\widehat{\widehat{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)}$ *(complessa coniugata).*
- *Se* $f_y(x) := f(x-y)$ *allora* $\widehat{f_y}(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{-2\pi i\langle\xi,y\rangle}$.

8.5.4 Esempio *Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione*

$$f(x) = e^{-ax^2}$$

in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *(con* a *costante). Per definizione*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2-2\pi i\xi x}dx$$

e l'integrando è una funziona olomorfa intera, che tende a zero lungo ogni retta parallela all'asse reale del piano complesso; quindi, per il teorema di Cauchy[9]*, l'integrale non cambia valore se l'integrazione è svolta non lungo l'asse* $\mathbb{R}$ *ma lungo un suo traslato* $\mathbb{R}_y\{x+iy\}_{x\in\mathbb{R}}$ *per* y *fissato: quindi*

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}_y} e^{-ax^2-2\pi i\xi x}dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-a(x+iy)^2-2\pi i\xi(x+iy)}dx\\ &= e^{ay^2+2\pi\xi y}\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2-2aixy-2\pi i\xi x}dx\\ &= e^{ay^2+2\pi\xi y}\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2-2ix(ay+\pi\xi)}dx\end{aligned}$$

Ora consideriamo y *costante in modo che nell'esponente della funzione integranda scompaia la parte immaginaria, ponendo cioè* $y = -\pi\xi/a$ *e ricordando che* $\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\pi/a}$ *(cfr. appendice al paragrafo 8.5.1):*

$$\widehat{f}(\xi) = e^{a\frac{(\pi\xi)^2}{a^2}-2\frac{(\pi\xi)^2}{a}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}dx = e^{-\frac{(\pi\xi)^2}{a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

In particolare, per $a = \pi$:

$$\widehat{e^{-\pi x^2}}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$$

[9] Alcuni richiami di Analisi Complessa, compreso questo teorema, sono dati in appendice al prossimo capitolo.

8.5.5 Teorema *La trasformata di Fourier* $\widehat{\ }: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n*})$ *è un isomorfismo di spazi di Fréchet.*

Dimostrazione: Dimostriamone per prima cosa la continuità: se $P, Q \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ allora, per l'identità di Leibniz e la derivazione sotto il segno di integrale:

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\widehat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i\langle\xi,x\rangle} Q(-2\pi i x) f(x) dx$$

e, integrando per parti:

$$P(\xi)\widehat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i\langle\xi,x\rangle} P\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x) dx$$

Combinando queste formule:

$$P(\xi)Q\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\widehat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i\langle\xi,x\rangle} P\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(Q(-2\pi i x)f(x)\right) dx$$

e quindi, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^{n*}$:

$$\begin{aligned} \left|P(\xi)Q\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\widehat{f}(\xi)\right| &\leq \int \left|P\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(Q(-2\pi i x)f(x)\right)\right| dx \leq \\ &\leq \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{n+1}\left|P\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(Q(-2\pi i x)f(x)\right)\right|\right)\int\left(\frac{1}{1+|x|}\right)^{n+1} dx \end{aligned}$$

Da qui la continuità.

Consideriamo ora l'operatore $\widetilde{\ }: \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n*}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definito dalla

$$\widetilde{g}(x) := \int_{\mathbb{R}^{n*}} e^{2\pi i\langle\xi,x\rangle} g(\xi) d\xi$$

Lo stesso calcolo effettuato per $\widehat{\ }$ ci mostra che $\widetilde{\ }$ è continuo: dimostriamo che si tratta dell'operatore inverso di $\widehat{\ }$, col che avremo la tesi del teorema.

Sia quindi $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n*})$:

$$\begin{aligned} \int g(\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\langle\xi,x\rangle}d\xi &= \iint g(\xi)f(y)e^{2\pi i\langle\xi,x-y\rangle}dyd\xi \\ &= \int f(y)\widetilde{g}(x-y)dy = \int f(x-y)\widetilde{g}(y)dy \end{aligned}$$

(abbiamo usato il teorema di Fubini: $(y,\xi) \longmapsto f(y)g(\xi)$ è integrabile in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n*}$ rispetto alla misura $dx \otimes d\xi$). Dunque

$$\int g(\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\langle\xi,x\rangle}d\xi = \int f(x-y)\widetilde{g}(y)dy$$

Dato che vogliamo dimostrare che la composizione $\widetilde{}\circ\widehat{}$ è $id_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$ (l'altra identità $\widehat{}\circ\widetilde{}=id_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n*})}$ segue in modo analogo), è sufficiente dimostrare che se $\widetilde{g}$ converge alla misura di Dirac concentrata nell'origine di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$ allora $\{f_n\}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n*})$ converge funzione 1: basta considerare, ad esempio

$$\{e^{-\frac{|\xi|^2}{k}}\}_{k\geq 1}$$

Infatti $\lim_k e^{-\frac{|\xi|^2}{k}}=1$ e

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}\widetilde{e^{-\frac{|\xi|^2}{k}}}d\xi=\lim_{k\longrightarrow\infty}\sqrt{k\pi}e^{-k(|\pi\xi|)^2}d\xi=\delta_0$$

QED

La formula

$$\widetilde{g\widehat{f}}(x)=\int f(x-y)\widetilde{g}(y)dy$$

è uno dei modi di esprimere la *formula di inversione di Fourier*.

8.5.6 Teorema *Se $f,h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:*

(*Formula di Parseval*)
$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\overline{h(x)}dx=\int_{\mathbb{R}^{N*}}\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{h}(\xi)}d\xi$$

(*Formula di Plancherel*)
$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2dx=\int_{\mathbb{R}^{n*}}|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi$$

DIMOSTRAZIONE: Se nella formula di inversione di Fourier consideriamo $x=0$ ed effettuiamo il cambiamento di variabile $y\longmapsto -y$ otteniamo

$$(*)\qquad\int g(\xi)\widehat{f}(\xi)d\xi=\int f(y)\widetilde{g}(-y)dy$$

Allora per $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n*})$ tale che $\widetilde{g}(-y)=\overline{h(y)}$ (una tale scelta è possibile per il teorema precedente) otteniamo

$$g(\xi)=\overline{\widehat{h}(\xi)}$$

e quindi, sostituendo nella (*), otteniamo la formula di Parseval.

La formula di Plancherel è la formula di Parseval nel caso $f=h$.

QED

Sappiamo che lo spazio $C_c(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$; inoltre $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ è denso in $C_c(\mathbb{R}^n)$ e quindi lo è in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Questo fatto e la formula di Plancherel implicano immediatamente che

8.5.7 Corollario *La trasformata di Fourier si può estendere ad una isometria fra spazi di Hilbert*

$$\widehat{\ }: L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^{n*})$$

Le formule di Parseval e Plancherel si scrivono in $L^2(\mathbb{R}^n)$ come

$$(x, y) = (\widehat{x}, \widehat{y}) \qquad \text{e} \qquad ||x||_2 = ||\widehat{x}||_2$$

Sono ovviamente equivalenti per le identità di polarizzazione.

Costruiamo ora un sistema ortogonale per $L^2(\mathbb{R})$ (per semplicità consideriamo il caso $n = 1$): precisamente ne troveremo uno nel quale la trasformata di Fourier è una matrice (infinita) diagonale.

Partiamo dall'osservazione che l'equazione

$$f''(x) - x^2 f(x) = cf(x) \tag{†}$$

è trasformata in sé dalla trasformata di Fourier, se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. In effetti sappiamo che (indichiamo con l'apice la derivata rispetto a x):

$$\widehat{-ixf} = (\widehat{f})'$$

Inoltre

$$\widehat{f'} = i\xi\widehat{f}$$

Infatti, integrando per parti (la f è nulla all'infinito).

$$\int f'(x)e^{i\xi(x)}dx = i\xi \int f(x)e^{i\xi(x)}dx$$

Quindi la (†) è mutata in sé dalla trasformata di Fourier.

Consideriamo ora soluzioni della (†) della forma

$$f = p(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ove p è un polinomio. Sostituendo nella (†) troviamo che

$$p''(x) - 2xp'(x) = (c + 1)p(x)$$

Se $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ otteniamo le identità

$$k(k-1)a_k - 2(k-2)a_{k-2} = (c+1)a_{k-2}$$

(per $k = 2, ..., n$). Dato che $a_n \neq 0$ (per definizione è il coefficiente direttore del polinomio) si ha

$$c = -(2n+1) \qquad \text{e} \qquad a_{n-1} = 0$$

Evidentemente $a_k = 0$ se k è un intero di parità diversa da n, mentre se k e n hanno la stessa parità allora $a_k \neq 0$, e, per induzione:

$$a_{k-2} = \frac{k(k-1)}{2k-2n-4} a_k$$

Quindi sono tutti definiti in termini di a_n; non scriviamo esplicitamente una formula per p (cosa che sarebbe assai facile a questo punto), ma osserviamo che le funzioni

$$f_n(x) = p_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

sono in $L^2(\mathbb{R})$, ove $p_n(x)$ è semplicemente il polinomio p in grado n: la scelta di un tale polinomio si riduce infatti a quella di una costante (il suo coefficiente direttore) che possiamo fissare e del suo grado, che è l'intero n.

Queste funzioni sono ortogonali: siano $n \neq m$; allora, dato che f_n e f_m soddisfano la (†):

$$f_n''(x) - x^2 p_n'(x) = -(2n+1) f_n(x) \qquad \text{e} \qquad f_m''(x) - x^2 p_m'(x) = -(2m+1) f_m(x)$$

Sottraendo queste equazioni si ottiene

$$(f_n' f_m - f_m' f_n)' = 2(m-n) f_m f_n$$

che, integrata, dà luogo alla

$$\int f_n f_m = \frac{1}{2(m-n)} \int (f_n' f_m - f_m' f_n)' = \frac{1}{2(m-n)} (f_n' f_m - f_m' f_n) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

I polinomi p_n si dicono *polinomi di Hermite*.

Sappiamo già che le $\{f_n\}$ costituiscono un sistema completo, quindi una base ortonormale per lo spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. Si potrebbe dimostrare che la trasformata di Fourier ammette queste funzioni come autovettori:

$$\widehat{f_n} = c_n f_n$$

con $c_n = \pm\sqrt{2\pi}$ oppure $c_n = \pm i\sqrt{2\pi}$

8.5.1 Appendice: l'integrale di Gauss

Vogliamo calcolare l'integrale di Gauss

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$$

Dato che $e^{-ax^2} = e^{-a(-x)^2}$ si osserva per prima cosa che

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = 2\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx$$

Calcoliamo quindi questo secondo integrale: se

$$C_r := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leq r^2 \text{ e } x, y \geq 0\}$$

e Q_r è il quadrato

$$Q_r := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq x, y \leq r\}$$

allora, dato che $e^{-a(x^2+y^2)} > 0$ e $C_r \subset Q_r \subset C_{r\sqrt{2}}$:

$$(*) \qquad \int_{C_r} e^{-a(x^2+y^2)} dx \otimes dy < \int_{Q_r} e^{-a(x^2+y^2)} dx \otimes dy < \int_{C_{r\sqrt{2}}} e^{-a(x^2+y^2)} dx \otimes dy$$

Inoltre, per il teorema di Fubini:

$$(**) \qquad \int_{Q_r} e^{-a(x^2+y^2)} dx \otimes dy = \int_0^r e^{-ax^2} \int_0^r e^{-ay^2} dy dx = \left(\int_0^r e^{-ax^2} dx\right)^2$$

Infine, usando le coordinate polari in C_r:

$$\int_{C_r} e^{-a(x^2+y^2)} dx \otimes dy = \frac{\pi}{2}\int_0^r e^{-a\rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi}{4a}\int_0^r e^{-a\rho^2} d(a\rho^2) = \frac{\pi}{4a}\left(1 - e^{-ar^2}\right)$$

da cui otteniamo

$$\lim_{r \longrightarrow \infty} \int_{C_r} e^{-a(x^2+y^2)} dx \otimes dy = \lim_{r \longrightarrow \infty} \int_{C_{r\sqrt{2}}} e^{-a(x^2+y^2)} dx \otimes dy = \frac{\pi}{4a}$$

Quindi, passando al limite nella (*) ed usando la (**):

$$\lim_{r \longrightarrow \infty} \left(\int_0^r e^{-ax^2} dx\right)^2 = \frac{\pi}{4a}$$

Abbiamo quindi il valore dell'integrale di Gauss:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = 2\sqrt{\frac{\pi}{4a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

In maniera del tutto analoga, se A è una matrice simmetrica invertibile $n \times n$, si trova

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x\rangle} dx = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}}$$

(le condizioni sulla matrice sono indispensabili per l'integrabilità della funzione) che generalizza la formula dell'integrale di Gauss.

8.6 Distribuzioni temperate

Osserviamo che le immersioni continue

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

sono dense, e quindi danno luogo alle immersioni continue

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

ove $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^*) := \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$ è lo spazio delle *distribuzioni temperate*.

8.6.1 Esempio

- *Una distribuzione a supporto compatto è temperata.*
- *Ogni funzione continua f che tenda all'∞ più lentamente di ogni polinomio induce una distribuzione fdx temperata: infatti una distribuzione è temperata se e solo se è continua nella topologia su $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ indotta da quella di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; per lo stesso motivo ogni funzione $f \in L^p$ (con $1 \leq p \leq \infty$) induce una distribuzione fdx temperata.*

8.6.2 Teorema *Una distribuzione è temperata se e solo se è somma (finita) di derivate di funzioni continue che tendono all'∞ più lentamente di qualsiasi polinomio.*

DIMOSTRAZIONE: La sufficienza della condizione è ovvia; Se T è una distribuzione temperata allora esistono $m, h \geq 0$ ed una $C > 0$ tali che

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \quad |\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sup_{|p|\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|(1+|x|^2)^h \frac{\partial^p}{\partial x^p}\varphi(x)\right|$$

Se

$$\varphi_h := (1+|x|^2)^h \varphi(x)$$

ovviamente $\varphi_h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. è poi ovvio che la mappa $\varphi \longmapsto \varphi_h$ è lineare e biunivoca da $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ in se stesso; per induzione:

$$\left|\frac{\partial^p}{\partial x^p}\varphi(x)\right| \leq C_{p,h} \frac{1}{(1+|x|^2)^h} \sum_{q\leq p} \left|\frac{\partial^p}{\partial x^p}\varphi_h(x)\right|$$

quindi

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C' \sup_{|p|\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial^p}{\partial x^p}\varphi_h(x)\right|$$

Consideriamo ora il monomio differenziale

$$D := \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_n}$$

Ovviamente (per $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$):

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} D\varphi(y) dy_1 ... dy_n$$

e quindi

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \leq ||D\varphi||_{L^1}$$

Sostituendo nella stima precedente:

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C'' \sup_{|p| \leq m+n} \left|\left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^p \varphi_h(x) \right|\right|_{L^1}$$

Un modo di interpretare questa stima è considerare la mappa iniettiva

$$\begin{aligned} J : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \left(L^1(\mathbb{R}^n) \right)^N \\ \psi &\longmapsto \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^p \psi \right)_{|p| \leq m+n} \end{aligned}$$

(ove N è il numero delle n-ple p tali che $|p| \leq m+n$) ed affermare che il funzionale lineare (si ricordi che ogni funzione $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ è univocamente rappresentabile come φ_h)

$$J\varphi_h \longmapsto \langle T, \varphi \rangle$$

è continuo su $JC_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ rispetto alla topologia indotta da $(L^1(\mathbb{R}^n)^N$; Quindi, per il teorema di Hahn–Banach, si estende ad un funzionale su tutto $L^1(\mathbb{R}^n))^N$. Ma, dato che $L^1(\mathbb{R}^n)^* = L^\infty(\mathbb{R}^n)$, allora (per il teorema di Riesz 6.4.8) $(L^1(\mathbb{R}^n))^{N*} = L^\infty(\mathbb{R}^n)^N$ e quindi esistono N funzioni $h_p \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ($|p| \leq m+n$) tali che

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{|p| \leq m+n} \langle h_p, \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^p \varphi_h \rangle$$

i.e.

$$T = \sum_{|p| \leq m+n} (1 + |x|^2)^h (-1)^{|p|} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^p h_p$$

Se, per ogni p poniamo

$$g_p(x) := \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} h_p(y_1, ..., y_n) dy_1 ... dy_n$$

allora, dato che le h_p sono essenzialmente limitate, le g_p sono continue e

$$|g_p(x)| \le |x_1|...|x_n| \; ||h_p||_{L^\infty}$$

Ma, dato che $h_p = Dg_p$:

$$T = \sum_{|p|\le m+n} (1+|x|^2)^h \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p k_p$$

ove $k_p = (-1)^{|p|} Dg_p$. Per induzione su h segue infine che

$$(1+|x|^2)^h \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p k_p(x) = \sum_{q\le p} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p (P(x)k_p(x))$$

per qualche polinomio P che dipende da p, q, h, e quindi la tesi.

QED

8.6.3 Definizione *L'applicazione lineare duale della trasformata di Fourier in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è la* trasformata di Fourier *nello spazio delle distribuzioni temperate.*

Osserviamo che, essendo $L^2(\mathbb{R}^n)^* = L^2(\mathbb{R}^n)$, questo concetto è autoduale sullo spazio delle funzioni a quadrato integrabile.

Applicando l'operatore di dualità * al teorema 8.5.5 si ha il

8.6.4 Teorema *La trasformata di Fourier è un isomorfismo fra gli spazi vettoriali topologici $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n*})$.*

Ricordiamo che lo spazio di Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ è un'algebra associativa e commutativa rispetto alla convoluzione: ricordiamo in particolare che, se $f, g \in C_(\mathbb{R}^n)$, la loro *convoluzione* è la funzione

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

Le seguenti proprietà sono state già enunciate nel caso di $L^1(\mathbb{R})$: dimostriamole in dettaglio nel caso di funzioni continue a supporto compatto.

8.6.5 Proposizione *Se $f, g, h \in C_c(\mathbb{R}^n)$ allora*

- $f * g = g * f$
- $f * (g * h) = (f * g) * h$
- $(f + g) * h = f * h + g * h$

- *Se* $f_y(x) := f(x-y)$ *allora* $(f*g)_y = f_y * g = f * g_y$

DIMOSTRAZIONE: Le (1) e (2) seguono dall'invarianza della misura di Lebesgue per traslazioni $d(ax+c) = adx$:

$$\begin{aligned} f*g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(-y)g(y+x)dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)d(-y) = g*f(x) \end{aligned}$$

e, per il teorema di Fubini[10]:

$$\begin{aligned} f*(g*h)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g*h(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\int_{\mathbb{R}^n} g(y-z)h(z)dzdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y-z)h(z)dz \otimes dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-z-y)g(y)dyh(z)dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f*g(x-z)h(z)dz = (f*g)*h(x) \end{aligned}$$

La (3) si riduce alla linearità dell'integrale, e la (4) è pure un molto semplice: intanto

$$f_y * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y-z)g(z)dz = (f*g)_y(x)$$

e quindi

$$f_y * g = (f*g)_y = (g*f)_y = g_y * f = f * g_y$$

QED

Evidentemente basta che solo una delle funzioni f, g sia a supporto compatto perché la definizione abbia senso. Esistono comunque condizioni più generali per l'esistenza della convoluzione di due funzioni.

8.6.6 Teorema *Se* p, q, r *sono tali che* $1 \le p, q, r \le \infty$ *e*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$$

allora, per ogni $f, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$*:*

$$||f*g||_{L^r} \le ||f||_{L^p}||g||_{L^q}$$

[10] Possiamo applicarlo perché le funzioni a supporto compatto sono integrabili rispetto alla misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$.

DIMOSTRAZIONE: Poniamo $h(x) := f * g(x)$ e $s = p(1 - 1/q)$; per la disuguaglianza di Hölder:

$$|h(x)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{(1-s)q}|g(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \left|\left||f|^s\right|\right|_{L^t}$$

ove t è tale che $1/t + 1/q = 1$. Ma allora $st = p$ e quindi

$$|h(x)|^q \leq ||f||_{L^p}^{sq} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{(1-s)q}|g(y)|^q dy$$

Consideriamo ora la funzione

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\longrightarrow L^\alpha(\mathbb{R}^n) \\ y &\longmapsto \left(x \longmapsto |f(x-y)|^{1-s)q}|g(y)|^q\right) \end{aligned}$$

(per α opportuno): evidentemente F è continua a supporto compatto e, per la proprietà del modulo dell'integrale[11]

$$\left|\left|\int_{\mathbb{R}^n} F(y)dy\right|\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} ||F(y)||dy$$

otteniamo

$$\left|\left||h|^q\right|\right|_{L^\alpha} \leq ||f||_{L^p}^{sq} \left|\left||f|^{(1-s)q}\right|\right|_{L^p} \left|\left||g|^q\right|\right|_{L^1}$$

vale a dire

$$||h||_{L^\alpha}^q \leq ||f||_{L^p}^{sq} ||f||_{L^{\alpha(1-s)q}}^{(1-s)q} ||g||_{L^q}^q$$

Allora, per $\alpha = r/q$

$$||h||_{L^r} \leq ||f||_{L^p}^s ||f||_{L^{(1-s)r}}^{1-s} ||g||_{L^q}$$

cioè la tesi, dato che

$$(1-s)r = \left(1 - p - \frac{p}{q}\right) r = pr\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right) = p$$

QED

Dato che $C_c(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$ segue il

[11]Osserviamo che stiamo integrando una funzione continua a valori in uno spazio di Banach L^α: dovrebbe essere ovvio che la definizione di questo integrale procede come nel caso di funzioni a valori reali; ad esempio, essendo la funzione continua, possiamo definire l'integrale come limite (nella norma di L^α) di somme integrali alla Riemann; in generale l'integrazione ha valori in uno spazio di Banach ha perfettamente senso e si dice *integrazione alla Bochner*.

8.6.7 Corollario *Se p, q, r sono tali che $1 \le p, q, r \le \infty$ e*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$$

allora, per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

definisce un elemento di $L^r(\mathbb{R}^n)$ che si denota $f * g$ ed è tale che

$$||f * g||_{L^r} \le ||f||_{L^p}||g||_{L^q}$$

In particolare: per $q = 1$ deduciamo che la mappa lineare

$$\begin{aligned} \varphi : L^p(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n) \\ g &\longmapsto f * g \end{aligned}$$

è continua e $||\varphi|| \le ||f||_{L^1}$, mentre per $p = q = 1$ deduciamo cha la mappa bilineare

$$\begin{aligned} L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^1(\mathbb{R}^n) \\ (f, g) &\longmapsto f * g \end{aligned}$$

è continua e $||f * g||_{L^1} \le ||f||_{L^1}||g||_{L^1}$. Cioè lo spazio di Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ dotato dell'operazione di convoluzione è un'algebra di Banach commutativa (cfr. capitolo seguente).

Osserviamo ora che se $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n)$, le formule di Leibniz e di derivazione sotto il segno di integrale implicano che $f * g$ è derivabile rispetto a x e

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g = f * \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

Ora, se $A \subset \mathbb{R}^n$ e $f, g \in C(\mathbb{R}^n)$ (ed una delle due ha supporto compatto), definendo

$$f_A(x) := \begin{cases} f(x) \text{ se } x \in A \setminus \operatorname{supp} g \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

abbiamo allora, per $x \in A$

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_A(x)g(y)dy = f_A * g(x)$$

Applicando questa osservazione a $\partial f / \partial x_i$ otteniamo, per ogni $x \in A$:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} f * g(x) \right| \le \sup_{y \in A \setminus \operatorname{supp} g} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) \right| \, ||g||_{L^1}$$

Se $\operatorname{supp} g$ e A sono compatti la parte destra di questa disuguaglianza è finita, quindi

8.6.8 Proposizione *Se* $0 \le m \le \infty$ *e* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *ha supporto compatto allora la convoluzione* $f \longmapsto f * g$ *è lineare e continua da* $C^m(\mathbb{R}^n)$ *in sè.*

Osservando che
$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$$
(somma vettoriale in $\mathbb{R}^n$) si trae facilmente il

8.6.9 Corollario *Se* $0 \le m \le \infty$ *e* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *ha supporto compatto allora la convoluzione* $f \longmapsto f * g$ *è lineare e continua da* $C^m_c(\mathbb{R}^n)$ *in sè.*

Dimostriamo ora che la trasformata di Fourier si comporta come un morfismo di algebre fra prodotto punto per punto e convoluzione.

8.6.10 Teorema
$$\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g} \qquad e \qquad \widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$$

DIMOSTRAZIONE: Usiamo ovviamente il teorema di Fubini
$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(\xi) &= \int f * g(x) e^{-2\pi i \langle \xi, x\rangle} dx = \int\int f(y) g(x-y) e^{-2\pi i\langle \xi, x\rangle} dy dx \\ &= \int f(y) e^{-2\pi i \langle \xi, y\rangle} \int g(x-y) e^{-2\pi i \langle \xi, x-y\rangle} dy dx \\ &= \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)\end{aligned}$$

Il viceversa segue per il teorema 8.5.5: ogni funzione di Schwartz è della forma $\widehat{h}$ così che $\widehat{fg} = \widehat{\widehat{k}\widehat{h}} = \widehat{\widehat{h * k}} = h * k = \widehat{f} * \widehat{g}$.

QED

In analogia a quanto abbiamo fatto per la trasformata di Fourier, vogliamo ora definire una operazione di convoluzione fra distribuzioni.

8.6.11 Definizione *Se* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *è una distribuzione temperata allora la distribuzione temperata* $\widehat{T}$ *definita da*
$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \langle \widehat{T}, \varphi\rangle = T(\widehat{\varphi})$$
è la sua trasformata di Fourier.

Dato che la trasformata di Fourier è un isomorfismo fra gli spazi di Schwartz, vale la formula di inversione per le trasformate di Fourier delle distribuzioni temperate: prima osserviamo che, se T_f è l'unica distribuzione associata alla funzione f:
$$T_f(\varphi) = \int f\varphi$$

allora

$$T_{\widehat{f}} = \widehat{T_f}$$

Infatti, se $f, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ allora, per il teorema di Parceval:

$$T_{\widehat{f}}(\varphi) = \int \widehat{f}\varphi = \int \widehat{\widehat{f}}\widehat{\varphi} = \int f\widehat{\varphi} = T_f(\widehat{\varphi})$$

8.6.12 Teorema *La trasformata di Fourier è l'unica estensione debolmente continua dell'isomorfismo* $\widehat{\ }: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{*n})$ *agli spazi delle distribuzioni temperate corrispondenti. Si tratta di una mappa lineare e biunivoca.*

Dimostrazione: Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; allora, se $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ i $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: $\widehat{\varphi_n} \longrightarrow \widehat{\varphi}$ e quindi $T(\widehat{\varphi_n}) \longrightarrow T(\widehat{\varphi})$ e, per definizione $\widehat{T}(\varphi_n) \longrightarrow \widehat{T}(\varphi)$. Quindi la $T \longmapsto \widehat{T}$ è debolmente continua.

QED

8.6.13 Esempio *La trasformata di Fourier della derivata della* δ_{ξ_0} *è:*

$$\widehat{\delta_{\xi_0}}(\varphi) = \delta_{\xi_0}(\widehat{\varphi}) = \int \varphi(x)e^{-2\pi i\langle \xi_0, x\rangle}$$

i.e. $\widehat{\delta_{\xi_0}}$ *è la funzione* $e^{-2\pi i\langle \xi, x\rangle}$.

Infine definiamo anche la convoluzione di una distribuzione temperata T con una funzione di Schwartz f (se f è una funzione denotiamo con $\widetilde{f}$ la funzione $\widetilde{f}(x) = f(-x)$):

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \langle T * f, \varphi\rangle := \langle T, \widetilde{f} * \varphi\rangle$$

Dimostriamo che gode delle proprietà attese da una convoluzione.

8.6.14 Teorema *La funzione* $T \longmapsto T * f$ *è debolmente continua ed estende la convoluzione in* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*. Inoltre*

$$(T * f) * g = T * (f * g)$$

e

$$\widehat{T * f} = \widehat{f}\widehat{T}$$

DIMOSTRAZIONE: La debole continuità è ovvia, come pure il fatto che estenda la convoluzione usuale:

$$\begin{aligned}
T_f * g(\varphi) =&\langle T_f, \widetilde{g} * \varphi\rangle = \int f(y) \int g(-x)\varphi(y-x)dxdy \\
=& \int f(y) \int g(-y-x)\varphi(-x)dxdy = \int f(y) \int g(z-y)\varphi(z)dzdy \\
=& \int \int f(y)g(z-y)dy\varphi(z)dz = T_{f*g}(\varphi)
\end{aligned}$$

La debole densità di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ implica che le due identità per la convoluzione di funzioni si estendano alle convoluzioni.

QED

Capitolo 9

ALGEBRE DI BANACH E C*-ALGEBRE

In questo capitolo introduciamo le algebre di operatori: in realtà definiamo una classe più generale di oggetti, le algebre di Banach, che combinano una struttura di spazio vettoriale normato e di algebra associativa: gli esempi che ci interessano sono le C*-algebre di operatori, delle quali ci occuperemo nei capitoli seguenti; comunque nel caso commutativo, queste algebre sono algebre di funzioni, e come esempio chiave analizzeremo in dettaglio il caso dell'algebra delle funzioni continue su uno spazio di Hausdorff compatto, dimostrandone tutte le principali proprietà. In appendice al capitolo diamo dei rapidi cenni di analisi complessa, per rendere indipendente la nostra esposizione autosufficiente.

9.1 Algebre di Banach

Osserviamo che se $A : X \longrightarrow Y$ è un operatore lineare e $B \in \mathcal{B}(Y, Z)$ allora l'operatore composto

$$B \circ A(x) := B(Ax)$$

è lineare (ovvio) e limitato:

$$||B \circ A(x)|| \leq ||B||\ ||Ax|| \leq ||A||\ ||B||\ ||x||$$

cioè

$$||BA|| \leq ||A||\ ||B||$$

Se $X = Y = Z$ lo spazio vettoriale $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, X)$ è un'algebra rispetto al prodotto dato dalla composizione di operatori ed è normata nel senso della seguente

9.1.1 Definizione *Un'algebra (associativa sui complessi) $\mathcal{A}$ si dice* normata *se, come spazio vettoriale, è normato e la norma è compatibile col prodotto:*

$$\forall a, b \in \mathcal{A} \quad ||ab|| \leq ||a||\ ||b||$$

Se un'algebra normata $\mathcal{A}$ è uno spazio di Banach rispetto alla sua norma, si dice algebra di Banach.

Osserviamo che un'algebra di Banach, dal punto di vista algebrico, è semplicemente un'algebra associativa, non necessariamente commutativa e non necessariamente dotata di un elemento identità.

9.1.2 Esempio

(1) *Se X è uno spazio di Banach, allora $\mathcal{B}(X)$ è un'algebra di Banach.*

(2) *Ogni algebra di dimensione finita è un'algebra di Banach, dato che uno spazio di dimensione finita è di Banach rispetto a qualsiasi norma si possa immaginare.*

(3) *Se $\dim X < \infty$ allora $\mathcal{B}(X)$ è l'algebra degli endomorfismi di uno spazio vettoriale, cioè l'algebra completa delle matrici $M_n(\mathbb{C})$: una norma che tipicamente si considera sullo spazio delle matrici (reali o complesse) è*

$$||A|| = n \max_{i,j} |a_{ij}|$$

ove $((a_{ij})) = A$ sono le entrate della matrice. Ovviamente rispetto a $||.||$ $M_n(\mathbb{C})$ è uno spazio normato: è inoltre un'algebra di Banach, dato che

$$\begin{aligned} ||AB|| &= n \max_{i,j} \left| \sum_k a_{ik} b_{jk} \right| \le n \max_{i,j} \sum_k |a_{ik}| \, |b_{kj}| \\ &\le n \left(\underbrace{\frac{|A|}{n} \frac{|B|}{n} + \cdots + \frac{|A|}{n} \frac{|B|}{n}}_{n \text{ volte}} \right) = |A| \, |B| \end{aligned}$$

Introduciamo un po' di terminologia: ovviamente una *sottoalgebra* di un'algebra normata $\mathcal{A}$ è un sottospazio vettoriale che sia anche un'algebra rispetto al prodotto indotto da $\mathcal{A}$: avrà interesse particolare considerare sottoalgebre chiuse. Un *morfismo* $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ di algebre normate è un operatore lineare e continuo che sia anche un omomorfismo di algebre: $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Evidentemente le algebre normate formano una categoria.

Sia $\mathcal{A}$ un'algebra normata e $S \subset \mathcal{A}$; se $a(S)$ denota la sottoalgebra generata da S allora $\overline{a(S)}$ è una sottoalgebra normata di $\mathcal{A}$. Infatti la mappa

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (A, B) &\longmapsto AB \end{aligned}$$

è continua (su $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ si mette la topologia prodotto). Per vederlo basta osservare che

$$A_nB_n - A_nB + A_nB - AB = A_n(B_n - B) + (A_n - A)B$$

e quindi che

$$\begin{aligned}||A_nB_n - AB|| &\leq ||A_n||\,||B_n - B|| + ||A_n - A||\,||B||\\ &\leq c||B_n - B|| + ||A_n - A||\,||B|| \; x_n \underset{\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

(dato che $A_n \longrightarrow A$).

Quindi $\{A_n\}, \{B_n\} \subset \overline{a(S)}$ implica $AB \in \overline{a(S)}$: cioè la chiusura di una sottoalgebra è una sottoalgebra.

Un caso interessante è quando $X = \mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert: ad un elemento A dell'algebra di Banach $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si associa la funzione

$$\langle x, y\rangle := (x, Ay)$$

che è una forma sesquilineare limitata su $\mathcal{A}$:

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||A||\,||x||\,||y||$$

(per la diseguaglianza di Schwartz). Viceversa, se $\langle,\rangle$ è una forma sesquilineare limitata sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ allora, fissato $x \in \mathcal{H}$, la mappa $y \longmapsto \langle x, y\rangle$ è un funzionale lineare limitato di norma N tale che

$$||\langle x, -\rangle|| \leq N||x||$$

Ma allora, per il teorema di Riesz, esiste $x' \in \mathcal{H}$ tale che

$$\forall y \in \mathcal{H} \quad \langle x, y\rangle = (x', y)$$

In modo analogo, fissando y, si ottiene la forma antilineare $x \longmapsto \langle x, y\rangle$ e di nuovo, per il teorema di Riesz (o meglio per il complesso coniugato del teorema di Riesz...), deve esistere $y' \in \mathcal{H}$ tale che

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad \langle x, y\rangle = (x, y')$$

Dunque ogni forma sesquilineare limitata è del tipo $\langle,\rangle$ ed esiste un operatore $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tale che $y' = Ay$ e $\langle x, y\rangle = (x, Ay)$ con $||A|| \leq ||\langle,\rangle||$.

Si noti che in realtà $||\langle,\rangle|| = ||A||$: infatti

$$||\langle,\rangle|| = \sup_{x,y\in\mathcal{H}_1} |\langle x, y\rangle| = ||A||$$

dato che $M|(x, Ay)|\ ||y|| \leq 1$ (denotiamo con $\mathcal{H}_1$ l'insieme dei vettori di $\mathcal{H}$ di norma minore o uguale a 1).

Dalla discussione precedente si ha che la forma

$$\langle x, y\rangle^* := \overline{\langle x, y\rangle}$$

è sesquilineare limitata e si dice *forma aggiunta* di $\langle,\rangle$. Ovviamente

$$||\langle,\rangle|| = ||\langle,\rangle^*||$$

e l'operatore A^* tale che, per ogni $x, y \in \mathcal{H}$: $\langle x, y\rangle^* = (x, A^*y)$ si dice *operatore aggiunto* dell'operatore A.

Per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ esiste dunque un unico operatore aggiunto $A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tale che

$$(Ax, y) = \overline{(y, Ax)} = (x, A^*y)$$

La corrispondenza $A \longmapsto A^*$ è una involuzione di algebre in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$: cioè $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una *-algebra.

9.1.3 Proposizione *Se $\mathcal{A}$ è un'algebra normata con involuzione *:*

(1) $(aA + bB)^* = \overline{a}A^* + \overline{b}B^*$.

(2) $(A^*)^* = A$.

(3) $(AB)^* = B^*A^*$.

9.1.4 Definizione *Una* *-algebra normata *è un'algebra $\mathcal{A}$ normata che sia anche una *-algebra in modo che*

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad ||A|| = ||A^*||$$

Abbiamo appena visto che $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una *-algebra normata. In realtà la norma in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ possiede una proprietà ben più notevole. Infatti, dato che

$$||A||^2 = \sup_{||x||=1} ||Ax||^2$$

e

$$||Ax||^2 = (Ax, Ax) = (x, A^*Ax) \leq ||A^*Ax||$$

(per la disuguaglianza di Schwartz) allora

$$||A||^2 \leq \sup_{||x||\leq 1} ||A^*Ax|| = ||A^*A|| \leq ||A^*||\ ||A|| = ||A||\ ||A|| = ||A||^2$$

e quindi

$$||A^*A|| = ||A||^2$$

9.1.5 Definizione *Una *-algebra di Banach $\mathcal{A}$ tale che, per ogni $a \in \mathcal{A}$:*

$$(*) \qquad ||a^*a|| = ||a||^2$$

si dice C*-algebra *e la proprietà* $(*)$ *si dice identità-C*.*

In una C*-algebra $\mathcal{A}$ ogni *-sottoalgebra chiusa è una sotto-C*-algebra.

9.1.6 Esempio

(1) *La C*-algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ non è commutativa: infatti due operatori in generale non sono commutabili (a meno che $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ e quindi $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = M_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$).*

(2) *Consideriamo le funzioni continue (a valori complessi) $C(X)$ definite su uno spazio topologico compatto X. Si tratta di uno spazio vettoriale che, rispetto alla norma*
$$||f|| = \max_{x \in X} |f(x)|$$
è uno spazio di Banach. Se poi consideriamo le operazioni
$$(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$$
$$(f^*)(x) := \overline{f(x)}$$
allora $C(X)$ diviene una C-algebra commutativa.*
In seguito dimostreremo che, in un certo senso, si tratta del modello più generale di C-algebra commutativa. Osserviamo che la funzione 1 che vale identicamente 1 su X sta in $C(X)$ e ne costituisce l'identità:*
$$\forall f \in C(X) \quad f \cdot 1 = 1 \cdot f = f$$

(3) *Un altro esempio di C*-algebra commutativa strettamente imparentato con $C(X)$ è quello delle funzioni continue a supporto compatto definite su uno spazio topologico localmente compatto X: $C_c(X)$. La norma è la medesima di $C(X)$ (dato che il luogo dei punti ove un elemento di $C_c(X)$ è diverso da zero è compatto ha senso parlare di massimo su tutto X), come pure le operazioni di prodotto e *. Osserviamo che tuttavia $C_c(X)$ non possiede una identità, dato che la funzione identicamente 1 (unico candidato possibile) non ha supporto compatto.*

9.1.7 Definizione *Un elemento $a \in \mathcal{A}$ di una *-algebra si dice* normale *se $a^*a = aa^*$, e si dice* autoaggiunto *se $a^* = a$.*

Considereremo sempre algebre di Banach con unità I.

9.1.8 Definizione *Se $\mathcal{A}$ è un'algebra di Banach, un elemento $A \in \mathcal{A}$ si dice* invertibile *se esiste $B \in \mathcal{A}$ tale che*

$$AB = BA = I$$

Si scrive in tal caso $A^{-1} = B$.

Un'algebra di Banach possiede sempre elementi invertibili, come segue ad esempio dal

9.1.9 Lemma *Per ogni $B \in \mathcal{A}$ tale che $||I - B|| < 1$ si ha che $B \in \mathcal{A}^{-1}$.*

DIMOSTRAZIONE: Scriviamo $A := I - B$. Allora l'ipotesi è che $||A|| < 1$ e possiamo prendere la serie formale

$$(I - A)^{-1} := \sum_{n \geq 0} A^n$$

Si tratta in realtà di una serie convergente, dato che converge assolutamente (cfr. proposizione 6.1.9): infatti la serie numerica

$$\sum_{n\geq 0} ||A^n|| = \sum_{n\geq 0} ||AA^{n-1}|| \leq \sum_{n\geq 0} ||A||\, ||A^{n-1}|| \leq ... \leq \sum_{n\geq 0} ||A||^n$$

converge dato che $||A|| < 1$. Quindi la serie $\sum_{n\geq 0} A^n$ converge ad un elemento $C \in \mathcal{A}$, e si ha

$$\begin{aligned} CB &= \left(\lim_{N\longrightarrow\infty} \sum_{n=0}^{N} A^n \right) B = \lim_{N\longrightarrow\infty} \sum_{n=0}^{N} (A^n B) \\ &= \lim_{N\longrightarrow\infty} \sum_{n=0}^{N} A^n (I_A) = \lim_{N\longrightarrow\infty} (I - A^{N+1}) = I - 0 = I \end{aligned}$$

(abbiamo usato la continuità del prodotto in $\mathcal{A}$ ed il fatto che se una serie converge il suo termine generico tende a zero).

In modo analogo si trova $BC = I$.

QED

Osserviamo che

$$||(I - A)^{-1}|| = \left|\left| \sum_{n\geq 0} A^n \right|\right| \leq \sum_{n\geq 0} ||A^n|| \leq \sum_{n\geq 0} ||A||^n = \frac{1}{1 - ||A||}$$

ed in modo analogo

$$||(I-A)^{-1}-I|| = \left|\left|\sum_{n\geq 1} A^n\right|\right| \leq \frac{||A||}{1-||A||}$$

Da ciò segue la continuità della mappa $A \longmapsto A^{-1}$ nel punto $I \in \mathcal{A}$, e questo significa che se consideriamo l'insieme $\mathcal{A}^{-1}$ degli elementi invertibili di un'algebra di Banach, questo è un gruppo topologico (rispetto alla moltiplicazione in $\mathcal{A}$) per la topologia della norma (cfr. capitolo **??**: evidentemente è localmente compatto solo se l'algebra di Banach ha dimensione finita.

9.1.10 Esempio *Se $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ allora $\mathcal{A}^{-1}$ è il gruppo lineare generale $GL_n(\mathbb{C})$ formato dalle matrici invertibili a coefficienti complessi.*

9.1.11 Corollario *Se $\mathcal{A}$ è un'algebra di Banach e $B\in\mathcal{A}^{-1}$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno U_ε di B in $\mathcal{A}$ tale che*

$$\forall A \in U_\varepsilon \quad ||A^{-1}-B^{-1}|| < \varepsilon$$

DIMOSTRAZIONE: Infatti $A^{-1} = A^{-1}BB^{-1}$ e quindi $A^{-1}-B^{-1} = (A^{-1}B-I)B^{-1}$ i.e.

$$||A^{-1}-B^{-1}|| \leq ||A^{-1}B-I||\ ||B^{-1}||$$

Ma $A^{-1}B = (B^{-1}A)^{-1}$ e quindi basta esibire un intorno di B tale che, per ogni suo elemento A si abbia $||A^{-1}B-I|| < \varepsilon$.

Consideriamo $A = B(X-I)$ di modo che $B^{-1}A = I-X$ e quindi se $||X|| < 1$ allora $B^{-1}A$ è invertibile e quindi A è invertibile. Così scegliamo X in modo che soddisfi alla

$$||A^{-1}B-I|| = ||(I-X)^{-1}-I|| \leq \frac{||X||}{1-||X||} < \varepsilon||B^{-1}||$$

ottenendo

$$||B^{-1}A-I|| = ||B^{-1}(A-B)|| \leq ||B^{-1}||\ ||A-B||$$

Ma allora, per $||A-B|| \leq ||B^{-1}||^{-1}\delta_\varepsilon$, abbiamo il risultato voluto.

QED

Consideriamo un esempio di algebra di Banach che può non essere una C*-algebra. Sia $L^1(\mathbb{R}^n)$ lo spazio di Banach delle funzioni integrabili rispetto alla misura di Lebesgue. I risultati del capitolo precedente sulle convoluzioni e le trasformate di Fourier possono riassumersi con il

9.1.12 Teorema *Lo spazio di Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ è un'algebra di Banach commutativa rispetto alla convoluzione.*

DIMOSTRAZIONE: Ricordiamo che la convoluzione di due elementi di $L^1(\mathbb{R}^n)$ come

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$$

Sappiamo (proposizione 7.4.3) che la convoluzione rende $L^1(\mathbb{R})$ un'algebra associativa; dimostriamo dunque che è un'algebra di Banach. Infatti

$$\begin{aligned} ||f * g||_1 &= \int \left| \int f(y)g(x-y)dy \right| dx \leq \int \int |f(y)|\,|g(x-y)|dydx \\ &= \int \int |g(x-y)|dx|f(h)dy = \int |g(x)|dx \int |f(y)|dy = ||f||_1\,||g||_1 \end{aligned}$$

QED

Lo stesso ragionamento potevamo farlo nel caso $L^1(\mathbb{T})$, per quello che sappiamo sulle serie di Fourier; osserviamo che sia $L^1(\mathbb{T})$ che $L^1(\mathbb{R}^n)$ non hanno un elemento neutro (tuttavia posseggono delle "identità approssimate, o "nuclei approssimanti: ne abbiamo costruite una famiglia, quando abbiamo considerato il nucleo di Fejér).

Notiamo infine che l'algebra di Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ (così come $L^1(\mathbb{T})$) possiede una involuzione:

$$f^*(x) := \overline{f(-x)}$$

Tuttavia $L^1(\mathbb{R}^n)$ è una *-algebra ma non una C*-algebra in generale.

9.2 L'algebra $C(X)$

In questo paragrafo ci concentriamo sulla C*-algebra commutativa $C(X)$ delle funzioni continue definite su uno spazio di Hausdorff compatto. Per essere precisi dovremmo specificare se le funzioni in $C(X)$ sono reali oppure complesse: i risultati che otterremo possono formularsi in ambedue i casi. Nel seguito, comunque, con $C(X)$ intenderemo sempre le funzioni continue complesse, denotando con $C_{\mathbb{R}}(X)$ quelle reali.

Consideriamo uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto X e l'algebra di Banach commutativa $C_c(X)$ delle funzioni reali continue a supporto compatto su X.

9.2.1 Definizione *Un funzionale $I : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ lineare si dice* positivo *se per ogni $f \in C_c(X)$: $f \geq 0 \Rightarrow I(f) \geq 0$.*

Il seguente teorema è stato anticipato quando abbiamo considerato le distribuzioni di ordine zero (cfr. esempio 8.4.4 e seguenti).

9.2.2 Teorema (Riesz–Markov) *Se I è un funzionale lineare positivo sull'algebra $C_c(X)$ delle funzioni reali continue a supporto compatto definite su uno spazio di Hausdorff localmente compatto X allora esiste un'unica misura di Borel μ su X tale che*

$$\forall f \in C_c(X) \quad I(f) = \int_X f d\mu$$

Dimostrazione: Dovremo usare alcune delle nozioni di teoria della misura (capitolo **??**). Precisamente, per costruire la nostra misura di Borel considereremo una misura esterna topologicamente regolare (definizione 4.5.5), usando il criterio 4.5.7.

Per ogni aperto $S \subset X$ definiamo l'insieme

$$M_S := \{f \in C_c(X) \mid f \in C_c(X, [0,1]),\ \operatorname{supp} f \subset S\}$$

e la funzione

$$\overline{\mu}S := \sup_{f \in M_S} I(f)$$

Si tratta di una funzione a valori in $[0, \infty]$ definita su tutti gli aperti di X, monotona, finita sugli insiemi limitati e che soddisfa l'ipotesi (5) del teorema 4.5.7. Dimostriamo che si tratta di una funzione numerabilmente subadditiva sugli aperti: sia $S = \cup S_i$ e sia $f \in C_c(X, [0,1])$ e $\operatorname{supp} f \subset S$; consideriamo ora una partizione dell'unità (teorema 2.3.5), cioè una famiglia di funzioni non-negative $\varphi_1, ..., \varphi_n \in M_{S_i}$ tali che

$$\forall x \in \operatorname{supp} f \quad \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) = 1$$

Allora $f = \sum_i \varphi_i f$ e quindi

$$I(f) = \sum_{i=1}^n I(\varphi_i f) \leq \sum_{i=1}^n \overline{\mu}S_i \leq \sum_{i=1}^\infty \overline{\mu}S_i$$

Passando al sup per ogni $f \in C_c(X)$ si trova

$$\overline{\mu}S \leq \sum_{i=1}^\infty \overline{\mu}S_i$$

cioè la subadditività numerabile di $\overline{\mu}$.

Ora dimostriamo che $\overline{\mu}$ soddisfa alle altre ipotesi del teorema 4.5.7 col che potremo dedurne che si estende ad una misura di Borel (quasi-regolare) su X. Se $S = S_1 \cup S_2$ con $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ e se $f_1 \in M_{S_1}$ e $f_2 \in M_{S_2}$, allora $f_1 + f_2 \in M_S$, cioè

$$I(f_1) + I(f_2) \leq \overline{\mu}(S)$$

Al variare di $f_1 \in M_{S_1}$ e di $f_2 \in M_{S_2}$ otteniamo dunque

$$\overline{\mu}S_1 + \overline{\mu}S_2 \leq \overline{\mu}S$$

quindi

$$\overline{\mu}S_1 + \overline{\mu}S_2 = \overline{\mu}S$$

Con ciò la funzione $\overline{\mu}$ soddisfa tutte le ipotesi necessarie perché possa estendersi ad una misura boreliana μ su X.

Ora mostriamo che

$$\forall f \in C_c(X) \quad I(f) = \int_X f d\mu$$

Dato che ogni $f \in C_c(X)$ è differenza di funzioni non negative, possiamo limitarci al caso $f \geq 0$ e, per linearità, possiamo anche assumere che $f \leq 1$.

Sia dunque S un aperto limitato tale che $\operatorname{supp} f \subset S$ e sia

$$S_k := \{x \in X \mid nf(x) > k - 1\}$$

(si noti che $S_0 = S$ e $S_k = \emptyset$ per $k > n$). Ovviamente

$$\overline{S_{k+1}} \subset S_k$$

e definiamo quindi

$$\varphi_k(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in S_{k+1} \\ nf(x) - k + 1 & \text{se } x \in S_k \setminus S_{k+1} \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus S_k \end{cases}$$

Allora

$$f = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi_k$$

e si ha $\operatorname{supp} \varphi_k \subset \overline{S}_k \subset S_{k-1}$ e $\varphi_k = 1$ su S_{k+1}. Quindi

$$\forall k \geq 1 \quad \overline{\mu}S_{k+1} \leq I(\varphi_k) \leq \overline{\mu}S_{k-1}$$

e

$$\forall k \geq 1 \quad \overline{\mu}S_{k+1} \leq \int_X \varphi_k d\overline{\mu} \leq \overline{\mu}S_k$$

Ne segue che

$$-\mu S_1 \leq \sum_{k=1}^{n} \left(I(\varphi_k) - \int_X \varphi_k \right) \leq \overline{\mu}S_0 + \overline{\mu}S_1$$

da cui

$$\left| I(f) - \int_X f d\mu \right| \leq \frac{2}{n}\overline{\mu}S$$

Ma n era arbitrario e quindi troviamo $I(f) = \int f d\overline{\mu}$.

QED

Questo teorema è di cruciale importanza perché ci fa vedere come le misure possano considerarsi funzionali lineari sullo spazio $C_c(X)$: in particolare ci fornisce una caratterizzazione dei funzionali lineari positivi su $C_\mathbb{R}(X)$ se X è uno spazio di Hausdorff compatto, cosa che ora torneremo a supporre.

Il risultato preliminare che ci occorre afferma che ogni funzionale lineare limitato su $C_\mathbb{R}(X)$ è differenza di due funzionali lineari positivi: in realtà questo risultato non dipende dalla natura dello spazio $C_\mathbb{R}(X)$, ma può formularsi in una maggiore generalità.

9.2.3 Definizione *Uno spazio vettoriale L di funzioni (qualsiasi!) a valori reali definite su X si dice* reticolo vettoriale *se per ogni $f, g \in L$ anche* $\max(f, g), \min(f, g) \in L$.

Imponendo la solita norma $||f|| = \sup_{x\in X} |f(x)|$ un reticolo vettoriale diviene uno spazio normato.

9.2.4 Lemma *Se L è un reticolo vettoriale di funzioni reali limitate definite su un insieme X e se $1 \in L$ allora per ogni funzionale lineare limitato F su L esistono due funzionali lineari positivi F_+ e F_- tali che $F = F_+ - F_-$ e*

$$||F|| = F_+(1) + F_-(1)$$

DIMOSTRAZIONE: Se $f \in L$ è non-negativa poniamo

$$F_+(f) := \sup_{0\leq\varphi\leq f} F(\varphi)$$

Allora

(1) $F_+(f) \geq 0$.

(2) $F_+(f) \geq F(f)$.

(3) $\forall c \geq 0 \quad F_+(cf) = cF_+(f)$.

Se $f, g \in L$ sono non-negative e $0 \leq \varphi \leq f$ e $0 \leq \psi \leq g$ allora

$$F_+(f+g) \geq F(\varphi) + F(\psi)$$

e, passando al sup su tutte le φ e ψ:

$$F_+(f+g) \geq F_+(f) + F_+(g)$$

Ma, se $0 \leq \chi \leq f+g$ allora $0 \leq \max(chi, f) \leq f$ e quindi $0 \leq \chi - \max(\chi, f) \leq g$, sicché

$$F(\chi) = F(\max(\chi, f)) + F(\chi - \max(\chi, f)) \leq F_+(f) + F_+(g)$$

Passando ancora al sup su tutte le χ:

$$F_+(f+g) \leq F_+(f) + F_+(g)$$

cioè $F_+(f+g) = F_+(f) + F_+(g)$.

Ora sia $f \in L$ qualsiasi e $M, N \geq 0$ costanti tali che $f+M, f+N \geq 0$; allora

$$F_+(f+M+N) = F_+(f+M) + F_+(N) = F_+(f+N) + F_+(M)$$

cioè

$$F_+(f+M) - F_+(M) = F_+(f+N) - F_+(N)$$

Quindi il valore di $F_+(f+M) - F_+(M)$ non dipende dalla scelta di M: definiamo dunque $F_+(f) := F_+(f+M) - F_+(M)$ ed il funzionale F_+ è lineare[1].

Per le (1) e (2) sia F_+ che il funzionale lineare $F_- := F_+ - F$ sono positivi e si ha ovviamente $F = F_+ - F_-$.

Ora dimostriamo la relazione fra le norme: si ha sempre che

$$||F|| \leq ||F_+|| + ||F_-|| = F_+(1) + F_-(1)$$

Per avere la disuguaglianza nel verso opposto consideriamo una funziona $0 \leq \varphi \leq 1$ di L; allora $|2\varphi - 1| \leq 1$ e

$$||F|| \geq F(2\varphi - 1) = 2F(\varphi) - F(1)$$

passando al sup per ogni φ otteniamo

$$||F|| \geq 2F_+(1) - F(1) = F_+(1) + F_-(1)$$

QED

[1]Da $F_+(cf) = cF_+(f)$ per $c \geq 0$ e dato che $F_+(-f) + F_+(f) = F_+(0) = 0$ abbiamo che $F_+(cf) = cF_+(f)$ per ogni c.

9.2.5 Teorema (Riesz) *Se X è uno spazio di Hausdorff compatto e $C_{\mathbb{R}}(X)$ lo spazio delle funzioni reali continue su X allora ad ogni funzionale limitato F su $C_{\mathbb{R}}(X)$ corrisponde un'unica misura di Radon finita con segno ν su X tale che*

$$\forall f \in C_{\mathbb{R}}(X) \quad F(f) = \int_X f d\nu$$

e $||F|| = |\nu|(X)$.

Dimostrazione: Sia $F = F_+ - F_-$ come nel lemma. Allora per il teorema di Riesz–Markov 9.2.2 esistono delle misure finite μ_1 e μ_2 tali che

$$F_+(f) = \int_X f d\mu_1 \qquad\qquad F_-(f) = \int_X f d\mu_2$$

Ponendo $\nu := \mu_1 - \mu_2$ otteniamo una misura di Radon finita con segno tale che

$$F(f) = \int_X f d\nu$$

Ora calcoliamo la norma di F: si ha intanto che

$$|F(f)| \leq \int_X |f| d|\nu| \leq ||f||\ |\nu|(X)$$

Quindi $||F|| \leq |\nu|(X)$. Ma

$$|\nu|(X) \leq \mu_1(X) + \mu_2(X) = F_+(1) + F_-(1) = ||F||$$

i.e. $||F|| = |\nu|(X)$.

L'unicità è ovvia.

QED

Possiamo riformulare il teorema di Riesz dicendo che *il duale topologico dello spazio di Banach $C_{\mathbb{R}}(X)$ è isomorfo allo spazio delle misure di Radon finite con segno su X con la norma $||\nu|| = |\nu|(X)$.*

Questo fatto rende immediate molte proprietà non banali dello spazio delle misure, ad esempio il fatto che sia uno spazio di Banach. Un risultato del tutto analogo vale per $C(X)$ relativamente allo spazio delle misure di Radon complesse.

Utilizziamo questi risultati per stabilire una proprietà fondamentale delle algebre $C(X)$ e $C_{\mathbb{R}}(X)$ (nel seguito con X denoteremo sempre uno spazio compatto di Hausdorff). Osserviamo per prima cosa che l'algebra $C(X)$ separa i punti di X, vale a dire:

$$\forall x_1 \neq x_2\ \exists f \in C(X) \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

Questo segue immediatamente dal lemma di Urysohn 2.3.2.

9.2.6 Esempio *La proprietà di separare i punti di X è goduta da molte sottoalgebre di $C(X)$:*

(1) *L'algebra dei polinomi definiti sull'intervallo della retta reale $[0,1]$ ha certamente questa proprietà.*

(2) *Un esempio meno immediato è il seguente: consideriamo lo spazio*

$$X = \prod_{\alpha\in A} D_\alpha$$

ove

$$D_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le r_\alpha\}$$

e gli r_α sono numeri positivi. Per il teorema di Tychonoff si tratta di uno spazio compatto, che è manifestamente di Hausdorff. Se consideriamo le proiezioni di X sui suoi fattori:

$$p_\alpha(x) := x_\alpha \in D_\alpha$$

si tratta di funzioni continue, cioè $p_\alpha \in C(X)$, che quindi generano una certa C-sottoalgebra (con unità) $\mathcal{P}$ in $C(X)$ (si tratta semplicemente dell'intersezione di tutte le C*-sottoalgebre (con unità) di $C(X)$ che contengono $\mathcal{P}$). Un generico elemento di $\mathcal{P}$ si scrive*

$$\sum C^{m_1\dots m_n, l_1\dots l_k}_{\alpha_1\dots\alpha_n,\beta_1\dots\beta_k} p_{\alpha_1}(x)^{m_1}\dots p_{\alpha_n}(x)^{m_n}\overline{p_{\beta_1}(x)}^{l_1}\dots\overline{p_{\beta_k}(x)}^{m_k}$$

(con $l_i, m_i \ge 0$ ed i coefficienti $C^{m_1\dots m_n, l_1\dots l_k}_{\alpha_1\dots\alpha_n,\beta_1\dots\beta_k}$ appartenenti a $\mathbb{C}$).
Questa sottoalgebra separa i punti: infatti se $x \ne y$ sono elementi di X allora esiste un α tale che $p_\alpha(x) \ne p_\alpha(y)$.

In ambedue gli esempi precedenti, le sottoalgebre in questione sono in realtà dense nelle rispettive algebre di funzioni continue, e questo segue dal teorema di Stone–Weiestrass che ora vogliamo dimostrare: daremo un elegante argomento di de Branges, sebbene il teorema possa dimostrarsi con tecniche essenzialmente elementari.

9.2.7 Lemma (DE BRANGES) *Se $\mathcal{R}$ è una sottoalgebra di $C_{\mathbb{R}}(X)$ e $K = \{\mu \in \mathcal{R}^\perp \mid ||\mu|| \le 1\}$, per ogni punto μ estremale di K e per ogni funzione continua $f : \mathcal{R} \longrightarrow (0,1)$ f è costante sul supporto della misura μ.*

DIMOSTRAZIONE: Se $\mu = 0$ certamente $\operatorname{supp}\mu = \emptyset$ ed il lemma è banale. Così sia $\mu \ne 0$, quindi $||\mu|| = 1$; definiamo le misure (di Radon) con segno

$$\nu(E) := \int_E f d\mu \qquad \text{e} \qquad \lambda(E) := \int_E (1-f)d\mu$$

(E boreliano). Dato che $f\in\mathcal{R}$ segue che $\nu,\lambda\in\mathcal{R}^\perp$ e quindi non sono nulle (dato che $f\neq 0$). Dunque
$$\mu = ||\nu||\frac{\nu}{||\nu||} + ||\lambda||\frac{\lambda}{||\lambda||}$$
è una combinazione convessa di elementi di K, dato che
$$||\nu|| + ||\lambda|| = \int_X f d|\mu| + \int_X (1-f)d|\mu| = |\mu|(X) = ||\mu|| = 1$$
Ma μ è un punto estremale e quindi $\mu = \nu/||\nu||$, i.e. $\nu = ||\nu||\mu$:
$$\int_E f d\mu = \int_E ||\nu|| d\mu$$
per ogni boreliano E. Dunque $f = ||\nu||$ $|\mu|$-q.o. Ma f è continua, quindi $f = ||\nu||$ sul supporto di μ.

QED

9.2.8 Teorema (Stone–Weierstrass) *Se X è uno spazio compatto di Hausdorff e $\mathcal{R}$ è una *-sottoalgebra di $C_\mathbb{R}(X)$ tale che*

(1) *$I\in\mathcal{R}$.*

(2) *$\mathcal{R}$ separa i punti di X.*

allora $\overline{\mathcal{R}} = C(X)$.

Dimostrazione: Consideriamo $K = \{\mu\in\mathcal{R}^\perp \mid ||\mu|| \leq 1\}$: si tratta di un insieme non vuoto, convesso e *-debolmente compatto (teorema di Alaoglu 8.2.12), quindi, per il teorema di Krejn–Milman 8.3.10, contiene un estremale μ.

Supponiamo che il supporto di μ contenga almeno due punti distinti x, y: allora esiste $f\in\mathcal{R}$ con $0 < f < 1$ che separa i punti. Ma per il lemma di de Branges questo è impossibile; quindi $\operatorname{supp}\mu = \{x\}$, dunque
$$\int_X 1 d\mu = 0$$
(perché $\mathcal{R}$ contiene le costanti) i.e. $\mu = 0$. Ma allora $K = \{0\}$ e quindi $\mathcal{R}^\perp = \{0\}$. Per concludere la dimostrazione applichiamo infine il teorema di Hahn–Banach: se la chiusura di $\mathcal{R}$ non fosse tutta $C(X)$ dovrebbe esistere un funzionale lineare non nullo in $\mathcal{R}$, mentre abbiamo dedotto che $\mathcal{R}^\perp = \{0\}$.

QED

Il teorema di Stone–Weiestrass può formularsi anche per l'algebra $C(X)$ delle funzioni complesse:

9.2.9 Teorema (STONE–WEIERSTRASS COMPLESSO) *Se X è uno spazio compatto di Hausdorff e $\mathcal{R}$ è una *-sottoalgebra di $C(X)$ (cioè contiene, con ogni funzione f la coniugata $f^* := \overline{f}$) tale che*

(1) $I \in \mathcal{R}$.

(2) *$\mathcal{R}$ separa i punti di X.*

allora $\overline{\mathcal{R}} = C(X)$.

DIMOSTRAZIONE: Basta dimostrare che l'algebra reale

$$\mathcal{R}_0 := \{f \in \mathcal{R} \mid f = f^*\}$$

delle funzioni autoconiugate (cioè a valori reali!) è densa in $C_{\mathbb{R}}(X)$, e quindi che soddisfa le ipotesi del teorema di Stone–Weierstrass reale. Evidentemente $1 \in \mathcal{R}_0$, quindi $\mathcal{R}_0$ contiene le costanti reali; che separi i punti è immediato: se $x_1 \neq x_2$ sono punti di X, esiste una funzione complessa F che li separa, quindi delle due funzioni reali

$$f = \frac{F + \overline{F}}{2} \qquad \text{e} \qquad g = \frac{F - \overline{F}}{2i}$$

almeno una separa i punti x_1 e x_2.

QED

Come controesempio, vedremo in seguito che l'algebra $A(D)$ delle funzioni complesse continue nel disco chiuso $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ olomorfe al suo interno non soddisfa le ipotesi del teorema di Stone–Weierstrass (il coniugio non è olomorfo).

Dimostriamo infine che lo spazio $C(X)$ gode di una notevole proprietà universale, postulata da Urysohn e dimostrata da Banach e Mazur: questa proprietà si articola in due risultati estremamente interessanti.

9.2.10 Teorema *Ogni spazio di Banach B è isomorfo ad un sottospazio chiuso di $C(X)$ per un opportuno spazio topologico compatto X. Se B è separabile può assumersi $X = [0, 1]$.*

DIMOSTRAZIONE: Utilizzeremo in modo essenziale le nozioni generali introdotte nel capitolo sugli spazi vettoriali topologici.

Sia X la palla unitaria in V^*: sappiamo dal teorema di Alaoglu 8.2.12 che si tratta di un insieme *-debolmente compatto. Allora l'applicazione che ad ogni elemento di B fa corrispondere un funzionale lineare su X si estende ad una mappa

$$B \longrightarrow C(X)$$

che è un isomorfismo di B su un sottospazio chiuso di $C(X)$.

Supponiamo ora che B sia separabile; allora $X \subset B^*$ è uno spazio topologico metrizzabile. Costruiamo esplicitamente una funzione f da $C[0,1]$ allo spazio metrico convesso compatto X: a questo punto la funzione

$$\begin{aligned} B &\longrightarrow C[0,1] \\ x &\longmapsto (t \longmapsto (f(t)(x)) \end{aligned}$$

sarà, per la prima parte della dimostrazione, l'immersione isometrica di B in $C[0,1]$ desiderata.

Possiamo supporre che il diametro dello spazio metrico compatto X sia 1; sempre per compattezza possiamo scrivere

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$$

ove gli X_i sono chiusi e hanno diametro 1/2. Per ogni i possiamo allora scrivere

$$X_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

ove gli X_{ij} sono chiusi e hanno diametro 1/4. In generale, iterando il procedimento, perverremo ad una successione $\{X_{i_1 \dots i_k}\}$ di chiusi di diametri 2^{-k}.

Costruiamo ora la funzione $f : [0,1] \longrightarrow X$ con un procedimento iterativo: dividendo $[0,1]$ in $2n_1 - 1$ intervalli Δ_i, definiamo f su Δ_i come una curva continua che congiunga un punto x_k di X_k con un punto x_{k+1} di X_{k+1}. (lo spazio X è convesso dunque ciò è possibile). Iteriamo il procedimento dividendo Δ_{2k-1} in $2n_2 - 1$ intervalli $\Delta_{i,2k-1}$ e definendo su questi f come il cammino che congiunga un punto $x_{kh} \in X_{kh}$ con un punto $x_{k,h+1} \in X_{k,h+1}$. Iterando il procedimento indefinitamente la funzione f resta così definita su un sottoinsieme denso di $[0,1]$ ed ivi continua, i.e. sarà possibile prolungarla ad una funzione continua $f : [0,1] \longrightarrow X$.

QED

9.2.11 Teorema (FRÉCHET) *Ogni spazio metrico separabile X è isometrico ad un sottospazio di uno spazio di Banach separabile.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $D = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_0, x_1, ...\}$ un insieme denso numerabile in X; definiamo allora una mappa

$$\Phi : X \longrightarrow \mathcal{M}$$

ove $\mathcal{M}$ è lo spazio delle successioni numeriche limitate (che è uno spazio metrico rispetto alla distanza $d(\{x_n\}, \{y_n\}) := \sup_n |x_n - y_n|$), nel modo seguente:

$$\Phi(x) := \{y_n := d(x, x_n) - d(x_0, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$$

(che $\Phi(x)$ sia una successione numerica limitata segue dalla disuguaglianza triangolare: $\forall n \geq 1$ $|y_n| \leq d(x, x_0)$). Siano ora $x.x' \in X$ e $\Phi(x) = \{y_n\}$ e $\Phi(x') = \{y'_n\}$. Allora

$$\begin{aligned}
||\Phi(x) - \Phi(x')|| &= \sup_n |y_n - y'_n| \\
&= \sup_n |(d(x, x_i) - d(x_0, x_i)) - (d(x', x_i) - d(x_0, x_i))| \\
&= \sup_n |d(x, x_i) - d(x', x_i)|`d(x, x')
\end{aligned}$$

Quindi, se $0 < \varepsilon < d(x, x')$ esiste $x_n \in M$ tale che $d(x, x_n) < \varepsilon/2$ sicché:

$$d(x', x_n) \geq d(x', x) - d(x, x_n) > d(x', x) - \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

vale a dire

$$\begin{aligned}
|y_n - y'_n| &= |d(x_n, x) - d(x, x')| > \\
&> d(x', x_n) - \frac{\varepsilon}{2} > d(x', x) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = d(x, x') - \varepsilon
\end{aligned}$$

da cui $||\Phi(x) - \Phi(x')|| > d(x, x') - \varepsilon$ e, per arbitrarietà di ε:

$$d(x, x') \leq ||\Phi(x) - \Phi(x')||$$

Abbiamo cioè dimostrato che $||\Phi(x)-\Phi(x')|| = d(x, x')$ e quindi X è isometrico ad un sottospazio M_0 separabile dello spazio $\mathcal{M}$ delle successioni numeriche limitate. Allora lo spazio di Banach generato da M_0 in $\mathcal{M}$ è separabile e contiene X.

QED

Conclusione:

9.2.12 Teorema (Banach–Mazur) *Ogni spazio metrico separabile è isometrico ad un sottospazio di $C[0, 1]$.*

9.3 Spettro e risolvente

Come in precedenza, d'ora in avanti tutte le algebre e gli spazi normati, salvo esplicita avviso contrario, saranno supposti complessi: in questo e nel paragrafo seguente sarà chiaro il perché di questa assunzione.

9.3.1 Definizione *Se $\mathcal{A}$ è un'algebra di Banach definiamo lo* spettro di $A \in \mathcal{A}$ *come*

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I \notin \mathcal{A}^{-1}\}$$

ed il risolvente di A *come*

$$P(A) := \mathbb{C} \setminus \sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I \in \mathcal{A}^{-1}\}$$

Stabiliamo anche la notazione:

$$R(\lambda) := (A - \lambda I)^{-1}$$

9.3.2 Proposizione *Lo spettro di un elemento di un'algebra di Banach è compatto in $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione: Per continuità di $\lambda \longmapsto A - \lambda I$ l'insieme $P(A)$ è aperto e quindi $\sigma(A)$ è chiuso; ovviamente $P(A)$ è limitato: dimostriamo che lo è anche $\sigma(A)$.

$$||\lambda^{-1}A|| < 1 \Rightarrow I - \lambda^{-1}A \in \mathcal{A}^{-1}$$

quindi per $|\lambda| > ||A||$ si ha che $\lambda \in P(A)$ e

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq ||A||\}$$

che è limitato.

QED

Dimostreremo in séguito che per ogni $A \in \mathcal{A}$: $\alpha(A) \neq \emptyset$.

Osserviamo che se $|\lambda| > ||A||$ allora

$$||(A - \lambda I|^{-1}|| \leq |\lambda|^{-1} \frac{1}{1 - ||\lambda^{-1}A||}$$

è analitica. Vogliamo dare, più in generale, una definizione di analiticità per funzioni a valori in uno spazio di Banach:

9.3.3 Definizione *Se $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ è un aperto e $A : \mathcal{D} \longrightarrow X$ è una funzione a valori in uno spazio di Banach, si dice che A* è analitica in $z \in \mathcal{D}$ *se esiste la sua derivata $A' : \mathcal{D} \longrightarrow X$ nella topologia della norma:*

$$\lim_{|h| \longrightarrow 0} \left|\left| \frac{(A(z+h) - A(z))}{h} - A'(z) \right|\right| = 0$$

I casi interessanti saranno quando X è della forma $\mathcal{B}(X, Y)$ o Y^*. Diamo ora una utile caratterizzazione del concetto di analiticità di una funzione a valori in uno spazio di Banach: ci serve un risultato di Analisi Complessa[2]

[2]Per alcuni richiami sulla teoria delle funzioni olomorfe si veda l'Appendice al capitolo, pag. 319 e seguenti).

9.3.4 Lemma *Se $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa nell'aperto $\mathcal{D}$ e se la palla $\{||z'-z|| \leq r\}_{z\in\mathcal{D}}$ è contenuta in $\mathcal{D}$ allora, per ogni $h, k \in \mathbb{C}$ con $|h|, |k| \leq \frac{r}{2}$ si ha la*

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \frac{f(z+k)-f(z)}{k}\right| \leq M|h-k|$$

ove M non dipende da h né da k.

DIMOSTRAZIONE: Utilizziamo la formula integrale di Cauchy 9.6.6: abbiamo che

$$||\xi - z'|| \geq \frac{r}{2}$$

per $z' \in \{z, z+h, z+k\}$ e $\zeta \in \gamma := \{w \in \mathbb{C} \mid |w-z'| = r\}$. Cioè la curva chiusa γ è completamente contenuta nel dominio $\mathcal{D}$. Applichiamo a questa curva la formula di Cauchy:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z'}d\xi$$

al primo membro della disuguaglianza dell'enunciato, ottenendo

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma f(\zeta)\left(\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\zeta-(z+h)} - \frac{1}{\zeta - z}\right) - \frac{1}{k}\left(\frac{1}{\zeta-(z+k)} - \frac{1}{\zeta-z}\right)\right)d\zeta\right| \\
&\quad = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma f(\zeta)\frac{z-(z+k)-z+(z+h)}{(\zeta-(z+h))(\zeta-z)(\zeta-(z+k))}d\zeta\right| \\
&\quad = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma f(\zeta)\frac{1}{(\zeta-z)(\zeta-(z+h))(\zeta-(z+k))}d\zeta\right| \\
&\quad \leq |h-k| \sup_{|\zeta-z|=r} f(\zeta)\frac{4r}{r^3}
\end{aligned}$$

Cioè la disequazione voluta.

QED

9.3.5 Definizione *Se Y è uno spazio di Banach, un $E \subset Y^*$ sottospazio vettoriale chiuso si dice* sottospazio determinante *se, considerando la restrizione della mappa canonica $j : Y \hookrightarrow Y^{**}$ a E si ha che*

$$\forall y \in Y \quad ||j|_E(y)|| = ||y||$$

9.3.6 Lemma *Se X e Y sono spazi di Banach, $\mathcal{F}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{B}(X,Y)$ e E un sottospazio determinante di Y^* allora, se per ogni $x\in X$ e $y\in E$ l'insieme*

$$\{\langle y, Ax\rangle \mid A \in \mathcal{F}\}$$

è limitato, $\mathcal{F}$ è limitato in $\mathcal{B}(X,Y)$ (cioè è equilimitato in norma).

DIMOSTRAZIONE: Se $J : X \hookrightarrow X^*$ è l'immersione canonica allora

$$\forall x \in X \quad \sup_{y\in E} |\langle J(Ax), y\rangle| < \infty$$

Allora, per il teorema di Banach–Steinhaus 6.5.14:

$$\sup_{x\in X} ||J|_E(Ax)|| = \sup_{x\in X} ||J(Ax)|| = \sup_{x\in X} ||Ax|| < \infty$$

e quindi, ancora per il teorema di Banach–Steinhaus, la tesi.

QED

9.3.7 Teorema *Una funzione $A : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{B}(X,Y)$ è analitica se e solo se per ogni $F \in X^*$ la funzione*

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \langle F|A(z)\rangle \end{aligned}$$

è olomorfa (scriviamo $\langle F|x\rangle = F(x)$ per la valutazione del funzionale F sull'elemento x).

DIMOSTRAZIONE: Evidentemente una funzione A analitica soddisfa la condizione del teorema: dimostriamo il viceversa.

La funzione $z \longmapsto \langle F|A(z)x\rangle$ è analitica a valori in $\mathbb{C}$, quindi soddisfa le ipotesi del lemma 9.3.4. Consideriamo ora la famiglia

$$\mathcal{F} := \left\{ \frac{1}{h-k}\left(\frac{A(z+h)-A(z)}{h} - \frac{A(z+k)-A(z)}{k}\right)\right\}$$

(per $h,k \in \mathbb{C}$ con $|h|,|k| < \frac{r}{2}$). Per il lemma 9.3.4 questa famiglia soddisfa le ipotesi del lemma 9.3.6 e quindi $\mathcal{F}$ è limitato in norma. Questo vuol dire che la successione

$$\left\{\frac{A(z+h)-A(z)}{h}\right\}$$

è di Cauchy e quindi converge alla derivata $A'(z)$ nella norma di $\mathcal{B}(X,Y)$.

QED

Osserviamo che, ovviamente

$$\frac{d^n}{dz^n}\langle y, A(z)x\rangle = \langle y, A^{(n)}(z)x\rangle$$

L'importanza di questo teorema sta nel fatto che ci consente di estendere al caso di funzioni a valori in uno spazio di Banach molti dei risultati della teoria delle funzioni di una variabile complessa. Osserviamo a questo proposito, che se Γ è una curva chiusa regolare nel piano complesso e $x : \Gamma \longrightarrow E$ una funzione continua a valori in uno spazio di Banach E ha perfettamente senso il vettore

$$\oint_\Gamma x(z)dz$$

dato che la continuità della x implica che le somme parziali (alla Riemann, ad esempio) che definiscono l'integrale formano una successione di Cauchy, dunque convergono in E ad un elemento ben determinato che è poi il valore dell'integrale.

Il teorema di Cauchy 9.6.5, cioè che se $\mathcal{D}$ è compatto e $\Gamma := \partial\mathcal{D}$ è una curva regolare chiusa, e se $A : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{B}(X,Y)$ è analitica in $\mathcal{D} \setminus \Gamma$ e continua in $\mathcal{D}$ allora

$$\oint_\Gamma A(z)dz = 0$$

non è completamente immediato: si tratta di osservare che, per il teorema precedente:

$$\forall x \in X\ \forall y \in Y^* \quad \left\langle y, \left(\oint_\Gamma A(z)dz\right) x\right\rangle = \oint_\Gamma \langle y, A(z)x\rangle\, dz = 0$$

Il teorema di Hahn–Banach permette allora di inferire il teorema di Cauchy. Si estendono immediatamente al nostro contesto le formule di Cauchy 9.6.6 e le sue conseguenze, ad esempio il principio di continuazione analitica, in virtù del quale si può definire il *dominio di analiticità* di una funzione analitica a valori in uno spazio di Banach come il più grande aperto connesso di $\mathbb{C}$ ove la funzione sia definita ed analitica.

Similmente le formule di Taylor 9.6.16, Caychy–Hadamard 9.6.11 e Laurent 9.6.29 si generalizzano immediatamente al caso di funzioni olomorfe a valori in $\mathcal{B}(X,Y)$.

Torniamo ora alle algebre di Banach.

9.3.8 Teorema *Se $\mathcal{A}$ è un'algebra di Banach (con unità) allora la funzione $R : P(A) \longrightarrow A$:*

$$R(\lambda) := (A - \lambda I)^{-1}$$

è analitica.

DIMOSTRAZIONE: Se $z \in P(A)$ allora

$$A - \lambda I = A - zI - (z - \lambda)I = (A - zI)(I - (\lambda - z)R(z))$$

Cioè se $(A - zI)$ e $I - (\lambda - z)R(z)$ sono invertibili allora lo è $(A - \lambda I)$; ma $(A - zI)$ è invertibile e $I - (\lambda - z)R(z)$ lo è se

$$||A - zI|| < ||R(z)||^{-1}$$

In questo caso, $\lambda \in P(A)$ e

$$R(\lambda) = \left(\sum (\lambda - z)^n R(z)^n\right) R(z) = \sum (\lambda - z)^n R(z)^{n+1}$$

e quindi $\lambda \longmapsto (A - \lambda I)^{-1}$ è analitica.

QED

Applicando allora il teorema di Liouville 9.6.26 abbiamo che

9.3.9 Corollario $\sigma(A) \neq \emptyset$.

Osserviamo che

$$(A - \lambda I)^{-1} = (-\lambda(I - \lambda^{-1}A))^{-1} = -\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n}$$

La serie $\sum z^n A^n$ converge per $|z| < ||A||^{-1}$ ed il suo raggio di convergenza è $1/\sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$.

9.3.10 Definizione *Il* raggio spettrale *di un elemento $A \in \mathcal{A}$ è il numero*

$$\operatorname{spr}(A) := \lim_{n \longrightarrow \infty} ||A^n||^{1/n}$$

9.3.11 Teorema *Per ogni elemento A di un'algebra di Banach $\mathcal{A}$:*

$$\operatorname{spr}(A) = \lim_{n \longrightarrow \infty} ||A||^n||^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} ||A^n||^{1/n}$$

DIMOSTRAZIONE: Per continuità e monotonia del logaritmo basta dimostrare che $a_n := \log ||A^n||^{1/n}$ converge al proprio estremo inferiore, i.e. che

$$\frac{a_n}{n} \longrightarrow \inf \frac{a_n}{n}$$

a_n è subadditiva (cioè $a_{n+m} \leq a_n + a_m$) dato che

$$a_{n+m} = \log ||A^n A^m|| \leq \log(||A^n|| \; ||A||^m) = a_n + a_m$$

Ma la subadditività di una successione implica che questa converga al proprio estremo inferiore: infatti fissato q tale che $n = qm + r$ $(r = 0, ..., q - 1)$ si ha

$$a_n \leq a_{qm} + a_r \leq ma_q + a_r$$

(applicando m volte la subadditività) e quindi

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{ma_q}{n} + \frac{a_r}{n}$$

Il secondo membro converge al variare di n dunque

$$\lim \left(\frac{ma_q}{n} + \frac{a_r}{n} \right) = \frac{a_q}{q}$$

i.e, per ogni q:

$$\overline{\lim} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_q}{q} \Rightarrow \overline{\lim} \frac{a_n}{n} \leq \inf_q \frac{a_q}{q} \leq \underline{\lim} \frac{a_q}{q}$$

e quindi la successione a_n/n converge al proprio inf.

QED

9.3.12 Esempio

(1) *Sia* $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{N})$ *e* $\{e_i\}$ *una base ortonormale. Definiamo gli* operatori diagonali *come*

$$De_n := d_n e_n$$

con $d_n \in \mathbb{C}$, *che soddisfano alle condizioni imposte dalla*

$$||Dx||^2 = \left|\left| D \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n \right) \right|\right|^2 = \sum |d_n|^2 |x_n|^2 \leq ||d||_\infty^2 ||x_n||^2$$

cioè $||D|| = ||d||_\infty = \sup_n |d_n|$. *Il raggio spettrale di un operatore diagonale è la sua norma:*

$$\text{spr}(D) = ||D||$$

(2) *Se consideriamo lo shift* $Se_n := e_{n+1}$, *dato che (essendo una isometria) è* $||S|| = 1$ *abbiamo che*

$$\text{spr}(S) = 1$$

(3) *Una generalizzazione sono gli operatori di* shift pesato

$$Te_n := t_n e_{n+1}$$

(con $\{t_n\} \in l^\infty$*) tali che* $||T|| = ||t||_\infty$.

(4) *Consideriamo gli* operatori di Volterra *(cfr. esempio 3.2.10). Siano* $X = L^2[0,1]$, $K \in C([0,1]^2)$ *e definiamo* $K : X \longrightarrow X$ *come*

$$(Kx)(t) := \int_0^t K(t,s)x(s)ds$$

La funzione K *si dice* nucleo *dell'operatore. (In particolare si può considerare un operatore di Volterra sullo spazio* $X = C[0,1]$*). Ovviamente*

$$||K|| \leq ||K||_\infty \Rightarrow ||K^n|| \leq \frac{||X||_\infty^n}{(n-1)!}$$

(il fattore numerico è il volume del dominio di integrazione) e quindi

$$\operatorname{spr}(K) = 0$$

Infatti la serie $\sum K^n$ *è assolutamente convergente in* $\mathcal{B}(X)$ *e quindi definisce* $(I-K)^{-1}$ *e, dato che se* $\lambda \neq 0$ λK *è pure un operatore di Volterra, il risolvente di* K *contiene tutti i numeri complessi non nulli e*

$$\sigma(K) = \{0\}$$

L'operatore K *è invertibile se*

$$\forall t \in [0,1] \quad K(t,t) \neq 0$$

Infatti in questo caso, se $x \in \mathcal{N}(K)$*:*

$$\int_0^t K(t,s)x(s)ds = 0$$

derivando per t *(*K *rispetto alla prima variabile):*

$$\int_0^t K'(t,s)x(s)ds + K(t,t)x(t) = 0$$

da cui (per l'ipotesi su K*):*

$$\int_0^t \frac{K'(t,s)}{K(t,t)}x(s)ds + x(t) = 0$$

i.e. $x \in \mathcal{N}(I+H)$ *ove* H *è l'operatore di Volterra con nucleo* K'/K *e quindi,* $x = 0$*.*

9.4 Morfismi e quozienti

Le algebre di Banach non sopportano strutture algebriche troppo forti: in particolare debbono sempre possedere elementi non invertibili (e quindi ideali) a meno di non ridurli ai soli numeri complessi.

9.4.1 Teorema (MAZUR) *Un'algebra di Banach con unità e in cui ogni elemento sia invertibile è isomorfa a $\mathbb{C}$.*

DIMOSTRAZIONE: Un elemento $A \in \mathcal{A}$ ha spettro non vuoto e quindi esiste $\lambda \in \sigma(A)$; in particolare $(A - \lambda I)$ non è invertibile, quindi deve essere nullo. Abbiamo cioè dimostrato che ogni elemento non nullo di $\mathcal{A}$ è multiplo dell'identità. Quindi $\mathcal{A} \cong \mathbb{C}$.

QED

Un'algebra in cui ci siano elementi non invertibili possiede delle notevoli sottoalgebre: gli ideali.

9.4.2 Definizione *Un* ideale sinistro *di un'algebra di Banach $\mathcal{A}$ è un sottospazio vettoriale $J \subset \mathcal{A}$ tale che*

$$\forall B \in J \ \forall C \in \mathcal{A} \quad CB \in J$$

Si scrive $J \lhd \mathcal{A}$.

Se un'algebra di Banach ha unità I ovviamente nessun ideale (non banale, cioè non uguale a $\mathcal{A}$) può contenerla e, viceversa, un ideale non banale ha intersezione vuota con l'insieme $\mathcal{A}^{-1}$ degli elementi invertibili di $\mathcal{A}$.

In ogni algebra di Banach v'è abbondanza di elementi invertibili, infatti

$$\mathcal{B} := \{B \in \mathcal{A} \mid ||I - B|| < 1\} \subset \mathcal{A}^{-1}$$

In particolare se $J \lhd \mathcal{A}$ è un ideale proprio (cioè non banale) allora $J \cap \mathcal{B} = \emptyset$ e quindi J è contenuto nell'insieme chiuso $\complement\mathcal{B}$, che deve quindi contenere anche la chiusura $\overline{J}$ di J. Dunque se $J \lhd \mathcal{A}$ allora $\overline{J} \subset \mathcal{A}$, anzi

9.4.3 Proposizione *Se J è un ideale sinistro (destro, bilatero) allora $\overline{J}$ è un ideale sinistro (destro, bilatero).*

DIMOSTRAZIONE: Se $\{B_n\} \subset J$ converge a $B \subset \overline{J}$ allora, per ogni $A \in \mathcal{A}$ la $\{AB_n\} \subset J$ converge (per continuità del prodotto) a $AB \in \overline{J}$.

QED

D'ora in avanti conveniamo che il termine "ideale" voglia dire "ideale sinistro"; se un ideale sarà destro o bilatero lo diremo esplicitamente.

Rispetto all'inclusione gli ideali sinistri (destri, bilateri) di un'algebra di Banach formano un reticolo (con $0 = \{0\}$ ideale zero e $1 = \mathcal{A}$ ideale banale): inoltre questo insieme parzialmente ordinato soddisfa le ipotesi del lemma di Zorn, dato che se $\{J_\alpha\}$ è una catena di ideali allora $\bigcup_\alpha J_\alpha$ è un ideale, il che significa che ogni ideale è contenuto in un ideale (proprio!) massimale[3].

Ovviamente, dato che la chiusura di un insieme contiene l'insieme stesso:

9.4.4 Corollario *Ogni ideale massimale è chiuso.*

Sappiamo che possiamo definire il quoziente di un'algebra $\mathcal{A}$ per un ideale J ottenendo ancora un'algebra $\mathcal{A}/J$. Effettuiamo questa costruzione per le algebre di Banach.

L'insieme $\mathcal{A}/J$ è senz'altro un'algebra associativa: dobbiamo verificare se sia un'algebra di Banach. Denotando gli elementi di $\mathcal{A}/J$ come $A + J$ (sono classi di equivalenza rispetto alla relazione $A \equiv B \iff A - B \in J$), poniamo

$$||A + J|| := \inf_{B \in A+J} ||B||$$

9.4.5 Proposizione *Se J è un ideale chiuso allora $\mathcal{A}/J$ è un'algebra di Banach.*

DIMOSTRAZIONE: Scrivendo $B = A - C$ con $C \in J$ abbiamo che $\inf ||A - C|| = d(A, J)$ ove d è la distanza indotta dalla norma dello spazio di Banach $\mathcal{A}$. Dunque se $||A + J|| = 0$ si ha che $d(A, J) = 0$ e quindi (per chiusura di J) $A \in J$ i.e. $A + J = J$, l'elemento $0 \in \mathcal{A}/J$. Le altre proprietà della norma sono ovvie dalla definizione di distanza $d(A, J)$.

Verifichiamo infine che la norma indotta su $\mathcal{A}$ è completa. Sia

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||A_n + J|| < \infty$$

una serie assolutamente convergente in $\mathcal{A}/J$; prendiamo nella classe $A_n + J$ degli elementi B_n tali che $||B_n|| < ||A_n|| + \varepsilon_n$ con

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$$

[3]Questa e diverse altre asserzioni valgono nelle algebre associative qualsiasi e negli anelli: in particolare l'esistenza di un ideale massimale che contenga un ideale dato è nota in Algebra come *Lemma di Krull*.

(ad esempio basta considerare $\varepsilon = 2^{-1}$). Dunque $\sum ||B_n||$ è assolutamente convergente e, dato che $\mathcal{A}$ è di Banach, la serie $\sum B_n$ converge ad un elemento $B \in \mathcal{A}$, in modo che

$$\left|\left|B - \sum_{n=1}^{N} B_n\right|\right| \longrightarrow 0$$

e (per definizione la norma della classe di un elemento $A + J \in \mathcal{A}/J$ è minore o uguale alla norma di A in $\mathcal{A}$):

$$\left|\left|(A + J) - \sum_{n=1}^{N}(A_n + J)\right|\right| \leq \left|\left|B - \sum_{n=1}^{N} B_n\right|\right|$$

Quindi ogni serie assolutamente convergente in $\mathcal{A}/J$ converge in $\mathcal{A}/J$.

Infine, se $A + J, B + J \in \mathcal{A}/J$ esistono rappresentanti $A_\varepsilon \in A + J$ e $B_\varepsilon \in B + J$ tali che $||A_\varepsilon|| \leq ||(A + J)|| + \varepsilon$ e $||B_\varepsilon|| \leq ||(B + J)|| + \varepsilon$. Quindi

$$\begin{aligned} ||(A + J)(B + J)|| = ||(AB) + J|| &\leq ||A_\varepsilon B_\varepsilon|| \\ &\leq ||A_\varepsilon||\ ||B_\varepsilon|| \leq ||A + J||\ ||B + J|| + 2\varepsilon \end{aligned}$$

QED

Naturalmente un ideale J è massimale se e solo se $\mathcal{A}/J = \mathbb{C}$ per il teorema di Mazur.

9.4.6 Lemma *Se $\mathcal{A}$ è un'algebra di Banach con unità allora*

$$\mathcal{A}^{-1} = \complement\{A \mid \exists J \text{ ideale massimale proprio e } A \in J\}$$

Se fissiamo un elemento $A \in \mathcal{A}$ l'insieme degli ideali che contengono A è pure parzialmente ordinato e soddisfa le ipotesi del lemma di Zorn, quindi il teorema di Mazur può formularsi come

9.4.7 Teorema *Un'algebra di Banach con unità che non abbia ideali non banali è isomorfa a $\mathbb{C}$.*

Naturalmente un'algebra può non avere ideali bilateri pur possedendo moltissimi ideali sinistri, mentre in un'algebra commutativa i concetti di ideale sinistro, destro e bilatero coincidono.

Tutte le costruzioni algebriche che si effettuano sugli anelli possono darsi anche per le algebre di Banach: ad esempio un *morfismo* $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ fra algebre di Banach è un operatore lineare continuo fra gli spazi di Banach $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tale che

$$\forall A \in \mathcal{A}\ \forall B \in \mathcal{B} \quad \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$$

Ovviamente le algebre di Banach formano in questo modo una categoria.

I concetti di *nucleo* e *immagine di un morfismo* sono ovvi: il nucleo $\ker(\varphi)$ è l'insieme degli elementi di $\mathcal{A}$ la cui immagine è zero e l'immagine $\mathrm{im}(\varphi)$ l'insieme degli elementi di $\mathcal{B}$ che siano immagine di un elemento di $\mathcal{A}$.

L'insieme degli omomorfismi fra due algebre di Banach $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ si denota $\hom(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Un omomorfismo si dice *isomorfismo* se è un operatore lineare continuo e biunivoco (quindi una isometria). Si possono formulare e dimostrare esattamente come nel caso algebrico i teoremi di isomorfismo: ad esempio

9.4.8 Teorema *Se $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un morfismo fra algebre di Banach allora* $\ker(\varphi)$ *è un ideale bilatero e l'algebra $\mathcal{A}/J$ è isomorfa alla sottoalgebra* $\mathrm{im}(\varphi) \subset \mathcal{B}$.

9.4.9 Definizione *Un* modulo su un'algebra di Banach $\mathcal{A}$ *è uno spazio di Banach $\mathcal{M}$ dotato di un morfismo*

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$$

che si dice azione di $\mathcal{A}$ su $\mathcal{M}$*.*

Si scrive in genere $A \cdot M$ in luogo di $\mu(A)(M)$. Quindi gli elementi di un modulo si possono moltiplicare per gli elementi dell'algebra. Ad esempio un $\mathbb{C}$-modulo X non è altri che uno spazio di Banach.

Osserviamo che un ideale J, così come l'insieme quoziente $\mathcal{A}/J$ sono $\mathcal{A}$-moduli.

9.4.10 Definizione *Un'algebra di Banach priva di ideali bilateri non banali si dice* semplice*.*

9.4.11 Esempio

(1) $\mathbb{C}$ *è semplice.*

(2) *Le algebre (di dimensione finita) $M_n(\mathbb{C})$ sono algebre semplici (teorema 5.5.14).*

(3) *Il teorema di Mazur implica che un'algebra semplice commutativa (con unità) è isomorfa a $\mathbb{C}$.*

Consideriamo dunque un ideale massimale J nell'algebra di Banach (con unità) $\mathcal{A}$; dato che il quoziente $\mathcal{A}/J$ è $\mathbb{C}$ possiamo definire la mappa

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \varphi(A) := \lambda$$

con $A+J=\lambda I$, ovvero $A+J=\varphi(A)I$. La mappa φ non è altri che il morfismo naturale dato dalla proiezione di $\mathcal{A}$ sul quoziente $\mathcal{A}/J$:

$$\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$$

che è ovviamente suriettivo. Viceversa, se $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ è un morfismo allora $\ker\varphi = \varphi^{-1}(0)$ è un ideale bilatero che deve essere massimale, dato che $\mathcal{A}/\ker\varphi = \operatorname{im}\varphi$ è una sottoalgebra di $\mathbb{C}$ e quindi $\{0\}$ (da cui $\mathcal{A} = \ker\varphi$) oppure $\mathbb{C}$ stessa (da cui $\ker\varphi$ massimale). Quindi

9.4.12 Teorema *Esiste una corrispondenza biunivoca*

$$\{J \lhd \mathcal{A} \mid J \neq \mathcal{A}\} \longleftrightarrow \{\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \varphi \text{ morfismo}\}$$

Si noti che il funzionale φ associato ad un ideale massimale è continuo (perché l'ideale è chiuso) ed ha norma 1.

9.4.13 Esempio *Gli ideali massimali dell'algebra di Banach $C(X)$ delle funzioni continue su uno spazio compatto di Hausdorff sono tutti della forma*

$$M_x := \{f \in C(X) \mid f(x) = 0\}$$

In effetti, se $\varphi : C(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ allora $\varphi(1) = 1$ e φ ha lo stesso nucleo del funzionale

$$\delta_x : X \longrightarrow \mathbb{C}$$

che vale 1 su x e zero altrove (misura di Dirac concentrata in x), quindi $\varphi = \delta_x$. Ma il nucleo di δ_x è esattamente M_x.

Si noti che la corrispondenza $x \longmapsto M_x$ è biunivoca, fra X e l'insieme degli ideali massimali, dato che se $x \neq y$ per il lemma di Urysohn esiste una funzione f con $f(x) \neq f(y)$ e quindi $\delta_x \neq \delta_y$.

9.4.14 Teorema *Se $A \in \mathcal{A}$ algebra di Banach, allora*

$$\{\varphi(A)\}_{\varphi \in \hom(\mathcal{A},\mathbb{C})} = \sigma(A)$$

DIMOSTRAZIONE: Se $\varphi \in \hom(\mathcal{A},\mathbb{C})$ allora, per ogni $A \in \mathcal{A}$ si ha che $\varphi(A - \varphi(A)I) = 0$ e quindi $A - \varphi(A)I \in \ker\varphi$; dunque $(A - \varphi(A)I)$ non è invertibile, i.e. $\varphi(A) \in \sigma(A)$.

Viceversa, se $\lambda \in \sigma(A)$, $A - \lambda I)$ non è invertibile ed è pertanto contenuto in un ideale massimale proprio J. Ma allora la proiezione canonica $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/J$ è tale che $\varphi(A - \lambda I) = 0$ i.e. $\varphi(A) = \lambda I$.

QED

9.4.15 Corollario *Se $\mathcal{A}$ è un'algebra di Banach, $A \in \mathcal{A}$ e $\varphi \in \hom(\mathcal{A}, \mathbb{C})$:*

(1) $|\varphi(A)| \leq \operatorname{spr}(A) \leq ||A||$

(2) *Se $\varphi \in \mathcal{B}(\mathcal{A}, \mathbb{C})$ con $\varphi(I) = 1$ allora $||\varphi|| = 1$.*

9.4.16 Teorema *In un'algebra di Banach lo spettro è debolmente compatto.*

Dimostrazione: Basta, per il teorema di Alaoglu 8.2.12, far vedere che $\sigma(\mathcal{A})$ è contenuto nella palla unitaria. Si ha intanto che, per ogni $\varphi \in \sigma(\mathcal{A})$: $\varphi(I) = 1$, e dunque possiamo prendere

$$\mathcal{A}_1^* \cap \{f \in \mathcal{A}^* \mid f(I) = 1\} \cap \bigcap_{A,B \in \mathcal{A}} \{f \in \mathcal{A}^* \mid f(AB) - f(A) - f(B) = 0\}$$

che è esattamente $\sigma(\mathcal{A})$ (per definizione!). Abbiamo così scritto $\sigma(\mathcal{A})$ come intersezione di un insieme *-debolmente compatto (la palla unitaria) e di insiemi *-debolmente chiusi (per continuità delle $f \in \mathcal{A}^*$ e dell'operazione di valutazione di un funzionale su un elemento dell'algebra); cioè $\sigma(\mathcal{A})$ è debolmente chiuso in un debolmente compatto, dunque è debolmente compatto.

QED

Il morfismo

$$\begin{aligned} \widehat{\ } : \mathcal{A} &\longrightarrow C(\sigma(\mathcal{A})) \\ A &\longmapsto (\varphi \longmapsto \varphi(A)) \end{aligned}$$

si dice *trasformata di Gel'fand*. Dato che i funzionali φ sono lineari, moltiplicativi e continui, la trasformata di Gel'fand è un operatore lineare:

$$\widehat{aA + bB}(\varphi) = \varphi(aA + bB) = a\varphi(A) + b\varphi(B) = (a\widehat{A} + b\widehat{B})(\varphi)$$

un morfismo di algebre:

$$\widehat{AB}(\varphi) = \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B) = (\widehat{A}\widehat{B})(\varphi)$$

ed è continuo:

$$||\widehat{A}|| = \sup_{\varphi \in \sigma(A)} |\widehat{A}(\varphi)| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda = \operatorname{spr}(A) \leq ||A||$$

(per definizione di $\sigma(A) = \{\varphi(A)\}_{\varphi \in \sigma(A)}$).

9.4.17 Definizione *Un elemento A di un'algebra di Banach $\mathcal{A}$ si dice* topologicamente nilpotente *se* $\operatorname{spr}(A) = 0$.

9.4.18 Corollario *Gli elementi topologicamente nilpotenti di un'algebra di Banach $\mathcal{A}$ costituiscono il nucleo della trasformata di Gel'fand. In particolare sono un ideale.*

Il nucleo della trasformata di Gel'fand si dice *nilradicale* dell'algebra $\mathcal{A}$.

9.4.19 Esempio *Consideriamo il disco unitario del piano complesso $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ e l'algebra*

$$A(D) := \{f \in C(D) \mid f \in \mathcal{O}(\overset{o}{\longrightarrow} D)\}$$

delle funzioni olomorfe nell'interno di D e continue in D; rispetto alla norma del sup si tratta ovviamente di un'algebra di Banach, e, essendo compatta l'immagine di un compatto per tramite di una mappa continua:

$$\sigma(A(D)) = \{\Phi_z : A(D) \longrightarrow D\}_{z \in \mathbb{C}} = D$$

*ove $\Phi_z(f) := f(z)$. In questo caso la trasformata di Gel'fand è la mappa identica, quindi, ad esempio, il nilradicale è $\{0\}$. Osserviamo esplicitamente che non esiste una operazione * in quest'algebra, e che la sua immagine in $C(\sigma(A(D)))$ per tramite della trasformata di Gel'fand non esaurisce tutta l'algebra delle funzioni continue: questo fatto, dato che, come si vede facilmente, $\mathcal{A}$ separa i punti e contiene le costanti, fornisce un esempio che mostra come la condizione di essere una *-sottoalgebra è essenziale nelle ipotesi del teorema di Stone–Weierstrass complesso. Se invece del prodotto punto per punto, consideriamo su $A(D)$ il prodotto*

$$(f \cdot g)(z) := \int_0^1 f(z - tz)g(tz)zdt$$

otteniamo un'algebra di Banach priva di unità; in questi casi, come vedremo meglio in seguito, possiamo sempre estenderla ad un'algebra con unità, ponendo $\mathcal{B} := \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$. Allora ogni elemento della forma $A \oplus 0$ (con $A \in A(D)$) ha raggio spettrale zero, sicché $\sigma(A(D))$ si riduce ad un sol punto.

9.4.20 Esempio *Nell'algebra delle matrici*

$$\left\{ \begin{pmatrix} z & z' \\ 0 & z \end{pmatrix} \right\}_{z, z' \in \mathbb{C}}$$

(rispetto al solito prodotto matriciale) il nilradicale non si riduce al solo zero.

In tutti questi esempi le difficoltà presentate da queste algebre sono dovute al fatto che non sono C*-algebre.

9.5 Teorema di Gel'fand–Najmark

In questo paragrafo dimostreremo un teorema che in un certo senso è definitivo per la teoria delle C*-algebre abeliane.

9.5.1 Teorema (Gel'fand–Najmark) *Se $\mathcal{A}$ è una C*-algebra abeliana allora la trasformata di Gel'fand è*

(1) *uno *-morfismo di C*-algebre;*

(2) *una isometria (in particolare è iniettivo);*

(3) *suriettiva.*

Dimostrazione: Cominciamo col dimostrare che se valgono le (1)–(2) allora vale anche la (3); infatti l'immagine della trasformata di Gel'fand è una *-sottoalgebra chiusa (per le (1) e (2)) di $C(\sigma(\mathcal{A}))$ che contiene l'unità 1 di $C(\sigma(\mathcal{A}))$ (infatti $1 = \widehat{I}$) e separa i punti di $\sigma(\mathcal{A})$: se $\varphi_1, \varphi_2 \in \sigma(\mathcal{A})$ deve esistere $A \in \mathcal{A}$ tale che se $\varphi_1(A) \neq \varphi_2(A)$ allora $\widehat{A}(\varphi_1) \neq \widehat{A}(\varphi_2)$. Quindi, per il teorema di Stone–Weierstrass:

$$\overline{\widehat{\mathcal{A}}} = C(\sigma(\mathcal{A}))$$

Ma $\widehat{\mathcal{A}}$ è chiusa e quindi $\widehat{\mathcal{A}} = C(\sigma(\mathcal{A}))$.

Possiamo dunque limitarci a dimostrare le (1) e (2).

9.5.2 Definizione *Un elemento $A \in \mathcal{A}$ di una C*-algebra qualsiasi, si dice* normale *se $A^*A = AA^*$.*

Osserviamo che in un'algebra commutativa ogni elemento è normale: ora la (2) del teorema di Gel'fand–Najmark sarà conseguenza del

9.5.3 Lemma *Se A è un elemento normale in una C*-algebra $\mathcal{A}$ con unità allora* $\operatorname{spr} A = ||A||$.

Prima di dimostrare il lemma vediamo anche l'idea della dimostrazione della (1), ovvero che $\widehat{A^*} = \widehat{A}*$. Dato che

$$\varphi(A^*) = \widehat{A^*}(\varphi) = \widehat{A}^*(\varphi) = \overline{\widehat{A}(\varphi)} = \overline{\varphi(A)}$$

basta dimostrare che per ogni $\varphi \in \sigma(\mathcal{A})$: $\varphi(A^*) = \overline{\varphi(A)}$.

Ora si osservi che, per ogni $A \in \mathcal{A}$:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + i\frac{1}{2i}(A - A^*) =: A_1 + iA_2$$

(decomposizione che vale in ogni *-algebra) e che A_1 e A_2 sono ovviamente autoaggiunti; allora

$$\varphi(A) = \varphi(A_1) + i\varphi(A_2)$$

e quindi basta dimostrare che $\varphi(A_i) \in \mathbb{R}$ per avere che $\varphi(A^*) = \overline{\varphi(A)}$, i.e. che se $A = A^*$ allora $\varphi(A) \in \mathbb{R}$.

Dunque la (1) sarà dimostrata se proveremo il

9.5.4 Lemma *Se $\mathcal{A}$ è una C*-algebra con unità e $A \in \mathcal{A}$ è autoaggiunto allora $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

Dunque per dimostrare il teorema di Gel'fand–Najmark non resta che dimostrare i lemmi 9.5.3 e 9.5.4.

DIMOSTRAZIONE: (Lemma 9.5.3) Sappiamo che $||A^*A|| = ||A||^2$ e quindi che $||A^n||^2 = ||A^{n*}A^n||$ e quindi, se A è normale: $||A^n||^2 = ||(A^*A)^n||$. Quindi per studiare il limite $\lim ||A^n||^{1/n}$ basta studiare il

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} ||(A^*A)^n||^{\frac{1}{n}} = \operatorname{spr}(A^*A) = \operatorname{spr}(A^2)$$

Ma se $B = B^*$, per calcolare $\lim ||B^n||^{1/n}$ basta considerare una sottosuccessione, ad esempio $n = 2^m$, in modo che

$$||B^{2^m}|| = ||(B^{2^{m-1}})^2|| = ||B^{2^{m-1}}||^2$$

(essendo B autoaggiunto). Iterando questo calcolo si trova

$$||B^{2^m}|| = ||B||^{2^m}$$

e quindi $\operatorname{spr}(B) = ||B||$ (convergendo la sottosuccessione ad un certo limite, anche la successione converge al medesimo limite).

QED

DIMOSTRAZIONE: (Lemma 9.5.4) Sia $A = A^*$ in $\mathcal{A}$ e $z \in \sigma(A)$. Vogliamo dimostrare che la parte immaginaria $\operatorname{Im} z$ è nulla. Intanto si noti che, ogni algebra con unità:

$$\sigma(A - \lambda I) = \sigma(A) - \lambda$$

(per definizione di spettro!). Quindi basta dimostrare che se $i \operatorname{Im} z \in \sigma(A - \operatorname{Re} zI)$ allora $\operatorname{Im} z = 0$, cioè basta supporre che sia $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ e $i\lambda_0 \in \sigma(A)$ e dimostrare che $\lambda_0 = 0$.

Ma, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} ||A + i\lambda I||^2 &= ||(A + i\lambda I)^*(A + i\lambda I)|| = ||(A - i\lambda I)(A + i\lambda I)|| \\ &= ||A^2 + \lambda^2 I|| \leq ||A||^2 + \lambda^2 \end{aligned}$$

cioè,
$$\forall z \in \sigma(A) \quad |z + i\lambda|^2 \leq ||A||^2 + \lambda^2$$
Ma se $i\lambda_0 \in \sigma(A)$ allora $|\lambda_0 + \lambda|^2 \leq ||A||^2 + \lambda^2$ e, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$|\lambda_0 + \lambda|^2 = \lambda_0^2 + 2\lambda\lambda_0 - ||A||^2 \leq 0$$
il che è assurdo, a meno che $\lambda_0 = 0$.

QED

Con ciò i due lemmi sono dimostrati, e quindi lo è anche il teorema di Gel'fand–Najmark.

Osserviamo che se un'algebra di Banach $\mathcal{A}$ non ha unità, possiamo estenderla come $\mathcal{B} : \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ col prodotto
$$(A \oplus z)(B \oplus w) := (AB + zB + wA) \oplus zw$$
e con la norma data dal sup delle norme di $\mathcal{A}$ e $\mathbb{C}$. $\mathcal{B}$ ha palesemente un'unità, che è $0 \oplus 1$.

9.5.5 Definizione *Se $\mathcal{A}$ è una C*-algebra anche non commutativa e priva di unità, la* rappresentazione regolare sinistra *di $\mathcal{A}$ è il morfismo di C*-algebre*
$$\begin{aligned} L : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{A}) \\ A &\longmapsto (B \longmapsto AB) \end{aligned}$$

9.5.6 Proposizione *Se $L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{A})$ è la rappresentazione regolare sinistra di $\mathcal{A}$ allora lo spazio $L(\mathcal{A}) \oplus \mathbb{C} \subset \mathcal{B}(\mathcal{A})$ è una sotto-C*-algebra (con unità) di $\mathcal{B}(\mathcal{A})$.*

Dimostrazione: $L(\mathcal{A}) \oplus \mathbb{C}$ è una *-algebra il cui *-operatore è definito come
$$(L(A) + zI)^* := L(A^*) + \overline{z}I$$
Vogliamo dimostrare che $L(\mathcal{A})$ è chiusa[4] e che è una sotto-C*-algebra di $\mathcal{B}(\mathcal{A})$: con ciò la proposizione sarà provata.

A questo scopo basta dimostrare le

(1) $\forall A \in \mathcal{A}\ ||L(A)|| = ||A||$.

(2) $\forall B \in L(\mathcal{A}) \oplus \mathbb{C}\ ||B^*B|| = ||B||^2$.

[4]Questo implicherà che $L(\mathcal{A}) \oplus \mathbb{C}$ è una sottoalgebra di Banach di $\mathcal{B}(\mathcal{A})$: infatti se X è uno spazio di Banach e M, N suoi sottospazi, con M chiuso e N di dimensione finita, allora $M + N = \overline{M + N}$.

La (1) si dimostra osservando che

$$||L(A)L(B)|| = ||AB|| \leq ||A|| \, ||B||$$

e quindi $||L(A)|| \leq ||A||$; inoltre, per $B = A^*$ si ha che

$$||AB|| = ||AA^*|| = ||A||^2 = ||A|| \, ||A^*|| = ||A|| \, ||B||$$

con $B \neq 0$ ovviamente e quindi si ha anche $||L(A)|| \geq ||A||$.

Dimostriamo infine la (2); dato che

$$||B||^2 = \sup_{C \in \mathcal{A}_1} ||BC||^2$$

e $B = L(A) + zI$ da cui $BC = AC + zC$, troviamo che

$$\begin{aligned} ||AC + zC||^2 = ||BC||^2 &= ||(BC)^* BC|| = ||(AC + zC)^* BC|| \\ &= ||C^*(A^*(BC) + \overline{z}(BC))|| = ||C^* L(A^*)(BC) + zBC|| \\ &= ||C^* B^*(BC)|| \leq ||C|| \, ||B^* BC|| \leq ||BB^*|| \end{aligned}$$

(dato che $||C|| = 1$). Passando al sup:

$$||B||^2 \leq ||BB^*|| \leq ||B^*|| \, ||B|| \leq ||B||^2$$

QED

Ne segue che una C*-algebra $\mathcal{A}$ si immerge in una C*-algebra $\widetilde{\mathcal{A}}$ con unità. Ovviamente $\mathcal{A}$ è commutativa se e solo se lo è $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Dunque possiamo applicare il teorema di Gel'fand–Najmark anche al caso di algebre prive di unità, estendendole ed ottenendo

$$\widehat{\ }: \widetilde{\mathcal{A}} \longrightarrow C(\sigma(\widetilde{\mathcal{A}}))$$

Vediamo come la trasformata di Gel'fand riflette l'effetto del passaggio da $\mathcal{A}$ a $\widetilde{\mathcal{A}}$: intanto l'algebra $\widetilde{\mathcal{A}}$ possiede un funzionale lineare che $\mathcal{A}$ non ha, definito come

$$\varphi_\infty(A \oplus z) := z$$

Possiamo quindi considerare lo spazio $Y = \sigma(\widetilde{\mathcal{A}}) \setminus \{\varphi_\infty\}$, che è localmente compatto di Hausdorff; per definizione, la compattificazione ad un punto di Y è esattamente $X = \sigma(\mathcal{B})$. L'immagine della restrizione della trasformata di Gel'fand a $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ è l'algebra $C_0(Y)$ delle funzioni continue nulle all'infinito su Y. In effetti

$$A \in \mathcal{A} \iff \varphi_\infty(A) = 0$$

e quindi la restrizione della trasformata di Gel'fand di $\widetilde{\mathcal{A}}$ a $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\longrightarrow C(\sigma(\mathcal{A})) \\ A &\longmapsto \widehat{A}_X \end{aligned}$$

è la trasformata di Gel'fand di $\mathcal{A}$. pertanto

9.5.7 Corollario *Se $\mathcal{A}$ è una C*-algebra commutativa esiste uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto X tale che $\mathcal{A} \cong C_0(X)$ (isomorfismo di C*-algebre). Se $\mathcal{A}$ possiede unità, allora X è compatto.*

Si può ulteriormente precisare questo risultato usando il linguaggio delle categorie. Le C*-algebre formano ovviamente una categoria (i cui morfismi sono i morfismi di C*-algebre) che contiene la sottocategoria delle C*-algebre commutative $\mathfrak{A}_0$. Per quanto detto in precedenza, l'estensione da $\mathcal{A}$ a $\widetilde{\mathcal{A}}$ è un funtore

$$\mathfrak{F} : \mathfrak{A}_0 \longrightarrow \mathfrak{A}$$

dalla categoria delle C*-algebre commutative alla categoria $\mathfrak{A}$ delle C*-algebre commutative con unità. Inoltre, se consideriamo la categoria $\mathfrak{T}$ degli spazi topologici localmente compatti di Hausdorff (i cui morfismi sono le mappe continue) esiste anche un funtore

$$\mathfrak{G} : \mathfrak{T} \longrightarrow \mathfrak{T}_0$$

dato dalla compattificazione di Alexandroff, che ad ogni oggetto X di $\mathfrak{T}$ fa corrispondere la sua compattificazione ad un punto, e che quindi manda la categoria $\mathfrak{T}$ nella categoria $\mathfrak{T}_0$ degli spazi compatti di Hausdorff.

9.5.8 Teorema *Esiste una equivalenza naturale fra i funtori $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ che induce una equivalenza fra le categorie $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{T}$ e $\mathfrak{A}_0$ e $\mathfrak{T}_0$.*

DIMOSTRAZIONE: La trasformazione naturale fra i funtori $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ è indotta dalla trasformata di Gel'fand: infatti il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[r] \arrow[d, "\mathfrak{F}"'] & \mathfrak{T} \arrow[d, "\mathfrak{G}"] \\ \mathfrak{A}_0 \arrow[r] & \mathfrak{T}_0 \end{tikzcd}$$

è commutativo, ove le frecce orizzontali sono le trasformate di Gel'fand. L'unica cosa che resta da mostrare è che la trasformata di Gel'fand è un morfismo di funtori, cioè che per ogni morfismo di C*-algebre induce una mappa continua fra i relativi spettri e che ogni mappa continua fra gli spettri proviene in questo modo da un morfismo di C*-algebre.

Se $\eta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ è un morfismo fra la C*-algebra con unità $\mathcal{A}$ e la C*-algebra commutativa $\mathcal{B}$ allora $\eta(\mathcal{A})$ è una sotto-*-algebra di $\mathcal{B}$ con unità $\eta(I)$ e quindi possiamo supporre che sia

$$\overline{\eta(\mathcal{A})} = \mathcal{B}$$

i.e. $\eta(I) = I$, dunque, per ogni $\varphi \in \sigma(\mathcal{B})$: $\varphi \circ \eta \in \sigma(\mathcal{A})$. Evidentemente la mappa

$$\begin{aligned} \eta^* : \sigma(\mathcal{B}) &\longrightarrow \sigma(\mathcal{A}) \\ \varphi &\longmapsto \eta^*(\varphi) := \varphi \circ \eta \end{aligned}$$

è continua (su $\sigma(\mathcal{A})$ e $\sigma(\mathcal{B})$ le topologie sono quelle deboli rispetto alle mappe $\sigma(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$ e $\sigma(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$, che quindi sono continue per definizione): infatti[5]

$$\widehat{A} \circ \eta^* = \widehat{\eta(A)}$$

Ma $\sigma(\mathcal{A})$ e $\sigma(\mathcal{B})$ sono compatti di Hausdorff, quindi l'insieme

$$E := \eta^*(\sigma(\mathcal{B}))$$

è chiuso in $\sigma(\mathcal{A})$. Dimostriamo allora che

$$E \neq \sigma(\mathcal{A}) \iff \ker \eta \neq 0$$

Infatti $E \neq \sigma(\mathcal{A})$ se e solo se $\sigma(\mathcal{A}) \setminus E$ è aperto e non vuoto, se e solo se esiste $f \in C(\sigma(\mathcal{A}))$ non nulla che ristretta ad E sia zero (per il lemma di Urysohn 2.3.2). Ma per ogni $f \in C(\sigma(\mathcal{A}))$ si ha che $f = \widehat{A}_0$ (per il teorema di Gel'fand–Najmark) e quindi $F|_E = 0$ se e solo se per ogni $\varphi \in \sigma(\mathcal{B})$: $\widehat{A}_0(\eta^*(\varphi)) = 0$, se e solo se $\widehat{\eta(A_0)}(\varphi) = 0$ se e solo se $\eta(A_0) = 0$ (di nuovo per il teorema di Gel'fand–Najmark). Questa catena di equivalenze dimostra che $E \neq \sigma(\mathcal{A}) \iff \ker \eta \neq 0$.

In altri termini, η^* è suriettiva se e solo se $\ker \eta = 0$. Ma η^* è suriettiva se e solo se η è isometrica, dato che

$$||\eta(A)|| = ||\widehat{\eta(A)}|| = \sup_{\varphi \in \sigma(\mathcal{B})} |\widehat{\eta(A)}(\varphi)| = \sup_{\varphi \in \sigma(\mathcal{B})} |\widehat{A}(\eta^*(\varphi))| = \sup_{\psi \in \sigma(\mathcal{A})} |\widehat{A}(\psi)| = ||A||$$

In particolare se $\ker \eta = 0$ allora $||\eta(A)|| = ||A||$.

Questo dimostra che ogni morfismo di *-algebre determina in modo unico una mappa continua fra gli spettri.

QED

Il seguente risultato afferma che su una C*-algebra commutativa con unità esiste una sola struttura normata.

9.5.9 Teorema *Se $\eta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ è uno *-omomorfismo di C*-algebre allora:*

[5]Nella topologia debole su uno spazio X indotta dalle mappe $\{X \xrightarrow{f_\alpha} X_\alpha\}$ un'applicazione $f : Y \longrightarrow X$ è continua se e solo se per ogni α l'applicazione $f_\alpha \circ f : Y \longrightarrow X_\alpha$ è continua.

(1) $\forall A \in \mathcal{A}\ ||\eta(A)|| \leq ||A||$.

(2) $\forall A \in \mathcal{A}\ ||\eta(A)|| \leq ||A|| \iff \ker\eta = 0$.

(3) $\eta(\mathcal{A})$ *è chiusa (in norma, cioè è una C*-sottoalgebra di* $\mathcal{B}$.

DIMOSTRAZIONE: Se $\mathcal{A}$ è commutativa possiamo supporre che anche $\mathcal{B}$ lo sia, dato che $\eta(\mathcal{A})$ è una *-sottoalgebra commutativa di $\mathcal{B}$ e quindi $\overline{\eta(\mathcal{A})}$ è una C*-sottoalgebra commutativa di $\mathcal{B}$.

A meno di estendere $\mathcal{A}$ ad una $\widetilde{\mathcal{A}}$ con unità (e con $\widetilde{\eta}(I) := I$), per ipotesi si ha che:

$$||\eta(A)||^2 = ||\eta(A)^*\eta(A)|| = ||\eta(A^*)\eta(A)|| = ||\eta(A^*A)||$$

Ma A^*A, essendo un elemento normale, appartiene ad una sottoalgebra commutativa: la chiusura dell'algebra generata dai polinomi in A^*A e quindi

$$||\eta(A)||^2 \leq ||A^*A|| = ||A||^2$$

il che dimostra (1) e (2).

Si osservi ora che se η è un morfismo di C*-algebre allora certamente $\eta(\mathcal{A})$ è una *-sottoalgebra; inoltre, dato che $\ker\eta \subset \mathcal{A}$ è uno *-ideale (bilatero) chiuso in norma, ed il quoziente $\mathcal{A}/\ker\eta \cong \operatorname{im}\eta$ è certamente una C*-algebra e quindi il morfismo $\eta' : \mathcal{A}/\ker\eta \longrightarrow \mathcal{B}$ ottenuto componendo η con la proiezione $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\ker\eta$ è una isometria. Da ciò risulta che $\eta'(\mathcal{A}/\ker\eta) = \eta(\mathcal{A})$ è una C*-sottoalgebra di $\mathcal{B}$.

QED

9.5.10 Corollario *Se* $\mathcal{A}$ *è una *-algebra che sia una C*-algebra rispetto a due norme di Banach* $||\text{-}||_1$ *e* $||\text{-}||_2$ *allora le C*-algebre* $(\mathcal{A}, ||\text{-}||_1)$ *e* $(\mathcal{A}, ||\text{-}||_2)$ *sono isomorfe.*

DIMOSTRAZIONE: Si applichi il teorema allo *-isomorfismo $i : (\mathcal{A}, ||\text{-}||_1) \longrightarrow (\mathcal{A}, ||\text{-}||_2)$.

QED

9.6 Appendice: elementi di analisi complessa

Raccogliamo qui alcuni richiami sulle nozioni essenziali di Analisi Complessa in una variabile: stabiliamo solo i teoremi che abbiamo utilizzato in questo capitolo, e non nella loro massima generalità: per questo si rimanda ai testi specialistici, come l'ottimo [18].

9.6.1 Funzioni e integrali complessi

9.6.1 Definizione *Una funzione* $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *definita in un aperto* U *del piano complesso si dice* olomorfa *nel punto* $z_0 \in U$ *se esiste finito il limite*

$$f'(z_0) := \lim_{|\delta z| \longrightarrow 0} \frac{f(z_0 + \delta z) - f(z_0)}{\delta z}$$

Scriviamo

$$f(z) = u(z) + iv(z)$$

($u = \mathrm{Re}(f)$ e $v = \mathrm{Im}(f)$), osservando le che funzioni u e v dipendono dalle variabili reale x e y tali che $z = x + iy$. Allora possiamo dare la seguente caratterizzazione:

9.6.2 Teorema (Cauchy–Riemann) *Una funzione* $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *è olomorfa in* z_0 *se e solo se*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad e \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Dimostrazione: Consideriamo il limite che definisce l'olomorfia di f e, scrivendo $z = x + iy$, poniamo $\delta z = \delta x$ (il limite dipende solo dal fatto che il modulo di δz tende a zero, indipendentemente dall'argomento):

$$f'(z_0) = \lim_{\delta x \longrightarrow 0} \frac{u(x_0 + \delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\delta x} + i \lim_{\delta x \longrightarrow 0} \frac{v(x_0 + \delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\delta x}$$

Quindi se f è olomorfa in z_0 le derivate parziali di u e v rispetto a x esistono e $f' = u_x + iu_y$ (indichiamo le derivate parziali con un indice che denota la variabile rispetto alla quale si deriva).

Analogamente, per $\delta z = i\delta y$:

$$f'(z_0) = -iu_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0)$$

Confrontando le due espressioni di $f'(z_0)$ così ottenute, abbiamo el equazioni di Cauchy–Riemann nel punto z_0.

Viceversa, supponiamo che le u e v ammettano derivate parziali rispetto alle x e y e che valgano le relazioni di Cauchy–Riemann: allora,

$$\begin{aligned} u(x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0) - u(x_0, y_0) &= \\ &= u_x(x_0, y_0)\delta x + u_y((x_0, y_0)\delta y + o((\delta x)^2 + (\delta y)^2) \\ v(x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0) - v(x_0, y_0) &= \\ &= v_x(x_0, y_0)\delta x + v_y((x_0, y_0)\delta y + o((\delta x)^2 + (\delta y)^2) \end{aligned}$$

Quindi, per $\delta z = \delta x + i\delta y$ e le relazioni di Cauchy–Riemann:

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0+\delta z)-f(z_0)}{\delta z} &= u_x(x_0,y_0)\frac{\delta x+i\delta y}{\delta x+i\delta y} + v_x(x_0,y_0)\frac{i\delta x-\delta y}{\delta x+i\delta y} + \\ &\qquad + \frac{o((\delta x)^2+(\delta y)^2)}{\delta x+i\delta y} \\ &= u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)+\frac{o((\delta x)^2+(\delta y)^2)}{\delta z}\end{aligned}$$

e quindi la funzione f è olomorfa in z_0.

QED

9.6.3 Esempio *Sono olomorfe: le funzioni lineari (complesse), le funzioni razionali complesse e la funzione $f(z) = \exp z$, mentre* non *è olomorfa la funzione $g(z) = |z|^2$.*

Ci limiteremo qui a considerare come insiemi di definizione delle funzioni olomorfe i *domini regolari U* cioè gli aperti connessi del piano complesso la cui frontiera sia una curva regolare (non necessariamente connessa, cioè i nostri domini potranno avere dei "buchi"). Il numero di componenti connesse della curva ∂U si dice *ordine di connessione del dominio*[6]: se la curva che delimita il dominio è connessa (e quindi il dominio non ha "buchi"), è semplicemente connesso.

Evidentemente se Γ è una curva regolare nel piano complesso è chiaro cosa debba intendersi con

$$\int_\Gamma f(z)dz$$

per una funzione $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$: l'integrale si calcola infatti per mezzo di una qualsiasi rappresentazione parametrica $c = c(t)$ (con $c : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continua e regolare) della curva Γ:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b f(c(t))c'(t)dt$$

9.6.4 Esempio *Vogliamo calcolare l'integrale*

$$\int_{\Gamma_\rho} \frac{dz}{z-z_0}$$

ove Γ_ρ è il cerchio di centro z_0 e raggio ρ. Rappresentando la curva in coordinate polari per mezzo della funzione $c(t) = z_0 + e^{it}$, troviamo:

$$\int_{\Gamma_\rho} \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}dt}{\rho e^{it}} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

[6]Si tratta del primo numero di Betti di U incrementato di uno.

Una ipotesi che faremo spesso è che $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ sia una funzione olomorfa in U e continua in $\overline{U}$: esprimeremo questa ipotesi con la notazione $f \in \mathcal{O}(\overline{U})$.

9.6.5 Teorema di Cauchy *Se $f \in \mathcal{O}(\overline{U})$ nel dominio semplicemente connesso U e se derivata $f' : U \longrightarrow \mathbb{C}$ continua, allora per ogni curva chiusa Γ contenuta in U:*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

DIMOSTRAZIONE: Per definizione:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma (udx - vdy) + i\int_\Gamma (udy + vdx)$$

(diamo per nota la teoria elementare delle forme differenziali nel piano ed il teorema di Gauss–Green) ove, per ipotesi e per il teorema precedente, le u e v sono parzialmente derivabili dunque, per il teorema di Gauss–Green (la curva regolare connessa Γ è la frontiera di un dominio semplicemente connesso $\mathfrak{G}$ del piano)

$$\int_\Gamma f(z)dz = \iint_{\mathfrak{G}} (-v_x - u_y)dxdy + i\iint_{\mathfrak{G}} (u_x - v_y)dxdy$$

Ma questi integrali sono zero per le relazioni di Cauchy–Riemann.

QED

Il caso realmente interessante è quando $\Gamma = \partial U$.

Osserviamo che, dalla definizione e dalla sua caratterizzazione, non discende immediatamente la continuità della derivata di una funzione olomorfa: abbiamo dunque dovuto supporla nelle ipotesi del teorema di Cauchy[7].

Il teorema di Cauchy può estendersi ad un dominio non semplicemente connesso, osservando che un tale dominio può sempre rendersi semplicemente connesso a meno di effettuarne dei tagli[8]:

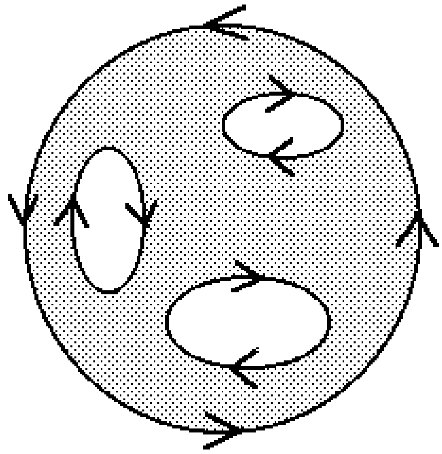
Supponiamo cioè che U sia delimitato da una curva Γ con $n+1$ componenti connesse $\Gamma_0, ..., \Gamma_n$ (quattro nella figura) e consideriamo dei segmenti che uniscano le componenti "interne" al dominio con la componente "esterna"[9]. Se $\gamma_1, ..., \gamma_n$

[7] In realtà, questa supposizione è superflua, come dimostrato da Goursat nel 1904: per questa versione più generale del teorema di Cauchy (che infatti ne rivela la natura topologica) si veda [18] §5.

[8] Precisamente il numero di tagli che bisogna effettuare per renderlo semplicemente connesso è pari al primo numero di Betti del dominio stesso.

[9] Dovrebbe essere chiaro al lettore come rendere rigoroso questo ragionamento intuitivo.

sono questi segmenti, il dominio che si ottiene dopo il taglio è semplicemente connesso e ha come frontiera $\Gamma \cup \gamma_1 \cup ... \cup \gamma_n$.



Allora il teorema di Cauchy applicato a questo nuovo dominio implica che (tenendo conto delle diverse orientazioni fra le componenti "interne" e quelle "esterne" della curva Γ, e del fatto che i segmenti $\gamma_1, ..., \gamma_n$ sono presenti due volte e con segni opposti nell'integrazione):

$$\sum_{i=1}^{n+1} \int_{\Gamma_i} f(z)dz = \int_{\Gamma_0} f(z)dz$$

il che si esprime (tenendo conto che l'orientazione su Γ_0 è opposta a quella delle restanti componenti connesse) ancora come

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

9.6.6 Teorema (FORMULA DI CAUCHY) *Se $f \in \mathcal{O}(\overline{U})$ nel dominio regolare semplicemente connesso U allora, per ogni $z_0 \in U$:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo un disco $D_r = \{z \mid |z - z_0| < \rho\}$ di centro z_0 e completamente contenuto in U (ciò è possibile perché U è aperto. Allora la funzione

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$$

è olomorfa in $U \setminus \{z_0\}$ (che non è un dominio regolare, dato che una componente connessa della sua frontiera si riduce al solo punto $\{z_0\}$), e quindi è pure olomorfa in $U \setminus \overline{D_r}$ che è un dominio regolare (non semplicemente connesso, ma tale che il suo bordo sia $\partial U \cup \partial D_r$): allora per il teorema di Cauchy in questo dominio:

$$\int_{\partial U} \varphi(z)dz = \int_{\partial D_r} \varphi(z)dz$$

Questo vale per ogni scelta di r tale che $D_r \subset U$: quindi l'integrale a primo membro non dipende da r: in particolare la relazione precedente vale per $r \longrightarrow 0$ e quindi, dato che un elemento sul bordo $\partial D_r = \{z \mid |z - z_0| = r\}$ si scrive come $z = z_0 + re^{it}$ al variare di $t \in [0, 2\pi)$, otteniamo

$$\int_{\partial U} \varphi(z)dz = \lim_{r \longrightarrow 0} \int_{\partial D_r} \varphi(z)dz = \lim_{r \longrightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} re^{it} dt = 2\pi i f(z_0)$$

QED

Il teorema precedente, del pari del teorema di Cauchy, vale per un dominio regolare qualsiasi, anche non semplicemente connesso.

Se il dominio U è un disco aperto di centro z_0 e raggio r evidentemente la formula di Cauchy diviene

9.6.7 Teorema (FORMULA DEL VALOR MEDIO)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|z-z_0|=r} f(z_0 + re^{it})dt$$

Dunque i valori di una funzione olomorfa all'interno di un disco sono determinati dai valori che assume sul bordo: esaminando ulteriormente questo fenomeno giungeremo al principio del massimo per funzioni olomorfe.

9.6.2 Sviluppi in serie di potenze

Le funzioni olomorfe sono talvolta chiamate *analitiche*: questo perché possiamo confonderle con le funzioni sviluppabili in serie di potenze.

9.6.8 Definizione *Una* serie di potenze *è una serie della forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

con $c_n \in \mathbb{C}$ costanti, $z_0 \in \mathbb{C}$ e z variabile complessa.

Ricordiamo[10] che una serie di funzioni si dice *uniformemente convergente* in un dominio U se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un n_ε tale che per ogni $n \geq n_\varepsilon$ si abbia:

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z) \right| < \varepsilon$$

e che una condizione necessaria per la convergenza uniforme è la possibilità di maggiorare i termini della serie di funzioni con quelli di una serie numerica assolutamente convergente (criterio di Weierstrass).

In generale sarà interessante stabilire il dominio di convergenza uniforme di una serie di potenze:

9.6.9 Definizione *Il* raggio di convergenza *di una serie di potenze è il valore ρ tale che, per ogni disco di centro z_0 e raggio $r < \rho$ la serie converga uniformemente in quel disco e per ogni $r > \rho$ la serie non converga in nessun punto esterno al disco chiuso di centro z_0 e raggio r.*

9.6.10 Definizione *Se una serie di potenze converge in un aperto U, la funzione che a $z \in U$ associa il valore della serie in z si dice* analitica.

Cioè le funzioni analitiche sono le funzioni definite da serie di potenze convergenti.

9.6.11 Teorema (CAUCHY–HADAMARD) *Il raggio di convergenza ρ di una serie di potenze vale*[11]

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\longrightarrow\infty} |a_n|^{1/n}}$$

(inverso del massimo limite della successione $|a_n|^{1/n}$.)

DIMOSTRAZIONE: Se $0 < r < \rho$ allora

$$\overline{\lim}_{n\longrightarrow\infty} |a_n r^n|^{1/n} = r \lim_{n\longrightarrow\infty} |a_n|^{1/n} < 1$$

Dunque la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n|$$

converge (per il criterio della radice per serie numeriche), e per ogni z tale che $|z - z_0| < r$:

$$|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n r^n|$$

[10] Assumiamo la conoscenza della teoria elementare delle serie di funzioni.

[11] Il valore di ρ è in $[0, \infty]$ con la convenzione simbolica che $1/0 = \infty$ e $1/\infty = 0$.

Così il termine generico della serie di potenze è maggiorato dal termine generico di una serie assolutamente convergente.

Rimane il caso $\rho < \infty$. Consideriamo in questo caso z tale che $|z - z_0| > \rho$ e quindi

$$1 < |z - z_0|\overline{\lim}_{n\longrightarrow\infty}|a_n|^{1/n} = \overline{\lim}_{n\longrightarrow\infty}|a_n(z - z_0)^n|^{1/n}$$

Quindi il termine generico della serie di potenze non è infinitesimo e, come noto, questo implica che la serie non può convergere.

QED

9.6.12 Esempio *Consideriamo la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(z - z_0)^n$$

(i coefficienti sono tutti 1). Per il criterio del rapporto per la convergenza delle serie numeriche, la serie converge nel cerchio di centro z_0 e raggio 1 a qualche funzione analitica f: allora, per definizione di convergenza di una serie:

$$f(z) = \lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{k=0}^{n}(z - z_0)^n = \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1 - (z - z_0)^n}{q - (z - z_0)} = \frac{1}{1 - (z - z_0)}$$

(per la formula di sommazione di una serie geometrica con un numero finito di addendi).

Il teorema fondamentale sulla convergenza delle serie di potenze è il

9.6.13 Teorema (Abel) *Se una serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z - z_0)^n$$

converge in un punto $z_1 \neq z_0$ allora converge assolutamente in ogni punto interno al disco di centro z_0 e raggio $|z_1 - z_0|$ ed in un disco chiuso di centro z_0 e raggio $r < |z_1 - z_0|$ la serie converge uniformemente.

Dimostrazione: Se z è tale che $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ definiamo $q < 1$ come

$$q = \frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|}$$

Poiché la serie converge in z_1 il suo termine generico è infinitesimo, i.e. esiste una costante M tale che

$$|a_N|\ |z_1 - z_0|^n \leq M$$

e quindi

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right| \leq & \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\ |z-z_0|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n \\ =& M\sum_{n=0}^{\infty} |q|^n = \frac{M}{1-q}\end{aligned}$$

($q < 1$ e quindi la serie geometrica converge). Questo dimostra la convergenza della serie.

Per vedere l'uniforme convergenza nel disco di centro z_0 e raggio $r < |z_1 - z_0|$ usiamo il criterio di Weierstrass: infatti la serie

$$M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{|z_1 - z_0|^n}$$

(che ovviamente converge perché è una serie geometrica con $r/|z_1 - z_0| < 1$) maggiora la serie di potenze per costruzione.

QED

Nel suo dominio di convergenza, una funzione analitica può integrarsi e derivarsi un numero arbitrario di volte, ottenendo sempre funzioni analitiche nel medesimo dominio. Inoltre i termini generici di una serie di potenze soddisfano in modo ovvio le relazioni di Cauchy–Riemann: quindi

9.6.14 Corollario *Una funzione analitica è olomorfa.*

Quello che ci proponiamo di dimostrare è che vale anche il viceversa.

9.6.15 Teorema *Una funzione olomorfa è analitica nel suo dominio di olomorfia.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa nell'aperto U; se $z_0 \in U$ allora esiste un disco D_r di centro z_0 e raggio r interamente contenuto in U. Usando la formula integrale di Cauchy ed i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale (usando la teoria di Lebesgue oppure la convergenza uniforme delle serie):

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r}\frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r}\frac{f(w)}{w-z_0-(z-z_0)}dw \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)}dw \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r}\frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n dw \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\ (z-z_0)^n
\end{aligned}$$

Quindi, intorno a z_0 la funzione f è analitica.

QED

Lo sviluppo in serie di una funzione analitica è ovviamente unico: i coefficienti dello sviluppo sono

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$$

e devono quindi coincidere con i termini della serie di Taylor della funzione f intorno a z_0:

$$\frac{d^n}{dz^n}f(z_0) = n!a_n$$

Dunque

9.6.16 Teorema *Una funzione olomorfa è infinitamente derivabile e*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$$

in un opportuno disco D_r di centro z_0 e raggio r.

9.6.17 Esempio *La funzione*

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

è analitica in tutto il piano complesso eccettuati i punti[12] *$\pm i$. Considerando la formula di sommazione di una serie geometrica che abbiamo stabilito in precedenza*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$$

[12]Osserviamo che non si tratta di un dominio regolare, ma basta prendere $\mathbb{C}$ a cui si tolgano due dischi chiusi intorno a questi punti per ottenere un dominio regolare.

troviamo che f che deve quindi essere l'espansione di Taylor in ogni disco del piano complesso che non contenga i punti $\pm i$.

Applichiamo ora le formule precedenti per calcolare l'espansione di Taylor intorno al punto 1 in un disco di raggio $r = \sqrt{2}$. Scrivendo

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$$

ed utilizzando ancora la formula di sommazione della serie geometrica:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin\frac{\pi}{4}(n+1)}{2^{(n+1)/2}}(z-1)^n$$

(abbiamo usato le rappresentazioni polari $1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm i\pi/4}$). Il raggio di convergenza di questa serie è, per la formula di Cauchy–Hadamard, $\sqrt{2}$.

9.6.3 Continuazione Analitica

Il seguente principio è di fondamentale importanza: stabilisce infatti una proprietà determinante delle funzioni olomorfe.

9.6.18 Teorema *Se $f \in \mathcal{O}(\overline{U})$ nell'aperto connesso U allora, se l'insieme degli zeri di f contiene un punto di accumulazione, $f = 0$.*

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo per assurdo che esista una successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di zeri di f (i.e. $f(z_n) = 0$) convergente ad uno zero z di f. Intorno a z possiamo scrivere

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(w-z)^n$$

Consideriamo il più piccolo intero m tale che $a_m \neq 0$. Allora

$$0 = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{f(z_n)}{(z_n - z)^m} = \lim_{n\longrightarrow\infty} (a_m + a - m + 1(z_n - z) + ...) = a_m$$

Questo assurdo dimostra che f deve essere identicamente nulla intorno a z, e quindi l'insieme dei punti di accumulazione dell'insieme degli zeri di f è aperto (osserviamo che questo insieme non è vuoto, perché contiene z e non esaurisce tutto U perché f non è identicamente nulla). Ma questo insieme è anche chiuso, dato che contiene (per definizione) i suoi punti di accumulazione. Quindi U contiene un insieme chiuso e aperto e questo è impossibile, dato che lo si era supposto connesso.

QED

9.6.19 Corollario *Se $f \in \mathcal{O}(\overline{U})$ in un aperto connesso del piano complesso $\mathbb{C}$ e se $|f|$ è una funzione costante in U allora anche f è costante in U.*

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo che, se $f = u + iv$, per le relazioni di Cauchy–Riemann:

$$\begin{aligned} f'\overline{f} &= (u_x + iv_x)(u - iv) = (uu_x + vv_x) + i(uv_x - vu_x) \\ &= \frac{\partial u^2 + v^2}{\partial x} - i\frac{\partial u^2 + v^2}{\partial y} = \frac{\partial|f|}{\partial x} - i\frac{\partial|f|}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

(infatti $(uv_x - vu_x = -uu_y - vv_y)$). ma il implica che se un prodotto di funzioni olomorfe è nullo, almeno una delle due funzioni deve essere identicamente zero, e quindi $f = 0$ oppure f è costante in U.

QED

9.6.20 Corollario (PRINCIPIO DI IDENTITÀ DELLE FUNZIONI OLOMORFE) *Se $f, g \in \mathcal{O}(\overline{U})$ e se l'insieme dove $f = g$ ha un punto di accumulazione allora $f = g$ su tutto U.*

In particolare, mentre una funzione olomorfa è certamente infinitamente differenziabile, non è detto che una funzione C^∞ sia olomorfa: può benissimo darsi che una funzione infinitamente differenziabile sia, ad esempio, nulla in un intero intervallo, ma non identicamente nulla in tutto l'insieme di definizione.

Se un insieme A è unione di due insiemi B e C e se sono date due funzioni $f : B \longrightarrow X$ e $g : C \longrightarrow X$ tali che $f_{B\cap C} = g|_{B\cap C}$ allora esiste una sola funzione $f \cup G : A \longrightarrow X$ che ristretta a B e C coincide con f e g. Usando questa ovvia definizione possiamo dare un altro corollario del teorema:

9.6.21 Corollario *Se $f_1 \in \mathcal{O}(\overline{U_1})$ e $f_2 \in \mathcal{O}(\overline{U_2})$ e se $f_1|_V = f_2|_V$ ove V è un aperto connesso contenuto in $U_1 \cap U_2$ allora la funzione $f1 \cup f_2$ è univocamente ben definita e analitica.*

L'applicazione di questo corollario per estendere il dominio di definizione di una funzione si dice *continuazione analitica*. Ad esempio, non appena una serie di potenze sia definita sull'asse reale, possiamo estenderla in modo unico ad una funzione olomorfa in un aperto del piano complesso.

9.6.22 Esempio *Le classiche funzioni*

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \exp x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

danno luogo a funzioni olomorfe in opportuni aperti del piano complesso.

Evidentemente, il dominio (connesso) di olomorfia di una funzione può rendersi massimale in virtù del principio di continuazione analitica.

9.6.23 Definizione *Una funzione olomorfa si dice* intera *se il suo dominio di olomorfia è l'intero piano complesso* $\mathbb{C}$*.*

Torniamo ora a considerare funzioni olomorfe ed il loro comportamento al bordo dei dischi chiusi.

9.6.24 Teorema (PRINCIPIO DEL MASSIMO) *Se* $f \in \mathcal{O}(\overline{U})$ *nel dominio regolare* U *allora la funzione reale* $|f|$ *(se non è costante) assume il suo valore massimo sul bordo* $\partial U = \overline{U} \setminus U$ *di* U*.*

DIMOSTRAZIONE: La funzione reale che stiamo considerando

$$|f(z)| = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)}$$

è continua in $\overline{U}$. Dunque assume un massimo M in qualche punto $z_0 = (x_0, y_0) \in \overline{U}$. Supponiamo per assurdo che $z_0 \in U$ non sia un punto del bordo di U: esiste allora un disco D_r di centro z_0 e raggio r interamente contenuto in U, per il quale la formula del valor medio, ed il fatto che per ogni $z \in U$ $|f(z)| \leq M$, implicano che

$$2\pi M = \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt \leq 2\pi M$$

cioè che

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt = 2\pi M$$

da cui, per continuità di f in $\overline{U}$ e per la definizione di massimo M:

$$\forall z \quad |z - z_0| = r \Rightarrow |f(z)| = M$$

Quindi f è costante in modulo su in intorno di f e, per continuazione analitica, è costante in tutto U, il che è assurdo.

QED

Possiamo ora dimostrare il teorema che, in un certo senso, inverte il teorema di Cauchy:

9.6.25 Teorema (MORERA) *Una funzione continua $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ definita in un dominio regolare semplicemente connesso tale che, per ogni curva regolare chiusa $\Gamma \subset U$ si abbia*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

è necessariamente olomorfa in U.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo, per $z_0, z \in U$ e per un cammino $\gamma \subset U$ che connetta z_0 e z (i.e. se $\gamma : [a,b] \in U$ allora $\gamma(a) = z_0$ e $\gamma(b) = z$), la funzione

$$F(z) := \int_\gamma f(w)dw$$

Dimostriamo che si tratta di una funzione olomorfa: se scriviamo $f = u + iv$ e $F = U + iV$, allora (per le relazioni di Cauchy–Riemann):

$$U_x = \int_\gamma u_x d\xi - v_x d\eta = \int_\gamma v_y d\xi + u_y d\eta = V_y$$
$$U_y = \int_\gamma u_y d\xi - v_y d\eta = -\int_\gamma v_x d\xi + u_x d\eta = -V_x$$

Quindi F soddisfa alle equazioni di Cauchy–Riemann e dunque è olomorfa. Ovviamente

$$F'(z) = U_x(x,y) + iV_x(x,y) = \int_\gamma u_x d\xi - v_x d\eta + i\int_\gamma v_x d\xi + u_x d\eta$$
$$= \int_\gamma f'(z)dw = f(z)$$

QED

Il teorema si generalizza in modo ovvio a domini non semplicemente connessi.

9.6.26 Teorema (LIOUVILLE) *Una funzione intera e limitata (in modulo) è costante.*

DIMOSTRAZIONE: Usiamo la formula di Taylor per la derivata di $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r} \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw$$

(ove D_r è il solito disco di centro z e raggio r). Ora sfruttiamo la limitatezza di $|f|$:

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r}\frac{|f(w)|}{r^2}dw \leq \frac{M}{R}$$

Ma r può essere scelto arbitrariamente grande (perché f è intera) e $|f'|$ è indipendente da R: quindi $|f'| = 0$ su tutto il piano complesso, quindi $|f|$ è costante.

QED

Ad esempio, la funzione $\sin z$, continuazione analitica della funzione reale $\sin x$ non può essere limitata (come accade nel caso reale), perché ovviamente non è costante.

Una notevole applicazione è la seguente:

9.6.27 Teorema fondamentale dell'Algebra *Un polinomio a coefficienti complessi e di grado positivo ammette sempre almeno uno zero.*

DIMOSTRAZIONE: Un polinomio complesso è una funzione della forma

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0$$

Si noti che, per $|z|$ abbastanza grande, possiamo scrivere

$$|p(z)| \geq |z^n|\left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{z^{n-1}} - ... - |a_0|\right) > |a^n|\;|z^n|$$

Ora supponiamo che p non abbia zeri nel piano complesso: allora la funzione $1/p(z)$ è intera e, per la disuguaglianza precedente:

$$\lim_{|z|\longrightarrow\infty}\frac{1}{|p(z)|} \leq \lim_{|z|\longrightarrow\infty}\frac{1}{|a_n|\;|z^n|} = 0$$

Quindi $|1/p(z)|$ è limitata e, per il teorema di Liouville, deve essere costante, il che è assurdo.

QED

9.6.4 Residui

9.6.28 Definizione *Una serie di potenze bilatera*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

si dice serie di Laurent*.*

Per determinare il dominio di convergenza di una serie di Laurent, spezziamola come

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n}$$

Il dominio di convergenza della serie di Laurent sarà l'intersezione dei domini di convergenza delle due serie che figurano a secondo membro; nel caso della prima di queste serie si tratta di un disco di centro z_0 e raggio ρ. Mostriamo che nel caso della seconda serie il dominio è il complementare di un disco di centro z_0. Poniamo

$$\zeta = \frac{1}{z-z_0}$$

in modo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\zeta^n$$

Si tratta quindi di una serie di potenze di centro 0; sia $\frac{1}{R}$ il suo raggio di convergenza: evidentemente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ ha come dominio di convergenza il complementare del disco di centro z_0 e raggi R.

Dunque una serie di Laurent definisce una funzione olomorfa nella corona circolare $C_{R,\rho} = \{z \in \mathbb{C} \mid R < |z-z_0| < \rho\}$. Ovviamente può benissimo accadere che sia $\rho <\leq R$ e quindi $C_{R,\rho} = \emptyset$: in questo caso la serie di Laurent non definisce alcuna funzione olomorfa.

9.6.29 Teorema (LAURENT) *Una funzione $f \in \mathcal{O}(C_{R,\rho})$ è univocamente determinata in $C_{R,\rho}$ dal suo sviluppo in serie di Laurent.*

DIMOSTRAZIONE: Se $z \in C_{R,\rho}$ consideriamo due cerchi Γ_1 e Γ_2 di centro z_0 e raggi tali che $R < r_2 < |z-z_0| < r_1 < Er$. Per la formula di Cauchy (in un dominio non semplicemente connesso) si trova

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}dw$$

Ora, sul cerchio Γ_1 vale la

$$\frac{|z-z_0|}{|w-z_0|} < 1$$

quindi

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$$

Integrando e scambiando il segno di integrale con quello della serie (per la teoria di Lebesgue o per uniforme convergenza)[13]:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}dw=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

con, per $n \geq 0$:

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$$

In modo analogo, dalla

$$\frac{|w-z_0|}{|z-z_0|}<1$$

sul cerchio Γ_2 si trova

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}dw=\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n}$$

con, per $n \geq 0$:

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}}dw$$

Le a_n e a_{-n} così ottenute sono olomorfe in $C_{R,\rho}$ e quindi, i corrispondenti integrali non dipendono dai cammini di integrazione: dunque possiamo combinare le formule per a_n e a_{-n} ottenendo

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$$

con $n \in \mathbb{Z}$ e Γ qualsiasi curva regolare chiusa contenuta nell'anello $C_{R,\rho}$. Quindi

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

ove la serie converge nella corona circolare $C_{R,\rho}$ ed uniformemente nella corona circolare chiusa $\{z \in \mathbb{C} \mid r_2 \leq |z-z_0| \leq r_1\}$.

Dimostriamo infine l'unicità dell'espansione di Laurent della f; supponiamo che sia

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$$

[13]Il ragionamento è il medesimo che abbiamo svolto nel dimostrare l'analiticità delle funzioni olomorfe.

ove esista almeno un $n \in \mathbb{Z}$ tale che $a_n \neq b_n$. Quindi in $C_{R,\rho}$ abbiamo che

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$$

Considerando il cerchio Γ_r di centro z_0 e raggio $R < r < \rho$, queste serie vi convergono uniformemente e, moltiplicandole per $(z-z_0)^{n-m-1}$ (per $m \in \mathbb{Z}$ fissato) ed integrando termine a termine otteniamo:

$$\int_{\Gamma_r} (z - z_0)^{n-m-1} dz = ir^{n-m} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt = 2\pi i \delta_{nm}$$

Così, dopo aver integrato le serie in a_n e b_n, avremo solo un termine non nullo per ciascuna serie, e precisamente

$$a_m = b_m$$

Ma m può scegliersi arbitrariamente, e quindi le serie debbono coincidere.

QED

9.6.30 Definizione *Se una funzione olomorfa f è definita in un dominio U privato di un punto z_0 interno a U, si dice che z_0 è* singolare *per f.*

Dato che U è aperto esiste un disco D centrato in z_0 e completamente contenuto in U tale che la funzione sia olomorfa in $D \setminus \{z_0\}$ e quindi in una corona circolare di centro z_0 e contenuta in D. Possiamo dunque limitarci a studiare i punti singolari come se fossero centri di corone circolari.

9.6.31 Definizione *Un punto singolare z_0 per una funzione olomorfa f si dice:*

(1) singolarità eliminabile *se la serie di Laurent di f intorno a z_0 non contiene termini di esponente negativo (i.e. se $a_n = 0$ per $n < 0$);*

(2) polo di ordine m *se la serie di Laurent di f intorno a z_0 non contiene termini di esponente minore di $-m$ (i.e. se $a_n = 0$ per $n < -m$);*

(3) singolarità essenziale *se la serie di Laurent di f intorno a z_0 contiene termini di esponente negativo arbitrariamente basso (i.e. se per ogni $n < 0$ esiste un $m < n$ con $a_m \neq 0$);*

Se z_0 è una singolarità eliminabile, la funzione f può estendersi ad una funzione olomorfa in z_0: infatti facendo tendere z a z_0 (da qualunque direzione) otteniamo come limite della serie di Laurent il valore a_0; definendo allora $f(z_0) = a_0$ otteniamo l'estensione voluta.

Se z_0 è una singolarità essenziale, il comportamento della funzione olomorfa in un suo intorno può essere estremamente bizzarro, in particolare, profondi teoremi dovuti a Casorati, Weierstrass e Picard dimostrano che non è possibile controllare in alcun modo il comportamento di f intorno ad una singolarità essenziale.

Infine, se z_0 è un polo di ordine m possiamo scrivere, in una corona circolare centrata in z_0:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

In questo caso non possiamo eliminare la singolarità, dato che per z che tende a z_0 il valore di $|f(z)|$ cresce arbitrariamente: infatti

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + ... + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \\ &= (z-z_0)^m(a_{-m} + ... + a_{-1}(z-z_0)^{m-1}) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \\ &= (z-z_0)^m\varphi(z) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \end{aligned}$$

ove φ è olomorfa in z_0. è immediato ora che per $z \longrightarrow z_0$ $|f(z)|$ cresce arbitrariamente.

9.6.32 Definizione *Il* residuo *di una funzione olomorfa in una sua singolarità z_0 è il valore del coefficiente a_{-1} nel suo sviluppo di Laurent intorno a z_0.*

Per unicità della serie di Laurent il residuo è ben definito ed è pari a

$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z) := c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(w)dw$$

per ogni curva regolare chiusa Γ nel dominio di olomorfia di f che racchiuda il punto z_0 (e nessun altro punto singolare di f).

Il calcolo dei residui è estremamente utile, e, nel caso di poli, può effettuarsi in modo semplice.

Sia infatti z_0 un polo di ordine m: i.e.

$$f(z) = (z-z_0)^m(a_{-m} + ... + a_{-1}(z-z_0)^{m-1}) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

Moltiplicando ambo i membri per $(z-z_0)^m$, derivando $(m-1)$ volte e passando al limite per $z \longrightarrow z_0$ si ottiene

$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\longrightarrow z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-z_0)^m f(z))$$

9.6.33 Definizione *Una funzione olomorfa in un dominio U e che abbia in questo dominio al più singolarità polari si dice* meromorfa *in U.*

Ad esempio una funzione razionale (un quoziente di polinomi) è meromorfa nel piano complesso.

9.6.34 Teorema dei Residui *Se f è meromorfa nel dominio regolare chiuso $\overline{U}$ con un numero finito di singolarità $z_1, ..., z_n \in U$ allora*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} f(z)dz = \sum_{z_0 \in U} \mathrm{Res}_{z_0} f(z)$$

(la somma è finita perché le uniche singolarità non eliminabili della f sono i poli $z_1, ..., z_n$).

DIMOSTRAZIONE: Poiché i punti $z_1, ...z_n$ sono isolati possiamo trovare dei dischi $D_1, ..., D_n$ centrati in essi e che non contengano altri punti singolari (di più: i dischi D_i sono a due a due disgiunti): l'idea è di applicare il teorema di Cauchy al dominio $U \setminus \cup_{i=1}^n \overline{D}_i$, nel quale la funzione è olomorfa, ottenendo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_k} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \mathrm{Res}_{z_k} f(z) = \sum_{z_0 \in U} \mathrm{Res}_{z_0} f(z)$$

QED

Non ci soffermiamo sulle applicazioni di questo teorema, in particolare al calcolo di integrali definiti per mezzo di una scelta opportuna dei domini di integrazione: per questo rimandiamo ai testi specialistici. Concludiamo con qualche semplice ma notevole conseguenza.

9.6.35 Corollario *Se f è una funzione meromorfa nel dominio regolare U e $g \in \mathcal{O}(U)$ allora, per $z_0 \in U$:*

$$\mathrm{Res}_{z_0}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}g(z)\right) = \nu_{z_0}(f)g(z_0)$$

ove $\nu_{z_0}(f)$ è l'ordine di f in z_0 (minimo intero per il quale il coefficiente dello sviluppo di Laurent non è nullo).

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo che U sia un disco centrato in z_0 (possiamo assumerlo senza ledere la generalità). Sia

$$f(z) = (z - z_0)^n h(z)$$

con $h(z)$ olomorfa e mai nulla in U. Allora $n = \nu_{z_0}(f)$ e

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)}g(z) &= \frac{n(z-z_0)^{n-1}h(z) + (z-z_0)^n h'(z))}{(z-z_0)^n}\frac{g(z)}{h(z)}\\ &= n\frac{g(z)}{z-z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)}g(z)\end{aligned}$$

ma $h'g/h$ è olomorfa, quindi il suo residuo è zero in z_0 e

$$\mathrm{Res}_{z_0}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}g(z)\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{ng(z)}{z-z_0}dz = ng(z_0)$$

QED

9.6.36 Corollario (TEOREMA DELL'INDICATORE LOGARITMICO) *Sia U un dominio regolare, una funzione f meromorfa in $\overline{U}$ e $z_1, ..., z_n$ gli zeri di f in U e $p_1, ..., p_m$ i poli di f in U: supponendo che f non abbia zeri su ∂U e che g sia olomorfa in U allora*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f'(z)}{f(z)}g(z)dz = \sum_{k=1}^{n} g(z_k)\nu_{z_k}(f) - \sum_{k=1}^{m} g(p_k)\nu_{p_k}(f)$$

In particolare, per $g = z$ si ha

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f'(z)}{f(z)}zdz = \sum_{k=1}^{n} z_k\nu_{z_k}(f) - \sum_{k=1}^{m} p_k\nu_{p_k}(f)$$

e per $g = 1$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^{n}\nu_{z_k}(f) - \sum_{k=1}^{m}\nu_{p_k}(f) = \#\{\text{zeri di } f\} - \#\{\text{poli di } f\}$$

Capitolo 10

TEORIA SPETTRALE

In questo capitolo affrontiamo la teoria spettrale nelle C*-algebre: questa è una profonda generalizzazione della teoria spettrale delle matrici (l'algebra delle matrici complesse è una C*-algebra), che consente di trattare gli elementi di una C*-algebra come dei numeri: possiamo cioè calcolare su di essi classi di funzioni sempre più generali. Cominceremo con le funzioni analitiche, per passare a quelle continue ed infine a quelle boreliane: questo rende in grado, nelle applicazioni, di dare senso a leggi fisiche in cui gli osservabili siano operatori in uno spazio di Hilbert piuttosto che valori assunti da funzioni differenziabili, come nel caso classico. Discuteremo come esempi alcuni classici tipi di operatori: gli operatori compatti, gli operatori di Hilbert–Schmidt e gli operatori nucleari.

10.1 Teorema della Mappa Spettrale

Iniziamo generalizzando l'ultimo risultato ottenuto nel capitolo precedente:

10.1.1 Proposizione *Se* $(\mathcal{A}, ||\text{-}||_1)$ *è una C*-algebra, che sia un'algebra di Banach rispetto alla norma* $||\text{-}||_2$ *allora*

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad ||A||_1 \leq ||A||_2$$

che segue immediatamente dal

10.1.2 Lemma *Se* $\mathcal{A}$ *è una *-algebra di Banach e* $\mathbb{C}$ *una C*-algebra, e* $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ *è uno *-omomorfismo allora*

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad ||\rho(A)|| \leq ||A||$$

Dimostrazione: Se $A \in \mathcal{A}$:

$$||\rho(A)||^2 = ||\rho(A)^*\rho(A)|| = ||\rho(A^*A)|| = \text{spr}(\rho(A^*A))$$

(essendo $\rho(A^*A)$ autoaggiunto in $\mathcal{B}$ e quindi normale). Ora, se $A \in \mathcal{A}^{-1}$ e $\eta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ è un morfismo (con $\eta(I) = I$) allora

$$\eta(A^{-1})\eta(A) = \eta(A^{-1}A) = I$$

i.e. $\eta(\mathcal{A}^{-1}) \subset \mathcal{B}^{-1}$ (si noti che *non* vale l'inclusione opposta). Quindi $A-\lambda I\in\mathcal{A}^{-1}$, cioè $\eta(A-\lambda I)\in\mathcal{B}^{-1}$ ovvero $\eta(A)-\lambda I\in\mathcal{B}^{-1}$. In altri termini, se $\lambda \in P(A)$ allora $\lambda \in P(\eta(A))$ e quindi $\sigma(\eta(A)) \subset \sigma(A)$:

$$\operatorname{spr}\rho(A^*A) \leq \operatorname{spr}(A^*A) \leq ||A^*A|| \leq ||A||^2$$

(vale solo il segno $\leq$ perché $\mathcal{A}$ non è necessariamente una C*-algebra). Ne concludiamo che

$$||\rho(A)|| \leq ||A||$$

QED

Osserviamo che, se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ e $\mathcal{A}$ è unitaria (con la stessa unità di $\mathcal{B}$) allora per $A\in\mathcal{A}^{-1}$ invertibile, A^{-1} è l'inverso di A anche in $\mathcal{B}$; potrebbe tuttavia aversi $A^{-1}\in\mathcal{B}\setminus\mathcal{A}$, nel qual caso si avrebbe $A-\lambda I\in\mathcal{B}^{-1}\setminus\mathcal{A}^{-1}$. Si deve quindi considerare $P_{\mathcal{A}}(A)$, il *risolvente relativo ad* A (di $\mathcal{A}$). Ovviamente

$$P_{\mathcal{A}}(A) \subset P_{\mathcal{B}}(A) \qquad \text{e} \qquad \sigma_{\mathcal{B}}(A) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(A)$$

(ma non necessariamente il viceversa).

Se $\mathcal{A}$ è un'algebra di Banach commutativa con unità e se $\{A_i\}$ è un suo insieme di generatori, allora la funzione

$$\begin{aligned}\Phi : \sigma(\mathcal{A}) &\longrightarrow \prod_i \sigma(A_i)\\ \varphi &\longmapsto \{\varphi(A_1)\}\end{aligned}$$

è (per definizione delle topologie su $\sigma(\mathcal{A})$ e sul prodotto) continua, sebbene in generale non sia suriettiva. L'immagine dello spettro di $\mathcal{A}$ per tramite della mappa Φ è quindi un compatto in $\prod\sigma(\mathcal{A})$.

10.1.3 Definizione *L'immagine* $\Phi(\sigma(\mathcal{A}))$ *si dice* spettro congiunto *di* $\mathcal{A}$ *e si denota con* $j\sigma(\{A_i\})$.

Dato che gli $\{A_i\}$ generano $\mathcal{A}$, la mappa

$$\Phi : \sigma(\mathcal{A}) \longrightarrow j\sigma(\mathcal{A})$$

è iniettiva: infatti da $\varphi_1 = \varphi_2$ sugli $\{A_i\}$ allora $\varphi_1 = \varphi_2$ sull'algebra generata dagli $\{A_i\}$ (cioè i polinomi nelle $\{A_i\}$) e quindi, la chiusura di questa algebra è $\mathcal{A}$ per definizione, per continuità dei φ_i, $\varphi_1 = \varphi_2$ su $\mathcal{A}$. Dunque la mappa in questione è un omeomorfismo[1].

Ad esempio, se $\mathcal{A}$ è generata da un solo elemento A, allora

$$\Phi : \sigma(\mathcal{A}) \longrightarrow \sigma(A) \subset \mathbb{C}$$

è un omeomorfismo. Se $A \in \mathcal{A}$ (algebra di Banach con unità) consideriamo

$$\mathbf{A} := \langle A, I \rangle$$

(con le parentesi acute denotiamo l'algebra generata dagli elementi che racchiudono: in questo caso l'algebra generata da A e I) che è esattamente la chiusura (uniforme) dell'algebra dei polinomi in $\mathcal{A}$.

Dunque $\mathbf{A}$ è una sottoalgebra di Banach commutativa con unità e si ha

$$\sigma(\mathbf{A}) = \sigma_{\mathbf{A}}(A) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(A)$$

10.1.4 Teorema *Se $A \in \mathcal{A}$ (algebra di Banach con unità) e $\mathbf{A}$ è la sottoalgebra generata da A e I in $\mathcal{A}$ allora $P_{\mathcal{A}}(A)$ è un aperto e, se $P'_\infty(A)$ è la componente connessa del punto[2] ∞ in $P_{\mathcal{A}}(A)$, allora*

$$P_{\mathcal{A}}(A) = P'_\infty(A) \cup \mathcal{U}$$

(ove $\mathcal{U}$ denota le rimanenti componenti connesse) e

$$\sigma_{\mathbf{A}}(A) = \mathbb{C} \setminus P'_\infty(A)$$

DIMOSTRAZIONE: è facile rendersi conto che

$$P'_\infty(A) \subset P_{\mathbf{A}}(A)$$

Infatti la mappa $P_{\mathbf{A}}(A) \ni \lambda \longmapsto (A - \lambda I)^{-1}$ è olomorfa, e

$$\begin{aligned} ||A|| < |\lambda_0| \Rightarrow (A - \lambda I)^{-1} &= \sum (\lambda - \lambda_0)^n R_{\mathbf{A}}(\lambda)^{n+1} \\ &= \sum (\lambda - \lambda_0)^n \left(-\frac{1}{\lambda} \sum_k \frac{A^k}{\lambda^k} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

Ma, per definizione di $\mathbf{A}$:

$$-\frac{1}{\lambda} \sum_k \frac{A^k}{\lambda^k} \in \mathbf{A}$$

[1] Essendo continua da un compatto in un compatto di Hausdorff ed iniettiva.

[2] Cioè la componente connessa che contiene i punti di modulo opportunamente grande.

quindi per ogni λ che soddisfi la relazione precedente, la serie

$$\sum (\lambda - \lambda_0)^n R_{\mathbf{A}}(\lambda_0)^{n+1} \in \mathbf{A}$$

converge e, per continuazione analitica, si trova che $P'_\infty(A) \subset P_{\mathbf{A}}(A)$.

Viceversa dimostriamo che $P_{\mathbf{A}}(A) \subset P'_\infty(A)$, cioè che se $\lambda \notin P'_\infty(A)$ allora $\lambda \notin P_{\mathbf{A}}(A)$.

Per assurdo sia $\lambda \in P_{\mathbf{A}}(A)$, i.e. $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathbf{A}$ cioè esistano i polinomi complessi $p_n \in \mathbb{C}[z]$ tali che

$$||p_n(A) - (A - \lambda I)^{-1}|| \longrightarrow 0$$

il che, per continuità del prodotto, implica

$$||(A - \lambda I)p_n(A) - I|| \longrightarrow 0$$

Ma se

$$q_n(z) := (z - \lambda)p_n(z) - 1$$

evidentemente $||q_n(A)|| \longrightarrow 0$, e tuttavia

$$\forall p \in \mathbb{C}[z]\ \forall \varphi \in \sigma(\mathbf{A}) \quad \varphi(p(A)) = p(\varphi(A))$$

(per linearità e moltiplicatività delle φ), quindi (si rammenti che $||\varphi|| = 1$):

$$|p(\varphi(A))| \leq ||p(A)||$$

ovvero, per ogni $z \in \sigma_{\mathbf{A}}(A)$: $|p(z)| \leq ||p(A)||$.

Supponiamo ora che λ appartenga ad una componente connessa che non sia $P'_\infty(A)$: per il principio del massimo 9.6.24, in questa componente connessa (che per definizione è chiusa ma anche aperta): $|p(z)| \leq ||p(A)||$; in particolare ciò è vero nel punto λ. Ma

$$||q_n(A)|| \longrightarrow 0$$

mentre $q_n(\lambda) = 1$ il che viola il principio del massimo per q_n (che ovviamente sono olomorfe, essendo polinomi!). L'assurdo è derivato dall'aver supposto falsa l'inclusione $P_{\mathbf{A}}(A) \subset P'_\infty(A)$.

QED

10.1.5 Proposizione *Se $\mathcal{A}$ è una C*-algebra con unità I, $A \in \mathcal{A}$ e $A \in \mathcal{B} \subset \mathcal{B}$ (C*-sottoalgebra con unità I) allora*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(A) \subset \sigma_{\mathcal{B}}(A)$$

Se A è autoaggiunto vale il segno di uguaglianza.

DIMOSTRAZIONE: Se A é autoaggiunto allora $\sigma_{\mathcal{A}}(A) \subset \mathbb{R}$ è compatto e quindi c'è solo la componente connessa $P'_\infty(A)$.

Nel caso generale, certamente A^*A è autoaggiunto e quindi

$$\sigma_{\mathcal{B}}(A^*A) = \sigma_{\mathcal{A}}(A^*A)$$

Ora osserviamo che se $A \in \mathcal{B}$ è invertibile in $\mathcal{A}$ allora basta dimostrare che il suo inverso appartiene a $\mathcal{B}$; infatti ciò equivale a $P_{\mathcal{A}}(A) = P_{\mathcal{B}}(A)$ i.e. a $\sigma_{\mathcal{A}}(A) = \sigma_{\mathcal{B}}(A)$.

Ma in questo caso $A^{*-1} = A^{-1*}$ e $(A^*A)^{-1} = A^{-1}A^{-1*}$ in $\mathcal{A}$ e, essendo A^*A autoaggiunto, $A^*A \in \mathcal{B}$ (l'unità I è la stessa sia in $\mathcal{A}$ che $\mathcal{B}$). Quindi

$$A^{-1} = (A^*A)^{-1}A^*$$

e, dato che $(A^*A)^{-1}, A* \in \mathcal{B}$, anche $A^{-1} \in \mathcal{B}$.

QED

Consideriamo ora una C*-algebra $\mathcal{A}$ con unità I ed un suo elemento A; si definisce

$$\mathbf{A} = C^*(A, I) := \langle A, A^*, I \rangle$$

i.e. come la chiusura uniforme dei polinomi in A e A^*:

$$p(A) = \sum c_{nm} A^n A^{*m}$$

ove le $\{c_{nm}\}$ sono nulle tranne che per un numero finito di coppie (n, m). $\mathbf{A}$ è ovviamente una C*-algebra commutativa con unità I e quindi, per il teorema di Gel'fand–Najmark:

$$\forall \varphi \in \sigma(\mathbf{A}) \quad \varphi(A^*) = \overline{\varphi(A)}$$

Si ha cioè l'omeomorfismo

$$\sigma(\mathbf{A}) \cong \sigma_{\mathbf{A}}(A) = \sigma_{\mathcal{A}}(A)$$

Dunque la trasformata di Gelfand è uno *-isomorfismo isometrico di $\mathbf{A}$ su $C(\sigma(\mathbf{A}))$. D'altro canto abbiamo anche l'omeomorfismo $\varphi : \sigma(A) \cong \sigma(\mathbf{A})$ (che manda $\lambda \longmapsto \varphi_\lambda$ in $\varphi_\lambda(A) = \lambda$) e quindi, per funtorialità, si ha uno *-isomorfismo isometrico che rende commutativo il diagramma seguente:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r] \arrow[dr] & C(\sigma(\mathbf{A})) \arrow[d, "\varphi^*"] \\
& C(\sigma(A))
\end{tikzcd}$$

(dove $\varphi^*(f)(\lambda) = f(\varphi_\lambda)$). Se definiamo una mappa $C(\sigma(A)) \longrightarrow \mathbf{A}$ come

$$f \longmapsto f(A)$$

allora $f(I) = I$ (per unitarietà dello *-isomorfismo φ^*) e, se $f(\lambda) = \lambda$ allora $f(A) = A$: infatti in questo caso, se B è tale che $\widehat{B}(\varphi_\lambda) = \lambda$ deve essere $\varphi_\lambda(B) = \lambda = \varphi_\lambda(A)$ i.e. $\varphi_\lambda(B - A) = 0$ e quindi $B = A$.

Quindi la freccia diagonale $C(\sigma(A)) \longleftrightarrow \mathbf{A}$ nel diagramma commutativo precedente è l'unica estensione isometrica della mappa $\mathbb{C}[z] \longrightarrow \mathbf{A}$ di valutazione di un polinomio su A ($p \longmapsto p(A)$) alla chiusura (uniforme) dello spazio dei polinomi e di $\mathbf{A}$, per il teorema di Stone–Weierstrass.

La mappa $C(\sigma(A)) \longrightarrow \mathbf{A}$ che abbiamo ottenuto si dice *calcolo funzionale continuo* per un operatore normale A. Infatti ci consente di calcolare il valore di una funzione continua su un operatore normale, analogamente a quanto accade per i polinomi.

10.1.6 Teorema della Mappa Spettrale *Se A è un operatore normale in una C*-algebra $\mathcal{A}$, per ogni $f \in C(\sigma(A))$ si ha che*

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$$

Dimostrazione: A questo punto è una facile verifica:

$$\begin{aligned}\sigma(f(A)) &= \{\varphi(f(A))\}_{\varphi\in\sigma(\mathbf{A})} = \{\widehat{f(A)}(\varphi)\}_{\varphi\in\sigma(\mathbf{A})}\\ &= \{\widehat{f(A)}(\varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\sigma(A)} = \{f(\lambda)\}_{\lambda\in\sigma(A)} = f(\sigma(A))\end{aligned}$$

QED

Se la C*-algebra $\mathcal{A}$ è commutativa, allora ogni operatore è normale e quindi il teorema della mappa spettrale ci consente di calcolare funzioni continue su elementi di $\mathcal{A}$: da questo punto di vista, gli operatori di $\mathcal{A}$ sono una generalizzazione dei numeri complessi.

10.1.7 Esempio *Se f è una funzione olomorfa intera, allora*

$$\forall\lambda \in \mathbb{C} \quad f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\lambda^n$$

(la somma converge assolutamente in tutto il piano complesso) e quindi

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$$

converge assolutamente, quindi ($\mathcal{A}$ è uno spazio di Banach) converge in $\mathcal{A}$.

Se $\mathcal{A}$ è commutativa, possiamo valutare su $f(A)$ un funzionale moltiplicativo φ (si rammenti che un tale funzionale è continuo):

$$\forall\varphi \in \sigma(\mathcal{A}) \quad \varphi(f(A)) = f(\varphi(A))$$

In realtà non è necessario limitarsi a funzioni intere. Più precisamente, sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ove Ω è un dominio regolare (cioè un aperto connesso il cui bordo sia una curva regolare Γ) del piano complesso, con chiusura $\overline{\Omega}$ compatta, contenente $\sigma(A)$, e sia $A(\Omega)$ l'insieme delle funzioni olomorfe su Ω e continue su $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$; si tratta di una sottoalgebra di Banach di $C(\overline{\Omega})$ per la norma

$$||f||_{A(\Omega)} = \max_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z\in\Gamma} |f(z)|$$

Per la formula di Cauchy 9.6.6:

$$\forall z \in \Omega \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \oint_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw$$

dunque è naturale definire l'*integrale di Dunford*

$$f(A) := \frac{1}{2\pi} \oint_\Gamma f(\lambda) R_A(\lambda) d\lambda$$

($R_A(\lambda)$ denota al solito il risolvente). Dato che la funzione $f(\lambda)R_A(\lambda)$ è olomorfa in Ω, questo integrale non dipende da Γ.

10.1.8 Lemma *Se $A \in \mathcal{A}$ (algebra di Banach con unità) allora l'integrale di Dunford induce un morfismo continuo $f \longmapsto f(A)$ tale che*

- *Se $f(z) = 1$ su Ω allora $f(A) = I$.*
- *Se $f(z) = z$ su Ω allora $f(A) = A$.*
- *Se $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ è una serie assolutamente convergente in Ω allora*

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$$

DIMOSTRAZIONE: La mappa $f \longmapsto f(A)$ è ovviamente lineare e limitata, dato che

$$||f(A)|| \leq \frac{1}{2\pi} |\Gamma| \max ||R(\lambda)|| \; ||f||_{A(\Omega)}$$

($|\Gamma|$ denota la lunghezza della curva Γ), ed è un omomorfismo di algebre: di più, verifichiamo che se Γ_1 e Γ_2 sono curve regolari chiuse in Ω, allora

$$\forall f_1, f_2 \in A(\Omega) \quad f_1(A)f_2(A) = f_1 f_2(A)$$

Intanto, dato che $f_2(A)$ non dipende dalla scelta di Γ_1, possiamo supporre che sia $\Gamma_2 \subset \Omega_1$ (le curve regolari chiuse delimitano domini regolari) e quindi

$$\begin{aligned} f_1(A)f_2(A) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\Gamma_1} f_1(\lambda_1)R(\lambda_1)d\lambda_1 \oint_{\Gamma_2} f_2(\lambda_2)R(\lambda_2)d\lambda_2 = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\Gamma_1} f_1(\lambda_1)f_2(\lambda_2)\frac{R(\lambda_1)-R(\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda-2}d\lambda_1 d\lambda_2 \end{aligned}$$

(si ricordi che $R(\lambda_1) - R(\lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)R(\lambda_1)R(\lambda_2)$). Ma la funzione

$$\lambda_2 \longmapsto \frac{R(\lambda_1)-R(\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}$$

è olomorfa in Ω_2 e quindi, per la formula integrale di Cauchy:

$$\begin{aligned} f_1(A)f_2(A) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\Gamma_1} f_1(\lambda_1) \oint_{\Gamma_2} f_2(\lambda_2)\frac{R(\lambda_1)-R(\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}d\lambda_2 d\lambda_1 \\ &= -\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\Gamma_1} f_1(\lambda_1) \oint_{\Gamma_2} \frac{f_2(\lambda_2)R(\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}d\lambda_2 d\lambda_1 \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2} f_2(\lambda_2)R(\lambda_2)\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{f_1(\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}d\lambda_1\right)d\lambda_2 \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2} f_2(\lambda_2)f_1(\lambda_2)R(\lambda_2)d\lambda_2 \\ &= f_1 f_2(A) \end{aligned}$$

Ora la (3) del teorema è immediata. La (2) è un facile calcolo:

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \lambda R(\lambda)d\lambda = A + \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (A-\lambda I)R(\lambda)d\lambda = A$$

mentre la (1) si dimostra osservando che, essendo una funzione identicamente 1 intera, possiamo scegliere Γ come una circonferenza di centro l'origine del piano complesso e raggio arbitrariamente grande, ottenendo quindi

$$\begin{aligned}
||f(A) - I|| &= \frac{1}{2\pi}\left|\left| \oint_\Gamma 1 \cdot R(\lambda) d\lambda - \oint_\Gamma \frac{I}{\lambda^{-1}} d\lambda \right|\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\left| - \oint_\Gamma \left(R(\lambda) + \frac{I}{\lambda^{-1}} \right) d\lambda \right|\right| \\
&= \left|\left| \frac{1}{2\pi} \oint_\Gamma \left(\left(I - \frac{A}{\lambda^{-1}} \right)^{-1} - I \right) \frac{d\lambda}{\lambda} \right|\right| \\
&\leq \max_{\lambda\in\Gamma} \left|\left| \left(I - \frac{A}{\lambda^{-1}} \right)^{-1} - I \right|\right| \frac{1}{2\pi} \oint_\Gamma \frac{1}{|\lambda|} d\lambda \\
&\leq \max_{\lambda\in\Gamma} \frac{||A||}{|\lambda| - ||A||}
\end{aligned}$$

che tende a zero per $|\lambda| \longrightarrow \infty$.

QED

Questo teorema si estende immediatamente al caso in cui $\sigma(A)$ sia sconnesso: infatti se $\sigma(A) = \sigma_1(A) \cup \sigma_2(A)$ sono le componenti connesse, possiamo considerare l'integrale di Dunford

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(\lambda) R(\lambda) d\lambda$$

ove Γ è una curva regolare chiusa, che delimiti[3] un dominio regolare contenente $\sigma_1(A)$ e il cui complementare (illimitato) contenga $\sigma_2(A)$, e l'algebra $A(\Omega)$ è quella delle funzioni olomorfe in Ω continue in $\overline{\Omega}$. In questo caso, se $f = 1$, allora $f(A)$ è un proiettore (continuo), cioè $f(A)^2 = f(A)$ che commuta con A e tale che $Af(A) = f(A)$.

Dunque, se $\sigma(A)$ è sconnesso, $\mathcal{A}$ possiede un idempotente e quindi una proprietà topologica dello spettro ne implica una algebrica dell'algebra.

10.1.9 Teorema della Mappa Spettrale Olomorfo *Se $\mathcal{A}$ è un'algebra di Banach con unità, $A \in \mathcal{A}$ e Γ una curva regolare che delimiti un dominio regolare Ω tale che $\sigma_{\mathcal{A}}(A) \subset \Omega$, allora per ogni funzione $f \in A(\Omega)$:*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(f(A)) = f(\sigma_{\mathcal{A}}(A))$$

DIMOSTRAZIONE: Se $\mathcal{A}$ è commutativa, allora, per ogni $\varphi \in \sigma(\mathcal{A})$:

$$\varphi(f(A)) = -\frac{1}{2\pi i}\varphi\left(\oint_\Gamma f(\lambda) R(\lambda) d\lambda \right) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\varphi(A) - \lambda} d\lambda = f(\varphi(A))$$

[3]In tutti questi ragionamenti si assume il teorema di Jordan secondo il quale una curva siffatta divide in piano in due parti: una limitata ed una illimitata.

e quindi il teorema segue immediatamente dal lemma.

Se $\mathcal{A}$ non è commutativa, possiamo, per ogni $A \in \mathcal{A}$ considerare l'algebra commutativa massimale che contiene A (intersezione di tutte le sottoalgebre commutative $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ che contengano A). Una costruzione di $\mathcal{B}$ è la seguente: consideriamo l'algebra generata da A, I e dagli elementi

$$\{R_A(\lambda)\}_{\lambda \in P(A)}$$

Dato che i risolventi commutano fra loro, quest'algebra è commutativa e, per definizione, tale che

$$\sigma_{\mathcal{B}}(A) = \sigma_{\mathcal{A}}(A)$$

Quindi, dato che il teorema vale per $\mathcal{B}$, vale anche per $\mathcal{A}$.

QED

10.2 Calcolo funzionale continuo

Sia $\mathcal{A}$ una C*-algebra con unità I e A un elemento autoaggiunto $A = A^*$ di $\mathcal{A}$. Allora

$$\sigma(A) \subset \mathbb{R}$$

10.2.1 Teorema *Se $\mathcal{A}$ è una C*-sottoalgebra dell'algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ degli operatori continui su uno spazio di Hilbert allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- *Per ogni $x \in \mathcal{H}$: $(x, Ax) \geq 0$ (i.e. A è positivo).*
- *Esiste $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tale che $A = B^*B$.*
- *A è autoaggiunto e $\sigma(A) \subset [0, \infty]$.*

DIMOSTRAZIONE: (3) $\Rightarrow$ (2): se $A = A^*$ allora per ogni funzione $f \in C([0, \infty])$ possiamo usare il calcolo funzionale continuo: in particolare per $f(t) := +\sqrt{t}$, abbiamo che

$$f(A) \in \mathbf{A} \subset \mathcal{A}$$

e, avendo f valori reali: $f(A)^* = f(A)$ i.e. $f(A)^2) = f^2(A) = A$. Prendiamo allora semplicemente

$$B := f(A)$$

ottenendo $B = B^*$ e $B^*B = f(A)^2 = A$.

(2) $\Rightarrow$ (1) è ovvio: per ogni $x \in \mathcal{H}$:

$$(x, B^*Bx) = (Bx, Bx) \geq 0$$

(1) $\Rightarrow$ (3): Se $(x, Ax) \in \mathbb{R}$:

$$(x, Ax) = \overline{(x, Ax)} = (Ax, a)$$

quindi $A = A^*$ è autoaggiunto. Allora $\sigma(A) \in \mathbb{R}$ e, per $\lambda > 0$, vogliamo dimostrare che $(A + \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (il che implicherà che $(A + \lambda I)^{-1} \in \mathcal{A}$ avendo $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ la stessa unità I). Ma

$$\lambda(x, x) < (x, (A + \lambda I)x) \leq ||x|| \, ||(A + \lambda I)x||$$

e quindi $\lambda||x|| \leq ||(A + \lambda I)x||$ cioè $\ker(A + \lambda I) = 0$. Esiste dunque l'inverso di $(A + \lambda I)$ e quello che vogliamo dimostrare è che questo operatore è definito in tutto $\mathcal{H}$.

Di certo il suo dominio è denso, ed inoltre:

$$\mathrm{Dom}(A + \lambda I)^{-1} = \mathrm{Im}(A + \lambda I)$$

Infatti, dato che $\ker(A + \lambda I) = 0$:

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad (y, (A + \lambda I)x) = 0 \Rightarrow y = 0$$

Consideriamo ora $z \in \overline{\mathrm{im}(A + \lambda I)}$:

$$z = \lim_n z_n = \lim_z (A + \lambda I)x_n$$

Dunque $\{(A + \lambda I)x_n\}$ è di Cauchy, da cui

$$\lambda|x_n - x_m|| \leq ||(A + \lambda I)(x_n - x_m)|| < \varepsilon$$

cioè $\{x_n\}$ pure è di Cauchy, e deve quindi convergere a un $x \in \mathcal{H}$.

Questo dimostra che $z \in \mathrm{im}(A + \lambda I)$, che quindi risulta essere chiuso; dato che è anche denso in $\mathcal{H}$ segue che $\mathcal{H} = \mathrm{im}(A + \lambda I)$, e quindi l'operatore $(A + \lambda I)^{-1}$ è definito ovunque.

Ora si noti che

$$(A + \lambda I)^{-1}z = (A + \lambda I)^{-1}(A + \lambda I)x = x$$

e, dato che $\lambda||x|| \leq ||z||$:

$$||x|| \leq ||(A + \lambda I)^{-1}z||$$

Ne concludiamo che $(A + \lambda I)^{-1}$ è lineare e continuo su $\mathcal{H}$, ed è un inverso sinistro (e anche destro) di $A + \lambda I$, il che significa che $\lambda \in P(A)$.

Abbiamo quindi dimostrato che $\sigma(A) \subset [0, \infty)$.

QED

Osserviamo che se A è autoaggiunto, dato che $(x, Ax) \in \mathbb{R}$, per la disuguaglianza di Schwartz:

$$(x, Ax) \leq ||A||(x, x)$$

Ma vale ovviamente anche la disugualianza opposta. Quindi è naturale chiedersi quali a e b possano scegliersi in modo che

$$a(x, x) \leq (x, Ax) \leq b(x, x)$$

10.2.2 Proposizione *Se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è autoaggiunto allora una coppia di numeri reali (a, b) soddisfa alla*

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad a(x, x) \leq (x, Ax) \leq b(x, x)$$

se e solo se l'intervallo $[a, b]$ contiene lo spettro $\sigma(A)$.

Dimostrazione: L'equivalenza (1) $\iff$ (3) del teorema precedente, con la scelta $A - aI$ e $bI - A$ fornisce immediatamente la tesi.

QED

In particolare si possono considerare $a = \min \sigma(A)$ e $b = \max \sigma(A)$.

10.2.3 Definizione *Se $A \in \mathcal{A}$ (C*-algebra con unità I) allora (essendo A^* un operatore autoaggiunto e positivo), il* modulo *di A è l'operatore autoaggiunto*

$$|A| := \sqrt{A^*A} \in \mathcal{A}$$

Dato che $\ker |A| = \ker A$ (infatti $(|A|x, |A|x) = 0 \iff (x, |A|^2 x) = 0 \iff (x, A^*Ax) = 0$) si ha il

10.2.4 Teorema *Se $\mathcal{A}$ è una C*-sottoalgebra di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ esiste un'unica isometria parziale V in $\mathcal{H}$ tale che* $\ker V = \ker A$ *e*

$$A = |A|V$$

Il seguente teorema è una generalizzazione della decomposizione polare delle matrici:

10.2.5 Teorema *Se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ esiste un'unica coppia (V, H) di operatori in $\mathcal{H}$, ove V è un'isometria parziale e H un operatore autoaggiunto positivo tali che* $\ker A = \ker V = \ker H$ *e*

$$A = VH$$

DIMOSTRAZIONE: Ovviamente poniamo $H = |A|$; dato che, per ogni $x \in \mathcal{H}$:

$$\big|\big|\ |A|x\big|\big|^2 = ||Ax||^2$$

si ha quindi che la corrispondenza $|A|x \longleftrightarrow Ax$ è una isometria e

$$(\operatorname{im}|A|)^\perp = \ker|A| = \ker A$$

(infatti $(\operatorname{im} B)^\perp = \ker B^*$ sempre). Possiamo dunque estendere la corrispondenza $|A|x \longleftrightarrow Ax$ ponendola zero su $\operatorname{im}|A|^\perp = \ker A$.

Infine vediamo l'unicità della decomposizione: se fosse $A = VH = V'H'$ sarebbe anche

$$A^* = H'V'^* \Rightarrow A^*A = H'^2 \Rightarrow H' = |A|$$

ed inoltre $A = V'H = V|A|$ da cui $V = V'$.

QED

Se $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ sono tali che

$$\forall i, k = 1, ..., n \quad A_iA_k = A_kA_i \qquad \text{e} \qquad A_iA_k^* = A_k^*A_i$$

allora la C*-algebra

$$\mathbf{A} = C^*\langle I, A_1, ..., A_n\rangle$$

generata da $\{I, A_1, ..., A_n\}$ è commutativa e quindi, per il teorema di Gelfand–Najmark, isomorfa alla C*-algebra $C(\sigma(\mathbf{A}))$, ove lo spazio $\sigma(\mathbf{A})$ è omeomorfo allo spettro congiunto $j\sigma(A_1, ..., A_n)$.

Notiamo che, in generale $j\sigma(A_1, ..., A_n) \nsubseteq \sigma(A_1)\times ... \times\sigma(A_n)$ (ad esempio per $A_1 = A$ e $A_2 = A^*$); un caso in cui vale invece il segno di $=$ è per $\mathcal{A} = C[0, 1^2]$ con $A_1 = f_1$ e $A_2 = f_2$, ove $f_1(s, t) = s$ e $f_2(s, t) = t$.

Possiamo comunque estendere la teoria svolta per un solo operatore A alla famiglia di operatori $\{A_1, ..., A_n\}$ ottenendo il calcolo funzionale continuo (la freccia diagonale nel seguente diagramma):

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r] \arrow[dr] & C(\sigma(\mathbf{A})) \arrow[d, "\varphi^*"] \\ & C(\sigma(A)) \end{tikzcd}$$

(dove $\varphi^*(f)(\lambda) = f(\varphi_\lambda)$) in più variabili:

$$f \longmapsto f(A_1, ..., A_n)$$

come l'unico *-isomorfismo isometrico $C(j\sigma(A_1, ..., A_n)) \cong \mathbf{A}$ tale che

- Se $f = 1$ allora $f(A_1, ..., A_n) = I$.
- Se $f(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \lambda_i$ allora $f(A_1, ..., A_n) = A_i$.

Osserviamo che, $A^*A = AA^*$ e $A = A_1 + iA_2$ se e solo se $A_1A_2 = A_2A_1$ e quindi $\sigma(A) = j\sigma(A_1, A_2)$, dato che

$$j\sigma(A_1, A_2) = \{(\varphi(A_1), \varphi(A_2))\}_{\varphi\in\sigma(\mathbf{A})} \longleftrightarrow \{\varphi(A) = \varphi(A_1) + i\varphi(A_2)\}_{\varphi\in\sigma(\mathbf{A})}$$

10.2.6 Definizione *Lo* spettro puntuale *di un operatore $A \in \mathcal{A}$ (C^*-algebra con unità) è l'insieme*

$$\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists x \neq 0 \ Ax = \lambda x\}$$

e lo spettro continuo *di A è l'insieme*

$$\sigma_c(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \ |\forall\varepsilon > 0 \exists x \ ||Ax - \lambda x|| < \varepsilon\}$$

Ovviamente

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$$

10.2.7 Esempio *Sia X uno spazio topologico separabile e consideriamo una misura atomica μ su X (o meglio sulla σ-algebra dei boreliani di X), cioè costruita prendendo una successione $\{x_n\} \subset X$ densa e ponendo*

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \delta_{x_n}$$

(ove δ_x è la misura di Dirac concentrata in $\{x\}$ e i c_n sono positivi e normalizzati in modo che $\sum_n c_n = 1$). Per il teorema di Riesz–Markov 9.2.2, esiste un funzionale F_n associato alla misura δ_{x_n} tale che

$$F_n(f) = \int_X f(x) d\delta_{x_n}(x)$$

Se consideriamo l'operatore di moltiplicazione per f: M_f allora

$$\overline{\sigma_p(M_f)} = \sigma(M_f)$$

10.2.8 Lemma *Se $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ (C^*-algebra con unità I) soddisfano alle*

$$\forall i, k = 1, ..., n \quad A_i A_k = A_k A_i \qquad e \qquad A_i A_k^* = A_k^* A_i$$

allora lo spettro congiunto $j\sigma(A_1, ..., A_n)$ è l'insieme

$$\left\{(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \forall\varepsilon > 0 \;\exists B \in \mathcal{A} \setminus 0 \quad \frac{||(A_k - \lambda_k)B||}{||B||} < \varepsilon\right\}$$

DIMOSTRAZIONE: Se $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ non appartiene a $j\sigma(A_1, ..., A_n)$ deve aversi

$$d(j\sigma(A_1, ..., A_n), \lambda) = \delta > 0$$

Per $z \in j\sigma(A_1, ..., A_n)$ consideriamo la funzione

$$f(z) := \frac{1}{||\lambda - z||} = \frac{1}{d(\lambda, z)}$$

Allora $f : j\sigma(A_1, ..., A_n) \longrightarrow \mathbb{C}$ è continua e $||f|| < 1/\delta$, quindi, se $C := f(A_1, ..., A_n)$ sta in $\mathbf{A}$ e

$$||\lambda - z||^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i - z_i|^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^n |(\lambda_i - z_i)f(z)|^2 = 1$$

Applicando il calcolo funzionale continuo:

$$\sum_{i=1}^n C^*(A_i - \lambda_i I)^*(A_i - \lambda_i I)C = I$$

Dunque, se $B \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} B^*B &= \sum_{i=1}^n (CB)^*(A_i - \lambda_i I)^*(A_i - \lambda_i I)CB \\ &= \sum_{i=1}^n ((A_i\lambda_i)B)^* C^* C(A_i - \lambda_i I)B \end{aligned}$$

(dato che C commuta con gli A_i per definizione). Quindi

$$\begin{aligned} ||B^*B|| = ||B||^2 &\leq \sum_{i=1}^n ||C(A_i - \lambda_i I)B||^2 = ||C|| \sum_{i=1}^n ||(A_i - \lambda_i I)B||^2 \\ &= \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^n ||(A_i - \lambda_i I)B||^2 \end{aligned}$$

Questo vale per ogni B e $\lambda \notin j\sigma(A_1, ..., A_n)$, perciò l'insieme

$$\{(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n \mid \forall\varepsilon > 0 \exists B \subset \mathcal{A} \setminus 0 \; ||(A_k - \lambda_k)B|| < \varepsilon||B||\}$$

è contenuto in $j\sigma(A_1, ..., A_n)$.

Viceversa, sia $\lambda \in j\sigma(A_1, ..., A_n)$; allora, se $g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua e tale che

$$\forall t \geq \varepsilon \quad g(t) = 0 \qquad \text{e} \qquad g(0) = 1$$

abbiamo che la funzione

$$f(z) := g(||\lambda - z||)$$

verifica la $f(A_1, ..., A_n) \in \mathcal{A} \setminus 0$. Dunque

$$|(z_i - \lambda_i)f(z)| < \varepsilon \implies ||(A_i - \lambda_i I)B|| \leq \varepsilon||B||$$

se $B = f(A_1, ..., A_n)$ (si rammenti che $||f|| = 1$).

QED

10.2.9 Teorema *Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ è una C*-sottoalgebra e $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ sono tali che*

$$\forall i, k = 1, ..., n \quad A_i A_k = A_k A_i \qquad e \qquad A_i A_k^* = A_k^* A_i$$

allora lo spettro congiunto $j\sigma(A_1, ..., A_n)$ è

$$\left\{(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n \;\mid\; \exists\{x_n\} \subset \mathcal{H}_1 \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} ||A_k x_n - \lambda_k x_n|| = 0\right\}$$

(ove $\mathcal{H}_1 = \{x \in \mathcal{H} \mid ||x|| = 1\}$).

DIMOSTRAZIONE: Per il lemma sappiamo che

$$\lambda \in j\sigma(A_1, ..., A_n) \iff \forall\varepsilon > 0 \; \exists B \in \mathcal{A} \quad ||B|| = 1 \text{ e } ||(A_k - \lambda_k)B|| \leq \varepsilon$$

Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ allora $||B|| = \sup_{x \in \mathcal{H}_1} ||Bx||$ quindi

$$||(A_k - \lambda_k I)Bx|| \leq \varepsilon$$

e, per ogni $\delta > 0$ esiste un $x_\delta \in \mathcal{H}_1$ per il quale

$$||Bx_\delta|| > 1 - \delta$$

Dunque, per

$$y := \frac{Bx_\delta}{||Bx_\delta||}$$

troviamo che

$$||(A_k - \lambda_k I)y|| \leq \frac{\varepsilon}{||Bx_\delta||} < \frac{\varepsilon}{1-\delta}$$

ovvero

$$\lambda \in j\sigma(A_1, ..., A_n) \iff \forall\varepsilon > 0 \quad ||(A_k - \lambda_k)x|| \leq \varepsilon$$

Per ogni n possiamo quindi scegliere un x_n che soddisfi la relazione precedente per un ε_n arbitrario.

QED

Osserviamo che, se esiste $x \in \mathcal{H} \setminus 0$ tale che, per ogni k, $(A_k - \lambda_k I)x = 0$, allora

$$\mathcal{K} := \bigcap_k \ker(A_k - \lambda_k I) \neq 0$$

Se la dimensione di $\mathcal{H}$ non è finita, possiamo scegliere gli $\{x_n\}$ del teorema precedente in modo che formino una base ortonormale; nella costruzione si considerano le ε_n (tendenti a zero) e le $g_n : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\forall z \quad \varepsilon_n < ||z - \lambda|| \implies g(z) = 0 \qquad \text{e} \qquad g_n(0) = 1$$

ma sarebbe lo stesso porre, per $n \neq m$:

$$\overline{g_n(z) g_m(z)} = 0$$

con $||g_n|| = 1$, in modo che $B_n^* B_m = 0$ e quindi:

$$n \neq m \implies (B_n x, B_m x) = 0$$

Questo è possibile perché λ non è un punto isolato dello spettro congiunto ed i punti isolati dello spettro congiunto fanno parte in realtà della sua componente puntuale, come dimostreremo ora.

10.2.10 Definizione *Se A è normale in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, il suo* spettro essenziale *è l'insieme*

$$\sigma_{ess}(A) := \{\lambda \in \sigma(A) \mid \lambda \textit{ punto isolato e } \dim\ker(A - \lambda I) < \infty\}$$

10.2.11 Proposizione *Se λ è un punto isolato in $\sigma(A)$ allora $\lambda \in \sigma_p(A)$.*

DIMOSTRAZIONE: Ovviamente $\{\lambda\}$ è un chiuso (essendo lo spettro uno spazio di Hausdorff) ed aperto (essendo un punto isolato), il che vuol dire che la sua funzione caratteristica $\chi_{\{x\}}$ è continua. Quindi $\chi_{\{x\}}(A) \in \mathbf{A}$ se e solo se $\chi_{\{x\}}$ è un idempotente autoaggiunto E nell'algebra $C(\sigma(A))$. Se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è normale allora

E è un proiettore sul sottospazio $\ker(A - \lambda I)$; infatti $(z - \lambda)\chi_{\{x\}} = 0$ e quindi $(A - \lambda I)E = 0$.

Applicando il calcolo funzionale continuo si ottiene (ricordando che se $x \in \ker(A - \lambda I)$ allora $A^*x = \overline{\lambda}X$):

$$\forall p \in \mathbb{C}[x, y] \quad p(A, A^*)(x) = p(\lambda, \overline{\lambda})(x)$$

Ma, dato che per il teorema di Stone–Weierstrass 9.2.9 esiste una successione $\{p_n\}$ di polinomi che approssimano la funzione continua $\chi_{\{x\}}$, si ha

$$||p_n(A) - E|| \longrightarrow 0$$

e, dato che $p_n(A)X \longrightarrow Ex$, $p_n(\lambda)x \longrightarrow x$ e $p_n(A)x = p_n(\lambda)x$, ne viene $Ex = x$. Quindi l'immagine di E è $\ker(A - \lambda I)$.

QED

Lo stesso ragionamento può farsi per un numero finito qualsiasi di operatori $A_1, ..., A_n$, che commutino con i loro aggiunti: in questo caso $\chi_{\{x\}}$ corrisponde ad un operatore E la cui immagine è $\bigcap_i \ker(A_i - \lambda_i I)$. Dunque si ha il

10.2.12 Teorema (WEYL)

$$\sigma_{ess}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists \{x_n\} \textit{ base ortonormale } ||Ax_n - \lambda x_n|| \longrightarrow 0\}$$

10.3 Calcolo funzionale boreliano

Prendiamo spunto da un esempio: sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert di dimensione finita (spazio euclideo); allora se A è normale, per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $A^*x = \overline{\lambda}x$:

$$\ker(A - \lambda I)^\perp \subset \mathcal{N}(A - \lambda I)^\perp$$

Se P_λ è l'operatore di proiezione $E_{\ker(A - \lambda I)}$ si ha che

- $\sum_{\lambda \in \sigma(A)} P_\lambda = I$.
- Se $\lambda \neq \lambda'$: $P_\lambda P_{\lambda'} = 0$.
- $A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_\lambda$.

Questo non è che un altro modo di esprimere la nota proprietà di diagonalizzazione delle matrici hermitiane. Il calcolo delle funzioni su tali matrici si riduce a quello sui suoi autovalori:

$$\forall p \in \mathbb{C}[z] \quad p(A) = \sum p(\lambda) P_\lambda$$

Ad esempio se $f|_{\sigma(A)} = \chi_{\{\lambda\}}$ allora $P_\lambda = f(A)$.

Se A è autoaggiunto allora il suo spettro è reale e possiamo definire

$$E(\lambda) := \sum_{\lambda' \leq \lambda} P_{\lambda'}$$

La proprietà (3) si esprime allora come

$$A = \int \lambda dE(\lambda)$$

ove la misura E è definita sugli intervalli come

$$E(\lambda, \lambda'] := E(\lambda) - E(\lambda')$$

Ovviamente

$$E(\lambda) = \chi_{(-\infty,\lambda]}(A)$$

Questa funzione è continua *solo se la dimensione dello spazio $\mathcal{H}$ è finita.*

Nel caso generale, che è quello che ci interessa, non possiamo quindi usare il calcolo funzionale che abbiamo fin qui sviluppato: dobbiamo perciò cercare di estenderlo ad una classe di funzioni più vasta di quelle continue.

Consideriamo quindi uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ ed un operatore A continuo e normale su $\mathcal{H}$; allora esiste un isomorfismo isometrico

$$C(\sigma(A)) \xrightarrow{\cong} \mathbf{A} = C^*\langle A, I\rangle$$

Ora osserviamo che, per il teorema di Tietze 2.3.4, gli elementi di $C(\sigma(A))$ si ottengono da quelli di $C_o(\mathbb{C})$ (funzioni continue e limitate su $\mathbb{C}$) per restrizione a $\sigma(A)$, e quindi che il calcolo funzionale continuo induce una mappa (che non è un isomorfismo):

$$C_o(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{A}$$

al solito ponendo $f \longmapsto f(A)$. Quindi, dare un operatore normale è equivalente ad assegnare un morfismo di C*-algebre (un tale morfismo verrà in sèguito chiamato *rappresentazione della C*-algebra $\mathcal{A}$*)

$$\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

(con $\mathcal{A} := C_o(\mathbb{C})$) il cui nucleo è

$$\ker \pi = \{f \in C_o(\mathbb{C}) \mid f|_{\sigma(A)} = 0\}$$

Infatti, data π, se $f_0 \in C_o(\mathbb{C})$ è tale che $f_0(\lambda) = \lambda$ su $\sigma(A)$, e se

$$A := \pi(f_0)$$

si trova che, per ogni altra $f \in C_o(\mathbb{C})$ con $f|_{\sigma(A)} \in C(\sigma(A))$ si ha

$$\pi(f) = f(A)$$

(questo è vero ovviamente per f costante, e quindi, per linearità e moltiplicatività, sui polinomi ed infine, per continuità, sulle funzioni continue qualsiasi).

Osserviamo che, se $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sono operatori normali allora

$$\sigma(A_1) = \sigma(A_2) \iff \ker \pi_1 = \ker \pi_2$$

10.3.1 Definizione *Due operatori A_1 e A_2 si dicono* unitariamente equivalenti*, e si scrive $A_1 \cong A_2$, se esiste un operatore unitario U in $\mathcal{H}$ tale che*

$$UA_1U^{-1} = A_2 \qquad e \qquad UA_2U^{-1} = A_1$$

È immediato verificare che se $A_1 \cong A_2$ allora $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$ e, di più, $\sigma_p(A_1) = \sigma_p(A_2)$.

Torniamo ora alla nostra rappresentazione

$$\pi(f) = f(A)$$

Se $A_1 \cong A_2$ le rappresentazioni associate si dicono *unitariamente equivalenti* e si scrive $\pi_1 \cong \pi_2$: ciò significa che esiste un operatore unitario U in $\mathcal{H}$ tale che

$$U\pi_1(f) = \pi_2(f)U$$

Inoltre possiamo definire

$$(\pi_1, \pi_2) := \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid \forall f \in C_o(\mathbb{C})\ T\pi_1(f) = \pi_2(f)T\}$$

Gli elementi di questo insieme si dicono *operatori di allacciamento*. Dato che due rappresentazioni equivalenti hanno gli stessi nuclei, segue che gli spettri degli operatori associati sono equivalenti e, di più, gli operatori sono unitariamente equivalenti.

Vale anche il viceversa: se $UA_1U^{-1} = A_2$ allora

$$UA_1^nU^{-1} = A_2^n \Rightarrow Up(A_1)U^{-1} = p(A_2)$$

con $p \in \mathbb{C}[z]$. Di nuovo per continuità e per il teorema di Stone–Weierstrass 9.2.9:

$$Uf(A_1)U^{-1} = f(A_2)$$

per ogni funzione continua sullo spettro di A_1 (che poi coincide con lo spettro di A_2). Quindi

$$U\pi_1(f)U^{-1} = \pi_2(f)$$

In questo modo lo studio degli operatori e delle rappresentazioni si equivale: in effetti, rappresentare un'algebra vuol dire proprio presentarla concretamente come l'algebra degli operatori di qualche spazio.

Studiamo ora le rappresentazioni di $\mathcal{A} = C(X)$, ove X è uno spazio topologico di Hausdorff compatto in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$:

$$\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

Vogliamo associare a π delle misure (boreliane) su X.

Preliminarmente osserviamo che, per $x, y \in \mathcal{H}$, la mappa

$$f \longmapsto (x, \pi(f)y)$$

è un funzionale lineare su $\mathcal{A}$, continuo in virtù della

$$|(x, \pi(f)y)| \leq ||x||\ ||y||\ ||\pi(f)|| \leq ||x||\ ||y||\ ||f||$$

Allora, per il teorema di Riesz–Markov 9.2.2:

$$F \in C(X)^* \iff F(f) = \int_X f(t) d\mu(t)$$

ove μ è una misura boreliana complessa regolare e limitata (cioè è una combinazione lineare finita di misure regolari di probabilità).

Quindi

$$(x, \pi(f)y) = \int_X f(t) d\mu_{x,y}(t)$$

10.3.2 Definizione *Gli elementi della famiglia*

$$\{\mu_{x,y}\}_{x,y\in\mathcal{H}}$$

si dicono misure spettrali *associate alla rappresentazione* π.

Consideriamo ora lo spazio $\mathcal{B}(X)$ delle funzioni boreliane limitate su X a valori complessi: sappiamo che, con la norma

$$||f|| := \sup_{x\in X} |f(x)|$$

è un'algebra di Banach[4]: ovviamente l'involuzione

$$f^*(x) := \overline{f(x)}$$

la rende una C*-algebra commutativa. Per il teorema di Riesz–Markov esiste l'estensione

$$\widetilde{\pi} : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

[4]Se $\{f_n\}$ sono boreliane ed equilimitate e convergenti puntualmente in X il loro limite è una funzione boreliana limitata.

(tale che $\widetilde{\pi}|_{C(X)} = \pi$). Infatti, se μ è la misura che corrisponde al funzionale F per mezzo del teorema di Riesz–Markov, allora l'integrale

$$\int_X f(t)d\mu(t)$$

è definito sugli elementi di $\mathcal{B}(X)$ e quindi per ogni funzione boreliana f ed ogni misura spettrale $\mu_{x,y}$ ha senso l'espressione

$$\int_X f(t)d\mu_{x,y}(t)$$

Si tratta di una funzione sesquilineare nelle x e y, dato che

$$\mu_{x,ay_1+by_2} = a\mu_{x,y_1} + b\mu_{x,y_2} \qquad \text{e} \qquad \mu_{ax_1+bx_2,y} = \overline{a}\mu_{y_1,x} + \overline{b}\mu_{x_2,y}$$

Dato che, per definizione, $||\mu| := ||F||$, questa forma sesquilineare è limitata ($||\mu|| \leq ||x||\ ||y||$), deve esistere $\widetilde{\pi}$ tale che

$$\int_X f(t)d\mu_{x,y}(t) = (x, \widetilde{\pi}(f)y)$$

Questa $\widetilde{\pi}$ è ovviamente lineare in f, ed è uno *-morfismo, dato che

$$(x, \widetilde{\pi}(f)y) = \int_X f(t)d\mu_{x,y}(t) = \int_X f(t)d\overline{\mu_{y,x}}(t) = \overline{(y, \widetilde{\pi}(f)x)}$$

Effettivamente è proprio una rappresentazione, avendosi

$$\pi(fg) = \pi(f)\pi(g)$$

sulle funzioni continue, e quindi

$$\int_X f(t)g(t)d\mu_{x,y}(t) = (x, \pi(fg)y) = (x, \pi(f)\pi(g)y) = \int_X f(t)d\mu_{x,\pi(g)y}(t)$$

da cui $\mu_{x,\pi(g)y)} = g\mu_{x,y}$; integrando quindi una funzione boreliana rispetto a questa misura si trova

$$(x, \widetilde{\pi}(fg)y) = (x, \widetilde{\pi}(f)\widetilde{\pi}(g)y)$$

per ogni boreliana f ed ogni funzione continua g, vale a dire

$$\widetilde{\pi}(fg) = \widetilde{\pi}(f)\pi(g)$$

Ma inoltre

$$(x, \widetilde{\pi}(f)\widetilde{\pi}(g)y) = (\widetilde{\pi}(f)^* x, \pi(g)y) = \int_X g(t) d\mu_{\widetilde{\pi}(f)^* x, y}(t)$$

Ne concludiamo che

$$\int_X f(t)g(t)d\mu_{x,y}(t) = \int_X g(t)d\mu_{\widetilde{\pi}(f)^* x, y}(t)$$

e quindi $\mu_{\widetilde{\pi}(f)^* x,y} = f\mu_{x,y}$. Di nuovo integrando sulle boreliane queste misure si ottiene

$$\widetilde{\pi}(fg) = \widetilde{\pi}(f)\widetilde{\pi}(g)$$

stavolta con $f, g \in \mathcal{B}(X)$.

Questo conclude la verifica che $\widetilde{\pi}$ è una rappresentazione della C*-algebra $\mathcal{B}(X)$: si noti che $||\widetilde{\pi}(f)| \le ||f||$.

10.3.3 Teorema *Se $\{f_n\}$ è una successione in $\mathcal{B}(X)$ equilimitata e convergente puntualmente, allora la successione $\widetilde{\pi}(f_n)$ converge fortemente.*

DIMOSTRAZIONE: Si tratta di applicare il teorema della convergenza dominata di Lebesgue 4.3.12: basta infatti dimostrare che, per ogni $x \in X$:

$$||\widetilde{\pi}(f_n)(x) - \widetilde{\pi}(f)(x)||^2 \longrightarrow 0$$

ove $f = \lim f_n$. Ora notiamo che

$$\begin{aligned} ||\widetilde{\pi}(f_n)(x) - \widetilde{\pi}(f)(x)||^2 &= ||\widetilde{\pi}(f_n - f)(x)||^2 = (\widetilde{\pi}(f_n - g)(x), \widetilde{\pi}(f_n - f)(x)) \\ &= (x, \widetilde{\pi}((f_n - f)^*(f_n - f))(x)) = (x, \widetilde{\pi}(|f_n - f|^2)(x)) \end{aligned}$$

Ma $|f_n - f|^2$ è equilimitata per ipotesi e tende a zero puntualmente: quindi il teorema della convergenza dominata implica che

$$\lim_n \int_X |(f_n - f)(t)|^2 d\mu_{x,y}(t) = \int_X \lim_n |(f_n - f)(t)|^2 d\mu_{x,y}(t) = 0$$

QED

Consideriamo di nuovo la rappresentazione π associata all'operatore normale A; sappiamo che

$$\pi(C(X)) = \mathbf{A}$$

è naturale chiedersi cosa sia $\pi(\mathcal{B}(X))$: vedremo che questo insieme è contenuto nella chiusura forte dell'algebra $\mathbf{A}$ e per dimostrarlo ci occorrerà un notevole risultato, il teorema di densità di von Neumann, che verrà dimostrato in séguito.

10.3.4 Definizione *Se $S \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è un sottoinsieme qualsiasi, il* commutante *di S (o* centralizzante *di S) è l'insieme*

$$S' := \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid \forall A \in S \quad TA = AT\}$$

Evidentemente il commutante S' è un'algebra che contiene l'unità I.

10.3.5 Esempio *Se consideriamo un operatore $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tale che*

$$T\pi(f) = \pi(f)T$$

possiamo esprimerlo scrivendo $T \in \mathbf{A}'$.

10.3.6 Proposizione *Il commutante S' di un insieme è un'algebra chiusa nella topologia debole di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

Dimostrazione: Ricordiamo qualche proprietà della topologia debole su $\mathcal{B}(\mathcal{H})$: se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $x, y \in \mathcal{H}$ i funzionali lineari

$$f_{x,y}(A) := \langle f_{x,y}, A\rangle$$

sono continui ($||f_{x,y}|| \leq ||x||\ ||y||$), quindi l'insieme

$$\mathcal{M}_0 := \{f_{x,y}\}_{x,y\in\mathcal{H}}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{B}(\mathcal{H})^*$. Ricordiamo che la topologia debole su $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ è definita in modo equivalente dalle seguenti proposizioni:

- è la più debole topologia su $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ per la quale gli elementi di $\mathcal{M}_0$ sono funzioni continue.
- è la $(\sigma(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{M}_0)$-topologia.
- è la topologia definita dalle seminorme

$$p_{x-1,\dots,x_n}(A) := \left|\sum_i (x_i, Ax_i)\right|$$

Torniamo ora alla dimostrazione della proposizione: $T \in S'$ se e solo se, per ogni $A \in S$, $AT = TA$, cioè

$$\forall x, y \in X \forall A \in S \quad (x, TAy) = (x, ATy) = (A^*x, Ty)$$

se e solo se $(x, TAy) - (A^*x, Ty) \in \mathcal{M}_0$, il che equivale a

$$T \in \bigcap_{x,y\in\mathcal{H};A\in S} \ker(f_{x,Ay} - f_{A^*x,y})$$

il che significa esattamente che S' è debolmente chiusa.

QED

Notiamo che, in generale, S' non è una *-algebra.

10.3.7 Definizione *Una *-sottoalgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si dice* non degenere *se*

$$\forall x \in \mathcal{H} \qquad \mathcal{A}x = 0 \implies x = 0$$

Evidentemente

$$\mathcal{A} \text{ è non degenere } \iff (\mathcal{A}\mathcal{H})^\perp = 0$$

Ovviamente se $I \in \mathcal{A}$ allora $\mathcal{A}$ è non degenere.

10.3.8 Proposizione *Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una *-sottoalgebra e $\mathcal{N} := \{x \in \mathcal{H} \mid \mathcal{A}x = 0\}$ allora $\mathcal{A}|_{\mathcal{N}^\perp}$ è non degenere.*

DIMOSTRAZIONE: Basta osservare che $\mathcal{A}(\mathcal{N}^\perp) \subset \mathcal{N}^\perp$, dato che

$$(Ax, y) = (x, A^*y) = 0 \Rightarrow Ax \perp \mathcal{N}$$

QED

Possiamo ora enunciare il

10.3.9 Teorema di Densità (VON NEUMANN) *Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una *-sottoalgebra non degenere allora*

$$\overline{\mathcal{A}}^f = \mathcal{A}''$$

(la chiusura forte di $\mathcal{A}$ è il doppio commutante di $\mathcal{A}$ stesso).

La dimostrazione verrà data in séguito (cfr. teorema 11.4.1: qui osserviamo semplicemente che, con questo risultato a disposizione, possiamo dimostrare che

$$\pi(\mathcal{B}(X)) \subset \overline{\mathbf{A}}^f$$

Questo segue direttamente dal teorema di densità e dal risultato seguente:

10.3.10 Lemma *Se $f \in \mathcal{B}(X)$ e $T \in \mathbf{A}'$ allora*

$$\widetilde{\pi}(f)T = T\widetilde{\pi}(f)$$

DIMOSTRAZIONE: Per ogni $T \in \mathbf{A}'$:

$$\pi(f)T = T\pi(f) \implies (y, \pi(f)Tx) = (y, T\pi(f)x) = (T^*y, \pi(f)x)$$

cioè $\mu_{y,Tx} = \mu_{T^*y,x}$.

QED

Questo lemma implica che $\pi(\mathcal{B}(X)) \subset \mathbf{A}''$ che è proprio $\overline{\mathbf{A}}^f$ per il teorema di densità.

Osserviamo una conseguenza del teorema di densità di von Neumann:

10.3.11 Corollario *Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una *-sottoalgebra non degenere allora*

$$\overline{\mathcal{A}}^f = \overline{\mathcal{A}}^d$$

(la chiusura forte e la chiusura debole di $\mathcal{A}$ coincidono).

DIMOSTRAZIONE: Infatti si ha sempre la

$$\overline{\mathcal{A}}^f \subset \overline{\mathcal{A}}^d$$

Ma $\mathcal{A}'$ è debolmente chiusa (per ogni $\mathcal{A}$) e quindi il teorema di densità implica che

$$\overline{\mathcal{A}}^f \subset \overline{\mathcal{A}}^d \subset \mathcal{A}'' = \overline{\mathcal{A}}^f$$

QED

La discussione precedente e l'esempio dell'algebra $\mathbf{A}$ rendono naturale la seguente definizione:

10.3.12 Definizione *Una *-sottoalgebra debolmente chiusa $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ che possieda l'unità I si dice* algebra di von Neumann.

Per il teorema di densità, una caratterizzazione immediata è

$$\mathcal{A} \text{ di von Neumann} \iff \mathcal{A} = \mathcal{A}''$$

o, come si dice, le algebre di von Neumann sono quelle che verificano la proprietà del doppio commutante.

10.3.13 Esempio *Le algebre di matrici $M_n(\mathbb{C})$ sono algebre di von Neumann: in effetti sappiamo che l'algebra $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ è semplice (cfr. teorema 5.5.14) e che quindi il suo commutante $\mathcal{A}'$ è ridotto alle sole matrici scalari (multipli della matrice identità):*

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}) \quad AX = XA \implies \exists a \in \mathbb{C} \quad X = aI$$

Questo stesso enunciato ci dice che $(\mathcal{A}')' = \mathcal{A}$ (le matrici che commutano con le matrici scalari sono tutte le matrici).

10.4 Misure spettrali

Consideriamo un operatore normale A su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, a l'algebra $\mathbf{A} = C^*\langle A, I\rangle = \{\varphi(A)\}_{\varphi \in C(\sigma(A))}$. Ovviamente, se f è una funzione boreliana in $\mathcal{H}$ (essendo uno spazio topologico è anche uno spazio misurabile rispetto alla σ-algebra di Borel) allora $f(A) \in \mathbf{A}''$.

Osserviamo che, se Δ è un boreliano in $\mathbb{C}$ allora χ_Δ è boreliana e quindi l'operatore $\chi_\Delta(A)$, avendo valori in $\mathbb{R}$ è autoaggiunto. In particolare:

$$\chi_\Delta^* \chi_\Delta = \chi_\Delta$$

quindi $E_\Delta := \chi_\Delta(A)$ è un idempotente tale che

$$E_\Delta^* E_\Delta = E_\Delta$$

e pertanto è un proiettore; dunque esiste un sottospazio chiuso $\mathcal{H}_\Delta \subset \mathcal{H}$ tale che $E_\Delta = E_{\mathcal{H}_\Delta}$.

Per definizione, E_Δ commuta con tutte le funzioni di A, ed in particolare $AE_\Delta = E_\Delta A$, da cui segue che $A\mathcal{H}_\Delta \subset \mathcal{H}_\Delta$; quindi, dato che $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\Delta \oplus \mathcal{H}_\Delta^\perp$ A si decompone in somma diretta di operatori.

Osserviamo tre proprietà interessanti, anche se immediate, della mappa $\Delta \longmapsto E_\Delta$:

- $E_\mathbb{C} = I$ (dato che $\chi_\mathbb{C} = 1$).
- Se Δ_1, Δ_2 sono boreliani in $\mathbb{C}$ allora $E_{\Delta 1 \cap \Delta_2} = E_{\Delta_1} E_{\Delta_2}$.
- Se $\{\Delta_n\}$ è una famiglia numerabile di boreliani disgiunti allora

$$E_{\bigcup_n \Delta_n} = \sum_n E_{\Delta_n}$$

(La (2) segue da $\chi_A \chi_B = \chi_{A\cap B}$ e la (3) dal fatto che le $\{\chi_{\Delta_n}\}$ sono equilimitate). Quindi la mappa

$$E : \{\text{Boreliani di } \mathbb{C}\} \longrightarrow \{\text{Proiettori di } \mathcal{H}\}$$

ha le proprietà di una misura, con la differenza che non assume valori in $\mathbb{C}$ ma in uno spazio di Hilbert.

10.4.1 Definizione *Una funzione E che soddisfi le* (1)–(3) *si dice* misura spettrale *associata all'operatore A.*

Osserviamo che $\sigma(A|_{\mathcal{H}_\Delta}) \subset \overline{\sigma(A) \cap \Delta}$. Infatti la restrizione è uno *-omomorfismo, quindi

$$\sigma(A|_N) \subset \sigma(A)$$

per ogni sottospazio N; se poi $g|_\Delta = 0$ allora $g(A)\chi_\Delta(A) = 0$ e, per g continua:

$$g(A|_{\mathcal{H}_\Delta}) = g(A)|_{\mathcal{H}_\Delta}$$

Quindi $\sigma(A|_{\mathcal{H}_\Delta}) \subset \sigma(A) \cap \overline{\Delta}$. In realtà l'inclusione non è stretta, ma si ha $\sigma(A|_{\mathcal{H}_\Delta}) \subset \overline{\sigma(A) \cap \Delta}$: la dimostrazione è però molto più complicata.

10.4.2 Teorema $\chi_{\{\lambda\}}(A) = E_{\{\lambda\}} = E_{\{x \mid Ax = \lambda x\}}$.

DIMOSTRAZIONE: Se $x \in \ker(A - \lambda I)$ allora $A^* x = \overline{\lambda} x$ (dato che A è normale) e quindi per ogni funzione continua f:

$$f(A)x = f(\lambda)x$$

In particolare, se $f(\lambda) = 1$ si trova $f(A)x = x$.

Consideriamo le funzioni

$$g_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \text{ oppure } t > \frac{1}{n} \\ \frac{1-t}{n} & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

e quindi le

$$f_n(z) = g_n(|z - \lambda|)$$

che sono equilimitate su $\sigma(A)$ e tendenti a zero per $z \neq \lambda$, mentre sono ovviamente identicamente 1 se $z = \lambda$. Dunque la successione $\{f_n\}$ converge a $\chi_{\{\lambda\}}$, i.e.

$$f_n(A) \longrightarrow E_{\{\lambda\}}$$

Ma $f_n(A)x = x$ e quindi $E_{\{\lambda\}}x = x$:

$$\ker(A - \lambda I) \subset \mathcal{H}_{\{\lambda\}}$$

Inoltre $(z - \lambda)\chi_{\{\lambda\}}(z) = 0$: allora applicando il calcolo boreliano si trova che

$$(A - \lambda I)E_{\{\lambda\}} = 0$$

ovvero

$$\mathcal{H}_{\{\lambda\}} \subset \ker(A - \lambda I)$$

QED

Dunque il calcolo funzionale boreliano in un punto fornisce gli operatori

$$E_{\{x \mid Ax = \lambda x\}}$$

e pertanto una funzione f che si annulli su A deve essere della forma

$$f = \sum_n c_n \chi_{\{\lambda_n\}}$$

(con $\lambda_n \notin \sigma_p(A)$).

10.4.3 Corollario *Se T è un operatore su $\mathcal{H}$ tale che*

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad 0 \leq (x, Tx) \leq (x, x)$$

allora T è autoaggiunto e $0 \leq T \leq I$, il suo spettro è quindi contenuto nell'intervallo $[0, 1]$ e si ha la convergenza forte:

$$T^n \xrightarrow{f} E_{\ker(I-T)}$$

DIMOSTRAZIONE: Se $t \in [0, 1]$, $\{t^n\}$ è equilimitata e convergente a zero, per cui $t^n \longrightarrow \chi_{\{1\}}(t)$.

QED

10.4.4 Teorema *Se definiamo*

$$E \wedge F := E_{E\mathcal{H} \cap F\mathcal{H}}$$

allora

$$E \wedge F = \operatorname*{s-lim}_{n \longrightarrow \infty} (EF)^n = \operatorname*{s-lim}_{n \longrightarrow \infty} (FE)^n$$

*(*s-lim *indica il limite nella topologia forte).*

DIMOSTRAZIONE: Intanto

$$(*) \qquad (EFE)^n \xrightarrow{f} E \wedge F$$

Infatti, per $T = EFE = (FE)^*(FE)$ si ha $0 < T \leq I$ (dato che $(x, Tx) = ||FEx||^2 \leq ||x||^2$) e, per il corollario precedente:

$$\lim T^n = E_{\ker(I-T)}$$

Allora, se $x \in (E \wedge F)\mathcal{H}$ segue che $EFEx = x$ e quindi $Ex = x$, ovvero $x \in \operatorname{im} E$ da cui

$$||x|| = ||EFEx|| \leq ||Fx|| \leq ||x||$$

cioè, $Fx = EFx = x$, dunque $x \in \operatorname{im} F$. Ma era anche $x \in \operatorname{im} E$, quindi $x \in (E \wedge F)\mathcal{H}$. Così abbiamo che

$$x \in (E \wedge F)\mathcal{H} \iff EFEx = x$$

e la (*) segue. Ma $Fx_n \longrightarrow Fx$ se $x_n \longrightarrow x$ e quindi si ha il teorema.

QED

10.4.5 Corollario *Se $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è un operatore unitario (e quindi normale) con $\sigma(U) \subset \mathbb{T}$ (circonferenza unitaria del piano complesso) si ha che, se $\chi_{\{1\}}(U) = E_{\ker(I-U)} =: E_0$:*

$$E_0 = \operatorname*{s-lim}_{N \longrightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} U^n = \operatorname*{s-lim}_{N \longrightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N} U^n$$

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo la funzione

$$f_N(z) := \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} z^n = \left(\frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \right) \frac{1}{N+1}$$

Allora, per $z \neq 1$:

$$\lim_N f_N(z) = \lim_N \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} z^n = \lim_N \left(\frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \right) \frac{1}{N+1} = 0$$

dato che

$$\left| \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} z^n \right| \leq 1$$

e, essendo $f_N(1) = 1$:

$$\left| f_N(z) \right| \leq \frac{1}{N+1} \frac{2}{|1 - z|}$$

Ma la famiglia $\{f_N\}$ è equilimitata, quindi

$$\operatorname*{s-lim}_N f_N(U) = E_0$$

Analogamente

$$\operatorname*{s-lim}_N \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} U^{*n} = E_{\ker(I-U^*)} = E_0$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(E_0 + E_0) = E_0 = \operatorname*{s-lim}_N \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} U^n + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} U^{-n} \right) \\ = \operatorname*{s-lim}_N \frac{1}{2N} \left(\frac{1}{2N} \sum_{n=_N}^{N} U^n \right) \end{aligned}$$

QED

10.4.6 Corollario *Se G è un sottogruppo del gruppo $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ degli operatori unitari, allora*

$$E_0 := E_{\{x \mid \forall U \in G \ Ux = x\}} \in \overline{\mathrm{Conv}(G)}^f$$

(chiusura forte dell'inviluppo convesso di G).

DIMOSTRAZIONE: Si ha che

$$E_0 = \bigwedge_{U \in G} E_{\{x \mid Ux = x\}} = \bigwedge_{U \in G} \operatorname*{s\text{-}lim}_{N \longrightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} U^n$$

Ad esempio, nel caso di due elementi $U_1, U_2 \in G$ si ha

$$E_{\ker(I-U_1)} \wedge E_{\ker(I-U_2)} = \operatorname*{s\text{-}lim}_n (E_0(U_1)E_0(U_2))^n = \operatorname*{s\text{-}lim}_N \frac{1}{2N_1 2N_2} \sum_{\substack{n_1=-N_1 \\ n_2=-N_2}}^{\substack{N_1 \\ N_2}} U_1^{n_1} U_2^{n_2}$$

La combinazione lineare sotto il segno di limite è convessa ad elementi in G, quindi

$$\bigwedge_{N=1}^{m} E_{\ker(I-U_N)} \in \overline{\mathrm{Conv}(G)}^f$$

Ma ogni elemento di $\bigwedge_{U \in G} E_{\{x \mid Ux = x\}}$ è limite forte di elementi di questo spazio.

QED

Consideriamo ora un operatore A autoaggiunto su $\mathcal{H}$: il suo spettro è contenuto in un certo intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$; dato che le funzioni $f_\lambda := \chi_{(-\infty,\lambda]}$ sono boreliane limitate, applicando il calcolo funzionale boreliano ad A otteniamo l'operatore idempotente autoaggiunto

$$f_\lambda(A) = E(\lambda)$$

Osserviamo che

- $E(\lambda) = 0$ se $\lambda < a$.
- $E(\lambda) = I$ se $\lambda \geq b$.
- Se $\lambda_1 \leq \lambda_2$ allora scrivendo $(-\infty, \lambda_2] = (-\infty, \lambda_1] \cup (\lambda_1, \lambda_2]$ otteniamo

  $$E(\lambda_2) = E(\lambda_1) + E_{(\lambda_2,\lambda_1]}$$

  In particolare:

  $$E(\lambda_1) \leq E(\lambda_2)$$

- Se $\{f_{\lambda_n}\}$ è tale che $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ con $\lambda \leq \lambda_n$, allora per ogni $t \leq \lambda$:
$$f_{\lambda_n}(t) = 1 = f_\lambda(t)$$
e, per ogni $t > \lambda$, $f_{\lambda_n}(t) = 0$, sicché la successione $\{f_{\lambda_n}\}$ è equilimitata e quindi converge puntualmente a $\chi_{(-\infty,\lambda]}$. Ne segue che
$$\operatorname*{s-lim}_{\lambda_n \longrightarrow \lambda} E(\lambda_n) = E(\lambda)$$
vale a dire, $E(\lambda - 0) = \text{s-lim}\, E(\lambda_n) = E_{(-\infty,\lambda]}$, pertanto
$$E(\lambda) - E(\lambda - 0) = \chi_{\{\lambda\}}(A) = E_{\ker(A-\lambda I)}$$

10.4.7 Definizione *Una* famiglia spettrale *sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ è una funzione*
$$E : \mathbb{R} \longrightarrow \{\textit{Operatori autoaggiunti di } \mathcal{H}\}$$
tale che

- *E sia fortemente continua superiormente.*
- *E sia monotona non decrescente.*
- $\text{s-lim}_{\lambda \longrightarrow -\infty} E(\lambda) = 0$.
- $\text{s-lim}_{\lambda \longrightarrow +\infty} E(\lambda) = I$.

Ad esempio, dato un operatore continuo $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ autoaggiunto, la funzione
$$E(\lambda) := \chi_{(-\infty,\lambda]}(A)$$
definisce una famiglia spettrale.

Osserviamo che le (1)–(3) sono le proprietà che caratterizzano le funzioni di distribuzione associate alle misure di Radon (teorema 4.5.8: possiamo cioè considerare l'integrale di Stieltjes di una funzione boreliana (limitata) f:
$$\int f(\lambda) dE(\lambda)$$

10.4.8 Teorema *Se A è un operatore continuo autoaggiunto sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ allora esiste un'unica famiglia spettrale $E(\lambda)$ tale che*

$$A = \int \lambda dE(\lambda)$$

(integrale di Stieltjes) e per ogni $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (boreliana) limitata

$$f(A) = \int f(\lambda)dE(\lambda)$$

Ciò vale, in particolare, per ogni $f \in C(\sigma(A))$.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo una funzione $f \in C(\sigma(A))$; dato che $A = A^*$ lo spettro $\sigma(A)$ è contenuto in un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Consideriamo una famiglia finita di valori

$$\lambda_0 < a < \lambda_1 < ... < \lambda_{n-1} < b \leq \lambda_n$$

e le funzioni boreliane

$$\chi_{(\lambda_{i-1},\lambda_i]} = E_{(\lambda_{i-1},\lambda_i]} = E(\lambda_i) - E(\lambda_{i-1})$$

Per $\lambda'_i \in (\lambda_{i-1}, \lambda_i]$:

$$\sum_{\sup|\lambda_i - \lambda_{i-1}| \longrightarrow 0} f(\lambda_i)\chi_{(\lambda_{i-1},\lambda_i]} \xrightarrow{\text{uniformemente}} f$$

per il teorema di Heine–Cantor. Quindi

$$\sup_\lambda \left| f(\lambda) - \sum f(\lambda_i)\chi_{(\lambda_{i-1},\lambda_i]}(\lambda) \right| \leq \delta$$

(ove δ è è il valore dell'enunciato del teorema di Heine–Cantor[5]). Dunque

$$\sum_i f(\lambda'_i) \left(E(\lambda_i) - \lambda_{i-1}\right))$$

converge a $f(A)$:

$$\left|\left| f(A) - \sum_i f(\lambda'_i) \left(E(\lambda_i) - \lambda_{i-1}\right)) \right|\right| \leq \delta$$

[5]Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per x *non dipendente da* δ con $|x - x_0| < \delta$ si ha $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (continuità uniforme delle funzioni continue in un compatto).

cioè

$$f(A) = \int f(\lambda) dE(\lambda)$$

(si noti che questo è l'integrale di una funzione continua, quindi definito alla Riemann).

Passiamo ora al caso di una funzione boreliana limitata qualsiasi: $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Per la limitatezza di f, $f(\lambda) \in \mathcal{D}_{||f||}$ (disco di raggio $||f||$); certamente possiamo scrivere

$$\mathcal{D}_{||f||} \subset \dot{\bigcup_j} D_j$$

come unione disgiunta finita di boreliani D_j tali che diam $D_j \leq \delta$ (ad esempio possono prendersi $D_j = (z_1, z_1'] \times (z_2, z_2'])$.

Dato che f è boreliana, gli insiemi $\Delta_j := f^{-1}(D_j)$ sono boreliani e quindi lo è la funzione

$$\sum_j f(\lambda_j) \chi_{\Delta_j}$$

Ma

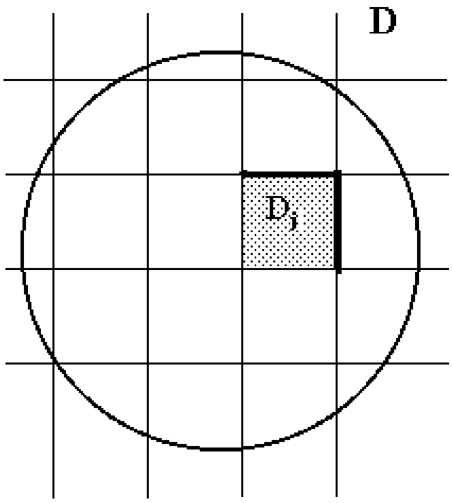
$$\left| f(\lambda) - \sum_j f(\lambda_j) \chi_{\Delta_j} \right| \leq \delta$$

e quindi, usando il calcolo funzionale boreliano sul primo membro di questa eguaglianza:

$$\left|\left| f(A) - \sum_j f(\lambda_j) E_{\Delta_j} \right|\right| \leq \delta$$

cioè, per definizione dell'integrale di Lebesgue–Stieltjes:

$$f(A) = \int f(\lambda) dE(\lambda)$$



Dimostriamo ora l'unicità della famiglia spettrale $E(\lambda)$: se

$$A = \int \lambda dF(\lambda)$$

con F famiglia spettrale, dato che $\sigma(A) \subset [a, b]$ deve essere

$$F(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda < a \\ I & \text{se } \lambda \geq b \end{cases}$$

Ma una famiglia spettrale è commutativa (i suoi elementi commutano fra loro dato che $F(\lambda)F(\lambda') = F(\lambda \wedge \lambda')$) e quindi

$$AF(\lambda) = F(\lambda)A$$

poiché A si approssima con combinazioni lineari finite in $F(\lambda)$ e ne è limite in norma. Allora, dato che per $\lambda' \leq \lambda$ si ha $F(\lambda)F(\lambda') = F(\lambda')$, troviamo che

$$\sum_j \lambda'_j (F(\lambda_j) - F(\lambda_{j-1}))F(\lambda) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\lambda} \lambda' dF(\lambda)$$

e, per $x \in F(\lambda)\mathcal{H}$ otteniamo $d(x, F(\lambda)x)$ è una misura sulla retta reale):

$$(x, Ax) = \int_{-\infty}^{\lambda} \lambda' d(x, F(\lambda)x) = \int_{-\infty}^{\lambda} d(x, F(\lambda)x) = (x, F(\lambda)x) = (x, x)$$

Dunque

$$(x, Ax) \leq \int_{-\infty}^{\lambda} \lambda' d(x, F(\lambda)x) \leq \sup\left(\int_{-\infty}^{\lambda} \lambda' d(x, F(\lambda)x)\right) = \lambda(x, x)$$

Se $x \in (I - F(\lambda))\mathcal{H}$ allora

$$(x, Ax) = \int_\lambda^\infty \lambda' d(x, F(\lambda)x) \geq \lambda(x, x)$$

Quindi ($aI \leq A \leq bI$):

$$\sigma\left(A|_{F(\lambda)\mathcal{H}}\right) \subset \sigma(A) \cap (-\infty, \lambda] \quad \text{e} \quad \sigma\left(A|_{(I-F(\lambda))\mathcal{H}}\right) \subset \sigma(A) \cap [\lambda, \infty)$$

cioè

$$F(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda < a \\ I & \text{se } \lambda \geq b \end{cases}$$

Se ora F soddisfa alle conclusioni del teorema:

$$A = \int \lambda dF(\lambda) = \int \lambda dE(\lambda)$$

allora $A^2 = \int \lambda^2 dE(\lambda)$; A^2 è approssimato da $\sum_j \lambda_j P_j$ ove

$$P_j := F(\lambda_j) - F(\lambda_{j-1})$$

e quindi $P_j P_k = \delta_{jk} P_j$, quindi

$$\left(\sum_j \lambda_j P_j\right)^2 = \sum_j \lambda_j'^2 P_j^2 = \sum_j \lambda_j'^2 P_j$$

Per induzione, A^n è quindi approssimato da $\sum_j \lambda_j'^n P_j$ e quindi, per ogni polinomio $p \in \mathbb{R}[x]$:

$$p(A) = \int p(\lambda) dE(\lambda) = \int p(\lambda) dF(\lambda)$$

i.e.

$$(x, p(A)x) = \int p(\lambda) d(x, E(\lambda)x) = \int p(\lambda) d(x, F(\lambda)x)$$

Per il teorema di Stone–Weierstrass in $C[a, b]$ abbiamo quindi che questa identità vale per ogni funzione continua, per cui le misure $d(x, E(\lambda)x)$ e $d(x, F(\lambda)x)$ sono uguali, dunque

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad (x, E(\lambda)x) = (x, F(\lambda)x)$$

e, per le identità di polarizzazione:

$$\forall x, y \in \mathcal{H} \quad (x, E(\lambda)y) = (x, F(\lambda)y)$$

Ne concludiamo che $E = F$.

QED

10.4.9 Corollario *Ogni operatore continuo autoaggiunto è limite (in norma) di combinazioni lineari di operatori il cui spettro sia finito.*

Dato che se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è qualsiasi allora

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2i}(A - A^*)$$

segue più in generale che

10.4.10 Corollario *Ogni operatore continuo A è limite (in norma) di combinazioni lineari di operatori il cui spettro sia finito.*

10.4.11 Corollario *Se $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è un'algebra di von Neumann allora $\mathcal{R}$ coincide con lo spazio di Banach generato dagli insiemi*

$$\mathcal{R}_p := \{E \in \mathcal{R} \mid E^*E = E\}$$

Vogliamo infine dimostrare il teorema spettrale per gli operatori unitari in uno spazio di Hilbert, ricordando che se $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ allora $\sigma(U) \subset \mathbb{T} = S^1$, la circonferenza unitaria del piano complesso.

10.4.12 Teorema Spettrale per Operatori Unitari *Se $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ allora esiste un'unica famiglia spettrale $F(\lambda)$ tale che*

$$\int e^{i\lambda} dF(\lambda)$$

e $F(\lambda) = 0$ se $\lambda < 0$ e $F(2\pi - 0) = I$.

Dimostrazione: Consideriamo

$$\Gamma_\lambda := \{e^{it}\}_{t \in [0,\lambda]} \subset \mathbb{T}$$

Ovviamente $\chi_{\Gamma_\lambda}(U) = F(\lambda)$ e

- Se $\lambda < 0$ allora $F(\lambda) = 0$;
- Se $\lambda \geq 2\pi$ allora $F(\lambda) = I$;
- Se $\lambda \leq \lambda'$ allora $F(\lambda) \leq F(\lambda')$;
- Se $\lambda \leq \lambda_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \chi_{\Gamma_{\lambda_n}} = \chi_{\Gamma_\lambda}$$

Da queste asserzioni segue immediatamente che F è una famiglia spettrale e

$$\forall f \in C(\mathbb{T}) \quad f(U) = \int f(e^{i\lambda}) dF(\lambda)$$

L'unicità si dimostra esattamente come nel caso delle funzioni continue sugli operatori autoaggiunti, verificando prima il risultato sui polinomi e sfruttando la densità dei polinomi nelle funzioni continue.

QED

Ovviamente, la misura di $(0, 2\pi)$ secondo $dF(\lambda)$ è 1 se e solo se

$$1 \in \sigma_p(U) \iff \ker(I - U) = 0 \iff \chi_{\{1\}}(U) = 0$$

10.5 Operatori compatti, Hilbert–Schmidt e nucleari

La teoria spettrale degli operatori continui ci fornisce molte informazioni su di essi: in questo paragrafo studiamo una sottoclasse importantissima degli operatori continui e ne analizziamo la teoria spettrale.

10.5.1 Definizione *Se X e Y sono spazi di Banach un operatore lineare $A : X \longrightarrow Y$ si dice* compatto *se per ogni insieme F limitato in X $A(F)$ è un insieme a chiusura compatta in Y. L'insieme degli operatori compatti si denota $\mathcal{K}(X, Y)$.*

Equivalentemente, A è compatto se e solo se $A(X_1)$ (immagine della palla unitaria di X) ha chiusura compatta in Y.

Si vede immediatamente che un operatore compatto è continuo:

$$\mathcal{K}(X, Y) \subset \mathcal{B}(X, Y)$$

10.5.2 Proposizione *$\mathcal{K}(X, Y)$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{B}(X, Y)$.*

Dimostrazione: Intanto verifichiamo che è un sottospazio vettoriale: che $A \in \mathcal{K}(X, Y)$ implichi $\lambda A \in \mathcal{K}(X, Y)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ è ovvio; inoltre se $A, B \in \mathcal{K}(X, Y)$:

$$\{Ax + Bx\}_{x \in X_1} \subset \{Ax + By\}_{x, y \in X_1}$$

la cui chiusura è compatta (dato che la chiusura di $AX_1 \times BX_1$ lo è in $Y \times Y$ e l'operazione $+ : Y \times Y \longrightarrow Y$ è continua).

Vediamo infine che $\mathcal{K}(X, Y)$ è un sottospazio chiuso di X: se $\{A_n\}$ è una successione in $\mathcal{K}(X, Y)$ convergente (ad un elemento $A \in \mathcal{B}(X, Y)$); vogliamo dimostrare che $A \in \mathcal{K}(X, Y)$.

Consideriamo allora la successione $\{x_n\} \subset X_1$: per compattezza di A_1 deve esistere una sottosuccessione $\{x^{(1)}_{n_{k_1}}\} \subset \{x_n\}$ tale che $\{A_1 x^{(1)}_{n_{k_1}}\}$ sia convergente. Questa scelta di sottosuccessioni può farsi per ogni operatore compatto A_n, ottenendo così una famiglia $\{\{x^{(i)}_{n_{k_i}}\}_i\}_k$ di sottosuccessioni della $\{x_n\}$ tali che per ogni n la successione $\{A_i x^{(i)}_{n_{k_i}}\}_i$ sia convergente in Y. Allora consideriamo la successione "diagonale"

$$z_i := x^{(i)}_{n_i}$$

Per definizione $\{z_i\}_i \subset \{x_n\}_n$ e $\{A_n z_i\}_i$ è di Cauchy per ogni n.

Ora scegliamo un indice n tale che sia

$$||A - A_n|| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Dato che $\{A_n z_i\}_i$ è di Cauchy, deve esistere k_ε tale che

$$\forall h, k > k_\varepsilon \quad ||A_n z_k - A_n z_h|| < \frac{\varepsilon}{3}$$

e quindi

$$\begin{aligned} ||A(z_h - z_k)|| &\leq ||(A - A_n)(y_h - y_k)|| + ||A_n(y_h - y_k)|| \\ &\leq ||A_n(y_h - y_k)|| \leq 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Perciò A è compatto.

QED

10.5.3 Proposizione *$\mathcal{K}(X, Y)$ è un $\mathcal{B}(X)$-modulo a destra e un $\mathcal{B}(Y)$-modulo a sinistra.*

Dimostrazione: Basta osservare che, se $A : X' \longrightarrow X$ e $B : Y \longrightarrow Y'$ sono continui e $T : X \longrightarrow Y$ è compatto allora l'operatore

$$X' \xrightarrow{A} X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{B} Y'$$

è compatto. Ed infatti $B\overline{T(X_1)}$ è compatto dato che B è continuo e $\overline{T(X_1)}$ è compatto; quindi (un sottoinsieme compatto in uno spazio normato è chiuso

$$\overline{ABT(X_1)} \subset \overline{A\overline{BT(X_1)}} = A\overline{BT(X_1)}$$

è quindi $\overline{ABT(X_1)}$ è chiuso in un compatto e quindi è compatto.

QED

10.5.4 Corollario *Se $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, $A \in \mathcal{B}(Y)$ e $B \in \mathcal{B}(X)$ allora*

$$AT, TA \in \mathcal{K}(X, Y)$$

Naturalmente se $X = Y$ scriviamo $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X, Y)$.

10.5.5 Corollario *$\mathcal{K}(X)$ è un ideale bilatero chiuso nell'algebra $\mathcal{B}(X)$.*

10.5.6 Esempio *Se $\dim X < \infty$ ogni operatore continuo è compatto*[6]*:*

$$\mathcal{K}(X) = \mathcal{B}(X) = End(X)$$

Più in generale, un operatore $A \in \mathcal{B}(X)$ tale che $\dim \operatorname{im} A < \infty$ è compatto: infatti la sua immagine è uno spazio isomorfo a $\mathbb{C}^n$: non vale il viceversa; se

$$Tx := f(x)x_0$$

ove $x_0 \in X$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ è un funzionale lineare ma non continuo *allora T non è continuo e quindi non può essere compatto: tuttavia* $\dim \operatorname{im} T = 1$.

In generale:
$$\overline{\{A \in \mathcal{B}(X) \mid \dim \operatorname{im} A < \infty\}} \subset \mathcal{K}(X)$$

Se X è uno spazio di Hilbert questi due sottospazi di $\mathcal{B}(X)$ sono effettivamente uguali, mentre se X è solo uno spazio di Banach, l'inclusione è stretta.

Osserviamo inoltre che, se al solito I è l'operatore identico:

$$I \in \mathcal{K}(X) \iff \dim X < \infty \iff X_1 \text{ è compatto}$$

In altri termini, se $\dim X = \infty$ un operatore compatto A non è invertibile (questo è anche evidente dal fato che $\mathcal{K}(X)$ è un ideale: se contenesse un invertibile conterrebbe I e quindi ogni elemento di $\mathcal{B}(X)$, e questo è possibile solo, appunto, nel caso di dimensione finita).

Dato che $\mathcal{K}(X) \lhd \mathcal{B}(X)$ lo spazio di Banach $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$ è un'algebra di Banach.

10.5.7 Teorema *Se $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert (di dimensione infinita) e se $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ allora $A^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.*

[6] Ad esempio perché X_1 è compatto...

DIMOSTRAZIONE: Sappiamo che $A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$; dato che A è compatto (e $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \lhd \mathcal{B}(\mathcal{H})$) anche $A^*A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. A^*A è autoaggiunto, quindi possiamo usare il calcolo funzionale continuo: se $f \in C_c(\mathbb{R})$ allora è limite di polinomi privi di termine noto (i.e. di elementi dell'ideale $x\mathbb{R}[x]$ nell'algebra dei polinomi) in $\sigma(A^*A)$ e quindi

$$\sqrt{A^*A} = |A|$$

è compatto. Abbiamo quindi dimostrato che se A è compatto lo è anche $|A|$ e quindi, considerando la decomposizione polare $A^* = |A|V^*$ di A^*, di nuovo essendo $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \lhd \mathcal{B}(\mathcal{H})$, deve aversi

$$A^* = |A|V^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$$

QED

Osserviamo che se A è autoaggiunto allora

$$A = A^* = \int \lambda dE(\lambda)$$

e $\sigma\left(A|_{E_{(-\varepsilon,\varepsilon]}\mathcal{H}}\right) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$, per cui

$$\left|\left|A|_{E_{(-\varepsilon,\varepsilon]}\mathcal{H}}\right|\right| \leq \varepsilon$$

Quindi, se $A = A^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$:

$$A - AE_{(-\varepsilon,\varepsilon]} = A(I - E_{(-\varepsilon,\varepsilon]}) \xrightarrow[\varepsilon \longrightarrow 0]{||\cdot||} A$$

Se $\mathcal{H}_\varepsilon := E_{(-\varepsilon,\varepsilon]}\mathcal{H}$, allora $\sigma\left(A|_{\mathcal{H}_\varepsilon^\perp}\right) \subset \sigma(A) \cap \complement(-\varepsilon, \varepsilon]$: infatti

$$\mathcal{H}_\varepsilon^\perp = \operatorname{im}\left(I - E_{(-\varepsilon,\varepsilon]}\right) = \operatorname{im}(I - E(\varepsilon) + E(-\varepsilon))$$

e quindi

$$A|_{\mathcal{H}_\varepsilon^\perp} = A|_{(I-E(\varepsilon))\mathcal{H}} \oplus A|_{E(-\varepsilon)\mathcal{H}}$$

Ma se $A_1 \oplus A_2 = A$ evidentemente $\sigma(A) \subset \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$ (basta osservare i risolventi per convincersene immediatamente) e quindi

$$\sigma\left(A|_{(I-E(\varepsilon))\mathcal{H}}\right) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \emptyset$$

Cioè 0 sta nel risolvente di $A|_{(I-E(\varepsilon))\mathcal{H}}$ che risulta perciò essere invertibile.

Si noti che se A è compatto, la sua restrizione ad un sottospazio pure è un operatore compatto; quindi $A|_{(I-E_{(-\varepsilon,\varepsilon]})\mathcal{H}}$ è invertibile ed è compatto, il che può solo avvenire (essendo $\mathcal{K} \lhd \mathcal{B}$) se $\dim \mathcal{H}_\varepsilon^\perp = \dim(I - E_{(-\varepsilon,\varepsilon]})\mathcal{H} < \infty$.

Abbiamo cioè che la restrizione $A|_{\mathcal{H}_\varepsilon^\perp}$ è un operatore autoaggiunto su uno spazio di dimensione finita e quindi possiamo esprimerlo come

$$A|_{\mathcal{H}_\varepsilon^\perp} = \sum_{\lambda\in\sigma \ A|_{\mathcal{H}_\varepsilon^\perp}} \lambda P_\lambda$$

ove i P_λ sono definiti su spazi di dimensione finita: ma si ha

$$\left\|A|_{E_{(-\varepsilon,\varepsilon]}\mathcal{H}}\right\| \leq \varepsilon \Rightarrow \left\|A - \sum \lambda P_\lambda\right\| \leq \varepsilon$$

e quindi, per $\varepsilon \longrightarrow 0$:

10.5.8 Teorema *Se A è un operatore compatto autoaggiunto:*

$$A = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} \lambda P_\lambda$$

Questa è la forma del teorema spettrale per un operatore compatto: osserviamo che sussiste quindi la decomposizione

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(A)} \ker(A - \lambda I)$$

10.5.9 Definizione *Il numero*

$$\nu(\lambda) := \dim P_\lambda = \dim E_{\ker(A-\lambda I)}$$

si dice molteplicità *del valore λ.*

10.5.10 Corollario *Se A è un operatore compatto autoaggiunto allora,*

$$\forall\lambda \neq 0 \quad \nu(\lambda) < \infty$$

In virtù del teorema, possiamo disporre gli autovalori $\sigma(A)$ di A in una successione di modulo non crescente, nella quale ogni λ figuri tante volte quanta è la sua molteplicità

$$\lambda_1 = ... = \lambda_{\nu(\lambda_1)}, \lambda_2 = ... = \lambda_{\nu(\lambda_2)}, ...$$

con $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ....$ Dato che i numeri $\nu(\lambda)$ sono finiti è allora chiaro che

10.5.11 Corollario *Se A è un operatore compatto autoaggiunto allora l'unico punto di accumulazione in $\sigma(A)$ può essere lo zero.*

In generale possiamo dare la

10.5.12 Definizione *Se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si dice che*

- *A è* privo di molteplicità *se A è normale ed esiste un vettore ciclico per la C^*-algebra generata da A e I.*
- *A ha* molteplicità uniforme *pari a n se esiste un operatore normale B privo di molteplicità e tale che $A = B \oplus ... \oplus B$ (n volte).*

Il seguente risultato sarà dimostrato più in generale come teorema conclusivo del §1 del prossimo capitolo:

10.5.13 Teorema *Un operatore normale privo di molteplicità è sempre un operatore di moltiplicazione M su $L^2(\sigma(A), \mu)$ (ove μ è una misura regolare di probabilità):*

$$\forall f \in L^2(\sigma(A), \mu) \quad Mf(z) := zf(z)$$

Se A_1 e A_2 sono operatori normali privi di molteplicità allora sono unitariamente equivalenti se e solo le le misure μ_1 e μ_2 su $\sigma(A_1)$ e $\sigma(A_2)$ associate dal teorema sono equivalenti (cioè $\mu_1 \ll \mu_2$ e $\mu_2 \ll \mu_1$).

Questo teorema è un caso particolare di un risultato più profondo, che però non dimostreremo (cfr. [23], pp. 82–97).

10.5.14 Esempio *Gli operatori di Volterra sono compatti. Sia $\mathcal{H} = L^2[0, 1]$ e, per $f \in \mathcal{H}$:*

$$(Af)(s) := \int_0^s K(s, t)x(t)dt$$

Evidentemente $\sigma(A) = \{0\}$, inoltre, se $K \in C^1([0, 1] \times [0, 1])$ e, per ogni s, il nucleo $K(s, s) \neq 0$ allora $\sigma_p(A) = \emptyset$. Infatti, se $Ax = 0$, allora

$$\int_0^s K(s, t)x(t)dt = 0$$

e, derivando,

$$K(s, s)x(s) + \int_0^s \frac{\partial}{\partial s} K(s, t)x(t)dt = 0$$

Ma allora $K(s, s)^{-1}\partial K(s, t)/\partial s \in C([0, 1] \times [0, 1])$ è il nucleo di un operatore di Volterra B e

$$Bx + x = 0 \Rightarrow x = 0$$

(a meno che $-1 \in \sigma_p(B)$ che è assurdo, avendosi $\sigma(A) = \{0\}$. Quindi $0 \notin \sigma_p(A)$.

10.5.15 Teorema *Se A_1 e A_2 sono operatori compatti allora*

$$A_1 \cong A_2 \iff \nu_1 = \nu_2$$

Dimostrazione: Se $\nu_1 = \nu_2$ allora

$$A_2 = \sum \lambda_n P_\lambda^2 \qquad \text{e} \qquad A_2 = \sum \lambda_n P_\lambda^2$$

Se $\{e_n^{(1)}\}$ è la base ortonormale di $\mathcal{H}$ formata con i vettori che generano gli spazi $\ker(A_1 - \lambda I)$ al variare di $\lambda \in \sigma(A_1)$ (ed analogamente per A_2) allora possiamo definire

$$Ue_n^{(1)} = e_n^{(2)}$$

Si tratta di un operatore unitario e quindi

$$UA_1 e_n^{(1)} = U\lambda_n e_n^{(1)} = \lambda_n e_n^{(2)} = A_2 e_n^{(2)} = A_2 U e_n^{(1)}$$

cioè A_1 e A_2 sono unitariamente equivalenti.

Viceversa, se $A_1 \cong A_2$ allora esiste $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ tale che $A_2 = UA_1U^{-1}$ e quindi

$$\forall f \in C(\sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)) \quad f(A_2) = Uf(A_1)U^{-1}$$

Per $\lambda \neq 0$ si ha $P_\lambda = f(A)$ (per continuità di f, se $f(0) = 0$) e quindi

$$P_\lambda^{(2)} = UP_\lambda^{(1)}U^{-1}$$

da cui $\nu_1 = \nu_2$.

QED

10.5.16 Definizione *Se $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ è autoaggiunto e se, per ogni $\lambda \in \sigma(A)$ si ha $\nu(\lambda) \in \{0, n\}$ (con $n \in \mathbb{N}$ costante fissata), allora si dice che A ha* molteplicità uniforme *n. Se $n = 1$ allora A si dice* privo di molteplicità.

Ad esempio, si può verificare che A ha molteplicità uniforme n se e solo se esiste un operatore $B \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ autoaggiunto privo di molteplicità e tale che $A = B \oplus ... \oplus B$.

Osserviamo ora che, per ogni $x \in \mathcal{H}$, dal teorema di Stone–Weierstrass 9.2.9, segue che:

$$\overline{\{A^n x\}_{n\in\mathbb{N}}} = \overline{\{f(A)x\}_{f\in C_c(\mathbb{R})}}$$

10.5.17 Definizione *Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, un vettore $x \in \mathcal{H}$ si dice* ciclico *per $\mathcal{A}$ se $\overline{\mathcal{A}x} = \mathcal{H}$.*

10.5.18 Lemma *Se A è un operatore autoaggiunto compatto in $\mathcal{H}$ allora esiste un vettore $x \in \mathcal{H}$ ciclico per $\{A^n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ (i.e. tale che $\overline{\{A^n x\}_{n\in\mathbb{N}}} = \mathcal{H}$) se e solo se A è privo di molteplicità.*

DIMOSTRAZIONE: Poiché A è compatto autoaggiunto possiamo scrivere

$$f(A) = \sum f(\lambda) P_\lambda$$

i.e. $f(A)x = \sum f(\lambda)P_\lambda x$; dunque

$$x \text{ è ciclico} \iff \forall y \in \mathcal{H} \forall f \in C_c(\mathbb{R}) \quad y \perp f(A)x \Rightarrow y = 0$$

che vale se e solo se $\dim P_\lambda \mathcal{H} = 1$.

Infatti se x è ciclico allora per ogni $\lambda \in \sigma_p(A)$:

$$f(A)x = f(A)P_\lambda x = f(\lambda)P_\lambda x$$

e quindi $\dim P_\lambda \mathcal{H} = 1$. Viceversa, se $\dim P_\lambda \mathcal{H} = 1$ allora, essendo ogni punto di $\sigma_p(A) \setminus \{0\}$ isolato, esiste una $f \in C(\sigma(A))$ tale che $f(|El) = 1$ e $f(\lambda') = 0$ con $\lambda' \in \sigma(A) \setminus \{\lambda\}$. Quindi $P_\lambda = f(A)$ e, per $x \in \mathcal{H}$ tale che $P_\lambda x \neq 0$ per nessun $\lambda \in \sigma(A)$, deve aversi

$$f(A)x = P_\lambda x = ||P_\lambda x|| e_\lambda$$

ove $\{e_\lambda\}$ è una base ortonormale; quindi

$$\forall \lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\} \quad e_\lambda \in \{f(A)x\}_{f\in C(\sigma(A))}$$

e

$$\chi_{\{0\}}(A)x = c_0 e_0 \in \overline{\{f(A)x\}_{f\in C(\sigma(A))}}$$

Si osservi infatti che $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\sigma_p(A)}$ è una base ortonormale di $\mathcal{H}$ e, dato che $\operatorname{Card} \sigma_p(A) = \aleph_0$ allora esiste $c_\lambda \in \mathbb{C}$ tale che

$$\sum_{\lambda\in\sigma_p(A)} |c_\lambda|^2 = 1 \Rightarrow \left|\left| \sum_{\lambda\in\sigma_p(A)} c_\lambda E_\lambda \right|\right| = 1$$

Quindi $P_\lambda x = c_\lambda e_\lambda$, cioè x è un vettore ciclico.

QED

Consideriamo ora un operatore autoaggiunto $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e ricordiamo che

$$\sigma_{ess}(A) := \{\lambda \in \sigma(A) \mid \lambda \text{ punto isolato e } \dim\ker(A - \lambda I) < \infty\}$$

10.5.19 Teorema (H. Weyl) *Se $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ è un operatore autoaggiunto e $K\in\mathcal{K}(\mathcal{H})$ è autoaggiunto allora*

$$\sigma_{ess}(A+K)=\sigma_{ess}(A)$$

Dimostrazione: Osserviamo che

- $\lambda\in\sigma_{ess}(A)$ se e solo se esiste un sistema ortonormale $\{e_n\}$ in $\mathcal{H}$ tale che $||Ae_n-\lambda e_n||\longrightarrow 0$.
- $K\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ è compatto se e solo se per ogni successione $\{x_n\}\subset\mathcal{H}$ convergente nella topologia debole, $\{Kx_n\}$ converge in norma.

La (1) è un fatto noto (teorema 10.2.12); dimostriamo la (2). Se K è compatto e x_n converge debolmente a x allora

$$\forall n\quad ||x_n||\leq M$$

(per il teorema di Banach–Steinhaus 6.5.14) e quindi esiste una sottosuccessione di $\{Kx_n\}$ convergente; se per assurdo $\{Kx_n\}$ non convergesse dovrebbe possedere una sottosuccessione $\{Kx_{n_k}\}$ tale che

$$(*)\qquad ||Kx_{n_k}-Kx||\geq\varepsilon>0$$

Passando ad una ulteriore sottosuccessione $\{y_i:=x_{n_{k_i}}\}$ tale che $Ky_i\longrightarrow z\in\mathcal{H}$ (K è compatto!) avremmo $z=Kx$; infatti

$$\forall x'\in\mathcal{H}\quad (x',By_i)=(B^*x',y_i)\xrightarrow{\text{debolmente}}(B^*x',x)=(x',Bx)$$

cioè $By_i\longrightarrow Bx$ per ogni $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Quindi

$$Ky_i\xrightarrow{\text{debolmente}}Kx$$

il che contraddice la (*). Dunque $\{Kx_n\}$ è convergente e la (2) è dimostrata.

Passiamo ora al teorema: se $\{e_n\}$ è un sistema ortonormale, ovviamente converge debolmente a zero (gli elementi (x,e_n) sono i coefficienti di Fourier di x, che sono a quadrato sommabile); quindi, per la (2):

$$Ke_n\xrightarrow{||\cdot||}0$$

Ma $\lambda\in\sigma_{ess}(A)\iff ||Ae_n-\lambda e_n||\longrightarrow 0$ e quindi

$$||(A+K)e_n-\lambda e_n||=||Ae_n-\lambda e_n+Ke_n||\leq||Ae_n-\lambda e_n||+||Ke_n||$$

Ma $||Ae_n-\lambda e_n||\longrightarrow 0$ e $||Ke_n||\longrightarrow 0$ (per compattezza di K), quindi $\lambda\in\sigma_{ess}(A+K)$ (viceversa, se $\lambda\in\sigma_{ess}(A+K)$, posto $A'=A+K$ e $K'=K$ lo stesso ragionamento mostra che $\lambda\in\sigma_{ess}(A)$).

QED

10.5.20 Teorema (VON NEUMANN) *Se $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sono operatori autoaggiunti e $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$ allora esiste un operatore compatto $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ tale che*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathrm{tr}(K^*K) < \varepsilon^2$$

e tale che $A + K \cong B$.

Gli operatori come il K coinvolto nel teorema di von Neumann rientrano in una classe notevole:

10.5.21 Definizione *Un A si dice* operatore di Hilbert–Schmidt *se esiste un sistema completo ortonormale $\{e_\alpha\}$ in $\mathcal{H}$ tale che la serie*

$$\sum_\alpha ||Ae_\alpha||^2$$

converga.

Notiamo che la definizione implica che solo una quantità numerabile di $||Te_\alpha||^2$ può essere diversa da zero.

Se A è di Hilbert–Schmidt allora il valore

$$||A||_{HS} := \sqrt{\sum_\alpha ||Ae_\alpha||^2}$$

non dipende dalla scelta della base: infatti se $\{f_\alpha\}$ è un'altra base, possiamo scrivere

$$\sum_\beta ||Af_\beta||^2 = \sum_\beta \sum_\alpha |(Af_\beta, e_\alpha)|^2 = \sum_\alpha \sum_\beta |(f_\beta, A^*e_\alpha)|^2 = \sum_\alpha ||A^*e_\alpha||^2$$

(identità di Parseval); ma se scriviamo questa formula per $e_\alpha = f_\alpha$ otteniamo $||A||_{HS} = ||A^*||_{HS}$ e quindi, ancora per la formula, $||A||_{HS}$ non dipende dalla base fissata. Osserviamo inoltre che, se $||x|| = 1$ allora, se A è di Hilbert–Schmidt:

$$||Ax|| \leq ||Ax||_{HS}$$

cioè $||A|| \leq ||A||_{HS}$. Infine si noti la

$$||A||_{HS} = \sqrt{\sum_{\alpha,\beta} |(Ae_\alpha, e_\beta)|^2}$$

che segue dalla $||Ae_\alpha||^2 = \sum_\beta |(Ae_\alpha, e_\beta)|^2$.

10.5.22 Teorema $||.||_{HS}$ *rende gli operatori di Hilbert–Schmidt un'algebra di Banach.*

Dimostrazione: Se A è di Hilbert–Schmidt anche λA lo è per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$; inoltre, se A e B sono di Hilbert–Schmidt:

$$\begin{aligned}||A+B||_{HS}^2 =&\sqrt{\sum_{\alpha,\beta}|((A+B)e_\alpha, e_\beta)|} \leq \sqrt{\sum_{\alpha,\beta}|(Ae_\alpha, e_\beta)| + \sum_{\alpha,\beta}|(Be_\alpha, e_\beta)|}\\ =&||A||_{HS} + ||B||_{HS}\end{aligned}$$

Dimostriamo che la $||.||_{HS}$ è una norma di Banach: se $\{A_n\}$ è una successione di Cauchy allora

$$||A_n - A_m|| \leq ||A_n - A_m||_{HS} \longrightarrow 0$$

e quindi $\{A_n\}$ converge a $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$: dimostriamo che A è di Hilbert–Schmidt. Basta notare che

$$||A||_{HS} \leq \sum_\alpha ||Ae_\alpha||^2 \leq \sup_n ||A_n||_{HS} < \infty$$

Infine notiamo che, se A è di Hilbert–Schmidt e $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ allora

$$||BA||_{HS}^2 = \sum_\alpha ||BAe_\alpha||^2 \leq ||B||^2 \sum_\alpha ||Ae_\alpha||^2 = ||B||\,||A||_{HS}$$

e quindi anche $||AB||_{HS} = ||(AB)^*||_{HS} = ||B^*A^*||_{HS} \leq ||B||\,||A||_{HS}$. In particolare, se B è di Hilbert–Schmidt allora $||B|| \leq ||B||_{HS}$ e quindi gli operatori di Hilbert–Schmidt formano un'algebra di Banach.

QED

Dalla dimostrazione segue che gli operatori di Hilbert–Schmidt sono un ideale bilatero (ovviamente non chiuso) in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$: la chiusura di questo ideale è ovviamente ancora un ideale di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, e deve quindi coincidere con $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ oppure con $\mathcal{K}(\mathcal{H})$; vale questo secondo caso: intanto

10.5.23 Proposizione *Un operatore di Hilbert–Schmidt è compatto.*

Dimostrazione: Basta mostrare che si approssima con operatori di rango finito: sia $\{e_\alpha\}$ un sistema ortonormale completo in $\mathcal{H}$ e A un operatore di Hilbert–Schmidt. Allora $||Ae_\alpha||^2 \neq 0$ al più per una famiglia numerabile di indici α e, se $n \in \mathbb{N}$ allora esiste un insieme di indici finito $\mathfrak{A}_n$ tale che

$$\sum_{\alpha \notin \mathfrak{A}_n} ||Ae_\alpha||^2 < \frac{1}{n^2}$$

Ma se definiamo

$$A_n e_\alpha = \begin{cases} Ae_\alpha & \text{se } \alpha \in \mathfrak{A}_n \\ 0 & \text{se } \alpha \notin \mathfrak{A}_n \end{cases}$$

è ovvio che gli A_n hanno rango finito e approssimano A:

$$||A - A_n|| \leq ||A - A_n||_{HS} = \sqrt{\sum_{\alpha \notin \mathfrak{A}_n} ||Ae_\alpha||^2} < \frac{1}{n}$$

QED

Non ogni operatore compatto di è di Hilbert–Schmidt: basti prendere in uno spazio separabile $Ae_n = n^{-1/2} e_n$.

10.5.24 Corollario *L'algebra degli operatori compatti è la chiusura dell'algebra degli operatori di Hilbert–Schmidt.*

Gli operatori di Hilbert–Schmidt sono ancor più simili agli operatori negli spazi di dimensione finita di quanto non lo siano i compatti: comunque non possiamo estendere tutte le proprietà desiderate degli operatori finiti al caso di Hilbert–Schmidt: ad esempio non riusciamo in generale a definire la traccia di un operatore. Per farlo dobbiamo ulteriormente restringere la classe di operatori in esame: l'idea è che, in uno spazio vettoriale di dimensione finita V, vale l'isomorfismo $\mathrm{End}(V) = V^* \otimes V$; cioè gli operatori si possono pensare come tensori e questo permette di definire la traccia di un operatore in modo intrinseco: se $T \in \mathrm{End}(V)$ e se $\varphi \otimes v$ è la sua immagine per mezzo dell'isomorfismo precedente allora basta porre $\mathrm{tr}\, T = \varphi(v)$. Naturalmente in dimensione infinita non possiamo aspettarci l'isomorfismo precedente, ma lo spazio $V^* \otimes V$ sarà un sottospazio dello spazio degli operatori, sottospazio i cui elementi andiamo ora a definire.

10.5.25 Definizione *A si dice* operatore nucleare *se si può esprimere come il prodotto $A = BC$ di due operatori di Hilbert–Schmidt B e C.*

10.5.26 Proposizione *Se $A = BC$ è un operatore nucleare e $\{e_\alpha\}$ è un sistema completo ortonormale in $\mathcal{H}$ allora la serie*

$$\sum_\alpha (Ce_\alpha, B^* e_\alpha)$$

converge assolutamente ad un valore che non dipende dal sistema ortonormale scelto.

Dimostrazione: Se $\{f_\alpha\}$ è un altro sistema ortonormale allora

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,\beta}|(Ce_\alpha, f_\beta)\overline{(B^*e_\alpha, f_\beta)}| &\leq \sqrt{\sum_{\alpha,\beta}|(Ce_\alpha, f_\beta)|^2}\sqrt{\sum_{\alpha,\beta}|(B^*e_\alpha, f_\beta)|^2}\\ &= \sqrt{\sum_\alpha ||Ce_\alpha||^2}\sqrt{\sum_\alpha ||B^*e_\alpha||^2}\\ &= ||C||_{HS}\,||B^*||_{HS}\end{aligned}$$

Quindi la serie doppia esiste e, in particolare

$$\begin{aligned}\sum_\alpha (Ce_\alpha, B^*e_\alpha) &= \sum_{\alpha,\beta}(Ce_\alpha, f_\beta)\overline{(B^*e_\alpha, f_\beta)} = \sum_{\beta,\alpha}(Bf_\beta, e_\alpha)\overline{(C^*f_\beta, e_\alpha)}\\ &= \sum_\beta (Bf_\beta, C^*f_\beta)\end{aligned}$$

Di nuovo l'indipendenza dalle basi segue usando questa formula prima con $e_\alpha = f_\alpha$ e poi nel caso generale.

QED

Il numero

$$\operatorname{tr} A = \sum_\alpha (Ce_\alpha, B^*e_\alpha)$$

si dice *traccia dell'operatore nucleare* A. Dalla dimostrazione della proposizione segue immediatamente che

10.5.27 Proposizione *La traccia è un operatore lineare e continuo dallo spazio degli operatori nucleari in* $\mathbb{C}$ *ed inoltre*

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA \qquad ||\operatorname{tr} AB|| \leq ||A||_{HS}||B||_{HS} \qquad \operatorname{tr} AA^* = ||A||_{HS}^2$$

10.5.28 Teorema *Lo spazio* $\mathcal{N}(\mathcal{H})$ *degli operatori nucleari su uno spazio di Hilbert* $\mathcal{H}$ *è uno spazio di Banach rispetto alla norma*

$$||A||_N = \operatorname{tr}|A|$$

ove $A = |A|U$ *è la decomposizione polare dell'operatore nucleare* A*. Lo spazio di Banach* $\mathcal{N}(\mathcal{H})$ *è isomorfo al duale di* $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ *ed il duale di* $\mathcal{N}(\mathcal{H})$ *è isomorfo a* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$*.*

DIMOSTRAZIONE: Per vedere che si tratta di una norma di Banach, notiamo che

$$||A||_N = \sup_{U,V} |\operatorname{tr} UAV|$$

al variare di U, V nelle isometrie parziali: infatti

$$|\operatorname{tr} UAV| = \left|\sum_\alpha (UAVe_\alpha, e_\alpha)\right| \leq \sum_\alpha |(AVe_\alpha, U^* e_\alpha)| = \operatorname{tr}|A| = ||A||_N$$

per U e V tali che $A = |A|V^*U^*$.

Per ottenere gli isomorfismi basta osservare che un elemento $A \in \mathcal{N}(\mathcal{H})$ induce in modo unico un operatore lineare su $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ definito come $K \longmapsto \operatorname{tr} AK$, e che un elemento $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ induce in modo unico un operatore lineare su $\mathcal{N}(\mathcal{H})$ definito come $A \longmapsto \operatorname{tr} AB$.

QED

Capitolo 11

ALGEBRE DI VON NEUMANN

Nella nostra esposizione della teoria spettrale ci eravamo imbattuti nella definizione di algebra di von Neumann: queste sono le sottoalgebre di operatori che soddisfano la proprietà del doppio commutante $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$, analoga a quella delle algebre di matrici nel caso di dimensione finita. Per queste algebre esiste una grandiosa teoria, dovuta a Murray e von Neumann, che generalizza quella classica delle algebre semisemplici di dimensione finita, làmbita nel capitolo **??**. Diamo qui alcuni frammenti di questa teoria.

11.1 Misure e Rappresentazioni

11.1.1 Definizione *Una* rappresentazione di una C*-algebra $\mathcal{A}$ *è un morfismo di C*-algebre*

$$\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

ove $\mathcal{H}$ *è lo* spazio (di Hilbert) della rappresentazione *tale che* $\pi(I_{\mathcal{A}}) = I$.

Si noti che, per definizione: $||\pi(A)|| \leq ||A||$.

Ricordiamo le definizioni che abbiamo dato nello studio degli operatori normali:

11.1.2 Definizione *Se* $\mathcal{A}$ *è una C*-algebra, due sue rappresentazioni* $\pi_1 : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ *e* $\pi_2 : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ *si dicono* unitariamente equivalenti *e si scrive* $\pi_1 \cong \pi_2$ *se esiste un operatore unitario* $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ *tale che*

$$U\pi_1(f) = \pi_2(f)U$$

Si definisce

$$(\pi_1, \pi_2) := \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid \forall f \in C_o(\mathbb{C}) \ T\pi_1(f) = \pi_2(f)T\}$$

e gli elementi di questo insieme si dicono *operatori di allacciamento*.

Ci occuperemo in questo capitolo, delle rappresentazioni $\pi : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (tali che $\pi(1) = I$). La teoria (commutativa) della molteplicità spettrale è lo studio delle rappresentazioni di $C(X)$ ove X è uno spazio compatto di Hausdorff: vedremo che questo è legato alla teoria della misura sui boreliani di X.

Ricordiamo che, per $x, y \in \mathcal{H}$, la mappa

$$f \longmapsto (x, \pi(f)y)$$

è un funzionale lineare su $C(X)$, continuo in virtù della

$$|(x, \pi(f)y)| \leq ||x||\ ||y||\ ||\pi(f)|| \leq ||x||\ ||y||\ ||f||$$

Allora, per il teorema di Riesz–Markov 9.2.2:

$$F \in C(X)^* \iff F(f) = \int_X f(t)d\mu(t)$$

ove μ è una misura boreliana complessa regolare e limitata (cioè è una combinazione lineare finita di misure regolari di probabilità).

Quindi

$$(x, \pi(f)y) = \int_X f(t)d\mu_{x,y}(t)$$

11.1.3 Definizione *Gli elementi della famiglia*

$$\{\mu_{x,y}\}_{x,y\in\mathcal{H}}$$

si dicono misure spettrali *associate alla rappresentazione* π.

11.1.4 Definizione *Una misura regolare di probabilità* μ *su* X *si dice* basica *per una rappresentazione* $\pi : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *se*

- *Per ogni* $x \in \mathcal{H}$, $\mu_{x,x} \ll \mu$.
- *Se* μ' *è una misura che soddisfa la (1) allora* $\mu \ll \mu'$.

11.1.5 Teorema *Se* $\mathcal{H}$ *è separabile allora esiste* $\xi \in \mathcal{H}$ *tale che per ogni* $x \in \mathcal{H}$:

$$\mu_{x,x} \ll \mu_{\xi,\xi}$$

Cioè esiste una misura basica per la rappresentazione π.

DIMOSTRAZIONE: Se X è compatto di Hausdorff e μ è una misura regolare di probabilità su X allora $\nu \ll \mu$ se e solo se $d\nu(s) = f(s)d\mu(s)$ ove f è la derivata di Radon–Nikodym (teorema di Radon–Nikodym 6.3.6), che è una funzione integrabile rispetto a ν e non negativa; si noti che se $\nu_n \xrightarrow{||\cdot||} \nu$ allora

$$\frac{d\nu_n}{d\mu} \xrightarrow{L^1} \frac{d\nu}{d\mu}$$

e $\nu \ll \mu$. Ora, dato che $\mathcal{H}$ è separabile, esiste una successione $\{\xi_n\}$ densa in $\mathcal{H}_1$ (gli elementi di norma 1) e se $\{c_n\}$ è una successione numerica tale che

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 1$$

la misura

$$\mu := \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mu_{\xi_n,\xi_n}$$

è basica.

QED

11.1.6 Definizione *Se $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una rappresentazione di una C*-algebra $\mathcal{A}$, un vettore $x \in \mathcal{H}$ si dice* ciclico *per π se*

$$\overline{\pi(\mathcal{A})x} = \mathcal{H}$$

(lo spazio degli elementi ottenuti da x operando tramite π è denso in $\mathcal{H}$.)

Il nostro obiettivo è dimostrare che se $\pi : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una rappresentazione ed il vettore $\xi \in \mathcal{H}$ è ciclico per $\pi(C(X))'$ (commutante di $\pi(C(X))$ in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ allora $\mu_{\xi,\xi}$ è basica: dedurremo questo teorema da un risultato già di per sé interessante, e cioè l'esistenza di un vettore ciclico per ogni rappresentazione di $C(X)$ su uno spazio separabile.

Per dimostrare questi risultati servono alcuni preliminari.

11.1.7 Definizione *Se $\mathcal{A}$ è una C*-algebra e*

$$\{\pi_\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\alpha)\}_{\alpha\in A}$$

è una famiglia di rappresentazioni di $\mathcal{A}$ allora lo spazio

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{\alpha\in A} \mathcal{H}_\alpha$$

è lo spazio di una rappresentazione $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *definita come*

$$(\pi(A)x)(\alpha) := \pi_\alpha(A)x_\alpha$$

(si rammenti la definizione di prodotto di una famiglia di insiemi) che si dice somma diretta delle rappresentazioni $\{\pi_\alpha\}$.

Osserviamo che questa definizione ha perfettamente senso:

$$\left|\left|\sum_{\alpha\in A}(\pi(A)x)\alpha\right|\right|^2 \leq ||A||^2\left|\left|\sum_{\alpha\in A}x_\alpha\right|\right|^2 = ||A||^2\ ||x||^2$$

da cui $||\pi(A)x|_{\mathcal{H}} \leq ||A||\ ||x||$ e quindi $\pi(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Se $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è una famiglia di sottospazi vettoriali chiusi in $\mathcal{H}$ a due a due ortogonali che generino $\mathcal{H}$:

$$\overline{\sum_{\alpha\in A} M_\alpha} = \mathcal{H}$$

e se $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una rappresentazione tale che, per ogni $\alpha \in A$: $\pi(\mathcal{A})M_\alpha \subset M_\alpha$ allora le rappresentazioni $\pi|_\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(M_\alpha)$ ottenute per restrizione sono tali che

$$\pi = \bigoplus_{\alpha\in A} \pi_\alpha$$

11.1.8 Definizione *Una rappresentazione* $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *si dice* non degenere *se la *-sottoalgebra* $\pi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *è non degenere, nel senso che*

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad \pi(\mathcal{A})x = 0 \Rightarrow x = 0$$

11.1.9 Proposizione *Se* $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *è una rappresentazione di una C*-algebra* $\mathcal{A}$ *allora sono equivalenti le*

- π *è non degenere;*
- $\overline{\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}} = \mathcal{H}$*;*
- *Per ogni* $x \in \mathcal{H}$, $x \in \overline{\pi(\mathcal{A})x}$.

DIMOSTRAZIONE: Poniamo per brevità $\mathcal{B} := \pi(\mathcal{A})$.

(1)⇒(2): se $y \perp \mathcal{B}\mathcal{H}$ allora, per ogni $B \in \mathcal{B}$ e $y \in \mathcal{H}$:

$$0 = (y, Bx) = (B^*y, x) \Rightarrow B^*y = 0 \Rightarrow By = 0 \Rightarrow y = 0$$

(perché $\mathcal{B}$ è una *-algebra e vale la (1)).

(2)⇒(1): Se $(\mathcal{BH})^\perp = 0$ allora $\mathcal{B}x = 0$ per ogni $x \in \mathcal{H}$, i.e. $x = 0$.

(3) $\iff$ (2): La (3) implica che $\mathcal{H} \subset \overline{\mathcal{BH}} \subset \mathcal{H}$ e quindi la (2); se vale (2), consideriamo $x \in \mathcal{H}$ e $\overline{\mathcal{B}x}$, che deve essere $\mathcal{B}$-invariante:

$$Bx \in \mathcal{BH} \Rightarrow \forall B' \in \mathcal{B} \quad B'Bx = (B'B)x \in \mathcal{B}x$$

Per la continuità degli operatori in $\mathcal{B}$ si ha anche $\overline{\mathcal{B}x}$ è $\mathcal{B}$-stabile[1]. Posto $M = \overline{\mathcal{B}x}$ e $E = E_M$:

$$x \in \overline{\mathcal{BH}} \iff x = Ex$$

Ma $\mathcal{B}(x - Ex) = 0$: infatti

$$B(x - Ex) = Bx - BEx = Bx - EBx = Bx - Bx = 0$$

(dato che $Bx \in M \Rightarrow EBx = Bx$). Quindi se $\mathcal{B}$ è non degenere, $x = Ex$.

QED

11.1.10 Teorema *Una rappresentazione non degenere di una C*-algebra è somma diretta di rappresentazioni cicliche.*

Dimostrazione: Al solito sia $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ la rappresentazione e $\mathcal{B} = \pi(\mathcal{A})$; consideriamo, per $\xi \in \mathcal{H}$, i sottospazi chiusi

$$M_\xi := \overline{\pi(\mathcal{A})\xi}$$

Per definizione sono spazi invarianti per π ed evidentemente $\pi|_{M_\xi}$ è una rappresentazione ciclica (infatti $\xi \in \pi_{M_\xi}(\mathcal{A})$ se π è non degenere per la (3) della proposizione precedente). Ora dimostriamo che

$$M \text{ è } \pi\text{-stabile} \iff M^\perp \text{ è } \pi\text{-stabile}$$

In effetti se per ogni $B \in \mathcal{B}$: $BM \subset M$ allora, se $x \in M^\perp$:

$$\forall y \in M \quad (Bx, y) = (x, B^*y) = 0$$

cioè $BM \subset M$ e quindi $BM^\perp \subset M^\perp$. Il viceversa è ovvio.

Quindi (per ogni *-sottoalgebra $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$), se M è un sottospazio $\mathcal{B}$-stabile si ha

$$\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$$

[1] Osserviamo che *se $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una *-sottoalgebra e M è chiuso in $\mathcal{H}$, M è $\mathcal{B}$-stabile se e solo se* $E_M \in \mathcal{B}'$. Infatti $BE = EBE$ e $EB^* = EB^*E = B^*E$ (E è autoaggiunto).

Ogni elemento $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si rappresenta nella forma

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

con

$$A_1 := E_M B E_M \qquad A_2 := E_{M^\perp} B E_M$$
$$A_3 := E_M B E_{M^\perp} \qquad A_4 := E_{M^\perp} B E_{M^\perp}$$

e, se $\mathcal{B}$ è una *-sottoalgebra (come nel nostro caso $\mathcal{B} = \pi(\mathcal{A})$) e M è $\mathcal{B}$-stabile:

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

Se ora consideriamo $\xi \in M^\perp \setminus \{0\}$ $(M \neq \mathcal{H})$ allora $\overline{\mathcal{B}\xi} =: M_\xi$ è tale che

$$M_\xi \subset M^\perp$$

Quindi un sottospazio M stabile, chiuso (e proprio) induce una rappresentazione sul sottospazio ortogonale.

Se $\mathcal{S}$ è l'insieme delle famiglie $\mathfrak{M}$ di sottospazi vettoriali chiusi $\mathcal{B}$-stabili a due a due ortogonali su $\mathcal{H}$ e tali che $\pi|_M$ sia ciclica per ogni $M \in \mathfrak{M}$ allora l'inclusione $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$ è una relazione di ordine parziale su $\mathcal{S}$: se $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ è un sottoinsieme totalmente ordinato e

$$\mathfrak{M}' := \bigcup_{\mathfrak{M} \in \mathcal{S}'} \mathfrak{M}$$

evidentemente $\mathfrak{M}' \in \mathcal{S}$ è un maggiorante del sottoinsieme $\mathcal{S}'$; quindi l'insieme parzialmente ordinato $(\mathcal{S}, \subset)$ soddisfa alle ipotesi del lemma di Zorn, che implica l'esistenza di una famiglia massimale $\mathfrak{M}_0$ in $\mathcal{S}$. Il sottospazio di $\mathcal{H}$ generato dagli elementi densi di $\mathfrak{M}_0$ esaurisce tutto $\mathcal{H}$:

$$N := \sum_{\substack{M \in \mathfrak{M}_0 \\ \overline{M} = \mathcal{H}}} M = \mathcal{H}$$

Infatti se esistesse $\xi \in N^\perp \setminus \{0\}$ avremmo $\overline{\mathcal{B}\xi} = N_\xi$ con $N_\xi \subset N^\perp$, il che darebbe luogo ad una rappresentazione ciclica: ma allora $\mathfrak{M}_0 \cup \{N_\xi\}$ sarebbe un elemento di $\mathcal{S}$ contenente $\mathfrak{M}_0$, il che ne contraddirebbe la massimalità. Quindi $N = \mathcal{H}$.

Dunque π si esprime come somma di rappresentazioni cicliche.

QED

Se la rappresentazione π è degenere, il sottospazio

$$M_0 := \{x \in \mathcal{H} \mid \forall A \in \mathcal{A} \quad \pi(A)x = 0\}$$

è $\mathcal{B}$-stabile, quindi lo è pure $M := M_0^\perp$ e $\pi|_M$ è non degenere. Cioè

$$\pi = 0 \oplus \pi|_M = 0 \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in A} \pi_\alpha \right)$$

con le π_α cicliche.

Osserviamo che se $\mathcal{H}$ è separabile, la famiglia A nella somma

$$\pi = \bigoplus_{\alpha \in A} \pi_\alpha$$

è numerabile ed ogni M_α è del tipo $E_n\mathcal{H}$ (con $E_n \in \mathcal{B}$).

11.1.11 Teorema *Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una *-sottoalgebra commutativa e se $\mathcal{H}$ è separabile allora esiste un vettore ciclico per $\mathcal{A}$.*

Dimostrazione: Consideriamo la rappresentazione identica

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ A &\longmapsto A \end{aligned}$$

Per il teorema precedente

$$\pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n$$

(con le π_n cicliche) e $\pi|_{M_n} = \pi_n$. Se ξ_n è il vettore ciclico di π_n si ha $\overline{\mathcal{A}\xi} = \mathcal{H}$; possiamo scegliere ξ_n in modo che

$$||\xi_n|| = 1$$

Allora consideriamo $c \in l^2(\mathbb{N})$ con $||c|| = 1$; allora, se

$$\xi := \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \xi_n$$

si ha $||\xi||^2 = ||c||_{l^2}^2 = 1$. Dimostriamo che ξ è un vettore ciclico per $\mathcal{A}'$: in effetti $E_n \in \mathcal{A}'$ e $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ (per commutatività di $\mathcal{A}$), quindi

$$\mathcal{A}'\xi \supset \mathcal{A}E_n\xi$$

cioè $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}' \subset \overline{\mathcal{A}E_n\xi}$ che, essendo $E_n\xi = c_n\xi_n$, è uguale a

$$\overline{c_n\mathcal{A}\xi_n} = \overline{\mathcal{A}\xi_n} = M_n$$

QED

Possiamo finalmente dimostrare il teorema che abbiamo enunciato in precedenza:

11.1.12 Teorema *Se $\pi : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una rappresentazione ed il vettore $\xi \in \mathcal{H}$ è ciclico per $\mathcal{A}'$ (commutante di $\mathcal{A} = \pi(C(X))$ in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ allora $\mu_{\xi,\xi}$ è basica.*

DIMOSTRAZIONE: Basta dimostrare che $\mu_{x,x} < \mu_{\xi,\xi}$. Ma se $(x_n) \subset \mathcal{H}$ converge in norma a x allora

$$\mu_{x_n,x_n} \longrightarrow \mu_{x,x}$$

e quindi per densità di $\mathcal{A}'\xi$ basta far vedere che

$$(*) \qquad \forall T \in \mathcal{A}' \quad \mu_{T\xi,T\xi} < \mu_{\xi,\xi}$$

Per dimostrare la (*) notiamo che[2]

$$\begin{aligned}\int f(s) d\mu_{T\xi,T\xi}(s) &= (T\xi, \pi(f)T\xi) = (Tf, \pi(g)^*\pi(g)T\xi) \\ &= (T\pi(g)\xi, T\pi(g)\xi) = ||T\pi(g)\xi||^2 \\ &\leq ||T|^2||\pi(g)\xi||^2 = ||T||^2(\xi, \pi(f)\xi) \\ &= ||T||^2 \int f(s) d\mu_{\xi,\xi}\end{aligned}$$

Quindi

$$\mu_{T\xi,T\xi} \leq ||T||^2 \mu_{\xi,\xi}$$

Ma allora per ogni insieme Δ $\mu_{\xi,\xi}$-misurabile si ha

$$\mu_{T\xi,T\xi}(\Delta) \leq ||T||^2 \mu_{\xi,\xi}(\Delta)$$

sicché $\mu_{T\xi,T\xi}$ è dominata da $\mu_{\xi,\xi}$ e, *a fortiori*, si trova la (*). Da questa, per densità di $\mathcal{A}'\xi$ deduciamo che $\mu_{x,x} < \mu_{\xi,\xi}$.

QED

11.1.13 Teorema *Se π è una rappresentazione dell'algebra $C(X)$ delle funzioni continue su uno spazio compatto metrizzabile in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ separabile, allora π è ciclica se e solo se esiste una misura regolare μ di probabilità su X tale che*

$$\pi \cong \pi_\mu$$

ove $\pi_\mu(f)$ è la moltiplicazione per f nello spazio di funzioni $L^2(X, \mu)$ e tale che μ sia equivalente[3] ad una misura basica di π. Infine, se π_1 e π_2 sono rappresentazioni cicliche, allora $\pi_1 \cong \pi_2$ se e solo se le classi di equivalenza delle loro misure basiche coincidono.

[2]Usiamo il fatto che se f è positiva allora esiste g in modo che $f = g^*g$

[3]Si rammenti che due misure sono equivalenti se assolutamente continue l'una rispetto all'altra.

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo che ξ sia un vettore ciclico per $\mathcal{A} = \pi(C(X)) \subset \mathcal{A}'$; per il teorema precedente la misura $\mu := \mu_{\xi,\xi}$ è basica.

Consideriamo poi in $L^2(X, \mu)$ l'operatore

$$M_f \in \mathcal{B}(L^2(X, \mu))$$

definito, per $x \in L^2(X, \mu)$, come

$$(M_f x)(s) := f(s)x(s)$$

Osserviamo che

$$\int_X |f(s)x(s)|^2 d\mu(s) \leq ||f||^2 \int_X |x(s)|^2 d\mu(s) = ||f||^2 \; ||x||^2$$

e quindi M_f manda effettivamente $L^2(X, \mu)$ in sé: dato che è lineare e continuo la mappa

$$f \longmapsto M_f$$

è una rappresentazione di C*-algebre, che è ciclica.

Infatti X è uno spazio compatto e μ una misura finita, quindi la funzione identicamente 1 appartiene a $C(X)$ ed è in $L^2(X, \mu)$. Pertanto

$$M_f 1 = f$$

è una immersione $C(X) \hookrightarrow L^2(X, \mu)$ e, come noto, $\overline{C(X)}^{||.||_{L^2}} = L^2(X, \mu)$. Quindi 1 è un vettore ciclico per la rappresentazione M_f.

Ora consideriamo l'operatore $U : \mathcal{H} \longrightarrow K^2(X, \mu)$ definito come

$$U\pi(f)\xi := M_f 1$$

Vogliamo dimostrare che è unitario e di allacciamento fra π e M_f.

Per dimostrare che è unitario, dato che $C(X)$ è denso in $L^2(X, \mu)$, basta far vedere che è isometrico (nella norma L^2); ed infatti

$$\begin{aligned} ||\pi(f)\xi||^2 &= (\pi(f)\xi, \pi(f)\xi) = (\xi, \pi(f^*f)\xi) \\ &= \int_X (f^*f)(s) d\mu(s) = \int_X |f(s)|^2 d\mu(s) = ||f||^2_{L^2} \end{aligned}$$

Vediamo ora che si tratta di una equivalenza unitaria fra le rappresentazioni π e M_f. Intanto

$$U\pi(f)\xi = \pi_\mu(f)1$$

cioè

$$U\pi(fg)\xi = \pi_\mu(fg)1 \Rightarrow U\pi(f)\pi(g)\xi = \pi_m u(f)\pi_\mu(g)1 = \pi_\mu(f)U\pi(g)\xi$$

Ma $\pi(g)\xi$ è un generico vettore in un sottoinsieme denso di $\mathcal{H}$ e quindi, passando al limite nell'equazione precedente, si ottengono due operatori $U\pi(f)$ e $\pi_\mu(f)U$ che coincidono su un sottoinsieme denso, sicché

$$U\pi(f) = \pi_\mu(f)U$$

Questo conclude la dimostrazione della necessità della condizione.

Vediamo ora che la condizione del teorema è pure sufficiente per la ciclicità della rappresentazione π; infatti è quasi ovvio: se $\pi \cong \pi_1$ e $\pi_1(\mathcal{A})\xi = \mathcal{H}_{\pi_1}$ allora esiste un operatore unitario U di allacciamento fra π_1 e π_2 ed il vettore

$$\xi := U\xi_1$$

è ciclico per π:

$$U\pi_1(\mathcal{A})\xi_1 = \pi(\mathcal{A})U\xi_1 = \pi(\mathcal{A})\xi$$

(si rammenti che $U \in (\pi_1, \pi_2) \Rightarrow U^* \in (\pi_2, \pi_1)$.

Dimostriamo infine la seconda parte del teorema. Consideriamo cioè due misure regolari μ_1 e μ_2 di probabilità equivalenti:

$$\mu_1 = \frac{d\mu_1}{d\mu_2}\mu_2 \qquad \text{e} \qquad \mu_2 = \frac{d\mu_2}{d\mu_1}\mu_1$$

Definiamo poi un operatore

$$V : L^2(X, \mu_1) \longrightarrow L^2(X, \mu_2)$$

nel modo seguente: per ogni $x \in L^2(X, \mu_1)$

$$(Vx)(s) := \sqrt{\frac{d\mu_1}{d\mu_2}(s)}\, x(s)$$

Per dimostrare che $Vx \in L^2(X, \mu_2)$ osserviamo che

$$|(Vx)(s)|^2 = \frac{d\mu_1}{d\mu_2}(s)|x(s)|^2$$

(la derivata di Radon–Nikodym $d\mu_1/d\mu_2$ appartiene a $L^2(X, \mu_2)$) e quindi

$$\int_X |(Vx)(s)|^2 d\mu_2(s) = \int_X |x(s)|^2 d\mu_1(s)$$

cioè V è una isometria lineare $L^2(X, \mu_1) \longrightarrow L^2(X, \mu_2)$ che deve essere unitaria, in quanto, se

$$(V'x)(s) := \sqrt{\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(s)}\, x(s)$$

allora (allo stesso modo di V) V' è una isometria lineare ed è tale che

$$VV' = I \qquad \text{e} \qquad V'V = I$$

(dato che le misure sono equivalenti, le derivate di Radon–Nikodym dell'una rispetto all'altra sono l'una la funzione reciproca dell'altra.)

Dunque, per ogni s:

$$\begin{aligned}(V\pi_{\mu_1}(f)x)(s) &= \sqrt{\frac{d\mu_1}{d\mu_2}(s)}(\pi_{\mu_1}(f)x(s) = \sqrt{\frac{d\mu_1}{d\mu_2}(s)}f(s)x(s)\\ &= f(s)\sqrt{\frac{d\mu_1}{d\mu_2}(s)}x(s) = f(s)(Vx)(s) =: (\pi_{\mu_2}(f)(Vx))(s)\end{aligned}$$

e quindi

$$\forall x \in L^2(X, \mu_1) \quad V\pi_{\mu_1}(f)x = \pi_{\mu_2}(f)Vx$$

ovvero

$$V\pi_{\mu_1}(f) = \pi_{\mu_2}(f)V$$

Viceversa, se V è un operatore unitario di allacciamento fra π_{μ_1} e π_{μ_2} allora, se 1 è la funzione identicamente 1 in $L^2(X, \mu_1)$:

$$V\pi_{\mu_1}(f)1 = \pi_{\mu_2}(f)V1 =: \xi \in L^2(X, \mu_2)$$

Definendo

$$(\xi, V\pi_{\mu_1}(f)1) := (V1, V\pi_{\mu_1}(f)1)$$

si ottiene

$$\begin{aligned}(\xi, V\pi_{\mu_1}(f)1) &= (1, \pi_{\mu_1}(f)1) = \int_X f(s)d\mu_1(s)\\ &= \int_X \overline{\xi(s)}\xi(s)f(s)d\mu_2(s) = \int_X \overline{\xi(s)}(\pi_{\mu_2}(f)\xi)(s)d\mu_2(s)\end{aligned}$$

Dunque

$$\forall f \in C(X) \quad \int_X f(s)|\xi(s)|^2 d\mu_2(s) = \int_X f(s)d\mu_1(s)$$

e, per il teorema di Riesz–Markov,

$$\mu_1 = |\xi|^2\mu_2$$

cioè $\mu_1 \ll \mu_2$. In modo analogo si trova $\mu_2 \ll \mu_1$.

QED

11.2 Sottoalgebre commutative massimali in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

Consideriamo un operatore normale A: il suo spettro è puntuale se i suoi autovettori formano un sistema totale cioè

$$Ae_i = \lambda_i e_i$$

Se ora $U : \mathcal{H} \longrightarrow l^2(\mathbb{N})$ è l'operatore unitario determinato dalla scelta della base $\{e_n\}$ di $\mathcal{H}$, allora l'operatore UAU^{-1} è diagonale ed i suoi elementi diagonali sono la successione degli autovalori, ripetuti ciascuno tante volte quanta è la sua molteplicità. Quindi

$$l^2(\mathbb{N}) = L^2(\sigma(A), \mu)$$

ove μ è una misura di probabilità *totalmente atomica* nel senso che è concentrata nei singoli punti dello spettro. Ad esempio

$$\mu = \sum c_n \delta_{\lambda_n}$$

con $c_n > 0$, $\sum c_n = 1$ e δ_λ misura di Dirac concentrata in λ; allora $f(A)$ diviene, per tramite di U, la moltiplicazione per f:

$$Uf(A) = \pi_\mu(f)U$$

ove, per $x \in L^2(\sigma(A), \mu)$:

$$(\pi_\mu(f)x)(s) := f(s)x(s)$$

In questo caso è

$$x = \sum_n x_n e_n$$

con $x_n \in l^2(\mathbb{N})$ e quindi $Uf(A)U^{-1}$ è diagonale con autovalori dati dalla successione $\{f(\lambda_n)\}$.

11.2.1 Teorema *Se X è uno spazio compatto metrizzabile e π una rappresentazione non degenere ($\pi(1) = I$) di $\mathcal{A} = C(X)$ nello spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$ allora (l'indice f denota che la chiusura è nella topologia forte)*

$$\overline{\pi(\mathcal{A})}^f = \mathcal{R} := \pi(\mathcal{A})''$$

(si noti che $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$ essendo commutativa).

DIMOSTRAZIONE: Intanto notiamo che se π è ciclica allora $\mathcal{R} = \mathcal{R}' = \widetilde{\pi}(L^\infty(X,\mu))$ ove $\widetilde{\pi}$ è la rappresentazione

$$\widetilde{\pi} : \beta(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

dell'algebra delle funzioni boreliane limitate definita da

$$(x, \widetilde{\pi}(f)y) := \int_X f(s) d\mu_{x,y}(s)$$

Infatti, se f è μ-misurabile e limitata

$$\mu_{x,y} = \sum_{i=1}^n c_i \mu_{x_i,y_i}$$

(per polarizzazione). Ora

$$\ker \widetilde{\pi} = \{f \mid f = 0 \ \mu\text{-q.o.}\}$$

Infatti che il nucleo di $\widetilde{\pi}$ contenga questo insieme è ovvio; se poi $f \in \ker \widetilde{\pi}$ allora, dato che

$$\mu_{\pi(g_1)x, \pi(g_2)x}(s) = \overline{g_1(s)} g_2(s) \mu_{\xi,\xi}(s)$$

per un vettore ξ ciclico per π allora

$$\forall g \in C(X) \qquad \int_X f(s) g(s) d\mu = 0$$

e quindi, per il teorema di Lusin 4.6.7, $f = 0$ μ-q.o.

Quindi se $f \in L^\infty(X,\mu)$ allora $\widetilde{\pi}(f) = 0$ implica $f = 0$ (come elemento di $L^\infty(X,\mu)$, i.e. a meno di equivalenza q.o.) e quindi la rappresentazione $\widetilde{\pi}$ è fedele (cioè iniettiva). Allora, come *-algebre

$$L^\infty(X,\mu) \cong \pi(\mathcal{A})$$

Quello che vogliamo dimostrare è che $\widetilde{\pi}(L^\infty(X,\mu)) = \mathcal{R} = \mathcal{R}'$. Che sia

$$\widetilde{\pi}(L^\infty(X,\mu)) \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$$

è ovvio. Quindi basta provare che $\mathcal{R}' \subset \widetilde{\pi}(L^\infty(X,\mu))$; ora, essendo π ciclica, per una misura basica μ si ha

$$\pi = \pi_\mu$$

e quindi[4]

$$\widetilde{\pi}_\mu(L^\infty(X,\mu)) \subset \pi_\mu\left(\overline{C(X)}^{\mathrm{f}}\right) \subset (\pi_f(C(X))')'$$

[4]Osserviamo che se $S \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_1$ è unitario e $USU^{-1} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ allora $U\overline{S}^f U^{-1} = \overline{USU^{-1}}^f$ e $US'U^{-1} = (USU^{-1})'$.

Se dimostriamo che l'ultimo termine è incluso in $\widetilde{\pi}_\mu(L^\infty(X,\mu))$ abbiamo finito.

Consideriamo quindi $T \in \pi_f(C(X))'$:

$$f_T := T1 \in L^2(X,\mu)$$

(1 è la funzione identicamente 1 in $L^2(X,\mu)$) sicché

$$T\pi_\mu(f)I = \pi_\mu(f)T1 = f_T f$$

cioè $T1 = f_T$. Osserviamo che, se $f_T \in L^\infty(X,\mu)$ allora

$$T\pi_\mu(f)I = ff_T = \widetilde{\pi}(f_T)f = \widetilde{\pi}(f_T)\pi(f)I$$

e, per densità:

$$T = \widetilde{\pi}(f_T) \in \widetilde{\pi}(L^\infty(X,\mu))$$

Quindi ci siamo ridotti a dover dimostrare la $f_T \in L^\infty(X,\mu)$.

Per questo notiamo che

$$T \in \pi_\mu(C(X))' \Rightarrow T \in \widetilde{\pi}_\mu(L^\infty(X,\mu))'$$

(Infatti $\overline{S}^{||\cdot||} \subset \overline{S}^{\mathrm{f}} \subset \overline{S}^{\mathrm{debole}}$ (ovvio) e se $S \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ allora $(\overline{S}^{\mathrm{debole}})' = S'$: intanto $S \subset \overline{S}^{\mathrm{debole}}$ e $S_1 \subset S_2 \Rightarrow S_2' \subset S_1'$ implicano che $(\overline{S}^{\mathrm{debole}})' \subset S'$; inoltre se $B \in S'$ allora per ogni $A \in S$: $AB = BA$ i,e, $ABx = BAx$ per ogni $x \in \mathcal{H}$ e, per ogni $y \in \mathcal{H}$: $(y, ABx) = (y, BAx)$ col che $B \in (\overline{S}^{\mathrm{debole}})'$).

Dunque

$$\Delta := \{s \in X \mid |f_T(s)| > ||T||\}$$

è misurabile (lo è f_T) e quindi la sua funzione caratteristica χ_Δ è essenzialmente limitata; ma $L^\infty(X,\mu) \subset L^2(X,\mu)$ (dato che la misura dello spazio è finita) sicché

$$\begin{array}{ccccc} & & ||\chi_\Delta f_T||^2_{L^2} \leq ||T||^2||\chi_\Delta||^2_{L^2} & & \\ & & || & & \\ ||T||^2 \int_\Delta d\mu(s) & < & \int_\Delta |f_T(s)|^2 d\mu(s) & \leq & ||T||^2 \int_\Delta d\mu(s) \end{array}$$

il che è assurdo a meno che la misura di $\{s \in X \mid |f_T(s)| > ||T||\}$ non sia zero. Quindi

$$|f_T| \leq ||T|| \quad \mu\text{-q.o.}$$

e ne concludiamo che $f_T \in L^\infty(X,\mu)$.

QED

Se $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert allora l'insieme delle *-sottoalgebre commutative di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ è parzialmente ordinato dalla relazione di inclusione; dato che verifica le ipotesi del lemma di Zorn se ne deduce che esistono sempre sottoalgebre massimali commutative di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

11.2.2 Definizione *Una sottoalgebra massimale commutativa di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ la chiameremo MASA (*maximal abelian subalgebras*).*

Ovviamente, per massimalità, una MASA è *-debolmente chiusa, quindi è una sottoalgebra di von Neumann.

11.2.3 Teorema *Se $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert separabile e $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una *-sottoalgebra commutativa allora sono equivalenti le*

- *$\mathcal{R}$ è MASA.*
- *$\mathcal{R} = \mathcal{R}'$.*
- *$\mathcal{R}$ è di von Neumann e possiede un vettore ciclico.*

DIMOSTRAZIONE:

(1) $\Leftrightarrow$ (2): Se $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$ allora $\mathcal{R}$ è abeliana (ovvio: $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$) ed è massimale poiché, se $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_1'$, allora $\mathcal{R}_1'' \subset \mathcal{R}_1' \subset \mathcal{R}'$ e quindi, per ogni $\mathcal{R}_1$ contenente $\mathcal{R}$: $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1$. Viceversa, se $\mathcal{R}$ è MASA e $\mathcal{R} \subsetneq \mathcal{R}'$ allora esiste $T \in \mathcal{R}' \setminus \mathcal{R}$, quindi, dato che $\mathcal{R}'$ è una *-algebra, $T = T_1 + iT_2$ (T_1, T_2 autoaggiunti) e quindi o $T_1 \notin \mathcal{R}$ oppure $T_1 \notin \mathcal{R}$, i.e. esiste un autoaggiunto T non appartenente a $\mathcal{R}$. Questo autoaggiunto T genera un'algebra commutativa che commuta con $\mathcal{R}$, (vi commuta T: $T \in \mathcal{R}'$) e quindi l'algebra generata da $\mathcal{R}$ e T contiene $\mathcal{R}$ ed è commutativa, il che contraddice la massimalità di $\mathcal{R}$.

(3) $\Rightarrow$ (2) segue dal teorema di densità di von Neumann che dimostreremo in sèguito.

(2) $\Rightarrow$ (3) segue dall'esistenza di un vettore ciclico per $\mathcal{R}'$ che abbiamo già dimostrato.

QED

Abbiamo visto fin qui che se $\pi : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una rappresentazione non degenere dell'algebra delle funzioni continue di uno spazio compatto metrizzabile in uno spazio di Hilbert separabile allora esiste un vettore ξ ciclico per $\pi(C(X))'$ ed una misura $\mu = \mu_{\xi,\xi}$ basica; inoltre, considerando l'estensione

$$\widetilde{\pi} : L^\infty(X, \mu) \longrightarrow \mathcal{R} = \pi(C(X))''$$

abbiamo visto che $\widetilde{\pi}$ è un *-isomorfismo isometrico in $\mathcal{R}$.

11.2.4 Definizione *Se $T \in \mathcal{A}'$ è un elemento del commutante di una C*-algebra, si dice che* separa i punti *se $T\xi = 0 \Rightarrow T = 0$; si dice che ξ è separante per $\mathcal{A}'$.*

11.2.5 Teorema *$\widetilde{\pi}$ è suriettivo ed è un omeomorfismo se su $L^\infty(X,\mu)$ consideriamo la topologia *-debole e su $\mathcal{R}$ la topologia debole degli operatori.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo

$$\mathcal{H}_\xi := \overline{\pi(C(X))\xi}$$

Evidentemente $\pi_\xi := \pi|_{\mathcal{H}_\xi}$ è ciclica (per definizione!) con vettore ciclico ξ, sicché

$$\pi_\xi(C(X))'' = \widetilde{\pi}_\xi(L^\infty(X,\mu))$$

Inoltre

(1) $$\widetilde{\pi_{\mathcal{H}_\xi}} = (\widetilde{\pi})|_{\mathcal{H}_\xi}$$

e, se $T \in \mathcal{R} = \overline{\pi(C(X))}^f$ allora $T\mathcal{H}_\xi \subset \mathcal{H}_\xi$; infatti se $f \in C(X)$:

$$\forall x \in \mathcal{H}_\xi \quad \pi(f)(x) \in \mathcal{H}_\xi$$

Più in generale: se $\mathcal{A}$ è una *-algebra e M un sottospazio chiuso di $\mathcal{H}$ tale che $\mathcal{A}M \subset M$ allora $\overline{\mathcal{A}}M \subset M$ (infatti questa condizione equivale alla $E_M \in \mathcal{A}' = (\overline{\mathcal{A}})'$). Dunque, dato che

$$Tx = \lim_\alpha \pi(f_\alpha)x = \lim_\alpha \pi_\xi(f_\alpha)x \in \overline{\pi_\xi(C(X))}^{\mathrm{f}}$$

si trova

(2) $$T|_{\mathcal{H}_\xi} \in \overline{\pi_\xi(C(X))}^{\mathrm{f}}$$

Infine

(3) $$\xi \text{ ciclico per } \mathcal{R}' \Rightarrow \xi \text{ separante per } \mathcal{A}'$$

Infatti se $T\xi = 0$ allora per ogni $B \in \mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$: $BT\xi = 0$ e quindi $TB\xi = 0$ ($T \in \mathcal{A}'$); ma $\overline{\mathcal{A}\xi} = \mathcal{H}$ e quindi T è continuo e nullo su un sottospazio denso, dunque $T = 0$.

Possiamo cioè affermare che la mappa

$$T \longrightarrow T|_{\mathcal{H}_\xi}$$

è uno *-isomorfismo, e la (1) implica che

$$\overline{\pi_\xi(C(X))}^{\mathrm{f}} = \widetilde{\pi}(L^\infty(X,\mu))|_{\mathcal{H}_\xi}$$

Quindi, per la (2):

$$C(X) \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \mathcal{R} \xrightarrow{\text{restrizione}} \mathcal{R}|_{\mathcal{H}_\xi} \subset \overline{\pi_\xi(C(X))}^f = \widetilde{\pi}_\xi(L^\infty(X,\mu)) = \widetilde{\pi}(L^\infty(X,\mu))|_{\mathcal{H}_\xi}$$

In altri termini, per ogni $T \in \mathcal{R}$ esiste $f_T \in L^\infty(X,\mu)$ tale che $T|_{\mathcal{H}_\xi} = \pi(f_T)|_{\mathcal{H}_\xi}$; ma allora, per la (3):

$$T = \widetilde{\pi}(f_T)$$

e quindi $\widetilde{\pi}$ è suriettiva. Ribadiamo che è un isomorfismo:

$$||f||_{L^\infty} = ||\widetilde{\pi}(f)|_{\mathcal{H}_\xi}|| \leq ||\widetilde{\pi}(f)|| \leq ||f||_{L^\infty}$$

Dimostriamo che si tratta di un omeomorfismo: per $g \in L^1(X,\mu)$ consideriamo le seminorme

$$p_g(f) := \int_X f(s)g(s)d\mu(s)$$

Ogni funzione in $L^1(X,\mu)$ è il prodotto di due funzioni in $L^2(X,\mu)$, ad esempio

$$g(s) = (\sqrt{|g(s)|}z(s))(\sqrt{|g(s)|})$$

ove $z(s)$ è la fase di $g(s)$ (funzione di modulo 1). Scriviamo cioè

$$g = \overline{x_1}x_2$$

Quindi

$$p_g(f) = \left| \int_X \overline{x_1(s)}x_2(s)f(s)d\mu(s) \right| = |(x_1, M_f x_2)|$$

Ma esiste un operatore unitario $U : L^2(X,\mu) \longrightarrow \mathcal{H}_\xi$ tale che

$$UM_f = \widetilde{\pi}_\xi(f) = \widetilde{\pi}(f)|_{\mathcal{H}_\xi}$$

pertanto

$$p_g(f) = |(Ux_!, UM_f x_2)| = |(\xi_1, UM_f U^{-1}\xi_2)| = |(\xi_1, \pi(f)\xi_2)|$$

che è la seminorma che definisce la topologia debole in $\mathcal{R}$.

Viceversa, per $x, y \in \mathcal{H}$ e $f \in L^\infty(X,\mu)$:

$$(x, \widetilde{\pi}(f)y) = \left| \int_X f(s)d\mu_{x,y}(s) \right|$$

Ma, per il teorema di Radon–Nikodym 6.3.6

$$\mu_{x,y} = g(s)\mu$$

e quindi

$$(x, \widetilde{\pi}(f)y) = \left| \int_X f(s)g(s)d\mu(s) \right|$$

QED

Questo teorema è definitivo per la teoria delle algebre di von Neumann commutative, ed è l'analogo del teorema di Gel'fand–Najmark: ogni algebra di von Neumann commutativa è generata dalle moltiplicazioni per le funzioni L^∞ su un certo spazio di misura regolare: questi spazi di misura sono sostanzialmente gli spazi $[0,1]$ con la misura di Lebesgue con al più una quantità numerabile di "atomi", cioè punti di misura positiva, che corrispondono a proiezioni minimali in $\mathcal{R}$.

Ora consideriamo una famiglia $\{A_n\}$ di operatori autoaggiunti che commutino a due a due, ed il loro spettro congiunto

$$X := j\sigma(A_1, A_2, ...) \subset \prod_{n\in\mathbb{N}} \sigma(A_n)$$

Sappiamo che

$$f \longmapsto f(A_1, A_2, ...)$$

è uno *-isomorfismo fra $C(X)$ è la C*-algebra $\mathbf{A}$ generata dall'identità e dalla famiglia $\{A_n\}$; possiamo quindi estendere questa rappresentazione (calcolo funzionale continuo) ad una rappresentazione

$$\begin{aligned} L^\infty(X) &\longrightarrow \mathcal{R} := \mathbf{A}'' \\ f &\longmapsto f(A_1, A_2, ...) \end{aligned}$$

ottenendo, in virtù del teorema precedente, uno *-isomorfismo isometrico suriettivo. Quindi per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ che commutati con qualsiasi A esiste f tale che $B = f(A_1, A_2, ...)$.

11.2.6 Definizione *Un insieme* $\{A_n\}$ *è* completo *se per ogni* $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *che commuti con ogni* A_n *si ha per una opportuna* f*:*

$$B = f(A_1, A_2, ...)$$

Per i sistemi completi di operatori autoaggiunti a due a due permutabili abbiamo che

$$\forall B \in \mathcal{R}' \quad B \in \mathcal{R}$$

i.e. $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$. Ma $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$ e quindi

$$\{A_n\} \text{ completo} \iff \mathcal{R} = \mathcal{R}'$$

cioè se e solo se $\mathcal{R}$ è MASA.

Questo dimostra il

11.2.7 Teorema *Se $\{A_n\}$ è un sistema completo di operatori autoaggiunti a due a due permutabili su uno spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$ allora esiste un operatore unitario $U : \mathcal{H} \longrightarrow L^2(X, \mu)$ (X è lo spettro congiunto degli operatori) tale che*

$$\forall f \in L^\infty(X, \mu) \quad Uf(A_1, A_2, ...)U^{-1} = M_f$$

Se $\mathcal{R} = \mathcal{R}'' \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ allora esiste una C*-algebra separabile (in norma) tale che $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}$ tale che $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$.

Questo è vero, in realtà, per ogni algebra $\mathcal{A}$ di von Neumann e per l'insieme $\mathcal{B}(\mathcal{H})_1$ (palla unitaria) con la topologia debole (rispetto alla quale è un compatto metrizzabile); in altri termini: per ogni $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, l'algebra

$$\mathcal{R}_1 := \mathcal{R} \cap \mathcal{B}(\mathcal{H})_1$$

è separabile (X è compatto, quindi metrizzabile se e solo se soddisfa il primo assioma di numerabilità) essendolo la palla unitaria in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Se $\{T_n\} \subset \mathcal{R}_1$ è una successione debolmente densa allora, denotando con $\mathbf{A}$ la C*-algebra generata dall'identità e dagli elementi $\{T_n\}$, abbiamo che

$$\mathcal{R} \subset \overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{d}} \subset \mathcal{R}$$

($\mathcal{R}$ è debolmente chiusa), cioè

$$\mathcal{R} = \overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{d}}$$

Basta quindi, per separabilità, considerare famiglie totali numerabili; ad esempio i monomi nelle T_n e nei loro aggiunti, i.e. la successione

$$A_1 := T_1 \quad A_2 = T_1^* \quad A_3 = T_2 \quad ...$$

e considerare le funzioni f a supporto compatto definite su $\mathbb{N}$ a valori in $\mathbb{N}$:

$$A_1^{f(1)}, \quad A_2^{f(2)}, ...$$

il che fornisce una successione totale nel caso commutativo. Nel caso non commutativo bisogna considerare i "monomi non commutativi", cioè le parole che si possono formare con le "lettere " $\{A_n\}$.

Infine, $\mathcal{B}(\mathcal{H})_1$ è compatto metrizzabile per il teorema di Alaoglu 8.2.12; vogliamo ora dimostrare che

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathfrak{M}_0^* = \mathfrak{M}^*$$

ove $\mathfrak{M}_0^*$ è uno spazio normato tale che

$$\mathfrak{M}_0 \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})^*$$

e $\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{M}_0}^{||\cdot||}$ ne è il completamento; definiamo $\mathfrak{M}_0$ come il sottospazio di $\mathcal{B}(\mathcal{H})^*$ generato dai funzionali

$$\begin{aligned} f_{x,y} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ A &\longmapsto (x, Ay) \end{aligned}$$

(per $x, y \in \mathcal{H}$). Ovviamente

$$||f_{x,y}|| \leq ||x|| \, ||y||$$

(essendo $|f_{x,y}(A)| \leq ||A|| \, ||x|| \, ||y||$) e

$$\forall f \in \mathfrak{M}_0 \quad f(A) = 0 \Rightarrow A = 0$$

Quindi basta osservare che

$$\forall F \in \mathfrak{M}_0^* \ \exists A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad F(f_{x,y}) = f_{x,y}(A)$$

come segue immediatamente dal teorema di rappresentazione di Riesz.

Notiamo inoltre che la topologia debole su $\mathcal{B}(\mathcal{H})_1$ è quella definita da $\mathfrak{M}_0$, i.e. è la topologia debole degli operatori, nella quale $\mathcal{B}(\mathcal{H})_1$ risulta dunque essere compatto; infatti, in generale, se X è uno spazio normato con la $\sigma(X^*, X)$-topologia, su X_1 è

$$\sigma(X_1^*, X) = \sigma(X_1^*, \mathcal{N})$$

ove $\mathcal{N}$ è denso in X, il che si dimostra osservando che, per ogni $\varepsilon > 0$ ed $x \in X$ esiste x_ε tale che $||x - x_\varepsilon|| < \varepsilon$ per il quale

$$\forall f \in X_1^* \quad |f(x - x_\varepsilon)| < \varepsilon$$

cioè

$$|p_x(f) - p_{x_\varepsilon}(f)| < \varepsilon$$

uniformemente sulle f.

Se $\mathcal{H}$ è separabile al posto di $\mathfrak{M}_0$ basta considerare le combinazioni lineari a supporto finito e coefficienti in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$

$$\sum_{i,j} q_{ij} f_{x_i, y_j}$$

ove $\{x_i\}$ è una successione densa. Quindi la topologia debole degli operatori su $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ è in questo caso definita dalla famiglia (numerabile) di seminorme

$$p_k(A) := \left| \sum_{i+j=k} q_{ij} f_{x_i, x_j}(A) \right|$$

Da questo segue immediatamente che $\mathcal{B}(\mathcal{H})_1$ è metrizzabile rispetto alla distanza

$$d(A,B) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{p_k(A-B)}{1+p_k(A-B)}$$

(ove $c_n > 0$ e $\sum_n c_n = 1$), che induce la topologia debole degli operatori.

Abbiamo cioè dimostrato che $\mathcal{B}(\mathcal{H})_1$ è compatto e metrizzabile (il che è equivalente a dire che è compatto e verifica il secondo assioma di numerabilità, ovvero che è compatto e separabile).

Osserviamo che se $\{A_n\}$ è una successione di autoaggiunti e $f \in L^\infty(X,\mu)$ allora, per il teorema di Stone–Weierstrass, se

$$p_n(s) := s_n \in \sigma(A_n)$$

(si ricordi che $X \subset \prod \sigma(A_n)$) un insieme totale in $C(X)$ è

$$\{f(s) := s_1^{n_1} s_2^{n_2} ...\}$$

Per calcolare

$$\int_X f(s) d\mu(s)$$

su qualsiasi funzione continua f basta quindi conoscere i valori

$$\int_X s_1^{n_1} s_2^{n_2} ... d\mu(s) := (\xi, A_1^{n_1} A_2^{n_2} ... \xi)$$

che, mediando il linguaggio probabilistico, si dicono *momenti* della misura μ.

11.3 Topologie ultradeboli e ultraforti.

Abbiamo considerato sull'insieme $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ degli operatori continui di uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ (non necessariamente separabile) alcune topologie: la topologia della norma, la topologia debole e la topologia forte. Vogliamo introdurne altre due, la ultradebole e la ultraforte.

Introdurremo queste topologie per mezzo di seminorme: intanto osserviamo che la topologia debole e la topologia forte sono pure indotte da seminorme:

$$p_{x,y}(A) := |(x, Ay)|$$

nel caso debole e

$$p_x(A) := ||Ax||$$

nel caso forte.

Ricordiamo che la topologia forte è effettivamente più fine della topologia debole, avendosi

$$p_{x,y}(A) \leq ||x||\ ||Ay|| \leq ||x||p_y(A)$$

e che certamente queste topologie non coincidono (a meno che $\dim \mathcal{H} < \infty$). Ad esempio, il morfismo

$$* : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

di passaggio all'aggiunto è un omeomorfismo per la topologia debole:

$$p_{x,y}(A) = |(x, Ay)| = |\overline{(x, Ay)}| = |\overline{(A^*x, y)}| = |(y, A^*x)| = p_{y,x}(A^*)$$

mentre per la topologia forte non è nemmeno una funzione continua: per vederlo basti considerare l'operatore di *shift*

$$Se_n := e_{n+1}$$

(lo abbiamo scritto su una base ortonormale) che, per ogni $k \geq 1$ dà luogo ad una isometria S^k:

$$||S^k x|| = ||x||$$

Quindi S^k non può convergere a zero fortemente (perché la successione numerica delle sue norme è costantemente $1 \neq 0$), mentre

$$||S^{*k}x||^2 = (x, S^k S^{k*}x) = \sum_{m=k+1}^{\infty} |(e_m, x)|^2 \longrightarrow 0$$

(si noti infatti che $S^k S^{k*} = E_{\{e_1,\dots,e_k\}^\perp}$); quindi, per

$$A_n := S^{*n}$$

otteniamo una successione fortemente infinitesima ma tale che A_n^* non converga fortemente a zero.

Tornando alle considerazioni precedenti, ricordiamo che la topologia debole è la $(\sigma(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathfrak{M}_0)$-topologia, e quindi se $x = \{x_n\}$ e $y = \{y_n\}$ sono successioni a quadrato sommabile

$$||x||_{l^2} = \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||^2 < \infty \qquad\qquad ||y||_{l^2} = \sum_{n=1}^{\infty} ||y_n||^2 < \infty$$

allora

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (x_n, Ay_n) \right|$$

converge assolutamente per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, dato che

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(x_n, Ay_n)\right| \leq ||A|| \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| \; ||y_n|| \leq ||A|| \; ||x||_{l^2} ||y||_{l^2}$$

(abbiamo usato la disuguaglianza di Schwartz in l^2); quindi, se

$$f(A) := \sum_{n=1}^{\infty}(x_n, Ay_n) \qquad \text{e} \qquad f_n(A) := \sum_{i=1}^{\infty}(x_i, Ay_i)$$

si trova che

$$|(f - f_n)(A)| \leq ||A||$$

e quindi

$$||f - f_n|| \leq \sum_{i=n}^{\infty} ||x_i|| \; ||y_i||@ \gg> 0$$

cioè $f \in \mathfrak{M} := \overline{\mathfrak{M}_0}$.

11.3.1 Definizione *La* topologia ultradebole *è la topologia definita dalle seminorme*

$$p_{\{x_n\},\{y_n\}}(A) := \left|\sum_{i=1}^{\infty}(x_i, Ay_i)\right|$$

ove $\{x_n\}, \{y_n\} \in \bigoplus_i \mathcal{H}$.

Consideriamo ora

$$\widetilde{\mathcal{H}} := \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}$$

Evidentemente possiamo considerare su $\widetilde{\mathcal{H}}$ la somma diretta delle rappresentazione identica $\pi_n : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $(\pi(A) = A)$:

$$\pi = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \pi_n$$

In altri termini $\pi(A)$ opera su $x = \{x_n\}$ come

$$\pi(A)(x) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} Ax_n$$

Dunque

$$f(A) = (x, \pi(A)y)$$

e

$$p_{\{x_n\},\{y_n\}}(A) = |(x, \pi(A)y)|$$

11.3.2 Definizione *La* topologia ultraforte *è quella indotta dalle seminorme*

$$p_x(A) := ||\pi(A)x|| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} ||Ax_n||^2}$$

ove $\sum_n ||x_n||^2 < \infty$.

Ovviamente la topologia ultradebole è (strettamente) più fine della topologia debole e la topologia ultraforte è strettamente più fine della topologia ultradebole.

Ad esempio, se $\mathcal{B}(\mathcal{H})_N$ è la palla di centro l'origine e raggio N in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ allora su $\mathcal{B}(\mathcal{H})_N$ la topologia debole coincide con quella ultradebole e la topologia forte coincide con quella ultraforte. Infatti se $||A|| \leq N$ si ha

$$\sum_{i=n}^{\infty} ||Ax_i||^2 \leq N^2 \sum_{i=n}^{\infty} ||x_i||^2$$

cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un n_ε tale che per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_N$ il modulo delle differenze delle seminorme forti ed ultraforti sia minore di ε. Un enunciato analogo vale nel caso ultradebole.

Ora ricordiamo che, per la proposizione 8.2.3 un funzionale lineare su uno spazio normato X è continuo nella $\sigma(X, Y)$-topologia se è della forma $y \longmapsto \langle x, y\rangle$ per un fissato $x \in X$; nel nostro caso otteniamo

$$\mathcal{B}(\mathcal{H})^* = \{f \longmapsto \langle f, A\rangle\}_{f \in \mathfrak{M}_0}$$

11.3.3 Proposizione *I funzionali lineari su $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ continui nella topologia ultradebole (ultraforte) e debole (forte) coincidono.*

DIMOSTRAZIONE: Basta dimostrare che un funzionale lineare ultrafortemente continuo è anche ultradebolmente continuo.

Se f è ultrafortemente continuo allora esiste una seminorma ultraforte p tale che

$$|f(A)| \leq p(A) = ||\pi(A)x||$$

per qualche $x \in \bigoplus \mathcal{H}$. Se

$$\mathfrak{M} := \overline{\pi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))x} \subset \bigoplus \mathcal{H}$$

allora, per il teorema di rappresentazione di Riesz, esiste un unico g continuo tale che

$$g(z) = (z_1, z)$$

(per un fissato z_1) e quindi

$$\langle f, A\rangle = g(\pi(A)x) = z_1, \pi(A)x)$$

Analogamente si procede nel caso ultradebole.

QED

Ricordiamo ora che, per il teorema di Hahn–Banach, due topologie su uno spazio vettoriale hanno gli stessi funzionali lineari e continui se e solo se hanno gli stessi insiemi chiusi e convessi, e che in uno spazio vettoriale topologico un chiuso convesso contenente l'origine è intersezione di semispazi della forma

$$\{x \mid \operatorname{Re} < f, x >\leq 1\}$$

11.3.4 Proposizione *Con le notazioni precedenti:*

$$\mathfrak{M}_0 \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})^* \subset \mathfrak{M}$$

(la continuità dei funzionali è intesa essere quella debole).

Dimostrazione: Sia f un funzionale lineare debolmente continuo:

$$f = \sum f_{x_i,y_i}$$

cioè tale che

$$\langle f, f\rangle = \sum_i (x_i, Ay_i)$$

con

$$(x, Ay) = \operatorname{tr}(AT_{x,y})$$

(il rango di $T_{x,y}$ è 1). ove

$$T_{x,y}z = y(x, z) = |y\rangle\langle x|z$$

Sugli operatori B a rango finito $\operatorname{tr} B = \sum_\alpha (e_\alpha, Be_\alpha)$ (ed è indipendente dalla scelta della base (e_α)), quindi

$$\operatorname{tr}(AT_{x,y}) = \sum_\alpha (e_\alpha, Ay)(x, e_\alpha) = \sum_\alpha (x, e_\alpha)(e_\alpha, Ay) = (x, Ay)$$

da cui, se $T = \sum_i T_{x_i,y_i}$:

$$\sum_i f_{x_i,y_i} = \operatorname{tr}(AT)$$

cioè

$$(\dagger) \qquad f \in \mathfrak{M}_0 \iff \langle f, A\rangle = \mathrm{tr}(AT) = \mathrm{tr}(TA) \quad (\mathrm{rk}\, T < \infty)$$

Applicando a T la decomposizione polare $T = V|T|$ (dato che $\mathrm{rk}\, T < \infty$ anche $\mathrm{rk}\, V, \mathrm{rk}\,|T| < \infty$):

$$T = V|T| = \sum_i \lambda_i T_{f_i, e_i}$$

dunque (per $A = V^*$ nella $(\dagger)$)

$$||f|| = \mathrm{tr}\,|T| = \sum_i \lambda_i$$

Ma $\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{M}_0}$ e quindi gli elementi di $\mathfrak{M}$ sono serie assolutamente convergenti negli elementi di $\mathfrak{M}_0$:

$$\forall f \in \mathfrak{M} \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

con $f_n \in \mathfrak{M}_0$ e $\sum_n ||f_n|| < \infty$. Ma

$$f_n(A) = \mathrm{tr}(T_n A)$$

(al solito $T_n = V_n|T_n| = \sum_i \lambda_i^{(n)} T_{f_i^{(n)}, e_i^{(n)}}$) e

$$\sum_{i,n} \lambda_i^{(n)} < \infty$$

Dunque considerando le successioni

$$x_k := \sqrt{\lambda_i} e_i^{(n)} \qquad \mathrm{e} y_k := \sqrt{\lambda_i} f_i^{(n)}$$

si ottiene

$$\sum_k ||y_k||^2 = \sum_k ||x_k||^2 = \sum_{i,n} \lambda_i^{(n)} < \infty$$

sicché

$$f = \sum_n f_n = \sum_k f_{x_k, y_k}$$

è un funzionale ultradebolmente continuo.

QED

Osserviamo che la

$$(A) \qquad \forall (e_\alpha), (f_\alpha) \text{ basi ortonormali } \sum_\alpha |(e_\alpha, Bf_\alpha)| < \infty$$

è equivalente a

$$\sum_\alpha |(e_\alpha, Be_\alpha)| < \infty$$

(cioè per tali B ha senso calcolare la traccia di $|B|$) che pure è equivalente all'essere B compatto e

$$\sum_{\lambda \in \sigma(|B|)} \lambda \nu(\lambda) < \infty$$

Quindi, se B verifica la (A) allora, per ogni base ortonormale (e_α):

$$\operatorname{tr} B = \sum_\alpha (e_\alpha, Be_\alpha)$$

La totalità degli operatori che soddisfano questa condizione definisce un ideale bilatero che è uno spazio di Banach rispetto alla norma

$$||B||_1 := \operatorname{tr} |B|$$

e che si denota $L^1(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Quindi

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \ \forall T \in L^1(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \quad \operatorname{tr}(TB) = \operatorname{tr}(BT)$$

e

$$f \in \mathfrak{M} \iff \exists T \in L^1(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \quad \langle f, A \rangle = \operatorname{tr}(AT) \quad \text{e} \quad ||f|| = ||T||_1$$

da cui segue che $\mathfrak{M} \cong L^1(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ come spazi di Banach.

Ora consideriamo un sottospazio $\mathfrak{N} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ultradebolmente chiuso: si ha, per il teorema di Hahn–Banach:

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^{\perp\perp}$$

(osserviamo che se $\mathfrak{N}$ è un sottospazio si ha sempre $\mathfrak{N}^o = \mathfrak{N}^\perp$) e, dato che $\mathfrak{N}^\perp \subset \mathfrak{M}$ allora

$$\mathfrak{N}^{\perp\perp} = \left(\mathfrak{M}/\mathfrak{N}^\perp\right)^*$$

Inoltre osserviamo che come spazi di Banach:

$$\mathfrak{M}/\mathfrak{N}^\perp \cong \mathfrak{M}/\mathfrak{N}$$

e quindi che

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^{\perp\perp} = (\mathfrak{M}/\mathfrak{N})^*$$

Dunque, definendo il *preduale* di $\mathfrak{N}$ come

$$\mathfrak{N}_* := \{\text{funzionali lineari ultradebolmente continui su } \mathfrak{N}\}$$

di trova che $\mathfrak{N} \cong (\mathfrak{N}_*)^*$ in modo canonico.

11.4 Teoremi di Densità

Le topologie che abbiamo considerato sullo spazio degli operatori sono cinque:

$$\text{norma} > \text{ultraforte} > \begin{matrix}\text{ultradebole}\\ \text{forte}\end{matrix} > \text{debole}$$

Osserviamo che l'operatore $*$ nella C*-algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *non* è continuo rispetto alla topologia ultraforte: si definisce comunque la topologia *-(ultra)forte con le seminorme

$$p(A) + p(A^*)$$

al variare di p nelle seminorme che definiscono la topologia (ultra)forte. Così la convergenza *-forte è caratterizzata da

$$A_n \longrightarrow 0 \iff A_n x_n \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad A_n^* x \longrightarrow 0$$

e la convergenza *-ultraforte da

$$A_n \longrightarrow 0 \iff \pi(A_n) x_n \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad \pi(A_n^*) x \longrightarrow 0$$

Dimostriamo ora un risultato fondamentale più volte citato ed utilizzato:

11.4.1 Teorema di Densità (VON NEUMANN) *Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una *-sottoalgebra non degenere di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ allora*

$$\overline{\mathcal{A}}^{uf} = \mathcal{A}''$$

DIMOSTRAZIONE: Dobbiamo solo verificare che

$$T \in \mathcal{A}'' \Rightarrow T \in \overline{\mathcal{A}}^{uf}$$

cioè che se $T \in \mathcal{A}''$ allora per ogni seminorma ultraforte p esiste un $A \in \mathcal{A}$ tale che

$$p(T - A) < 1$$

Ma la più generale seminorma ultraforte è

$$p(B) = ||\pi(B)x||$$

e quindi dobbiamo dimostrare che

$$(tesi) \qquad \forall T \in \mathcal{A}''\ \forall x \in \widetilde{\mathcal{H}}\ \exists A \in \mathcal{A} \quad ||\pi(T)x - \pi(A)x|| < 1$$

Ovvero che $\pi(T)x \in \overline{\pi(\mathcal{A})x}$.

Usiamo ora un

Lemma A. *$\mathcal{A}$ è non degenere se e solo se $\pi(A)$ è non degenere.*

per dedurre che $\pi(\mathcal{A})$ è non degenere. Quindi $x \in \overline{\pi(\mathcal{A})x}$ (sappiamo già che non degenere vuol dire che per ogni $x \in \mathcal{H}$ $x \in \overline{\mathcal{A}x}$). Consideriamo allora l'operatore di proiezione

$$E = E_{\overline{\pi(\mathcal{A})x}}$$

Il sottospazio $\overline{\pi(\mathcal{A})x}$ è ciclico, quindi $E \in \pi(\mathcal{A})'$.

Quindi, se $B \in \pi(\mathcal{A})''$ allora $BE = EB$: ora usiamo un altro

Lemma B. $\pi(\mathcal{A}'') = \pi(\mathcal{A})''$.

per dedurre che $B \in \pi(\mathcal{A}'')$; in particolare $\pi(T)E = E\pi(T)$. Ma allora, dato che $Ex = x$ essendo $x \in \overline{\pi(\mathcal{A})x}$:

$$\pi(T)x = \pi(T)Ex = E\pi(T)x \in \overline{\pi(\mathcal{A})x}$$

il che conclude la dimostrazione.

QED

Ora dimostriamo i due lemmi.

Dimostrazione: (A) $\pi(\mathcal{A})$ è non degenere se e solo se ($\pi(\mathcal{A})x = 0 \iff x = 0$). Ma

$$\pi(\mathcal{A})x = \{Ax_1 \oplus Ax_2 \oplus ... \,|\, A \in \mathcal{A} \text{ e } x_1 \oplus x_2 \oplus ... = x\}$$

e quindi

$$\pi(\mathcal{A})x = 0 \iff \forall i \quad \mathcal{A}x_i = 0$$

QED

Dimostrazione: (B) Se

$$x := \bigoplus_{i=1}^{\infty} x_i$$

e se

$$E_n x := 0 \oplus 0 \oplus ... \oplus 0 \oplus x_n \oplus 0 \oplus ...$$

(proiezione sull'n-simo elemento) allora

$$E_n \widetilde{\mathcal{H}} \cong \mathcal{H}$$

Ma $\sum_n E_n = I$, quindi

$$\forall x = \sum_n E_n x \;\forall T \in \mathcal{B}(\widetilde{\mathcal{H}}) \quad Tx = T\sum_n E_n x = \sum_m E_m T x = \sum_{n,m} E_m T E_n x$$

(per continuità di T), cioè

$$(Tx)_m = \sum_n E_m T E_n x_n$$

Dunque associamo a T una matrice infinita $(T_{nm})_{n,m\in\mathbb{N}}$ ove

$$T_{nm} = E_n T E_m : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

Il che vuol dire che

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \implies Tx = ((T_{nm})) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Ma $T \in \pi(\mathcal{A})' \iff \forall A \in \mathcal{A}\ T\pi(A) = \pi(A)T$, e, a livello di matrici:

$$T = ITI = \left(\sum_n E_n\right) T \left(\sum_m E_m\right) = \text{s-lim} \sum_{n,m} E_n T E_m$$

da cui $T = 0 \iff \forall n, m \in \mathbb{N} \quad T_{nm} = 0$.

Dunque la $T\pi(A) = \pi(A)T$ diviene

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad E_n T \pi(A) E_m = E_n \pi(A) T E_m$$

Ma $\pi(A)E_n = AE_n$, cioè

$$\pi(A)(0 \oplus ... \oplus 0 \oplus x_n \oplus 0 \oplus ...) = (0 \oplus ... \oplus 0 \oplus Ax_n \oplus 0 \oplus ...)$$

e quindi $E_n\pi(A) = E_n A$. Dato che, per definizione di $\pi(A)$, $E_n \in \pi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, troviamo

$$E_n T E_n A = E_n T \pi(A) E_n \Rightarrow E_n T E_m A = A E_n T E_m$$

Dunque $T \in \pi(\mathcal{A})' \iff T_{nm} \in \mathcal{A}'$ e

$$\pi(\mathcal{A})'' = \{R \in \mathcal{B}(\widetilde{\mathcal{H}}) \,|\, T_{nm} \in \mathcal{A}' \Rightarrow RT = TR\}$$

Ma $\pi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))' \subset \pi(\mathcal{A})'$ (infatti $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$) e quindi

$$R \in \pi(\mathcal{A})'' \Rightarrow RE_n = E_n R$$

per cui, se $R_n := R_{nn}$ sono gli elementi diagonali, si trova

$$R \bigoplus_{i=1}^{\infty} x_i = \bigoplus_{i=1}^{\infty} R_i x_i$$

e quindi R è diagonale. Se

$$\left(V_{nm} \bigoplus_{i=1}^{\infty} x_i\right)_j := \delta_{jn} x_n$$

allora V_{nn} è un'isometria parziale tale che ($V_{nm}^* = V_{mn}$)

$$V_{nm}^* V_{mn} = E_m$$

cioè $E_n = V_{nn}$. Le V_{nm} sono le *unità matriciali*, i.e. matrici che hanno 1 all'incrocio fra n-sima riga e m-sima colonna e 0 altrove. Ogni operatore è quindi della forma

$$\sum_{n,m} T_{nm} V_{nm}$$

(con $T_{nm} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$) e $V_{m'n'} V_{nm} = V_{m'm} \delta_{n'n}$.

Tornando alla dimostrazione del lemma, abbiamo trovato che

$$V_{nm} \in \pi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))'$$

(dato che $\pi(A) V_{nm} \oplus_i x_i = \pi(A)(\oplus_j \delta_{jn} x_m)$) e quindi $R \in \pi(\mathcal{A})''$, cioè R commuta con V_{nm} e pertanto i suoi elementi diagonali coincidono:

$$R_1 = R_2 = \ldots$$

Infatti, per ogni $y \in \mathcal{H}$

$$R_n y = R V_{nm} E_n y = V_{nm} R E_n y = R_m y \in E_n \widetilde{\mathcal{H}}$$

dunque $R_n = R_m$, e quindi

$$\pi(\mathcal{A})'' = \pi(\mathcal{B}) = \left\{ \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & R_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & R_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \right\}$$

ove $\pi(\mathcal{A}') \subset \pi(\mathcal{A})$, dato che da $B \in \mathcal{A}'$ e $A \in \mathcal{A}$ segue $BA = AB$ e quindi $\pi(A)\pi(B) = \pi(AB) = \pi(BA) = \pi(B)\pi(A)$. Dunque

$$\pi(\mathcal{B}) \subset \pi(\mathcal{A}')'$$

Ma $T \in \pi(\mathcal{A}')$ se e solo se $E_n \pi(R_1) T E_m = E_n T \pi(R_1) E_m$ i.e. $R_1 E_n T E_m = E_n T E_m$.

Ne segue che per ogni $B \in \mathcal{A}'$ si ha $T = V_{nm} B$ e quindi R_1 commuta con ogni elemento di $\mathcal{A}'$, sicché

$$\pi(\mathcal{A})'' = \pi(\mathcal{A}'')$$

QED

Dal teorema di von Neumann segue che le seguenti inclusioni sono tutte uguaglianze:

$$\overline{\mathcal{A}}^{uf} \subset \frac{\overline{\mathcal{A}}^{f}}{\overline{\mathcal{A}}^{ud}} \subset (\overline{\mathcal{A}}^{d})'' = \mathcal{A}''$$

11.4.2 Teorema di Densità (KAPLANSKI) *Se $\mathcal{A}$ è una *-sottoalgebra di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e se $\mathcal{R} := \overline{\mathcal{A}}^f$ allora*

$$\mathcal{R}_1 = \overline{\mathcal{A}_1}^f$$

cioè $(\overline{\mathcal{A}}^f)_1 = \overline{\mathcal{A}_1}^f$.

DIMOSTRAZIONE: Si tratta di dimostrare, per una *-sottoalgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, che

$$(\overline{\mathcal{A}}^f)_1 = \overline{\mathcal{A}_1}^f$$

Iniziamo con la seguente osservazione: se $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è un insieme convesso allora $\overline{\mathcal{S}}^f = \overline{\mathcal{S}}^d$; in particolare, se $\mathcal{A}$ è una *-sottoalgebra di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ consideriamo $\mathcal{A}_{aa}$ (la sua parte autoaggiunta), $\mathcal{A}_1$ (i suoi elementi di norma 1) e l'intersezione $\mathcal{A}_{aa} \cap \mathcal{A}_1$: si tratta di insiemi convessi, quindi per ognuno di essi le chiusure nelle topologie forti e deboli coincidono.

Ora, nella topologia debole l'operazione * è un omeomorfismo, quindi, se $\mathcal{A}$ è convessa:

$$\left(\overline{\mathcal{A}}^d\right)_{aa} = \overline{\mathcal{A}_{aa}}^d$$

Pertanto, malgrado $A \longmapsto A^*$ *non* sia fortemente continua, si ha:

$$\begin{array}{ccc} \left(\overline{\mathcal{A}}^d\right)_{aa} & = & \left(\overline{\mathcal{A}}^f\right)_{aa} \\ || & & || \\ \overline{\mathcal{A}_{aa}}^d & = & \overline{\mathcal{A}_{aa}}^f \end{array}$$

Consideriamo dunque la topologia uniforme (la topologia della norma): allora

$$B \in (\overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||})_1 \iff ||B|| \leq 1 \qquad \text{e} \qquad \exists (A_n) \subset \mathcal{A} \qquad B = \lim A_n$$

(ove il limite è nella topologia uniforme). A meno di moltiplicare gli elementi A_n per numeri reali di modulo minore o uguale a 1 possiamo supporre che sia $||B|| = 1$ e $||A_n|| \longrightarrow 1$, cioè

$$||A_n||^{-1} A_n \xrightarrow{||\cdot||} B$$

ovvero

$$(\overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||})_1 = \overline{\mathcal{A}_1}^{||\cdot||}$$

Ma $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||} \subset \overline{\mathcal{A}}^f$ e quindi basta dimostrare il teorema per la chiusura uniforme di $\mathcal{A}$.

Definiamo $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ e

$$\widetilde{\mathcal{A}} = M_2(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \middle| A_{ij} \in \mathcal{A} \right\}$$

Allora, per $\mathcal{R} = \overline{\mathcal{A}}^f$ e $\widetilde{\mathcal{R}} = M_2(\mathcal{R})$, si ha

$$\widetilde{\mathcal{R}} = \overline{\widetilde{\mathcal{A}}}^f$$

(infatti una successione $(A_n) \subset \widetilde{\mathcal{A}}$ converge fortemente a T se e solo se $E_i A_n E_j$ converge a $E_i T E_j$ per $i, j \in \{1, 2\}$).

Ora quello che vogliamo dimostrare è che, per ogni $T \in \mathcal{R}_1$:

$$T = \operatorname*{s-lim}_\alpha A_\alpha$$

con $A_\alpha \in \mathcal{A}_1$. Ma se

$$\widetilde{T} = \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathcal{R}}$$

allora

$$||\widetilde{T}|| = \sup_{||x_1 \oplus x_2||=1} ||Tx_2 \oplus T^* x_1|| = ||T|| \cdot 1$$

Ora usiamo il

11.4.3 Lemma $\overline{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_{aa}}^f = (\overline{\mathcal{A}}^f)_1 \cap (\overline{\mathcal{A}}^f)_{aa}$.

per dedurre che

$$\widetilde{T} = \operatorname*{s-lim}_\alpha \widetilde{A}_\alpha$$

(con $\widetilde{A}_\alpha \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_{aa}$). e quindi

$$\operatorname*{s-lim}_\alpha (\widetilde{A}_\alpha)_{12} = T = E_1 \widetilde{T} E_2 = \text{s-lim}\, E_1 \widetilde{A}_\alpha E_2$$

e quindi $(\widetilde{A}_\alpha)_{12} \in \mathcal{A}_1$ il che conclude la dimostrazione.

Resta da provare il lemma: basta trovare una funzione

$$f : \mathcal{R}_{aa} \longrightarrow \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{A}_{aa}$$

tale che

- f è suriettiva;
- f è fortemente continua;
- $f(\mathcal{A}_{aa}) \subset \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_{aa}$;
- la restrizione $f|_{\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_{aa}}$ è biunivoca.

In effetti, se questo è vero allora $T \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_{aa}$ è limite forte di $A_\alpha \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_{aa}$, dato che $T = f(S)$ con $S \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_{aa} \subset \mathcal{R}_{aa}$; ma

$$\mathcal{R}_{aa} = (\overline{\mathcal{A}}^f)_{aa} = \overline{\mathcal{A}_{aa}}^f$$

(la seconda uguaglianza è un risultato noto). Quindi esistono $B_\alpha \in \mathcal{A}_{aa}$ tali che

$$S = \operatorname*{s-lim}_\alpha B_\alpha$$

e dunque

$$f(S) = \operatorname*{s-lim}_\alpha fBA_\alpha)$$

(per la (2)); ma $f(B_\alpha) \in \mathcal{A}_1$ (per la (3)) e quindi S è limite forte di $A_\alpha \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_{aa}$ (per la (4) dimostrare il risultato per S o T è la stessa cosa).

Non resta quindi che trovare una funzione con le proprietà (1)–(4). Se

$$f(t) := \frac{2t}{1+t^2} t \in \mathbb{R}$$

allora $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ è una funzione continua tale che $f(0) = 0$ e, ristretta all'intervallo $[-1, 1]$ è un omeomorfismo, cioè esiste una funzione g tale che

$$f|_{[-1,1]} = g$$

Se ora A è autoaggiunto allora $f(A) = f(A)^*$ e $||f(A)|| \leq 1$ (teorema spettrale), sicché $f(A) \in \overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||}$. Ma, ricordando che

$$\overline{\mathcal{A}_1}^{||\cdot||} = (\overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||})_1$$

possiamo assumere $f(A) \in \mathcal{A}_1$, ed analogamente per $\mathcal{R}$, quindi la funzione soddisfa le (1), (3) e (4). Dimostriamo per essa anche la (2).

Dobbiamo cioè far vedere che per ogni seminorma p della topologia forte esiste una seminorma p' (della topologia forte) tale che, se $p(T_s) < 1$ allora $p(f(T) - f(S)) < 1$.

Basta per questo prendere p in una sottobase di seminorme:

$$\begin{aligned}
f(T) - f(S) &= (I + T^2)^{-1} 2T - (I + S^2)^{-1} 2S \\
&= (I + T^2)^{-1} 2T(I + S^2)(I + S^2)^{-1} \\
&\qquad - (I + T^2)^{-1}(I + T^2) 2S(I + S^2)^{-1} \\
&= 2(I + T^2)^{-1} \big(T(I + S^2) - (I + T^2)S\big) (I + S^2)^{-1}
\end{aligned}$$

(si rammenti che S, T commutano col loro calcolo funzionale). Ma

$$(T(I + S^2) - (I + T^2)S) = T - S + T(S - T)S$$

e quindi, dato che $||f(T)|| \leq 1$ e $||(I+T^2)^{-1}|| \leq 1$ (essendo T autoaggiunto):

$$||(f(T)-f(S))x|| \leq 2||(T-S)z_1|| + ||(S-T)z_2||$$

(con $z_1 = (I+S^2)^{-1}x$ e $z_2 = 2S(I+S^2)^{-1}x$). Questo conclude la dimostrazione del lemma, e quindi del teorema.

QED

Traiamo ora qualche conseguenza dai teoremi di densità appena dimostrati. Sia $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una sottoalgebra degenere e si consideri la proiezione

$$E_0 = E_{\overline{\mathcal{A}\mathcal{H}}}$$

Allora $\mathcal{A}|_{E_0\mathcal{H}}$ è non degenere e

$$\mathcal{A}|(I-E_0)\mathcal{H} = 0$$

Infatti se $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}|E_0\mathcal{H}$, dato che $\mathcal{H} = E_0\mathcal{H} \oplus (I-E_0)\mathcal{H}$ allora $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_0 \end{pmatrix}$.

Applicando il teorema di densità di von Neumann: $\mathcal{A}_0'' = \overline{\mathcal{A}_0}$ otteniamo

$$\overline{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{\mathcal{A}_0} \end{pmatrix} \implies \overline{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_0'' \end{pmatrix} = \mathcal{A}_0'' \oplus 0$$

come segue dalla decomposizione $\mathcal{H} = E_0\mathcal{H} \oplus (I-E_0)\mathcal{H}$.

Dunque per ogni *-sottoalgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ le chiusure nelle topologie debole, forte, ultraforte, ultradebole e uniforme coincidono:

$$\overline{\mathcal{A}}^f = \overline{\mathcal{A}}^d = \overline{\mathcal{A}}^{uf} = \overline{\mathcal{A}}^{ud} = \overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||}$$

Scriviamo quindi semplicemente $\overline{\mathcal{A}}$.

Inoltre $\mathcal{A}'' = \mathbb{C} \cdot I \oplus \mathcal{A}_0''$ e quindi $0 \oplus I = E_0 \in \overline{\mathcal{A}}$, da cui segue che $\overline{\mathcal{A}} \subsetneq \mathcal{A}''$ (strettamente) se $\mathcal{A}$ è degenere e $\overline{\mathcal{A}}$ contiene una identità E_0 *che non è* I.

11.4.4 Corollario *Se $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è un'algebra di von Neumann e J un suo ideale bilatero chiuso*[5] *e se $E_0 = E_{\overline{\mathcal{J}\mathcal{H}}}$ allora $E_0 \in J$ ne è l'identità. In particolare*

$$J \text{ è proprio} \iff J \text{ è degenere}$$

(altrimenti $E_0 = I \in \mathcal{R}$).

[5] Abbiamo osservato che le chiusure nelle varie topologie coincidono, quindi non è necessario specificare quale.

11.4.5 Proposizione *Se $J \subset \mathcal{R}$ è uno *-ideale bilatero chiuso nell'algebra di Von Neumann $\mathcal{R}$ allora esiste un idempotente autoaggiunto $E_0 \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}' =: \mathcal{Z}(\mathcal{R})$ (centro dell'algebra di von Neumann) tale che $J = \mathcal{R}E_0$.*

DIMOSTRAZIONE: Sappiamo per il corollario che E_0 è l'identità di J e quindi $E_0A = AE_0$ per ogni $A \in J$; dunque, se $A \in \mathcal{R}$:

$$\left.\begin{array}{r} AE_0 \in J \\ E_0A \in J \end{array}\right\} \Rightarrow E_0AE_0 = AE_0 \Rightarrow E_0A = AE_0$$

Dunque $\mathcal{R}E_0 \subset J \subset \mathcal{R}E_0$ (dato che $A = AE_0$).

QED

11.4.6 Corollario *Se $\mathcal{R}$ ha centro* banale[6], *cioè $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}' = \mathbb{C} \cdot I$ allora $\mathcal{R}$ è una C*-algebra* semplice*, i.e. non possiede ideali bilateri ultradebolmente chiusi propri).*

11.5 Cenni sulla teoria dei fattori

Le algebre di von Neumann con centro banale si dicono *fattori* e sono di fondamentale importanza nella teoria: infatti già nei lavori che gettarono le basi della teoria, von Neumann e Murray dimostrarono che ogni algebra di von Neumann si spezza in (integrale diretto di) fattori, che quindi costituiscono "i mattoni" con i quali ogni algebra di Von Neumann può essere costruita, e stabilirono una classificazione parziale di questi fattori, la cui struttura è governata in una certa misura dagli operatori di proiezione che contengono; non possiamo soffermarci su questa teoria vasta quanto affascinante: ci limitiamo a citare i risultati fondamentali senza dimostrazione.

Consideriamo le algebre di von Neumann rappresentate come algebre di operatori limitati $\mathcal{R}$ autoaggiunte ($\mathcal{R} \subset \mathcal{R}^*$) debolmente chiuse in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e contenenti l'identità.

Prima di procedere alla discussione dei fattori vediamo perché basta limitarsi a questo caso; se $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert separabile e $\mathfrak{F}$ è l'insieme di tutti i fattori in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ allora esiste su $\mathfrak{F}$ una σ-algebra boreliana; se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di probabilità (che immaginiamo come insieme di indici) e $x \longmapsto \mathfrak{M}(x)$ una funzione boreliana da X a $\mathfrak{F}$, possiamo definire una C*-algebra i cui elementi siano le mappe boreliane essenzialmente limitate $m : x \longmapsto m(x) \in \mathfrak{M}(x)$.

[6] Un'algebra di von Neumann contiene sempre almeno $\mathbb{C}$ dato che contiene l'identità.

Questa C*-algebra è in realtà un'algebra di von Neumann che si dice *integrale diretto* della famiglia $\{\mathfrak{M}(x)\}_{x\in X}$ rispetto alla misura μ,e si scrive

$$M = \int_X \mathfrak{M}(x) d\mu(x)$$

von Neumann ha dimostrato il seguente

11.5.1 Teorema *Ogni algebra di von Neumann M su uno spazio di Hilbert separabile è algebricamente isomorfa a un integrale diretto di fattori.*

Con questo von Neumann mostrò che la teoria dei fattori (da lui sviluppata con Murray) bastava alla descrizione delle algebre di Von Neumann.

Ricordiamo che se E è una proiezione (in uno spazio di Hilbert) allora è minimale in un'algebra di von Neumann $\mathcal{R}$ di operatori di $\mathcal{H}$ se $E \neq 0$ e per ogni $F \in \mathcal{R}$ proiezione, da $F \leq E$ (i.e. $FE = F$) segue che $F = E$ oppure $F = 0$.

Se E, F sono proiezioni in $\mathcal{R}$, le diciamo equivalenti se esiste qualche $V \in \mathcal{R}$ tale che $VV^* = E$ e $V^*V = F$, e scriviamo $E \sim F$. Se E è equivalente ad una proiezione $F \leq G$ si scrive $E \precsim G$.

11.5.2 Definizione *Una proiezione E in un'algebra di von Neumann si dice* infinita *se è equivalente ad una proiezione $F < E$; altrimenti si dice* finita.

Se $\mathcal{R}$ è un fattore, ogni proiezione non nulla ha una sottoproiezione equivalente non nulla: in altri termini, in un fattore, due proiezioni E, F soddisfano una "dicotomia": o $E \precsim F$ oppure $F \prec E$.

Il primo risultato fondamentale è il seguente

11.5.3 Teorema *Se un fattore $\mathfrak{M}$ contiene una proiezione minimale allora è isomorfo all'algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ di un certo spazio di Hilbert $\mathcal{H}_0$ la cui dimensione hilbertiana è il numero di proiezioni minimali di $\mathfrak{M}$ contenute in una famiglia ortogonale massimale di proiezioni minimali.*

Se $\mathfrak{M}$ è un fattore e $E_0 \in \mathfrak{M}$ è una proiezione finita non nulla (ammesso che esista) possiamo assegnare alla classe di equivalenza delle proiezioni a lei equivalenti "dimensione 1": confrontata con questa proiezione, ogni altra proiezione del fattore possiede una *dimensione* $d(E) \in [0, \infty]$.

11.5.4 Definizione *Sia $\mathfrak{M}$ un fattore:*

- *Se $\mathfrak{M}$ possiede, come nel teorema precedente, una proiezione minimale E_0, assegnamole dimensione 1: quindi, per ogni altra proiezione E abbiamo che $d(E) \in \{0, 1, 2, 3, ..., n\}$ (ove $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$); in questo caso $\mathfrak{M}$ si dice un* fattore di tipo I_n.

- *Se $\mathfrak{M}$ non possiede proiezioni minimali e l'elemento I è finito (non è equivalente ad una proiezione $E < I$), poniamo $d(I) = 1$: quindi, per ogni altra proiezione E abbiamo che $d(E) \in [0, 1]$ e $\mathfrak{M}$ si dice un* fattore di tipo II_1.

- *Se $\mathfrak{M}$ non possiede proiezioni minimali e l'elemento I è infinito allora per ogni proiezione E abbiamo che $d(E) \in [0, \infty]$ e $\mathfrak{M}$ si dice un* fattore di tipo II_∞.

- *Se $\mathfrak{M}$ non possiede proiezioni finite non nulle si pone, per ogni $E \neq 0$: $d(E) = \infty$ e $\mathfrak{M}$ si dice un* fattore di tipo III.

11.5.5 Esempio

- *Un fattore di tipo I_n ($n < \infty$) è l'algebra delle matrici $\mathfrak{M} = M_n(\mathbb{C})$.*

- *Un fattore di tipo I_∞ è $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (spazio di Hilbert separabile). Quest'ultimo dovrebbe essere l'analogo di dimensione infinita di un fattore di tipo I_n; tuttavia esiste una forte analogia fra i fattori I_n e II_1, che manca con quelli di tipo I_∞: l'esistenza di una traccia.*

Se $\mathfrak{M}$ è di tipo I_n e $A \in \mathfrak{M}$ allora possiamo considerare la sua decomposizione spettrale e definire la sua *traccia* come

$$\tau(A) = \int_{-||A||}^{||A||} \lambda d(dE(\lambda))$$

(ove $d(E)$ è la dimensione della proiezione: $d(I) = 1$). Si tratta di un funzionale lineare su $\mathfrak{M}$ ed il nome si giustifica per via della

$$\tau(A) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A)$$

Se $\mathfrak{M}$ è di tipo II_1 possiamo definire allo stesso modo la traccia ed otteniamo di nuovo un funzionale lineare: la sua additività è tuttavia non banale da dimostrare (Teorema di Murray).

11.5.6 Teorema (MURRAY–VON NEUMANN) *Se $\mathfrak{M}$ è un fattore di tipo II_1 allora esiste un unico funzionale $\tau \in \mathfrak{M}^*$ tale che*

- $\tau(I) = 1$

- $\tau(AB) = \tau(BA)$

- $\tau(A^*A) \geq 0$

11.5.7 Esempio [7] *Se G è un gruppo (discreto) di ordine numerabile e $\mathcal{H} = l^2(G)$ allora*

$$L_g\varphi(h) = \varphi(g^{-1}h)$$

è un operatore unitario in $l^2(G)$.

Consideriamo la chiusura forte $\mathfrak{L}$ della sottoalgebra di $\mathcal{B}(l^2(\mathcal{H}))$ generata dalla famiglia $\{L_g\}_{g\in G}$: vige il seguente

11.5.8 Teorema *$\mathfrak{L}$ è un fattore se e solo se tutte le classi coniugate (a parte $\{e\}$) del gruppo G sono insiemi infiniti. In questo caso $\mathfrak{L}$ è di tipo II_1.*

11.5.9 Esempio *Il gruppo $S_{(\infty)}$ delle applicazioni biunivoche di $\mathbb{N}$ in sé che spostano solo un numero finito di elementi è un fattore di tipo II_1.*

Diamo ora un esempio di fattore di tipo II_∞: partiamo da un fattore $\mathfrak{M}$ di tipo II_1 e supponiamo che $\mathfrak{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$; se $\widetilde{\mathcal{H}}$ è la somma diretta numerabile di copie di $\mathcal{H}$, allora possiamo far agire una matrice infinita

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots \\ A_{21} & A_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ove $A_{ij} \in \mathfrak{M}$, per moltiplicazione a sinistra sui "vettori infiniti" ad elementi in $\mathcal{H}$. Denotiamo con $\mathfrak{M} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K})$ le matrici di questo tipo che sono operatori limitati su $\widetilde{\mathcal{H}}$.

11.5.10 Teorema *$\mathfrak{M} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K})$ è un fattore di tipo II_∞ e viceversa ogni fattore di tipo II_∞ è di questa forma.*

I fattori di tipo *III*, che sono sfuggiti per molto tempo alla comprensione degli studiosi, sono più ardui a costruirsi.

Per i fattori esiste una teoria della molteplicità spettrale, che conduce a risultati di isomorfismo: ne diamo un esempio.

Se $\mathcal{R}$ agisce su $\mathcal{H}$ (separabile!) e $x \in \mathcal{H}$, le proiezioni E'_x e E_x con immagini $\overline{\langle \mathcal{R}x \rangle} \subset \mathcal{R}'$ e $\overline{\langle \mathcal{R}'x \rangle} \subset \mathcal{R}$ ($\mathcal{R}'$ è il commutante: si rammenti il teorema di densità $\mathcal{R}'' = \mathcal{R}$).

[7] von Neumann, oltre alle motivazioni legate ai fondamenti della Meccanica Quantistica, gettò le basi della teoria dei fattori per affrontare lo studio delle algebre di gruppo dei gruppi discreti.

11.5.11 Teorema (MURRAY–VON NEUMANN) *Se $\mathfrak{M}$ è un fattore di tipo II_1, il numero*

$$c(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}') := \frac{d(E_x)}{d'(E'_x)}$$

non dipende da x.

Questa costante si dice *costante di accoppiamento*; se $\mathfrak{M}$ è di tipo I_n e $\mathfrak{M}'$ di tipo I_m allora il teorema vale ed afferma che

$$c = \frac{m}{n}$$

Se $\mathfrak{M}'$ è di tipo II_∞, d' ha senso solo a meno di un multiplo positivo e quindi $c(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ è indefinito.

11.5.12 Teorema *Due fattori di tipo II_1 che agiscano su uno stesso spazio di Hilbert separabile sono unitariamente equivalenti se e solo se hanno la stessa costante di accoppiamento oppure se ambedue i commutanti sono di tipo II_∞.*

Questi risultati sono solo la punta dell'*iceberg*: per una immersione più approfondita nella teoria si può ad esempio consultare [12].

Capitolo 12

TEORIA DELLE RAPPRESENTAZIONI

In questo capitolo studiamo le rappresentazioni delle C*-algebre non necessariamente commutative: la teoria commutativa è stata sviluppata nel capitolo precedente, mentre qui ci occuperemo della ben più complicata situazione nel caso non commutativo.

12.1 Irriducibilità di rappresentazioni

Ricordiamo la definizione fondamentale

12.1.1 Definizione *Una* rappresentazione *di una C*-algebra $\mathcal{A}$ è uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ dotato di uno *-morfismo di C*-algebre:*

$$\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}(\mathcal{H})$$

Se π è isometrica, la rappresentazione si dice fedele*.*

Dimostreremo in séguito che una C*-algebra ammette rappresentazioni fedeli.

Se $\mathcal{A}$ è una C*-algebra e $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una rappresentazione, allora, per un sottospazio vettoriale chiuso M di $\mathcal{H}$ sappiamo già che le seguenti affermazioni si equivalgono:

- M è π-stabile (i.e. $\pi(\mathcal{A})M \subset M$).
- $M^\perp$ è π-stabile.
- $E_M \in \pi(\mathcal{A})'$.
- $\pi \cong \pi|_M \oplus \pi|_{M\perp}$.

12.1.2 Definizione *Una rappresentazione π si dice* topologicamente irriducibile *se non ha sottospazi chiusi e π-stabili oltre a 0 e $\mathcal{H}$.*

12.1.3 Lemma (SCHUR) *π è irriducibile se e solo se $\pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C} \cdot I$.*

DIMOSTRAZIONE: $\pi(\mathcal{A})'$ è un'algebra di von Neumann e quindi è il sottospazio di Banach di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ generato dagli idempotenti autoaggiunti che sono proiettori ortogonali sui sottospazi chiusi π-stabili: cioè solo su 0 e $\mathcal{H}$, quindi gli unici tali proiettori sono 0 e 1, e l'algebra da loro generata è $\mathbb{C} \cdot 1$.

QED

12.1.4 Corollario *Se $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una rappresentazione allora sono equivalenti le*

- *π è (topologicamente) irriducibile;*
- $\overline{\pi(\mathcal{A})}^{uf} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$;
- $\overline{\pi(\mathcal{A}_1)}^{f} = \mathcal{B}(\mathcal{H})_1$.
- *Ogni $x \in \mathcal{H} \setminus 0$ è ciclico per la rappresentazione π.*

DIMOSTRAZIONE: Per l'equivalenza delle (1)–(3) basta notare che se π è irriducibile allora $\pi(\mathcal{A})$ è non degenere e quindi $\overline{\pi(\mathcal{A})}^{uf} = \pi(\mathcal{A})''$. Ma $\pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C}\cdot I$ e quindi $\pi(\mathcal{A})'' = \mathcal{B}(\mathcal{H})$. In modo analogo, usando il teorema di densità di Kaplanski 11.4.2, seguono le altre equivalenze.

La (4) equivale alla (3), dato che se $M_x = \overline{\pi(\mathcal{A})x}$ è π-stabile allora $E_{M_x} \in \pi(\mathcal{A})'$; ma se $E \in \pi(\mathcal{A})'$ e $x \in \mathcal{H}$ allora $Ex = x$ e quindi $\pi(\mathcal{A})x = E\pi(\mathcal{A})x$; dunque $M_x = E\mathcal{H}$.

Ne segue che se $E \in \pi(\mathcal{A})'$ è idempotente autoaggiunto $Ex = x$ allora $E_x \subset E$; ma se π è irriducibile E_x è 0 oppure I e quindi se π è irriducibile ogni vettore non nullo è ciclico, mentre se π non è irriducibile non ogni vettore non nullo è ciclico.

QED

Osserviamo inoltre che π è topologicamente irriducibile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$, $x \in \mathcal{H} \setminus 0$ e $y \in \mathcal{H}$ esiste un $A \in \mathcal{A}$ tale che

$$|\pi(A)x - y| < \varepsilon$$

Per una rappresentazione di un'algebra qualsiasi (non necessariamente normata) esiste il concetto algebrico di irriducibilità: una tale rappresentazione è irriducibile se gli unici sottospazi π-stabile (*anche non chiusi*) sono 0 e $\mathcal{H}$. Ovviamente l'irriducibilità algebrica implica quella topologica, e, per il lemma di Schur 12.1.3:

$$\pi \text{ algebricamente irriducibile} \iff \forall x \neq 0, y \in \mathcal{H}\ \exists A \in \mathcal{A} \quad \pi(\mathcal{A})x = y$$

Non dobbiamo comunque preoccuparci delle rappresentazioni algebriche, come mostra il seguente

12.1.5 Teorema (KADISON) *Una rappresentazione π di una C^*-algebra $\mathcal{A}$ è topologicamente irriducibile se e solo se è algebricamente irriducibile.*

DIMOSTRAZIONE: Una delle implicazioni è ovvia: dimostriamo quindi che una rappresentazione topologicamente irriducibile lo è anche algebricamente.

Il sottospazio $\pi(\mathcal{A})$ è chiuso in norma per ogni π; denotiamo $\pi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ancora con $\mathcal{A}$ e scriviamo moltiplicativamente l'azione della rappresentazione: $Ax = \pi(A)x$; supponiamo ora che

$$\mathcal{A}' = \mathbb{C} \cdot I$$

Vogliamo dimostrare che per ogni $x \neq 0$ e $y \in \mathcal{H}$ esiste un $A \in \mathcal{A}$ tale che $Ax = y$ (il che, come si è osservato esprime l'irriducibilità algebrica della rappresentazione).

Se $y = 0$ è $A = 0$ quindi possiamo supporre anche $y \neq 0$ e, normalizzando:

$$||x|| = ||y|| = 1$$

L'operatore

$$T_{y,x}(z) := (x, z)y$$

è lineare e continuo di norma 1, e tale che $T_{y,x}(x) = y$. Dunque esiste un $A_1 \in \mathcal{A}_1$ tale che

$$||A_1 x - y|| < \frac{1}{2}$$

sostituendo $y_1 := -(A_1 x - y)$ a y in questa maggiorazione si trova

$$||T_{y_1,x}|| < \frac{1}{2}$$

Dunque esiste un A_2 nella palla di raggio $1/2$ di $\mathcal{A}$ tale che

$$||A_2 x - y_1|| < \frac{1}{2^2}$$

Iterando il ragionamento otteniamo una successione di operatori A_n nella palla di raggio $1/2^n$ tali che

$$||A_n x - y_{n-1}|| < \frac{1}{2^n}$$

ove

$$y_n = \sum_{i=1}^{n-1} A_i x - y$$

Ma

$$\Big|\Big| \sum_{i=1}^{\infty} A_i \Big|\Big| \leq \sum_{i=1}^{\infty} ||A_i|| \leq 2$$

e quindi la serie $\sum_i A_i$ converge ad $A \in \mathcal{A}$; allora

$$\begin{array}{ccc} \lim_{n\longrightarrow\infty} y_n & = & 0 \\ || & & || \\ \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=1}^{n} A_i - y & = & Ax - y \end{array}$$

QED

Esistono delle generalizzazioni di questo risultato che ci limitiamo ad enunciare: la prima è dovuta a Dixmier

Teorema. *Se $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una rappresentazione irriducibile di una C*-algebra $\mathcal{A}$, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è un operatore di rango finito in $\mathcal{H}$ e N è un sottospazio vettoriale di dimensione finita di $\mathcal{H}$ allora esiste un $A \in \mathcal{A}$ tale che $||A|| = ||T|_N||$ e*

$$\pi(A)|_N = T|_N$$

La seconda a Glimm e Kadison:

Teorema. *Se nel teorema precedente T è autoaggiunto (risp. unitario) allora anche A può scegliersi autoaggiunto (risp. unitario).*

Per le dimostrazioni si rimanda a [7], § 2.8.

Sia $\mathcal{A}$ una C*-algebra e π_1, π_2 rappresentazioni di $\mathcal{A}$ negli spazi di Hilbert $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$. Definiamo l'insieme degli *operatori di allacciamento*:

$$(\pi_1, \pi_2) := \{T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2 \,|\, T \text{ continuo e } \forall A \in \mathcal{A}\ T\pi_1(A) = \pi_2(A)T\}$$

Notiamo che

$$\pi(\mathcal{A})' = (\pi, \pi)$$

Ricordiamo che le rappresentazioni sono *equivalenti*, e si scrive $\pi_1 \cong \pi_2$, se esiste un operatore unitario $U \in (\pi_1, \pi_2)$.

12.1.6 Definizione *Se $(\pi_1, \pi_2) = 0$ le rappresentazioni si dicono* disgiunte *e si scrive*[1] $\pi_1 \circ\!\!\!\!\mid\, \pi_2$.

12.1.7 Lemma *Se π_1, π_2, π_3 sono rappresentazioni di una C*-algebra $\mathcal{A}$ allora:*

- $(\pi_1, \pi_2)^* = (\pi_2, \pi_1)$.
- $(\pi_2, \pi_3)(\pi_1, \pi_2) \subset (\pi_1, \pi_3)$.
- $(\pi_1, \pi_2)^*(\pi_1, \pi_2) \subset \pi_1(\mathcal{A})'$ *e* $(\pi_1, \pi_2)(\pi_1, \pi_2)^* \subset \pi_2(\mathcal{A})'$.

[1] Seguendo George Mackey.

Dimostrazione: Sia $T \in (\pi_1, \pi_2)$: allora la (1) segue da

$$(T\pi_1(A^*))^* = (\pi_2(A^*)T)^*$$

Se $R \in (\pi_2, \pi_3)$ allora $RT \in (\pi_1, \pi_3)$ il che dimostra la (2). Infine la (1) e la (2) implicano direttamente la (3).

QED

12.1.8 Lemma (Schur) *Se π_1, π_2 sono rappresentazioni della C^*-algebra $\mathcal{A}$ e se $(\pi_1, \pi_2) \neq 0$ allora esistono due sottospazi vettoriali chiusi $M_1 \subset \mathcal{H}_1$ e $N \subset \mathcal{H}_2$ tali che $\pi_1 M_1 \subset M_1$ e $\pi_2 M_2 \subset M_2$ e*

$$\pi_1|_{M_1} \cong \pi_2|_{M_2}$$

Dimostrazione: Consideriamo un operatore non nullo $T \in (\pi_1, \pi_2)$ e la sua decomposizione polare $T = V|T|$; dimostriamo che

$$|T| \in \pi_1(\mathcal{A})' \qquad \text{e} \qquad V \in (\pi_1, \pi_2)$$

Dato che T è di allacciamento, si ha che

$$T^*T \in \pi_1(\mathcal{A})' \qquad \text{e} \qquad TT^* \in \pi_2(\mathcal{A})'$$

e quindi, per ogni $x \in \mathcal{H}_1$:

$$(x, T^*Tx) = (Tx, Tx) \geq 0$$

dunque $T^*T \geq 0$; abbiamo allora $B = |T|$ autoaggiunto e positivo tale che $B^2 = T^*T$, i.e. $|T| \in \pi_1(\mathcal{A})'$.

Quindi
$$V|T|\pi_1(A) = \pi_2(A)V|T|$$
i.e. per ogni x
$$(V\pi_1(A) - \pi_2(A)V)|T|x = 0$$
Ma la chiusura del sottospazio $\{|T|x\}$ è $(\ker T)^\perp$, e $\ker T$ è un sottospazio π_1-stabile, dato che $T \in (\pi_1, \pi_2)$. Quindi in $\mathcal{H}_1$:

$$(V\pi_1(A) - \pi_2(A)V) = 0$$

e V è di allacciamento, $VV^* \in \pi_2(\mathcal{A})'$, $V^*V \in \pi_1(\mathcal{A})'$ e

$$VV^*\mathcal{H}_2 = M_2 \qquad \text{e} \qquad V^*V\mathcal{H}_1 = M_1$$

QED

12.1.9 Definizione *Si dice che π_1 è una* sottorappresentazione *di π_2 se esiste una isometria in (π_1, π_2) e si scrive $\pi_1 \leq \pi_2$.*

In altri termini, $\pi_1 \leq \pi_2$ se

$$\pi_1 \cong \pi_2|_M$$

ove M è un sottospazio di $\mathcal{H}_2$.

12.1.10 Definizione *Si dice che π_1 è* quasi-contenuta *in π_2 se non esistono sotto-rappresentazioni (a parte 0) di π_1 disgiunte da π_2 e si scrive $\pi_1 \ll \pi_2$.*

12.1.11 Definizione *Si dice che π_1 è* quasi-equivalente *a π_2 se $\pi_1 \ll \pi_2$ e $\pi_2 \ll \pi_1$ e si scrive $\pi_1 \approx \pi_2$.*

Nota. *Le nostre rappresentazioni saranno sempre non degeneri.*

Se π_1, π_2 sono rappresentazioni si $\mathcal{A}$ e $\pi_1 \cong \pi_2$ allora

$$\overline{\pi_1 \oplus \pi_2(\mathcal{A})} = \{T \oplus UTU^{-1} \,|\, T \in \pi_1(\mathcal{A})''\}$$

Un elemento di questo spazio è limite forte di elementi della forma

$$\begin{pmatrix} \pi_1(A_\alpha) & 0 \\ 0 & \pi_2(A_\alpha) \end{pmatrix}$$

Se $\pi_1 \between \pi_2$ allora

$$\overline{\pi_1 \oplus \pi_2(\mathcal{A})} = \{T \oplus R \,|\, T \in \pi_1(\mathcal{A})'', R \in \pi_2(\mathcal{A})''\}$$

12.1.12 Proposizione

$$(\pi_1 \oplus \pi_2)(\mathcal{A})' = \left\{ \begin{pmatrix} T & S \\ S' & R \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} T \in (\pi_1, \pi_1) = \pi_1', S \in (\pi_1, \pi_2), \\ R \in (\pi_2, \pi_2) = \pi_2', S' \in (\pi_2, \pi_1) \end{matrix} \right\}$$

DIMOSTRAZIONE: Se $B = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$ allora per $B \in (\pi_1 \oplus \pi_2)(\mathcal{A})'$:

$$E_i B E_j = R_{ij} \in (\pi_i, \pi_j) = (\pi_1 \oplus \pi_2(\mathcal{A}))'$$

Il viceversa è ovvio.

QED

12.1.13 Teorema *Se π_1, π_2 sono rappresentazioni (non degeneri) di $\mathcal{A}$ allora*

$$\pi_1 \overset{|}{\circ} \pi_2 \iff \overline{\pi_1 \oplus \pi_2(\mathcal{A})} = \overline{\pi_1(\mathcal{A})} \oplus \overline{\pi_2(\mathcal{A})}$$

Dimostrazione: Osserviamo che

$$(\pi_1 \oplus \pi_2)(\mathcal{A})' = \begin{pmatrix} \pi_1(\mathcal{A})' & 0 \\ 0 & \pi_2(\mathcal{A})' \end{pmatrix} \iff \pi_1 \overset{|}{\circ} \pi_2$$

Dato che un elemento di $\pi_1 \oplus \pi_2(\mathcal{A})''$ è diagonale (commuta quindi almeno con $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$) allora

$$T \in \pi_1 \oplus \pi_2(\mathcal{A})'' \iff T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$$

ove un elemento della forma $\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$ commuta con T se T_1 commuta con R e T_2 commuta con S. Quindi

$$\pi_1 \overset{|}{\circ} \pi_2 \iff \overline{\pi_1 \oplus \pi_2(\mathcal{A})} = \pi_1 \oplus \pi_2(\mathcal{A})'' = \left\{ \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \middle| T_i \in \pi_i(\mathcal{A})'' \right\}$$

QED

Osserviamo che se $\ker \pi_1 = \ker \pi_2$ allora esiste uno *-isomorfismo di C*-algebre

$$\rho : \pi(\mathcal{A}) \longrightarrow \pi_2(\mathcal{A})$$

12.1.14 Definizione *Se π è una rappresentazione di una C*-algebra $\mathcal{A}$ e $\mathfrak{n}$ è un numero cardinale, definiamo*

$$\mathfrak{n}\pi := \bigoplus_{\alpha \in A} \pi_\alpha$$

ove A è un insieme qualsiasi con $\mathrm{Card}(A) = \mathfrak{n}$ e ciascuna π_α è una copia della rappresentazione π.

12.1.15 Teorema *Se π_1, π_2 sono rappresentazioni di $\mathcal{A}$ allora sono equivalenti le*

- $\pi_1 \approx \pi_2$ *(quasi-equivalenza).*
- *Esiste un numero cardinale $\mathfrak{n}$ tale che $\mathfrak{n}\pi_1 \cong \mathfrak{n}\pi_2$.*

- *Esiste uno *-isomorfismo di C*-algebre* $\rho : \pi_1(\mathcal{A})'' \longrightarrow \pi_2(\mathcal{A})''$ *tale che*

$$\rho \circ \pi_1 = \pi_2$$

Osserviamo che la (3) equivale anche alla

$$(\pi_1 \oplus \pi_2)(\mathcal{A})'' = \{T \oplus \rho(T) \,|\, T \in \pi_1(\mathcal{A})'', \rho \text{ *-isomorfismo}\}$$

Di questo teorema non dimostreremo l'implicazione (3)⇒(2), che richiede alcuni risultati sulle algebre di von Neumann, essenzialmente quello che enunciamo qui di seguito:

Teorema. *Se* $\mathcal{R}_1$ *e* $\mathcal{R}_2$ *sono algebre di von Neumann e* $\rho : \mathcal{R}_1 \longrightarrow \mathcal{R}_2$ *è uno *-isomorfismo (suriettivo) allora*

- ρ *è un omeomorfismo rispetto alle topologie ultradeboli.*
- *Esiste un operatore unitario* U *che renda commutativo il seguente diagramma:*

$$\begin{array}{ccc} A \in \mathcal{R}_1 & \xrightarrow{\quad\rho\quad} & \mathcal{R}_2 \ni A \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ A \oplus A \oplus A \oplus \cdots \in \mathcal{R}_1^{\aleph_0} & \xrightarrow{U} & \mathcal{R}_2^{\aleph_0} \ni A \oplus A \oplus A \oplus \cdots \end{array}$$

12.1.16 Esempio

- $\rho(A) = UAU^{-1}$
- $\rho(A) = A \oplus A \oplus A \oplus ...$
- $\rho(A) = A|_M$ *ove* M *è un sottospazio stabile e tale che* $A|_M = 0$ *se e solo se* $A = 0$, *e* $E_M \in \mathcal{R}'$, *con* $\mathcal{R}'M$ *insieme totale.*

Nel terzo esempio, ρ è uno *-isomorfismo se e solo se il minimo proiettore ortogonale su $\mathcal{R}'M$ (che si dice *supporto centrale*) è l'operatore identico I.

In un'algebra di von Neumann $\mathcal{R}$ consideriamo degli operatori $\{E_\alpha\}$ idempotenti, a due a due ortogonali, tali che

$$\sum_\alpha E_\alpha \xrightarrow{\text{fortemente}} E \in \mathcal{R}$$

12.1.17 Definizione ρ è normale *se*

$$\rho\left(\sum_\alpha E_\alpha\right) = \sum_\alpha \rho(E_\alpha)$$

12.1.18 Proposizione *Se $\rho : \mathcal{R}_1 \longrightarrow \mathcal{R}_2$ è uno *-isomorfismo fra algebre di Von Neumann, allora è normale.*

Dimostrazione: Sia $E = \sum_\alpha E_\alpha$; allora $E_\alpha \leq E$. Se E_1, E_2 sono idempotenti ortogonali fra loro, anche $\rho(E_1)$ e $\rho(E_2)$ lo sono, sicché

$$E_1 \leq E_2 \Rightarrow \rho(E_1) \leq \rho(E_2)$$

Quindi

$$\sum_\alpha E_\alpha \leq E \qquad \text{e} \qquad \sum_\alpha \rho(E_\alpha) \leq \rho(E)$$

Ma ρ è uno *-isomorfismo (suriettivo) e quindi:

$$F := \sum_\alpha \rho(E_\alpha) \leq \rho\left(\sum_\alpha E_\alpha\right) = \rho(E)$$

da cui

$$E = \sum_\alpha \rho^{-1}\rho(E_\alpha) \leq \rho^{-1} \sum_\alpha \rho(E_\alpha) \leq \rho^{-1}(F)$$

Dunque $\rho(E) \leq F \leq \rho(E)$ (gli *-isomorfismi conservano le disuguaglianze di operatori), cioè $F = \rho(E)$.

QED

Consideriamo un controesempio: sia $\mathcal{R} = L^\infty([0,1])$, e $\omega \in \sigma(\mathcal{R})$; se $f \in \mathcal{R}$ poniamo

$$\rho(f) := f \oplus \omega(f) \in \mathcal{R} \oplus \mathbb{C}$$

Si tratta di uno *-isomorfismo che tuttavia *non è ultradebolmente continuo*: si noti che questo è perfettamente compatibile col risultato precedente, dato che ρ non è normale e dunque $\operatorname{im}\rho$ *non* è un'algebra di von Neumann.

Affrontiamo ora la dimostrazione del teorema 12.1.15.

(1)$\Rightarrow$(3) Consideriamo lo spazio M π_2-stabile e $E = E_M$; se $T \in (\pi_1, \pi_2)$ allora $E \circ T \in (\pi_1, \pi_2|_M)$; viceversa, se $T_0 \in (\pi_1, \pi_2|_M)$ allora $T_0 \in (\pi_1, \pi_2)$: quindi

$$E(\pi_1, \pi_2) = (\pi_1, \pi_2|_M)$$

ne segue che

$$\pi_1 \approx \pi_2 \iff \left.\begin{array}{c}(\pi_1,\pi_2)\mathcal{H}_1\\(\pi_2,\pi_1)\mathcal{H}_1\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{sono totali nei rispettivi}\\ \text{spazi di Hilbert}\end{array}$$

Ora consideriamo $\sum_i R_i X_i$ (con $X_i \in \mathcal{H}_1$ e $T_i \in (\pi_1, \pi_2)$): in virtù dell'equivalenza precedente, lo spazio di questi elementi è denso in $\mathcal{H}_2$, quindi

$$\pi_2(A)y = \pi_2(A)\sum_i T_i X_i = \sum_i \pi_2(A) T_i X_i = \sum_i T_i \pi_1(A) X_i$$

e dunque, se

$$\rho(T)y := \sum_i T_i T X_i$$

$(T \in \pi_1(\mathcal{A})'')$ allora

$$(\dagger) \qquad ||\rho(T)y||^2 \leq ||T||^2 ||y||^2$$

il che significa he $\rho(T)$ è un operatore lineare ben definito e continuo (ed ovviamente uno *-omomorfismo). Definiamo ora ρ' scambiando nella definizione di ρ il ruolo di π_1 e π_2; si noti che allora $\rho^{-1} = \rho'$, quindi ρ è invertibile e risulta uno *-isomorfismo. Non resta dunque da dimostrare che la (†).

Notiamo che

$$|| \sum_i T_i T X_i ||^2 = \sum_{i,j} (T_i T X_i, T_j T X_j) = \sum_{i,j} (T X_i, T_i^* T_j T X_j)$$

e quindi che

$$\begin{aligned} ||T||^2 \sum_{i,j} (X_i, T_i^* T_j X_j) &- \sum_{i,j} (T X_i, T_i^* T_j T X_j) \\ &= \sum_{i,j} \big(||T||^2 (X_i, T_i^* T_j X_j) - (T\lambda_i, T_i^* T_j T_i X_j) \big) \end{aligned}$$

è positiva (il che ci fornisce la diseguaglianza voluta): infatti $T_i^* T_j \in (\pi_1, \pi_2)$ quindi commuta con T, e

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \Big(||T||^2 (X_i, T_i^* T_j X_j) - (T\lambda_i, T_i^* T_j T_i X_j) \Big) = \\ &= \sum_{i,j} (X_i, T_I^* T_j (||T||^2 I - T^* T) X_j) \\ &= \sum_{i,j} (B^* X_i, T_i^* T_j B X_j) = \sum_{i,j} (T_i B^* X_i, T_j B X_j) \\ &= || \sum_i T_i B X_i ||^2 \geq 0 \end{aligned}$$

(ove $(||T||^2 I - T^* T)$ che figura al secondo membro è un elemento positivo dell'algebra di von Neumann che è della forma $B^* B$, con $B \in \pi_1(\mathcal{A})''$).

QED

12.2 Stati e rappresentazioni

Consideriamo due rappresentazioni (come al solito non degeneri) π_1, π_2 di una C*-algebra $\mathcal{A}$: allora

12.2.1 Proposizione

$$\overline{\mathbb{C}\langle(\pi_1, \pi_2)\mathcal{H}_1\rangle} = \mathcal{H}_2 \iff \pi_1 \ll \pi_2$$

(ove con $\mathbb{C}\langle S\rangle$ denotiamo il sottospazio vettoriale generato dall'insieme S in uno spazio di Hilbert).

DIMOSTRAZIONE: Se

$$M := \overline{\mathbb{C}\langle(\pi_1, \pi_2)\mathcal{H}_1\rangle}$$

ovviamente M è π_2-invariante:

$$T \in \pi_2(\mathcal{A})' \Rightarrow T \in (\pi_2, \pi_2)$$

ma $(\pi_2, \pi_2)(\pi_1, \pi_2) \subset (\pi_1, \pi_2)$ i.e. $TM \subset M$.

Dunque M è l'immagine di un operatore G idempotente autoaggiunto che deve commutare con $\pi_2(\mathcal{A})$:

$$M = G\mathcal{H}_2 \qquad \text{e} \qquad G \in \pi_2(\mathcal{A})''$$

Ma $\pi_2(A)M \subset M$, dato che $\pi_2(A)TX = T\pi_1(A)X \in M$, sicché $G \in \pi_2(\mathcal{A})'$, e quindi

$$G \in \pi_2(\mathcal{A})' \cap \pi_2(\mathcal{A})'' = \mathcal{Z}(\pi_2(\mathcal{A})'')$$

Dunque, $\pi_1 \oplus \pi_2$ ha la sottorappresentazione

$$(\dagger) \qquad \pi_2 = \pi_2|_{G\mathcal{H}_2} \oplus \pi_2|_{G\mathcal{H}_2^\perp}$$

che quindi è somma diretta di rappresentazioni quasi-contenute in π_1 e disgiunte da π_1.

Ne segue che, a meno che $G = I$ (e quindi $M = \mathcal{H}_2$) non può aversi $\pi_1 \ll \pi_2$ e viceversa.

QED

Osserviamo che, se $\mathcal{A} = C(X)$ e π_1, π_2 sono sue rappresentazioni in spazi di Hilbert separabili allora

$$\pi_1 \approx \pi_2 \iff \widehat{\mu_1} = \widehat{\mu_2}$$

(le misure associate basiche sono uguali). La decomposizione $(\dagger)$ precedente diviene, a livello di misure, la decomposizione

$$\widehat{\mu_2} = \mu_2' + \mu_2''$$

con $\mu_2' \ll \widehat{\mu_1}$ e $\mu_2'' \perp \widehat{\mu_1}$.

Sia ora $\mathcal{A}$ una C*-algebra qualsiasi (con unità).

12.2.2 Definizione *Un elemento $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si dice* positivo *se per ogni $x \in \mathcal{H}$:*

$$(x, Ax) \geq 0$$

e si scrive $A \geq 0$.

Equivalentemente, $A \geq 0$ è positivo se e solo se è autoaggiunto ed il suo spettro è contenuto nel "semiasse positivo" $[0, \infty]$, cioè se esiste B tale che $A = B^*B$.

Quest'ultima caratterizzazione può scegliersi come definizione di positività in una C*-algebra qualsiasi.

12.2.3 Definizione *La* parte positiva *di una C*-algebra $\mathcal{A}$ è l'insieme*

$$\mathcal{A}_+ := \{B^*B \mid B \in \mathcal{A}\}$$

ed i suoi elementi si dicono positivi.

12.2.4 Lemma *Se $\mathcal{A}$ è una C*-algebra con identità I e $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ allora:*

- $\sigma(A_1A_2) \setminus 0 = \sigma(A_2A_1) \setminus 0$.
- *Se $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ sono autoaggiunti, da $\sigma(A_i) \subset [0, \infty]$ segue che $\sigma(A_1 + A_2) \subset [0, \infty]$.*

DIMOSTRAZIONE: (1) Sia $\lambda \neq 0$ un elemento del risolvente di A_1A_2:

$$R := (A_1A_2 - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{A}$$

Ma

$$(A_2A_1 - \lambda I)^{-1} = \lambda^{-1}(A_2RA_1 - I)$$

dato che

$$\begin{cases} (A_2RA_1 - I)(A_2A_1 - \lambda I) & = \lambda I \\ (A_2A_1 - \lambda I)(A_2RA_1 - I) & = \lambda I \end{cases}$$

Infatti

$$\begin{aligned} (A_2RA_1A_2A_1 - \lambda A_2RA_1 - A_2A_1 + \lambda I) = & \\ &= A_2R(A_2A_1 - \lambda I)A_1 - A_2A_1 + \lambda I \\ &= A_2IA_1 - A_2A_1 + \lambda I = \lambda I \end{aligned}$$

Analogamente per l'altra espressione.

(2) Ricordiamo intanto che

$$\sigma(B) \subset [0,\infty] \iff \forall\lambda > 0 \quad \sigma(\lambda B) \subset [0,\infty]$$

Dunque possiamo scegliere λ in modo che $||\lambda A_1||, ||\lambda A_2|| \leq 1$ e

$$\sigma(\lambda(A_1 + A_2)) \subset [0,\infty] \Rightarrow \sigma(A_1 + A - 2) \subset [0,\infty]$$

e quindi supporre che sia

$$||A_1||, ||A_2|| \leq 1$$

Dunque $\sigma(A_i) \in [0,1]$ i.e. $\sigma(I - A_i) \in [0,1]$.

Ora consideriamo $T_i = I - A_i$; ovviamente

$$\left|\left|\frac{1}{2}(T_1 + T_2)\right|\right| \leq 1 \implies \left|\left|I - \frac{1}{2}(A_1 + A - 2)\right|\right| \leq 1$$

il che implica $\sigma(I - \frac{1}{2}(A_1 + A_2)) \subset [0,\infty]$. e quindi

$$\sigma\left(\frac{1}{2}(A_1 + A - 2)\right) \subset [0,2] \qquad \text{e} \qquad \sigma(A_1 + A_2) \subset [0,4]$$

QED

12.2.5 Teorema

- $\mathcal{A}_+ = \{A \in \mathcal{A} \,|\, A = A^* \ e\ \sigma(A) \subset [0,\infty]\}$
- $\mathcal{A}_+$ *è un cono, tale che*
  - $\mathcal{A}_+ \cap -\mathcal{A}_+ = 0$.
  - $\mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_+ \subset \mathcal{A}_+$.
  - $\mathbb{R}^+ \cdot \mathcal{A}_+ \subset \mathcal{A}_+$.
  - $\mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_+ = \{A \in \mathcal{A} \,|\, A = A^*\}$.

DIMOSTRAZIONE: La (2c) segue dalla (1) in modo ovvio. Dimostriamo la (2d): sia $A = A^*$, e consideriamo le funzioni continue

$$f_\pm(\lambda) := \begin{cases} |\lambda| & \text{se } \pm\lambda \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Ovviamente $(f_+ - f_-)(\lambda) = \lambda$ e $f_\pm \geq 0$. Possiamo applicare il calcolo funzionale continuo (dato che A è autoaggiunto) ottenendo

$$(f_+ - f_-)(A) = A \qquad \text{e} \qquad f_\pm(A) = A_\pm$$

ove $A_\pm$ è autoaggiunto con spettro positivo (teorema della mappa spettrale); dunque, per ogni A autoaggiunto si ha $A = A_+ - A_-$ ove $A_\pm \in \{B \in \mathcal{A} \,|\, B = B^* \text{ e } \sigma(B) \subset [0, \infty]\}$.

Quindi anche la (2d) segue dalla (1): dimostriamo quest'ultima. Che si abbia

$$\mathcal{A} \supset \{A \,|\, A = A^* \text{ e } \sigma(A) \subset [0, \infty]\}$$

segue di nuovo dal calcolo funzionale continuo con $f(\lambda) = +\sqrt{\lambda}$, $\lambda \geq 0$; con questa funzione si trova che $f(A) = B$ è autoaggiunto e tale che $B^2 = A$ (in particolare $B^* B = A$).

Dimostriamo quindi l'inclusione opposta. Sia $B^* B \in \mathcal{A}_+$: ovviamente $B^* B$ è autoaggiunto, e quindi il suo spettro è contenuto in $\mathbb{R}$; calcoliamo su $B^* B$ le funzioni $f_\pm$ introdotte in precedenza, ottenendo:

$$B^* B = f_+(B^* B) - f_-(B^* B) = u^2 - v^2$$

(un operatore a spettro positivo è il quadrato di un operatore autoaggiunto). Ma $A_+ A_- = 0$ e quindi $uv = 0$ che, con

$$vB^* Bv = v(u^2 - v^2) = vu^2 v - v^4$$

implica che $vB^* Bv = -v^4$. Quindi se definiamo

$$A := Bv$$

otteniamo $A^* A = -v^4$. Ora, sappiamo dalla (1) del lemma che

$$\sigma(A^* A) \setminus 0 = \sigma(AA^*) \setminus 0$$

pertanto, se $\sigma(A^* A) \subset [0, \infty]$ allora anche $\sigma(AA^*) \subset [0, \infty]$, e, per $A = Bv$ si trova

$$\sigma(A^* A) = \sigma(v^4) \subset [0, \infty] \implies \sigma(A^* A + AA^*) \subset [0, \infty]$$

Dunque, scrivendo $A = A_1 + iA_2$ (A_i autoaggiunti) otteniamo

$$\begin{aligned} A^* &= A_1 - iA_2 \\ A^* A &= A_1^2 + A_2^2 + i(A_1 A_2 - A_2 A_1) \\ AA* &= A_1^2 + A_2^2 - i(A_1 A_2 - A_2 A_1) \end{aligned}$$

cioè
$$A^*A + AA^* = 2(A_1^2 + A_2^2)$$
e $\sigma(A^*A + AA^*) \subset [-\infty, 0]$ i.e. $\sigma(A_1^2 + A_2^2) \subset [-\infty, 0]$. Ma
$$\sigma(A_1^2) \subset [0, \infty] \qquad \text{e} \qquad \sigma(A_2^2) \subset [0, \infty]$$
e, per la (2) del lemma:
$$\sigma(A_1^2 + A_2^2) \subset [0, \infty]$$
Le due inclusioni dimostrate significano che
$$\sigma(A_1^2 + A_2^2) = 0$$
cioè che $A_1^2 + A_2^2$ è un operatore nilpotente (ed autoaggiunto), dunque $A_1^2 + A_2^2 = 0$ ovvero $A_1 = A_2 = 0$. Ne segue $A = 0$, e quindi. $v = 0$. Risulta dunque $B^*B = u^2$.

In definitiva ogni B^*B è autoaggiunto con spettro positivo e quindi
$$\mathcal{A}_+ = \{A \,|\, A^*A \text{ e } \sigma(A) \subset [0, \infty]\}$$
Questo dimostra la (1).

La (2a) segue immediatamente e, per la (2) del lemma, anche la (2b).

QED

Il cono $\mathcal{A}_+$ genera lo spazio degli elementi autoaggiunti.

12.2.6 Definizione *f si dice* hermitiano *se $f = f^*$.*

Osserviamo che, per ogni $f \in \mathcal{A}^*$:
$$f = \frac{1}{2}(f + f^*) + i\frac{1}{2i}(f - f^*)$$
e quindi f si decompone in somma di hermitiani.

I funzionali lineari continui hermitiani formano uno spazio di Banach reale $\mathcal{A}_h^*$, e, se $A \in \mathcal{A}_{aa}$ e $f \in \mathcal{A}_h^*$ allora $f(A) \in \mathbb{R}$. Se $f \in \mathcal{A}^*$ allora si definisce
$$f^*(A) := \overline{f(A^*)}$$
Evidentemente $||f^*|| = ||f||$, $f^{**} = f$ e la mappa $f \longmapsto f^*$ è antilineare.

12.2.7 Definizione

- *Se A e B sono autoaggiunti e se $A - B \in \mathcal{A}_+$ allora scriviamo $A \geq B$.*
- *Il* cono duale *della C^*-algebra $\mathcal{A}$ è l'insieme*
$$\mathcal{A}_+^* := \{f \in \mathcal{A}^* \,|\, \forall A \in \mathcal{A}_+ \ f(A) \geq 0\}$$

Ovviamente

$$\mathcal{A}_+^* \subset \mathcal{A}_h^*$$

e, se $f \in \mathcal{A}_+$ allora la mappa

$$(A, B) \longmapsto f(A^*B)$$

definisce una forma sesquilineare semidefinita positiva: ogni tale forma soddisfa la disuguaglianza di Schwartz:

$$|f(A^*B)|^2 \leq f(A^*A)f(B^*B)$$

e

$$f((\alpha A + \beta B)^2(\alpha A + \beta B)) \geq 0$$

da cui segue

$$f(A^*B) = \overline{f(AB^*A)}$$

(per $B = I$ si trova $f \in \mathcal{A}_h^*$).

12.2.8 Teorema *Un funzionale lineare f qualsiasi è positivo se e solo se è continuo e $f(I) = ||f||$.*

DIMOSTRAZIONE: Se f è positivo allora (ricordando che $\sigma(A^*A) \subset [0, ||A||^2]$ e dunque che $||A||^2 I - A^*A \in \mathcal{A}_+$):

$$f\left(||A||^2 I - A^*A\right) = ||A||^2 f(I) - f(A^*A)$$

cioè $f(A^*A) \leq ||A||^2 - f(I)$; ma

$$|f(A)|^2 = |f(IA)|^2 \leq f(I)f(A^*A) \leq ||A||^2 f(I)^2$$

da cui la continuità di f. Che sia $f(I) = ||f||$ segue da $f(I) \leq ||A||$.

Viceversa, se $f \neq 0$ è continuo e $f(I) = ||f||$, allora esiste un λ tale che $||\lambda f|| = 1$, dunque possiamo assumere $f(I) = 1$. A questo punto la dimostrazione del teorema si riduce a quella del lemma seguente:

12.2.9 Lemma *Se $||f|| = f(I) = 1$ allora per ogni operatore normale A*

$$f(A) \in \overline{\{\mathrm{Conv}\,\sigma(A)\}} = \bigcap\{\textit{dischi chiusi contenenti } \sigma(A)\}$$

Dimostrazione: Si tratta di far vedere che per ogni $\lambda\in\sigma(A)$ tale che $|\lambda-z|\leq a$ si ha

$$|f(\lambda)-z|\leq a$$

Ma A è normale, quindi anche $(A-zI)$ lo è, sicché

$$||A-zI|| = \text{spr}(A-zI)$$

(raggio spettrale), pertanto

$$|f(A)-z| = |f(A-zI)|\leq a$$

QED

12.2.10 Definizione *Lo* spazio degli degli stati *della C*-algebra $\mathcal{A}$ è*

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}) := \{f\in\mathcal{A}^*_+ \mid ||f|| = 1\}$$

12.2.11 Proposizione $\mathcal{S}(\mathcal{A}))$ *è convesso, *-debolmente chiuso e compatto.*

Dimostrazione: È un convesso dato che lo è $\mathcal{A}^*_+$. Inoltre

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}) = \bigcap_{a\in\mathcal{A}}\{f\in\mathcal{A}^* |\, f(A^*A)\geq 0\}\cap\{f\,|\,f(I)-1=0\}$$

quindi è intersezione di insiemi *-debolmente chiusi. Infine è

$$\mathcal{S}(\mathcal{A})\subset\mathcal{A}^*_1$$

(palla unitaria in $\mathcal{A}^*$) che è un compatto di Hausdorff nella topologia *-debole (teorema di Alaoglu 8.2.12); pertanto $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ è compatto in quanto chiuso in un compatto.

QED

Una conseguenza del teorema di Hahn–Banach è il

12.2.12 Teorema *Se $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$ sono C*-algebre con la stessa unità I e se $\omega\in\mathcal{S}(\mathcal{A})$ allora esiste un $\widetilde{\omega}\in\mathcal{S}(\mathcal{B})$ tale che $\widetilde{\omega}|_{\mathcal{A}} = \omega$.*

12.2.13 Esempio *Si consideri una C*-algebra commutativa $\mathcal{A}$ e $\varphi\in\sigma(\mathcal{A})$; allora*

$$\varphi(A^*A) = |\varphi(A)|^2 \geq 0$$

cioè φ è uno stato. Ne segue che, per ogni $A \in \mathcal{A}$ esiste $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ tale che

$$\omega(A^*A) = ||A||^2$$

Infatti A^*A è autoaggiunto e genera la C-algebra commutativa $C*(A^*A, I)$ che possiede uno stato φ (infatti $\sigma(C^*(A^*A, I)) \cong \sigma(A^*A)$), quindi esiste $\varphi \in \sigma(\mathcal{A})$ tale che $\varphi(A^*A) = ||A||^2$. Usando il teorema precedente possiamo estendere φ e ω.*

Dato che lo spazio degli stati $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ è un convesso compatto (in uno spazio vettoriale topologico localmente convesso $\mathcal{A}^*$), per il teorema di Krejn–Millman 8.3.10 l'insieme dei suoi punti estremali è non vuoto e:

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}) = \overline{\mathrm{Conv}(\mathrm{Extr}(\mathcal{S}(\mathcal{A})))}$$

12.2.14 Definizione *I punti estremali di $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ si dicono* stati puri*; l'insieme degli stati puri si denota con $\mathcal{P}(\mathcal{A})$.*

12.2.15 Esempio *Se $\mathcal{A}$ è commutativa allora per $A = B^*B$ si ha $\widehat{A}\varphi = \widehat{B}(\varphi)^2$; inoltre, se $f\in\mathcal{A}^*$, per il teorema di Riesz–Markov 9.2.2, esiste una misura regolare positiva μ tale che*

$$f(A) = \int \widehat{A}(\varphi)d\mu(\varphi)$$

dunque

$$f \geq 0 \iff \mu \text{ è positiva}$$

12.2.16 Definizione *Se $\omega, \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ si dice che ω è uno* stato dominato *da φ e scriviamo $\omega \ll \varphi$ se esiste una costante $M \geq 0$ tale che*

$$M\varphi - \omega \geq 0$$

L'insieme degli stati dominati da $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ si denota con C_φ.

Il seguente lemma mostra che gli stati puri corrispondono alle misure di Dirac

12.2.17 Lemma $\omega \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \iff \operatorname{supp} \mu_\omega = \{x\}$

Dimostrazione: Se il supporto della misura μ_ω contiene almeno due punti distinti $\varphi_1, \varphi_2 \in \operatorname{supp} \mu_\omega$ allora, dato che siamo in uno spazio di Hausdorff, per il lemma di Urysohn 2.3.2 esiste una funzione continua $f : \sigma(\mathcal{A}) \longrightarrow [0,1]$ tale che $f(0) = \varphi_1$ e $f(1) = \varphi_0$: in questo modo $d\mu_\omega = f d\mu_\omega + (1-f)d\mu_\omega$ e

$$\omega(A) = \int \widehat{A}(\varphi) d\mu_\omega(\varphi) = \int \widehat{A}(1-f)d\mu_\omega + \int \widehat{A} f d\mu_\omega = f_1(A) + f_2(A)$$

(ove f_1, f_2 sono funzionali positivi che possiamo normalizzare in modo da avere

$$\omega(A) = \int (1-f) d\mu \, \omega_1(A) + \int f d\mu \, \omega_2(A)$$

Quindi ω si decompone in combinazione convessa propria di due stati.

Viceversa, sia ω uno stato puro e dimostriamo che $\operatorname{supp} \mu_\omega$ è ridotto ad un punto. Questo segue da una osservazione generale: se $\mathcal{A}$ è una C*-algebra qualsiasi e $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ è tale che

$$\omega = a\omega_1 + b\omega_2 \qquad \text{con} \quad a, b \in [0,1] \quad \text{e} \quad a + b = 1$$

Allora se $B \in \mathcal{A}_+$:

$$(\omega - a\omega_1)(B) \geq 0$$

cioè $a\omega_1 \leq \omega$ (nell'ordinamento determinato da $\mathcal{A}_+$) e quindi

$$M\omega := \frac{1}{2}\omega \geq \omega_1 \implies \varphi - \frac{1}{M}\omega = b\omega$$

(il primo termine è positivo) con $b = ||\varphi - \frac{1}{M}\omega||$. Ne segue che

$$\varphi = a\omega + b\omega'$$

(con $a = 1/M$). Abbiamo quindi dimostrato il lemma, il cui enunciato è infatti equivalente al seguente

$$\omega \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \iff \text{l'unico stato dominato da } \omega \text{ è } \omega$$

QED

Possiamo ulteriormente parafrasare il lemma precedente nella

$$\omega \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \iff C_\omega = \{\omega\}$$

12.2.18 Proposizione *Se $\mathcal{A}$ è commutativa allora $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.*

DIMOSTRAZIONE: Notiamo che

$$\varphi(A^*A) = \varphi(A)^*\varphi(A) = |\varphi(A)|^2 \geq 0$$

cioè, se $\varphi \in \sigma(\mathcal{A})$ allora $\varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$.

Se viceversa $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ abbiamo una misura μ_ω tale che

$$\omega(A) = \int_{\sigma(\mathcal{A})} \widehat{A}(\varphi) d\mu_\omega(\varphi)$$

Supponendo che μ_ω sia concentrata in un punto vogliamo dedurre che ω è uno stato puro; ma se $\omega \ll \omega'$ allora per ogni insieme Δ μ_ω-misurabile abbiamo che

$$\mu_{\omega'}(\Delta) \leq M\mu_\omega(\Delta)$$

e quindi $\operatorname{supp}\mu_{\omega'} \subset \operatorname{supp}\mu_\omega$ che è un punto. Ma $\mu_{\omega'}$ è una misura positiva (normalizzata), quindi è una misura di Dirac.

QED

Ricordiamo che nel caso di una C*-algebra commutativa $\mathcal{A}$ avevamo la decomposizione dei funzionali $f = f_1 + if_2$ in funzionali hermitiani, con associata decomposizione di misure positive supportate su insiemi disgiunti

$$d\mu_{f_j} = d\mu_{f_j+} - d\mu_{f_j-}$$

e dunque $f_j = f_{j+} - f_{j-}$ e $||f_j|| = ||f_{j+}|| + ||f_{j-}||$.

12.2.19 Proposizione *Se $\mathcal{A}$ è una C*-algebra qualsiasi e $f = f^*$ un funzionale allora esiste la decomposizione*

$$f = f_+ - f_- \qquad \text{con} \quad f_\pm \in \mathcal{A}^*_+$$

tale che $||f|| = ||f_+|| + ||f_-||$.

DIMOSTRAZIONE: Se $A \in \mathcal{A}$ consideriamo il funzionale

$$\begin{aligned} \widehat{A} : &\mathcal{S}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C} \\ &\omega \longmapsto \omega(A) \end{aligned}$$

(si tratta di una generalizzazione della trasformata di Gel'fand), che è uno *-omomorfismo: $\widehat{A^*} = \widehat{A}^*$ ed è continuo: $|\omega(A)| \leq ||A||$.

La mappa

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}: \mathcal{A}_{aa} &\longrightarrow C_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}(\mathcal{A})) := \{f_{\mathcal{S}}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, f \text{ continua}\} \\ A &\longmapsto \widehat{A} \end{aligned}$$

è un isomorfismo isometrico di spazi di Banach, dato che

$$||\widehat{A}|| = \sup_{\omega} |\omega(A)| = ||A||$$

Dimostriamo in effetti che esiste un ω tale che

$$|\omega(A)| = ||A||$$

Se $\mathbf{A} := C^*\langle A, I\rangle \cong C(\sigma(A))$ è la C*-algebra (commutativa) generata dall'operatore autoaggiunto A, dato che $\mathrm{spr}(A) = ||A||$ (essendo autoaggiunto) i casi sono due: o $||A|| \in \sigma(A)$ oppure $-||A|| \in \sigma(A)$. Ma in entrambi questi casi esiste uno stato su $\mathbf{A}$ che, calcolato in A, valga $||A||$ oppure $-||A||$: estendendo questo stato ad $\mathcal{A}$ si ottiene ω.

Ora torniamo a considerare la mappa $\mathfrak{f}$ e consideriamone l'immagine X: per ogni $f \in \mathcal{A}^*$ tale che $f = f^*$ si ha che $f(A) \in \mathbb{R}$ se $A = A^*$, cioè l'immagine $\widetilde{f}$ di f in X^* è tale che

$$\widetilde{f}(A) = f(A)$$

e che $||\widetilde{f}|| = ||f||$.

Allora, per il teorema di Hahn–Banach, $\widetilde{f}$ ammette una estensione a $C_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}(\mathcal{A}))^*$ e quindi esiste $F \in C_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}(\mathcal{A}))^*$ tale che

$$||F|| = ||\widetilde{f}|| = ||f|| \qquad \text{e} \qquad F\left(\widehat{A}\right) = f(A)$$

Ad una tale F possiamo far corrispondere, mercé il teorema di Riesz–Markov, una misura reale μ tale che (tenendo conto del teorema precedente di decomposizione $\mu = \mu_+ - \mu_-$, $\mu_+ \perp \mu_-$):

$$F(g) = \int g(\omega) d\mu(\omega) = \int g(\omega) d\mu_+(\omega) - \int g(\omega) d\mu_-(\omega) := F_+(g) - F_-(g)$$

ove $||F_+|| + ||F_-|| = ||F||$ (dato che $\mu_+ \perp \mu_-$). Dunque

$$f(A) = F\left(\widehat{A}\right) = F_+\left(\widehat{A}\right) - F_-\left(\widehat{A}\right) =: f_+(A) - f_-(A)$$

con $f_\pm$ funzionali lineari positivi e

$$||f_\pm|| = f_\pm(I) = \int g(\omega) d\mu_\pm(\omega) = ||F_\pm||$$

Quindi

$$||f|| = ||F|| = ||F_+|| + ||F_-|| = ||f_+|| + ||f_-||$$

Per concludere non resta che definire

$$f_\pm(A) := f_\pm(A_1) + if_\pm(A_2)$$

QED

12.3 Il teorema di Gel'fand–Najmark–Segal

Affrontiamo ora un argomento fondamentale ed affascinante: la costruzione di Gel'fand–Najmark–Segal (GNS).

Consideriamo una C*-algebra qualsiasi $\mathcal{A}$ con unità I ed una sua rappresentazione (non degenere) π in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$: riordiamo esplicitamente che, dato che π è non degenere, abbiamo $\pi(I) = I$. Sia ora $\xi \in \mathcal{H}_1$:

$$\omega(A) := \omega_\xi \circ \pi(A) = (\xi, \pi(A)\xi)$$

è un funzionale lineare (lo è π) positivo: infatti

$$\omega(A^*A) = (\xi, \pi(A)^*\pi(A)\xi) = (\pi(A)\xi, \pi(A)\xi) = ||\pi(A)\xi||^2 \geq 0$$

Inoltre ($||\xi|| = 1$ e $\pi(I) = I$):

$$\omega(I) = ||\xi||^2 = 1$$

Dunque $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$.

In realtà possiamo dimostrare molto di più:

12.3.1 Teorema (GEL'FAND–NAJMARK–SEGAL) *Se $\mathcal{A}$ è una C*-algebra con unità I e $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ esistono unici:*

- *uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}_\omega$;*
- *una rappresentazione $\pi_\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$ non degenere;*
- *un vettore $\xi \in \mathcal{H}_\omega$ di norma 1: $||\xi|| = 1$;*

tali che per ogni $A \in \mathcal{A}$:

$$(\xi_\omega, \pi_\omega(A)\xi_\omega) = \omega(A)$$

e

$$\overline{\pi_\omega(\xi_\omega)} = \mathcal{H}_\omega$$

(cioè ξ_ω è ciclico per la rappresentazione π_ω).

Dimostrazione: Prima di affrontare la dimostrazione del teorema, osserviamo che se al posto di π_ω consideriamo la rappresentazione $\pi_\xi := \pi_\omega|_{\overline{\pi_\omega(\mathcal{A})}}$ allora la mappa $\pi_\omega \longmapsto \omega$ non cambia, e che l'unicità è data dalla ciclicità del vettore ξ_ω.

Dimostriamo per prima cosa l'unicità della tripla $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \xi_\omega)$.

Sia $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ un'altra tripla siffatta, e sia U_0 l'operatore definito su $\pi(A)$ e tale che

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad U_0\pi(A)\xi = \pi_\omega(A)\xi \tag{$\dagger$}$$

Basta dimostrare che

$$||U_0\pi(A)\xi|| = ||\pi_\omega(A)\xi|| \tag{$\dagger\dagger$}$$

per avere che U_0 è ben definito ed isometrico. Ed infatti

$$||\pi_\omega(A)\xi||^2 = \omega(A^*A) = ||\pi(A)\xi||^2$$

da cui segue ($\dagger\dagger$).

Estendiamo a questo punto U_0 in modo unico ad un operatore $\widetilde{U_0}$ ovunque definito (ciò è possibile per la ciclicità di ξ e ξ_ω). Osservando che

$$U\pi(A)\pi(B)\xi = U\pi(AB)\xi = \pi_\omega(A)U\pi(B)\xi$$

ed usando la ciclicità di ξ e la ($\dagger$) otteniamo

$$U\pi(A) = \pi_\omega(A)U$$

e $U\xi = \xi_\omega$.

Dunque la tripla $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \xi_\omega)$ è unica a meno di equivalenze unitarie.

Dimostriamo ora l'esistenza di una tale tripla: prima considereremo lo schema della dimostrazione, per passare poi nei dettagli. Sia $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$: allora su $\mathcal{A}^*$ abbiamo la forma sesquilineare definita positiva

$$(A, B) \longmapsto \omega(A^*B)$$

Questa forma induce, sul completamento dello spazio quoziente di $\mathcal{A}^*$ modulo il sottospazio generato dai vettori che sono nel nucleo della forma, una struttura di spazio di Hilbert.

Infatti, se consideriamo l'ideale sinistro

$$\mathfrak{N}_\omega := \{A \in \mathcal{A} \,|\, \omega(A^*A) = 0\}$$

sullo spazio $\mathcal{A}/\mathfrak{N}_\omega$ abbiamo il prodotto scalare

$$(\overline{A}, \overline{B}) := \omega(A^*B)$$

Ma $\mathcal{A}/\mathfrak{N}_\omega$ è un $\mathcal{A}$-modulo (dato che $\mathfrak{N}_\omega$ è un ideale) per tramite della rappresentazione regolare

$$\pi(A)\overline{B};=\overline{AB}$$

(Si noti che, se $\overline{B'}=\overline{B}$ allora $B-B'\in\mathfrak{N}_\omega$ e quindi $A(B-B')\in\mathfrak{N}_\omega$, da cui $\overline{AB}-\overline{AB'}=0$).

Dunque completando lo spazio $\mathcal{A}/\mathfrak{N}_\omega$ rispetto a questo prodotto scalare otteniamo uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}_\omega$ sul quale possiamo estendere unicamente $\pi(A)$ ad una rappresentazione $\pi_\omega(A)$. Considerando $\xi_\omega=\overline{I}$ abbiamo la terna $(\mathcal{H}_\omega,\pi_\omega,\xi_\omega)$ desiderata, dato che

$$(\xi_\omega,\pi_\omega(A)\xi_\omega)=(\overline{I},\overline{A})=\omega(A)$$

Passiamo ora ai dettagli della dimostrazione: intanto dobbiamo verificare che $\mathfrak{N}_\omega$ è un ideale sinistro: di certo lo è l'insieme

$$\mathfrak{I}_\omega:=\{A\in\mathcal{A}\,|\,\forall B\in\mathcal{A}\ \omega(BA)=0\}$$

Dimostriamo che si tratta esattamente di $\mathfrak{N}_\omega$. Se $A\in\mathfrak{I}_\omega$ allora, per $B=A^*$ si trova $A\in\mathfrak{N}_\omega$, i.e. $\mathfrak{I}_\omega\subset\mathfrak{N}_\Omega$.

Viceversa:

$$|\omega(B^*A)|\le\omega(B^*B)\omega(A^*A)$$

il che dà l'inclusione opposta. Quindi $\mathfrak{N}_\omega=\mathfrak{I}_\omega$ è un ideale sinistro.

Verifichiamo ora che la posizione

$$\pi(A)\overline{B}:=\overline{AB}$$

definisce effettivamente una rappresentazione (il che è ovvio) continua, cioè che

$$||\pi(A)\overline{B}||\le||A||\,||B||$$

Questo segue dalla

$$(\dagger\dagger\dagger)\qquad(\overline{AB},\overline{AB})\le||A||^2(\overline{B},\overline{B})$$

Dimostriamola: si ha

$$(\overline{AB},\overline{AB})=\omega((AB)^*AB)\le||A||^2\omega(B^*B)$$

ove la disuguaglianza vale in quanto

$$\omega((AB)^*AB)=\omega(B^*(A^*A)B)\le||A||^2\omega(B^*B)$$

(si rammenti che siamo in una C*-algebra: $||A^*A||=||A||^2$). Dunque

$$||A||\,||\overline{B}||-||\pi(A)\overline{B}||=\omega(B^*C^*CB)=\omega((CB)^*CB)\ge0$$

ove $C^*C = ||A||^2 I - A^*A$.

Quindi $\pi(A)$ è un operatore lineare e continuo, ed inoltre

$$||\pi(A)|| \leq ||A||$$

sicché, essendo definito su un sottoinsieme denso, $\pi(A)$ si estende univocamente ad un $\pi_\omega(A)$ tale che

$$||\pi_\omega(A)|| \leq ||A||$$

Osserviamo inoltre che

$$\pi(AB)\overline{C} = \overline{(AB)C} = \overline{A(BC)} = \pi(A)\pi(B)\overline{C}$$

e quindi, dato che è vera sul sottoinsieme denso, vale la

$$\pi_\omega(AB) = \pi_\omega(A)\pi_\omega(B)$$

Infine, dato che

$$\begin{aligned}(\overline{C}, \pi_\omega(A^*)\overline{B}) &= (\overline{C}, \overline{A^*B}) = \omega(C^*A^*B)\\ &= \omega((AC)^*B) = (\overline{AC}, \overline{B}) = (\pi_\omega(A)\overline{C}, \overline{B})\end{aligned}$$

sempre per densità abbiamo

$$(x, \pi_\omega(A^*)y)) = (x, \pi_\omega(A)^*y)$$

Resta solo da osservare la ciclicità di ξ_ω: ma questa segue immediatamente dalla densità di $\pi_\omega(A)\xi_\omega = \mathcal{A}/\mathfrak{N}_\omega$.

QED

Una conseguenza notevolissima di questo importante risultato è la possibilità di dimostrare che ogni C*-algebra ammette una rappresentazione fedele, cioè con nucleo 0.

Consideriamo una C*-algebra $\mathcal{A}$ e $A \in \mathcal{A}$: allora esiste uno stato $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ tale che $\omega(A^*A) = ||A||^2$, quindi, applicando la costruzione GNS, otteniamo una famiglia di rappresentazioni

$$\{\pi_\omega\}_{\omega\in\mathcal{S}(\mathcal{A})}$$

mediante la quale possiamo definire la *rappresentazione universale* di $\mathcal{A}$:

$$\widehat{\pi} := \bigoplus_{\omega\in\mathcal{S}(\mathcal{A})} \pi_\omega$$

Questa sarà la rappresentazione fedele della nostra C*-algebra:

12.3.2 Teorema *$\widehat{\pi}$ è una rappresentazione isometrica.*

DIMOSTRAZIONE: Per ogni $A \in \mathcal{A}$ abbiamo:

$$||\widehat{\pi}(A)|| = ||A||$$

Infatti π_ω è una contrazione (3.2.7) e quindi anche la somma diretta[2] delle π_ω lo è: $||\widehat{\pi}(A)|| \leq ||A||$; dunque

$$||\widehat{\pi}(A)||^2 = ||\widehat{\pi}(A^*A)|| = ||A^*A|| = ||A||^2$$

Ma

$$||\widehat{\pi}(A)||^2 = \sup_{||\xi||=1} ||\pi(A)\xi||^2$$

Ora, se poniamo

$$\overline{\xi_\omega} := \begin{cases} \xi_\omega & \text{sulla } \omega\text{-sima componente di } \widehat{\pi} \\ 0 & \text{sulle altre componenti di } \widehat{\pi} \end{cases}$$

troviamo che

$$\overline{\xi_\omega}\omega' = \delta_{\omega\omega'}\xi_\omega$$

e quindi

$$(\widehat{\pi}(A)\overline{\xi_\omega})(\omega') = \delta_{\omega\omega'}\pi_\omega(A)\xi_\omega$$

pertanto

$$(\overline{\xi_\omega}, \pi(A)\overline{\xi_\omega}) = \omega(A)$$

Ne segue che

$$||\widehat{\pi}(A)\overline{\xi_\omega}||^2 = \omega(A^*A) = ||A||^2$$

cioè

$$||\widehat{\pi}(A)||^2 = \sup_{||\xi||=1} ||\pi(A)\xi||^2 \geq 0$$

il che finalmente ci dà la tesi: $||\widehat{\pi}(A)|| = ||A||$.

QED

Osserviamo che la costruzione della rappresentazione universale è canonica, nel senso che non dipende che da proprietà naturali della C*-algebra: tuttavia esistono altre costruzioni che, sebbene non canoniche, sono più semplici da utilizzare.

[2]Basti osservare che ogni rappresentazione di una C*-algebra è una contrazione.

12.3.3 Teorema (SEGAL) *Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ sono C^*-algebre con la stessa unità I allora ogni stato puro di $\mathcal{A}$ si estende unicamente ad uno stato puro di $\mathcal{B}$.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo, fissato un $\omega \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$:

$$\mathcal{C}_\omega := \{\omega' \in \mathcal{S}(\mathcal{B}) \,|\, \omega'|_{\mathcal{A}} = \omega\}$$

Ovviamente $\mathcal{C}_\omega \subset \mathcal{S}(\mathcal{B})$; inoltre $\mathcal{C}_\omega$ è un convesso, dato che

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad (a\omega' + b\omega'')(A) = \omega(A)$$

(con $a + b = 1$) e $\mathcal{C}_\omega$ è l'intersezione di $\mathcal{S}(\mathcal{B})$ con l'insieme

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \{f \in \mathcal{B}^* \,|\, f(A) = \omega(A)\}$$

che è *-debolmente chiuso: dunque $\mathcal{C}_\omega$ pure è *-debolmente chiuso e quindi *-debolmente compatto (dato che lo è $\mathcal{S}(\mathcal{B})$). Allora il teorema di Krejn–Millman garantisce l'esistenza di punti estremali in $\mathcal{C}_\omega$.

Sia $\widehat{\omega}$ in tale estremale: dato che ω è uno stato puro, $\widehat{\omega}$ è estremale anche in $\mathcal{S}(\mathcal{B})$: se infatti

$$\widehat{\omega} = a\omega' + b\omega''$$

(con $\omega', \omega'' \in \mathcal{S}(\mathcal{B})$ e $ab \neq 0$) allora $|Eo', \omega'' \in \mathcal{C}_\omega$, dato che

$$(a\omega' + b\omega'')|_{\mathcal{A}} = \omega(A) := \widehat{\omega}|_{\mathcal{A}} = a + \omega'|_{\mathcal{A}} + b\omega''|_{\mathcal{A}}$$

Ma ω è puro e quindi

$$\omega'|_{\mathcal{A}} = \omega''|_{\mathcal{A}} = \omega$$

cioè $\omega', \omega'' \in \mathcal{C}_\omega$. Dall'estremalità di $\widehat{\omega}$ segue allora che $\omega' = \omega''$.

QED

Prima di dimostrare il teorema di Segal che caratterizza gli stati puri come quelli associati alle rappresentazioni irriducibili per tramite della rappresentazione GNS svolgiamo alcune osservazioni.

Ora consideriamo $\mathcal{A}$ separabile e quindi scegliamo $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ densa e $\{\omega_n\}$ successione di stati puri tali che

$$\omega_n(A_n^* A_n) = ||A_n||^2$$

Allora

$$\pi := \bigoplus_n \pi_{\omega_n}$$

è tale che $||\pi(A)||^2 = ||A||^2$ e lo spazio $\mathcal{H}_\omega$ della rappresentazione GNS è separabile, visto che contiene la successione densa $\{\pi(A_n)\xi\}$: dunque la rappresentazione GNS è fedele in uno spazio di Hilbert separabile.

Se $f \in \mathcal{A}^*$ allora esistono x, y tali che

$$(*) \qquad f(A) = (x, \widehat{\pi}(A)y)$$

Infatti $f = f_1 + if_2 = a_1\omega_1 + ... + a_4\omega_4$ (con f_i hermitiani e $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$); allora, per

$$x := \sum_{k=1}^{4} \overline{\xi_{\omega_k}} \qquad \text{e} \qquad y := \sum_{k=1}^{4} a_k \overline{\xi_{\omega_k}}$$

si ha la (*): in effetti, per ogni $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$:

$$\delta_{\omega\omega'}\omega(A) = (\overline{\xi_\omega}, \widehat{\pi}(A)\overline{\xi_\omega})$$

12.3.4 Teorema (SEGAL) *Uno stato ω è puro se e solo se la rappresentazione GNS associata π_ω è irriducibile.*

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamo che, posto $C_\omega = \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) \,|\, \varphi \ll \omega\}$ allora

$$\omega \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \iff C_\omega = \{\omega\}$$

Ma π è irriducibile se e solo se $\pi(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \cdot I$ (lemma di Schur 12.1.8) cioè $\pi(\mathcal{A})'_+ = \mathbb{R}^+ \cdot I$, che è vero se e solo se

$$\{T \in \pi_\omega(\mathcal{A})'_+ \,|\, (\xi_\omega, T\xi_\omega) = 1\} = \{I\}$$

Dunque ci basta far vedere che

$$\forall \omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) \quad C_\omega \approx \mathcal{D} := \{T \in \pi_\omega(\mathcal{A})'_+ \,|\, (\xi_\omega, T\xi_\omega) = 1\}$$

ove $\approx$ indica un isomorfismo di insiemi convessi.

Dunque sia $T \in \mathcal{D}$; allora la mappa

$$T \longmapsto \varphi_T$$

ove $\varphi_T(A) = (T\xi_\omega, \pi_\omega(A)\xi_\omega)$, è un funzionale lineare continuo su $\mathcal{A}$, ed è (a) positivo e (b) $\varphi_T \ll \omega$.

Per T positivo abbiamo $T = B^*B$, con $B \in \pi_\omega(\mathcal{A})'$ e quindi

$$\begin{aligned}\pi_T(A^*A) =& (B^*B\xi_\omega, \pi_\omega(A)^*\pi_\omega(A)\xi_\omega) = (\pi_\omega(A)B\xi_\omega, B\pi_\omega(A)\xi_\omega) \\ =& ||B\pi_\omega(A)\xi_\omega||^2 \geq 0\end{aligned}$$

Dunque la (a); la (b) segue da

$$||B\pi_\omega(A)\xi_\omega||^2 \leq ||B||^2||\pi_\omega(A)\xi_\omega||^2 = ||T||\omega(A^*A)$$

La mappa $T \longmapsto \varphi_T$ è inoltre convessa, quindi, per concludere, dobbiamo solo mostrare che è biunivoca.

Ma, se ξ è un vettore ciclico per $\pi_\omega(\mathcal{A})$ allora ξ è separante per $\pi_\omega(\mathcal{A})'$ e quindi, se $\varphi_{T_1} = \varphi_{T_2}$ allora

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad ((T_1 - T_2)\xi, \pi_\omega(A)\xi) = 0$$

i.e. $(T_1 - T_2)\xi \perp \pi_\omega(\mathcal{A})\xi$ e, per ciclicità: $(T_1 - T_2)\xi = 0$. Un tale vettore è certamente ξ_ω: quindi possiamo dedurre $T_1 = T_2$.

Sia infine $\varphi \in C_\omega$; dimostriamo che esiste $T \in \mathcal{D}$ tale che $\varphi = \varphi_T$. Ma il funzionale di due variabili

$$\{\pi_\omega(A)\xi_\omega(B)\xi_\omega\} := \varphi(A^*B)$$

è sesquilineare e ben definito: infatti $\varphi \ll \omega$, quindi se $\omega(A * A) = 0$ allora $\varphi(A^*A) = 0$; per $A = B$ si trova

$$\{\pi_\omega(A)\xi_\omega(A)\xi_\omega\} \leq M\omega(A^*A) = M||\pi_\omega(A)\xi_\omega||^2$$

(ove $\varphi(A^*A) \leq M\omega(A^*A)$). Quindi, per il teorema di rappresentazione di Riesz, esiste un unico operatore lineare positivo T con $||T|| \leq M$ tale che

$$\{\pi_\omega(A)\xi_\omega(B)\xi_\omega\} := \varphi(A^*B) = (\pi_\omega(A)\xi_\omega, T\pi_\omega(B)\xi_\omega)$$

Per $A = B = I$ si ha ovviamente $1 = (\xi_\omega, T\xi_\omega)$.

Infine $T \in \pi(\mathcal{A})'$, dato che $\varphi(A^*CB) = \varphi((C^*A)^*B)$ e quindi

$$(\pi_\omega(A)\xi_\omega, T\pi_\omega(C)\pi_\omega(B)\xi_\omega) = (\pi_\omega(CA)\xi_\omega, T\pi_\omega(B)\xi_\omega)$$

QED

Si noti che l'operatore T considerato nella dimostrazione del teorema si comporta come una "derivata di Radon–Nikodym" della φ_T.

Si osservi inoltre che se π è una rappresentazione *irriducibile* di una C*-algebra allora $\pi \cong \pi_\omega$. Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ (con la stessa unità I) allora si può estendere ω ad uno stato puro di $\mathcal{B}$: infatti ω è puro per irriducibilità di π (il teorema appena dimostrato) e quindi è estendibile a $\mathcal{B}$; si consideri poi la rappresentazione GNS associata a questo stato esteso $\widehat{\omega}$ in $\mathcal{B}$. Allora $\mathcal{H}_\omega \hookrightarrow \mathcal{H}_{\widehat{\omega}}$, dato che

$$\forall B \in \mathcal{A} \quad (\xi_{\widehat{\omega}}, \pi_{\widehat{\omega}}(B)\xi_{\widehat{\omega}}) = \widehat{\omega}(B) = \omega(\widehat{B})$$

Cioè $\pi_{\widehat{\omega}}|_{\mathcal{A}}$ è una rappresentazione (di $\mathcal{A}$) che ristretta al sottospazio ciclico generato da $\xi_{\widehat{\omega}}$ è ciclica per $\mathcal{A}$ ed induce lo stato ω: insomma, ritroviamo π_ω.

Consideriamo ora la rappresentazione universale $\widehat{\pi}$; se $f \in \mathcal{A}^*$ allora

$$f(A) =< g, \widehat{\pi}(A)$$

ove $g \in \mathfrak{M}_0 \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\widehat{\pi}})^*$. Sia $\mathcal{A}$ è una *-sottoalgebra di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e se $\mathcal{U} = \mathfrak{M}|_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}^*$ (funzionali lineari ultradebolmente continui): allora

12.3.5 Teorema $\mathcal{U}^* \cong \overline{\mathcal{A}}^{uf}$.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo $\mathcal{R} = \overline{\mathcal{A}}^{uf}$; la mappa di restrizione $\mathcal{R}_* \longrightarrow \mathcal{U}$: $f \longmapsto f|_{\mathcal{A}}$ è un isomorfismo isometrico di spazi di Banach:

$$||f|_{\mathcal{A}}|| = ||f||$$

Per dimostrarlo basta applicare il teorema di densità di Kaplanski 11.4.2 ($(\overline{\mathcal{A}})_1 = \overline{\mathcal{A}_1}$):

$$||f_{\mathcal{A}}|| = \sup_{A\in\mathcal{A}_1} |f(A)| = \sup_{A\in\overline{\mathcal{A}_1}} |f(A)| = \sup_{A\in(\overline{\mathcal{A}})_1} |f(A)| = ||f||$$

QED

Si noti che se $\mathcal{A}$ è non degenere allora $\mathcal{U}^* \cong \mathcal{A}''$ via la mappa che a F associa T_F tale che

$$f(T_F) = F(f)$$

(teorema di rappresentazione di Riesz).

Allora $\pi(\mathcal{A})'' \cong \mathcal{U}_\pi^*$, ove $\mathcal{U}_\pi^* \subset \mathcal{A}^*$ è il sottospazio dei funzionali lineari ultradebolmente continui in π:

$$\mathcal{U}_\pi^* := \{f \circ \pi \mid f \in \mathfrak{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)^*\}$$

Infatti, se $g \in \mathcal{A}^*$ allora $\pi(A) \longmapsto g(A)$ è ben definita ($\ker \pi \subset \ker g$) ed è ultradebolmente continua dunque, per il teorema di Hahn–Banach, estendibile a $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$. Quindi, per tramite della mappa $F \longmapsto T$ tale che

$$F(f_{x,y} \circ \pi) = x(Ty)$$

otteniamo $\mathcal{U}_\pi^* \cong \pi(\mathcal{A})''$.

Le osservazioni precedenti implicano $\mathcal{U}_{\widehat{\pi}} \cong \mathcal{A}^*$:

12.3.6 Definizione *L'algebra di von Neumann inviluppante di una C*-algebra $\mathcal{A}$ è $\widehat{\pi}(\mathcal{A})''$.*

Si noti che, come spazi di Banach: $\widehat{\pi}(\mathcal{A})'' \cong \mathcal{A}^{**}$.

Se π è una rappresentazione ciclica di $\mathcal{A}$ allora $\pi \leq \widehat{\pi}$: infatti se ξ è il vettore ciclico e

$$\omega(A) =: (\xi, \pi(A)\xi)$$

si ha (teorema GNS) $\pi \cong \pi_\omega \leq \widehat{\pi}$.

Quindi

Lemma. *Ogni rappresentazione di una C^*-algebra ha una sottorappresentazione ciclica equivalente ad una sottorappresentazione della rappresentazione universale:*

$$\forall\pi \quad \pi \ll \widehat{\pi}$$

12.3.7 Teorema *Se $\mathcal{Z}(\widehat{\pi}(\mathcal{A})'') = \widehat{\pi}(\mathcal{A})'' \cap \widehat{\pi}(\mathcal{A})'$, allora gli idempotenti autoaggiunti di $\mathcal{Z}(\widehat{\pi}(\mathcal{A})'')$ sono in corrispondenza biunivoca con le rappresentazioni di $\mathcal{A}$ in modo che*

$$\begin{aligned}
\pi \approx \pi' &\iff \mathcal{Z}(\pi) = \mathcal{Z}(\pi') \\
\pi \ll \pi' &\iff \mathcal{Z}(\pi) \leq \mathcal{Z}(\pi') \\
\pi \circlearrowleft \pi' &\iff \mathcal{Z}(\pi)\mathcal{Z}(\pi') = 0
\end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE: Come noto, se $\pi_1 \ll \pi_2$ allora esiste uno *-omomorfismo normale $\rho : \pi_2(\mathcal{A})'' \longrightarrow \pi_1(\mathcal{A})''$ tale che

$$\rho \circ \pi_1 = \pi_2$$

(In realtà questa è una caratterizzazione delle relazione di quasi-inclusione, ma questo non l'abbiamo dimostrato).

Quindi, per il lemma, l'algebra di von Neumann inviluppante è tale che, per ogni rappresentazione π esiste uno *-omomorfismo normale $\rho_\pi : \widehat{\pi}(\mathcal{A})'' \longrightarrow \pi(\mathcal{A})''$ tale che

$$\rho_\pi \circ \widehat{\pi} = \pi$$

Il nucleo di ρ_π è un ideale ultradebolmente chiuso, quindi (come segue dalla proposizione 11.4.5) esiste un proiettore $F \in \mathcal{Z}(\widehat{\pi}(\mathcal{A})'')$; ponendo $Z(\pi) = (I - F)$ si ottengono le relazioni dell'enunciato.

QED

Osserviamo che, se ω è lo stato

$$\omega(A) = (x, \widehat{\pi}(A)x)$$

ove $x = \widehat{\xi_\omega}$ e $x(\omega') = \delta_{\omega\omega'}\xi_\omega$, pre $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ non degenere e $\omega = \omega_x|_{\mathcal{B}}$ esiste

$$E_\omega \in \mathcal{B}''$$

più piccolo idempotente autoaggiunto di $\mathcal{B}''$ che contenga x:

12.3.8 Proposizione $E_\omega = E_{\overline{\mathcal{B}'x}}$.

DIMOSTRAZIONE: Si ha intanto $E_\omega \in \mathcal{B}''$ e $E_\omega x = x$ (in quanto $\mathcal{B}$ è non degenere) e quindi, se $F = F^* = F^2 \in \mathcal{B}''$ è tale che

$$Fx = x$$

allora, per ogni $T \in \mathcal{B}'$:

$$x \in F\mathcal{H} \Rightarrow Tx = TFx = FTx \in F\mathcal{H}$$

i.e. $\overline{\mathcal{B}'x} \subset F\mathcal{H}$, onde $E \leq F$.

QED

In altri termini, per ogni ω abbiamo identificato un idempotente autoaggiunto E_ω dell'algebra di von Neumann inviluppante

$$E_\omega = E_{\overline{\widehat{\pi}(\mathcal{A})'\xi_{\widehat{\omega}}}}$$

che è il più piccolo idempotente autoaggiunto di $\mathcal{A}^{**}$ contenente $\widehat{\xi_\omega}$.

Ma $F \in \mathcal{A}^{**}$ se e solo se $F\widehat{\xi_\omega} = \widehat{\xi_\omega}$ i.e.

$$(\xi_{\widehat{\omega}}, F\xi_{\widehat{\omega}}) = 1$$

12.3.9 Proposizione

$$\widehat{\omega}(F) = 1$$

e quindi E_ω è il più piccolo idempotente autoaggiunto F di $\mathcal{A}^{**} = \widehat{\pi}(\mathcal{A})''$ tale che $\omega(F) = 1$, cioè che $F(\omega) = 1$.

DIMOSTRAZIONE: Se $B \in \widehat{\pi}(\mathcal{A})''$ e $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ allora

$$\forall A \quad (\widehat{\xi_\omega}, \widehat{\pi}(A)\widehat{\xi_\omega}) = \omega(A)$$

e la mappa $f_{\widehat{\xi_\omega},\widehat{\xi_\omega}} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\widehat{\pi}}) \longrightarrow \mathbb{C}$ determinata da

$$f_{\widehat{\xi_\omega},\widehat{\xi_\omega}}(T) = (\xi_{\widehat{\omega}}, T\xi_{\widehat{\omega}})$$

è debolmente continua e tale che

$$f_{\widehat{\xi_\omega},\widehat{\xi_\omega}}|_{\widehat{\pi}(\mathcal{A})''}$$

sia l'unica estensione debolmente continua del funzionale $\widehat{\pi}(A) \longmapsto \omega(A)$; se chiamiamo $\widetilde{\omega}$ questa estensione allora $\widetilde{\omega}(T) = T(\omega)$.

QED

12.3.10 Definizione *La* probabilità di transizione *da uno stato φ a uno stato ω è*

$$P_{\varphi,\omega} := \widetilde{\omega}(P_\omega) = P_\omega(\varphi)$$

12.4 Stati puri e rappresentazioni irriducibili

Rammentiamo ora due fatti noti che utilizzeremo in forma di lemmi nella dimostrazione del prossimo risultato:

12.4.1 Lemma

- *Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una *-sottoalgebra, $\mathcal{R} := \overline{\mathcal{A}^+}$ e $f \in \mathcal{R}_*$ allora la mappa $f \longmapsto f|_{\mathcal{A}}$ è una isometria.*

- *Inoltre se π_1, π_2 sono rappresentazioni disgiunte di $\mathcal{A}$ allora*

$$\overline{(\pi_1 \oplus \pi_2)(\mathcal{A})}^f = \overline{\pi_1(\mathcal{A})}^f \oplus \overline{\pi_2(\mathcal{A})}^f$$

12.4.2 Teorema (Glimm–Kadison) *Se $\omega, \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ sono stati tali che $||\omega - \varphi|| < 2$ allora le rappresentazioni π_ω e π_φ non possono essere disgiunte.*

Dimostrazione: Dimostriamo per assurdo che, se $\pi_\omega \between \pi_\varphi$ allora

$$||\omega - \varphi|| = 2$$

(infatti si ha sempre $||\omega - \varphi|| \leq ||\omega|| + ||\varphi|| = 2$).

Ma sappiamo che $\pi_\omega \between \pi_\varphi$ equivale alla (2) del lemma, quindi $I \oplus (-I) \in \overline{\pi_\omega(\mathcal{A})}^f \oplus \overline{\pi_\varphi(\mathcal{A})}^f$ è limite forte di elementi di $\pi(\mathcal{A}) := \pi_\omega(\mathcal{A}) \oplus \pi_\varphi(\mathcal{A})$.

Inoltre, per la (1) del lemma, se $\xi = \xi_\omega \oplus 0$ e $\eta = 0 \oplus \xi_\varphi$ allora

$$\omega(A) = (\xi, \pi(A)\xi) \qquad \text{e} \qquad \varphi(A) = (\eta, \pi(A)\eta)$$

sicché

$$||\omega - \varphi|| = ||(f_{\xi,\xi} - f_{\eta,\eta}) \circ \pi|| = ||(f_{\xi,\xi} - f_{\eta,\eta})|_{\pi(\mathcal{A})''}||$$

(dato che $\pi(\mathcal{A}_1) = \pi(\mathcal{A})_1$ e per il teorema di Kaplanski 11.4.2).

Ma se $\pi_\omega \between \pi_\varphi$ allora (tenendo presente che $f_{\xi,\xi}(I \oplus 0) = f_{\eta,\eta}(0 \oplus -I) = 1$):

$$||(f_{\xi,\xi} - f_{\eta,\eta})|_{\pi(\mathcal{A})''}|| \geq < f_{\xi,\xi} - f_{\eta,\eta} | I \oplus (-I) >= 2$$

cioè $||\omega - \varphi|| \geq 2$.

QED

Consideriamo ora $\omega = \omega_x$ (ove $||x|| = 1$) e $P_\omega \in \mathcal{R}$ tale che

$$P_\omega = \bigwedge\{P \in \mathcal{R} \,|\, Px = x\} = \bigwedge\{P \in \mathcal{R} \,|\, \omega(P) = 1\} = E_{\overline{\mathcal{R}'x}}$$

Se inoltre

$$\mathcal{H}_\omega = \{B \in \mathcal{R} \,|\, \omega(B^*B) = 0\} = \mathcal{R}(I - P_\omega)$$

allora

$$\omega(B^*B) = 0 \iff BP_\omega = 0$$

Infatti $\omega(B^*B) = 0 \iff Bx = 0 \iff \forall T \in \mathcal{R}'\; TBx = 0 \iff B(Tx) = 0 \iff B|_{\overline{\mathcal{R}'x}} = 0$ che, per la definizione di P_ω, equivale a $BP_\omega = 0$, cioè a $B(I-P_\omega) = B$, e quindi a $B \in \mathcal{R}(I - P_\omega)$.

Osserviamo inoltre che, identificando gli spazi di Banach $\mathcal{A}^{**}$ e $\widehat{\pi}(\mathcal{A})''$:

$$\widetilde{\omega}(T) = (\widehat{\xi_\omega}, T\widehat{\xi_\omega}) = (\eta, T\eta) = T(\omega)$$

12.4.3 Definizione *Il* supporto *di uno stato $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ è l'elemento $P_\omega \in \mathcal{A}^{**}$ idempotente autoaggiunto tale che*

$$\widetilde{\omega}(P_\omega) = 1 = P_\omega(\omega)$$

e che sia minimale rispetto a tale proprietà.

12.4.4 Proposizione *Se $\varphi, \omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$:*

- $P_{\varphi,\omega} = 0 \iff P_{\omega,\varphi} = 0 \iff P_\omega \perp P_\varphi$.
- $P_{\varphi,\omega} = 1 \iff P_\varphi \leq P_\omega$.

DIMOSTRAZIONE: Per (1) basta osservare che $\widetilde{\varphi}(B^*B) = 0 \iff BP_\varphi = 0$. La (2) segue dalle equivalenze:

$$\begin{aligned} P_{\varphi,\omega} = 1 &\iff \widetilde{\varphi}(P_\omega) = 1 \iff \widetilde{\varphi}(I - P_\omega) = 0 \\ &\iff I - P_\omega \perp P_\varphi \iff P_\varphi \leq P_\omega \end{aligned}$$

QED

12.4.5 Teorema *Se $C_\omega := \{\psi \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) \,|\, \psi \ll \omega\}$ allora*

- $P_{\varphi,\omega} = 1 \iff \varphi \in \overline{C_\omega}^{||\cdot||}$ *(chiusura in norma)*
- $\forall \omega \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \quad P_{\varphi,\omega} = 1 \iff \varphi = \omega$

DIMOSTRAZIONE: Se $P_{\varphi,\omega} = 1$ allora $1 = \widetilde{\varphi}(P_\omega) = (\widehat{\xi_\varphi}, P_\omega\widehat{\xi_\varphi})$ e quindi $\widehat{\xi_\varphi} \in \overline{\widehat{\pi}(\mathcal{A})'\widehat{\xi_\varphi}}$. Ne segue che $\widehat{\xi_\varphi}$ è limite in norma di una successione $T_n\widehat{\xi_\omega}$ con $T_n \in \widehat{\pi}(\mathcal{A})'$ tali che $||T_n\widehat{\xi_\omega}|| = 1$.

Ora la stessa dimostrazione del teorema di Segal ci permette di concludere che, se

$$\varphi_n(A) := (T_n\widehat{\xi_\omega}, \widehat{\pi}(A)T_n\widehat{\xi_\omega})$$

allora $\varphi \ll \omega$, sicché, se $||x_n|| = 1$ convergono a x in norma allora

$$||\omega_{x_n} - \omega_x|| \longrightarrow 0 \implies ||\omega_{x_n} \circ \pi - \omega_x \circ \pi|||to0$$

Ma $\varphi - \varphi_n = (\omega_{\widehat{\xi_\omega}} - \omega_{T_n\widehat{\xi_\omega}}) \circ \widehat{\pi}$, col che abbiamo dimostrato che $\varphi \in \overline{C_\omega}^{||\cdot||}$.

Viceversa, sia $\psi {\in} C_\omega$: allora esiste R con $R^*R = T$ tale che $\psi(A) = (R\xi_\omega, \pi(A)R\xi_\omega)$ (per il teorema di Segal); ma si ha pure

$$(\dagger) \qquad \psi(A) = (B\widehat{\xi_\omega}, \widehat{\pi}(A)B\widehat{\xi_\omega})$$

per qualche $B \in \widehat{\pi}(\mathcal{A})'$. Infatti $\widehat{\pi} = \oplus_\omega \pi_\omega$ e quindi

$$I = \sum_\omega E_\omega \qquad \text{con } E_\omega \in \widehat{\pi}(\mathcal{A})'$$

Allora basta porre $B = R \circ E_\omega$ per avere

$$\left(\widehat{\pi}(A)B\widehat{\xi_\omega}\right)(\omega') = \delta_{\omega\omega'}\widehat{\pi}(A)R\xi_\omega$$

e quindi la $(\dagger)$; da questa segue che

$$\widetilde{\psi}(P_\omega) = (B\widehat{\xi_\omega}, P_\omega B\widehat{\xi_\omega}) = 1$$

ove $B\widehat{\xi_\omega} \in \widehat{\pi}(\mathcal{A})'\widehat{\xi_\omega} \subset P_\omega\widehat{\mathcal{H}}$.

Dunque $\psi \ll \omega$, cioè $P_{\psi,\omega} = 1$. Ma se questo è vero per un certo insieme di stati, vale anche per la sua chiusura: infatti se $\psi_n \subset S \subset \mathcal{S}(\mathcal{A})$ converge a ψ e $P_{\psi_n,\omega} = 1$ allora $P_{\psi,\omega} = 1$. Per rendersene conto basta osservare che

$$|\widetilde{\psi}_n(P_\omega) - \widetilde{\psi}(P_|Eo)| \leq ||\widetilde{\psi}_n - \psi||\ ||P_\omega||$$

Ma $||\psi_n - \psi|| \longrightarrow 0$ e quindi, per il teorema di Kaplanski:

$$||\widetilde{\psi_n} - \widetilde{\psi}|| = ||\widetilde{\psi_n - \psi}|| = ||\psi_n - \psi|| \longrightarrow 0$$

Con ciò abbiamo che se $\psi \ll \varphi$ allora $P_{\psi,\omega} = 1$ per gli elementi di un certo insieme di stati, questa proprietà vale sulla sua chiusura: nel caso di C_ω otteniamo la tesi.

QED

12.4.6 Proposizione *Se $\omega \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ allora*

$$P_\omega \widehat{\mathcal{H}} \setminus (0) = \left\{ \xi \in \widehat{\mathcal{H}} \mid \forall A \ \omega(A) = \frac{(\xi, \widehat{\pi}(A)\xi)}{||\xi||} \right\}$$

DIMOSTRAZIONE: Se $\xi \in \widehat{\mathcal{H}}_1$ ($||\xi|| = 1$) e se

$$\forall A \quad \omega(A) = (\xi, \widehat{\pi}(A)\xi)$$

allora, per il teorema di Segal, $\xi = T\widehat{\xi_\omega}$ ove $T \in \widehat{\pi}(\mathcal{A})'$ è unitario e quindi si estende ad una isometria parziale B di $\widehat{\pi}(\mathcal{A})'$.

QED

Se π_1, π_2 sono rappresentazioni irriducibili, definiamo l'insieme dei loro *stati vettoriali* come

$$\mathcal{V}_{\pi_i} := \{\omega_x \circ \pi_i \,|\, x \in \mathcal{H}_{\pi_i} \text{ e } ||x|| = 1\}$$

12.4.7 Lemma *Se $\pi_1 \cong \pi_2$ allora $\mathcal{V}_{\pi_1} = \mathcal{V}_{\pi_2}$, mentre se $\pi_1 \ncong \pi_2$ allora $\mathcal{V}_{\pi_1} \cap \mathcal{V}_{\pi_2} = \emptyset$.*

DIMOSTRAZIONE: Se $\mathcal{V}_{\pi_1} \cap \mathcal{V}_{\pi_2} \neq \emptyset$ allora esiste un $\varphi \in \mathcal{V}_{\pi_1} \cap \mathcal{V}_{\pi_2}$ ed esistono $x_1 \in \mathcal{H}_1$ e $x_2 \in \mathcal{H}_2$ tali che

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad (x_1, \pi_1(A)x_1) = (x_2, \pi_2(A)x_2)$$

Per unicità della rappresentazione GNS deve quindi esistere un operatore di allacciamento fra π_1 e π_2 e quindi, dato che le rappresentazioni sono irriducibili, per il Lemma di Schur 12.1.8, si ha $\pi_1 \cong \pi_2$.

Viceversa, sia $\pi - 1 \cong \pi_2$: esista cioè un operatore di allacciamento unitario fra π_1 e π_2, i.e.

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad (x, \pi_1(A)x) = (Ux, \pi_2(A)x)$$

Allora $\{Ux\}_{x \in (\mathcal{H}_{pi_1})_1} = (\mathcal{H}_{\pi_2})_1$ e quindi $\mathcal{V}_{\pi_1} = \mathcal{V}_{\pi_2}$.

QED

Osserviamo inoltre che se $x \in (\mathcal{H}_\pi)_1$ allora $\omega_x \circ \pi$ non può essere iniettiva, dato che $(\omega_x \circ \pi)(A) = (x, \pi(A)x)$. Ne segue che

12.4.8 Lemma *Se π è una rappresentazione irriducibile, allora la $x \longmapsto \omega_x\pi$ (per $||x|| = 1$) è iniettiva vista come mappa definita sullo spazio proiettivo associato allo spazio di Hilbert $\mathcal{H}_\pi$ (lo spazio dei sottospazi vettoriali di dimensione uno di $\mathcal{H}_\pi$).*

12.4.9 Teorema *Se $\omega, \varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ sono stati puri allora*

$$P_{\omega,\varphi} = \begin{cases} 0 & se\ \pi_\varphi \ncong \pi_\omega \\ |(\xi, \eta)|^2 & se\ \pi_\varphi \cong \pi_\omega \end{cases}$$

Dimostrazione: Dato che si tratta di stati puri, le rappresentazioni GNS associate a ω e φ sono irriducibili, quindi o sono equivalenti o sono disgiunte: in questo secondo caso $P_{\varphi,\omega} = 0$. Infatti $\pi_\omega \between \pi_\varphi$ se e solo se $(\pi_\omega, \pi_\varphi) = 0$, il che equivale a dire $\mathcal{H}_\varphi \perp \widehat{\pi}(\mathcal{A})'\mathcal{H}_\omega$. Ma allora

$$\widehat{\xi_\varphi} \perp \widehat{\pi}(\mathcal{A})'\widehat{\xi_\omega}$$

cioè $\widehat{\pi}(\mathcal{A})'\widehat{\xi_\omega} \perp \widehat{\pi}(\mathcal{A})'\widehat{\xi_\varphi}$ che, a sua volta, è equivalente a $P_\varphi \perp P_\omega$.

Supponiamo ora che $pi_\varphi \cong \pi_\omega$ ed osserviamo che

$$P_{\varphi,\omega} = \widetilde{\varphi}(P_\omega) = (\widehat{\xi_\varphi}, P_\omega \widehat{\xi_\varphi})$$

Ma $P_\omega \in \pi(\mathcal{A})''$ e $\widehat{\xi_\varphi} \in E_\varphi \widehat{\mathcal{H}}$, ove

$$(E_\varphi x)(\omega) = \delta_{\omega,\varphi} x(\varphi)$$

pertanto, $E_\varphi \in \widehat{\pi}(\mathcal{A})$.

Quindi

$$\widetilde{\varphi}(P_\omega) = (E_\varphi \widehat{\xi_\varphi}, P_\omega \widehat{\xi_\omega}) = (\widehat{\xi_\varphi}, P_\omega E_\varphi \widehat{\xi_\omega}) = (\xi_\varphi, P_\omega E_\varphi \xi_\omega)$$

(dato che $E_\varphi P_\omega = E_{\mathcal{H}_\varphi \cap \overline{\widehat{\pi}(\mathcal{A})'\xi_\omega}}$).

Ma per la purezza degli stati possiamo usare la proposizione 12.4.6, dunque

$$\omega(A) = \frac{(\xi, \widehat{\pi}(A)\xi)}{||\xi||}$$

Dunque

$$P_\omega E_\varphi = E_{\{\xi \in \mathcal{H}_\varphi \,|\, \forall A\ (\xi, \pi(A)\xi) = \omega(A)||\xi||\} \cup \{0\}}$$

ove $\{\xi \in \mathcal{H}_\varphi \,|\, \forall A\ (\xi, \pi(A)\xi) = \omega(A)||\xi||\} \cup \{0\}$ ha ovviamente dimensione 1.

Quindi se ξ è l'unico vettore di modulo 1 definito a meno di un fattore complesso di modulo 1 tale che $(\xi, \pi_\varphi(A)\xi) = \omega(A)$:

$$E_{\mathbb{C}\xi} x = (\xi, x)\xi$$

dunque

$$(\xi_\varphi, E_{\mathbb{C}\xi} \xi_\varphi) = (\xi, \xi_\varphi)(\xi_\varphi, \xi)$$

Ora supponiamo che le rappresentazioni π_φ e π_ω siano equivalenti ad una stessa rappresentazione π, per mezzo di un operatore unitario $U \in (\pi_\varphi, \pi_\omega)$; allora

$$\varphi = \omega_\eta \circ \pi \qquad \text{e} \qquad \omega = \omega_\xi \circ \pi$$

con $||\eta|| = ||\xi|| = 1$, e quindi esiste $z \in \mathbb{C}$ tale che

$$U\xi_\varphi = z\eta$$

Ma$UP_{\mathbb{C}\xi_\varphi}U^{-1} = P_{\mathbb{C}\eta}$ (proiettore) e $UG_\omega\mathcal{H}_\varphi = \mathbb{C}\xi$ ove $UG_\omega U^{-1} = P_{\mathbb{C}\xi}$. Ne segue che

$$P_{\varphi,\omega} = (\xi_\varphi, G_\omega\xi_\varphi) = (U\xi_\varphi, UG_\omega\xi_\varphi) = \overline{z}(\eta, UG_\omega U^{-1}U\xi_\varphi) = \overline{z}(\eta, P_{\mathbb{C}\xi}z\eta)$$

cioè che

$$P_{\varphi,\omega} = |(\eta, \xi)|^2 = P_{\omega,\varphi}$$

QED

Se G_φ e G_ω sono le proiezioni di rango 1 in $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ corrispondenti agli stati φ e ω allora

$$P_{\varphi,\omega} = \operatorname{tr}(G_\varphi G_\omega)$$

Inoltre, considerando che $\pi_\varphi = \widehat{\pi}|_{E_\varphi\widehat{\mathcal{H}}}$ e $E_\varphi \in \widehat{\pi}(\mathcal{A})'$:

$$G_\varphi = P_\varphi|_{E_\varphi\widehat{\mathcal{H}}} = \widetilde{\pi_\varphi}(P_\varphi)$$

(rappresentazione estesa all'algebra di von Neumann inviluppante). Osserviamo esplicitamente che se $T \in \widehat{\pi}(\mathcal{A})''$ allora

$$T|_{E_\varphi} = \widetilde{\pi_\varphi}(T)$$

con $E_\varphi \in \widehat{\pi}(\mathcal{A})'$ (avendosi $T = \lim_\alpha T_\alpha$=$\lim_\alpha \widehat{\pi}(A_\alpha)$, con $T_\alpha \in \widehat{\pi}(\mathcal{A})$).

Possiamo ripetere questa costruzione per ogni rappresentazione irriducibile (che è sempre della forma π_ψ per qualche stato vettoriale ψ), dato che in questo caso la rappresentazione è equivalente a $\pi_\varphi \cong \pi_\omega$ e quindi

$$\widetilde{P_\omega P_\varphi} = G_\omega G_\varphi \qquad \text{e} \qquad \operatorname{tr}\widetilde{\pi}(P_\omega\pi_\varphi) = P_{\varphi,\omega}$$

12.4.10 Lemma *Se $\omega \in \operatorname{Conv}\mathcal{P}(\mathcal{A})$ allora*[3] *allora esistono $\{\lambda_j\} \subset \mathbb{C}$ e $\{\omega_j\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{A})$ tali che*

$$\omega = \sum_j \lambda_j \omega_j$$

ove $\omega_i \perp \omega_j (\iff P_{\omega_i,\omega_j} = 0)$.

[3]Ricordiamo che per il teorema di Krejn–Millman 8.3.10 un tale stato è combinazione convessa di un numero finito o numerabile di stati puri.

Dimostrazione: Consideriamo $\omega = \sum_j \alpha_j \varphi_j$: possiamo supporre che gli φ_j siano stati vettoriali relativi alla medesima rappresentazione (altrimenti basta riscrivere la somma raggruppando gli stati relativi a rappresentazioni equivalenti). Se

$$\varphi_j(A) = \mathrm{tr}(\pi(A)E_j)$$

(ove $E_j = E_{\mathbb{C}\xi_j}$) allora

$$\omega = \mathrm{tr}(\pi(A)T)$$

per $T = \sum_j \alpha_j E_j$ (operatori di rango finito). Possiamo diagonalizzare T usando il teorema spettrale:

$$T = \sum_j \lambda_j P_j$$

in modo che $i \neq j \Rightarrow P_j \perp P_j$, da cui

$$1 = \mathrm{tr}\, T = \sum_j \lambda_j$$

(dato che $\lambda_j \geq 0$ la combinazione è convessa) e quindi concludere che

$$\omega = \sum_j \lambda_j \,\mathrm{tr}(\pi(A))P_j$$

QED

12.4.11 Teorema *Se $\omega, \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ con $\varphi \perp \omega$ allora*

$$\forall a, b > 0 \quad a + b = 1 \Rightarrow P_{a\omega+b\varphi} = P_\omega + P_\varphi$$

Dimostrazione: Sia $P := P_\omega + P_\varphi$: si ratta di un idempotente autoaggiunto in $\mathcal{A}^{**}$. Se $\psi := a\omega + b\varphi$ allora $\psi(P) = 1$ e P è minimale rispetto a questa proprietà, i.e. è il supporto di ψ.

Ora dimostriamo che

$$\widetilde{\psi} = a\widetilde{\omega} + b\widetilde{\varphi}$$

Infatti

$$\widetilde{\psi}(T) =< T|\psi >= a < T|\omega > +b < T|\varphi >= a\widetilde{\omega}(T) + b\widetilde{\varphi}(T)$$

sicché

$$\widetilde{\psi}(P) = a\widetilde{\omega}(P) + b\widetilde{\varphi}(P) = a\widetilde{\omega}(P_\omega + P_\varphi) + b\widetilde{\varphi}(P_\omega + p_\varphi) = a + b = 1$$

Ora $P_{a\omega+b\varphi} \leq P$ (per definizione di supporto), quindi, dato che $a\omega + b\varphi = \psi$ e dunque $\omega \ll \psi$, $\varphi \ll \psi$:

$$P_\omega \leq P_\psi \quad \text{e} \quad P_\varphi \leq P_\psi \qquad \Longrightarrow \qquad P = P_\omega + P_\varphi \leq P_\psi \leq P$$

cioè la nostra tesi.

QED

12.4.12 Corollario $P\omega = \sum_j P_{\omega_j}$.

Se $\varphi, \omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ e se $\omega \in \mathrm{Conv}\ \mathcal{P}(\mathcal{A})$, per il lemma precedente è $\omega = \sum_j \lambda_j \omega_j$ con $i \neq j \Rightarrow \omega_i \perp \omega_j$, quindi

$$P_{\varphi,\omega} = \widetilde{\varphi}(P_\omega) = \widetilde{\varphi}\left(\sum_j P_{\omega_j}\right) = \sum_j \widetilde{\varphi}(P_{\omega_j}) = \sum P_{\varphi,\omega_j}$$

Se inoltre $\varphi = \sum_k \mu_k \varphi_k$, si ha $\widetilde{\varphi} = \sum_k \mu_k \widetilde{\varphi}_k$ e dunque

$$P_{\varphi,\omega} = \sum_k \mu_k \widetilde{\varphi}_k(P_{\omega_j}) = \sum_{j,k} \mu_k P_{\varphi_k,\omega_j}$$

12.4.13 Teorema *Se $\omega, \varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ allora $P_{\omega,\varphi} = 1 - \frac{1}{4}||\varphi - \omega||^2$.*

DIMOSTRAZIONE: Se $\pi_\omega \ncong \pi_\varphi$ allora (per irriducibilità) $\pi_\varphi \between \pi_\omega$ e quindi $||\omega - \varphi|| = 2$ (teorema di Glimm–Kadison 12.4.2), per cui

$$P_{\omega,\varphi} = 0 = 1 - \frac{1}{4}2^2$$

banalmente. Dunque sia $\pi_\omega \cong \pi_\varphi$, col che $\omega = \omega_\xi \circ \pi$, $\varphi = \omega_\eta \circ \pi$ e

$$||(\omega_\xi - \omega_\eta) \circ \pi|| = ||\omega_\xi - \omega_\eta||$$

(per i teoremi di densità di von Neumann e Kaplanski).

Consideriamo ora $M = \mathbb{C}\xi + \mathbb{C}\eta$; se $M = E\mathcal{H}$ si trova

$$||\omega_\xi - \omega_\eta|| = ||(\omega_\xi - \omega_\eta)|_{E\mathcal{B}(\mathcal{H})E}||$$

(ξ e η sono linearmente indipendenti dato che $P_{\omega,\varphi} = 1$). Quindi

$$E\mathcal{B}(\mathcal{H})E = M_2(\mathbb{C})$$

(matrici complesse di ordine due), e, considerando le normalizzazioni e_1 e e_2 degli elementi $\xi + \eta$ e $\xi - \eta$ (che formano una base):

$$\xi + \eta = a_1 e_1 \qquad \text{e} \qquad \eta - \xi = a_2 e_2$$

ovvero

$$\begin{aligned} \xi &= \cos\frac{\vartheta}{2} e_1 + \sin\frac{\vartheta}{2} e_2 \\ \eta &= \cos\frac{\vartheta}{2} e_1 - \sin\frac{\vartheta}{2} e_2 \end{aligned}$$

(ϑ è l'angolo fra ξ e η) si trova $\omega_\xi - \omega_\eta \in \mathcal{S}(M_2(\mathbb{C}))$, dunque

$$\sup_{B \in SL_2(\mathbb{C})} |(\omega_x i - \omega_\eta)(B)| = \max |(\omega_x i - \omega_\eta)(B)|$$

cioè esiste $B_1 \in M_2(\mathbb{C})$ tale che

$$(\omega_\xi - \omega_\eta)(B_1) = ||\omega_\xi - \omega_\eta|| \tag{†}$$

Ma allora B_1^* pure soddisfa la (†) ($\omega_\xi - \omega_\eta$ è un funzionale hermitiano) e quindi anche $\frac{1}{2}(B_1 + B_1^*)$ la soddisfa.

In altri termini, possiamo supporre che B_1 sia autoaggiunto; ora se

$$J(a_1 e_1 + a_2 e_2) := \overline{a_1} e_1 + \overline{a_2} e_2$$

allora

$$J\xi = \xi \qquad \text{e} \qquad J\eta = \eta$$

e quindi anche JBJ soddisfa la (†). Consideriamo allora $\frac{1}{2}(B_1 + JB_1J)$ e notiamo che

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xi = \eta \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \eta = \xi$$

Dunque, se $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ allora[4]

$$\omega_\xi(\sigma_3 B_1 \sigma_3) = \omega_\eta(B_1)$$
$$\omega_\eta(\sigma_3 B_1 \sigma_3) = \omega_\xi(B_1)$$

sicché

$$(\omega_\xi - \omega_\eta)(\sigma_3 B_1 \sigma_3) = -||\omega_\xi - \omega_\eta||$$

e la matrice

$$A := \frac{1}{2}(B_1 - \sigma_3 B_1 \sigma_3)$$

è reale ($A = \overline{A}$), autoaggiunta di norma 1 e tale che

$$(\omega_\xi - \omega_\eta)(A) = ||\omega_\xi - \omega_\eta||$$

Notiamo inoltre che $A\sigma_3 + \sigma_3 A = 0$.

Ma esiste un'unica matrice siffatta in $M_2(\mathbb{C})$, vale a dire

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dunque $(\omega_x i - \omega_\eta)(A)$ fornisce la tesi.

QED

[4]Si tratta di una notazione dovuta a Pauli.

12.5 Rappresentazioni di operatori compatti

Come esempio notevole consideriamo l'algebra $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ degli operatori compatti su uno spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$ (di dimensione infinita, altrimenti $\mathcal{K}(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$).

$\mathcal{K}$ è una C*-algebra *priva di elemento identità*: possiamo tuttavia aggiungere a $\mathcal{K}$ una unità I ottenendo $\mathcal{K} \oplus \mathbb{C}I$.

12.5.1 Teorema *I soli ideali bilateri chiusi in norma della C*-algebra* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *sono:* (0), $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *e* $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo che esista un ideale bilatero chiuso J tale che

$$\mathcal{K} \subsetneq J \subsetneq \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

J è uno *-ideale (per la decomposizione polare: $T = |T|V$, sicché $V^*TV^* = |T|V^* = T^*$), quindi se $T \in J$ anche $T^*T \in J$.

Ora consideriamo $T \in J \setminus \mathcal{K}$; per definizione T non è compatto, quindi non lo è neanche T^*T (altrimenti lo sarebbe $|T|$ e pertanto anche $V|T| = T$), dunque $E_\sigma = \chi_{[\varepsilon,||T||^2]}(T^*T)$ non può avere rango finito, sicché

$$||T^*T(I - E_\varepsilon)|| \leq \varepsilon$$

da cui segue che T^*T è limite di operatori di rango finito e quindi è compatto. Deve perciò esistere un $\varepsilon > 0$ tale che E_ε non abbia rango finito, sebbene $E_\varepsilon \in J$, dato che, considerando la funzione

$$f(\lambda) := \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda < \varepsilon \\ \lambda^{-1} & \text{se } \lambda \geq \varepsilon \end{cases}$$

per il calcolo funzionale boreliano $f(T^*T)T^*T \in J$, essendo $T^*T \in J$ e J un ideale.

Ma se esiste un tale ε allora pure esiste una isometria da $\mathcal{H}$ sull'immagine di E_ε (per separabilità di $\mathcal{H}$) in modo che

$$E_\varepsilon = VV^* \qquad \text{e} \qquad E_\varepsilon V = V$$

ove $V^*V = I$ e quindi $V^*V = (E_\varepsilon V)^* E_\varepsilon V = V^* E_\varepsilon V$, ovvero $E_\varepsilon \in J$, da cui segue $I \in J$ e, per linearità e continuità di V: $J = \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Ora supponiamo che esista un ideale J tale che

$$(0) \supsetneq J \supsetneq \mathcal{K}$$

Allora J deve contenere un idempotente autoaggiunto E (non zero) contenuto in J (per lo stesso argomento del caso precedente). Ma allora per ogni F idempotente di rango 1 contenuto in E si ha $FE = F$ i.e. $F \in J$.

Quindi J contiene un proiettore di rango 1, il che implica che in realtà li contiene tutti: se $\mathbb{C}\xi = F(\mathcal{H})$ allora, per ogni $\eta \in \mathcal{H}$ considerando l'operatore $T_{\xi\eta}\xi := \xi$ si ha $TFT^* = E_{\mathbb{C}\eta}$.

Ma gli operatori di rango finito sono densi in quelli compatti e quindi, dato che l'ideale è chiuso, deve aversi $J = \mathcal{K}$.

QED

12.5.2 Corollario *L'algebra $\mathcal{A} := \mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{K}$ è semplice.*

Chiamiamo *algebra di Calkin* l'algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{K}$; inoltre introduciamo la notazione

$$|\eta\rangle\langle\xi|$$

per l'operatore $T_{\xi\eta}\xi := \xi$ nella dimostrazione precedente.

12.5.3 Teorema *Se π è una rappresentazione non degenere di $\mathcal{K}$ allora*

$$\pi = \bigoplus_{\alpha\in A} \pi_\alpha$$

ove le π_α sono rappresentazioni equivalenti alla rappresentazione identica $\pi_0(A) = A$.

Dimostrazione: Se $T \in \mathcal{K} \setminus 0$ allora $\pi(T) \neq 0$ (perché il nucleo di π è un ideale bilatero chiuso in norma) e consideriamo un $E \in \mathcal{K}$ idempotente autoaggiunto di rango 1 ($\dim E\mathcal{H} = 1$), per cui

$$E = E_{\mathbb{C}x_0} = |x_0\rangle\langle x_0|$$

con $||x_0|| = 1$, e, per ogni T:

$$ETE = (x_0, Tx_0)E$$

cioè $Ex = (x_0, x)x_0$. Ma $F := \pi(E) \neq 0$ è un idempotente autoaggiunto (lo è E) tale che $F\mathcal{H}_\pi$ è ciclico per π: infatti, se così non fosse, il sottospazio

$$\overline{\pi(\mathcal{K})F(\mathcal{H}_\pi)}^\perp$$

sarebbe stabile e quindi $\pi = \pi|_{\overline{\pi(\mathcal{K})F(\mathcal{H}_\pi)}^\perp} \neq 0$ diverrebbe degenere:

$$\pi(E)' = \pi(E)|_{\overline{\pi(\mathcal{K})F(\mathcal{H}_\pi)}^\perp} = F|_{\overline{\pi(\mathcal{K})F(\mathcal{H}_\pi)}^\perp} = 0$$

Quindi $F\mathcal{H}_\pi$ è ciclico.

Questo implica la tesi. Infatti

$$\begin{array}{ccc} \pi(ETE) & = & \pi(E)\pi(T)\pi(E) \\ || & & || \\ \omega_0(T)F & = & F\pi(T)F \end{array}$$

ove $\omega_0(T) := (x_0, Tx_0)$. Se $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ è una base ortonormale di $F\mathcal{H}_\pi$ allora (si noti che $e_\alpha = Fe_\alpha$ e $F = F^*$):

$$\begin{aligned} (e_\alpha, \pi(T)e_\beta) =& (e_\alpha, F\pi(T)Fe_\beta) = \omega_0(T)(e_\alpha, Fe_\beta) \\ =& \omega_0(T)(e_\alpha, e_\beta) = \omega_0(T)\delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

cioè $\pi(T)\mathcal{H}_\alpha \perp \pi(T)\mathcal{H}_\beta$ se $\alpha \neq \beta$, che implica $\overline{\pi(\mathcal{K})\mathcal{H}_\alpha} \perp \overline{\pi(\mathcal{K})\mathcal{H}_\beta}$. Ne segue che, per $M_\alpha := \overline{\pi(\mathcal{K})e_\alpha}$ si trova $\alpha \neq \beta \Rightarrow M_\alpha \perp M_\beta$ e

$$\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha = \mathcal{H}_\pi$$

(per ciclicità di $F\mathcal{H}_\pi$) ove $(e_\alpha, \pi(T)e_\alpha) = \omega_0(T)$, e dunque $\pi|_{M_\alpha} \cong \pi_0$.

QED

Sia ora $\widehat{\pi}$ la rappresentazione universale dell'algebra degli operatori compatti $\mathcal{K}$: sappiamo che

$$\widehat{\pi} = \bigoplus_{\alpha\in A} \pi_0$$

Ci chiediamo come sia fatta l'algebra di von Neumann inviluppante, notando immediatamente che, per la decomposizione precedente,

$$\pi(\mathcal{K})'' = \pi(\mathcal{K}'') = \pi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$$

(questo vale anche nel caso di una somma più che numerabile). Ma sappiamo anche che

$$\mathcal{K}^* = \{f_{x,y} \circ \widehat{\pi}\} = \mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{M}_0}$$

dato che la $f \longmapsto f|_{\mathcal{K}}$ è una isometria di spazi di Banach, e quindi

$$\mathcal{K}^{**} = \mathfrak{M}^* = \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

Conclusione: l'algebra inviluppante di von Neumann di $\mathcal{K}$ è proprio $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

12.5.4 Teorema *Se $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert separabile e π è una rappresentazione di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ allora*

$$\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$$

ove π_1 è una rappresentazione singolare *(i.e. $\pi_1(\mathcal{K}) = 0$) e $\pi_2 = \oplus_{\alpha\in A}\pi_0$.*

Dimostrazione: Consideriamo la decomposizione ortogonale

$$\mathcal{H} = N \oplus M$$

ove $\pi(\mathcal{K})N = 0$ e $\overline{\pi(\mathcal{K})(M)} = M = \overline{\pi(\mathcal{K})\mathcal{H}_\pi}$.

Questa decomposizione è stabile rispetto alle rappresentazioni di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, dato che, se $K \in \mathcal{K}$ e $x \in M$:

$$\pi(A)\pi(K)x = \pi(AK)x \in M$$

$(\pi(AK) \in \mathcal{K} \lhd \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Dunque M è stabile e quindi anche $N = M^\perp$ lo è; quindi

$$\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$$

ove, per definizione, $\pi_1|_\mathcal{K} = 0$ ed esiste un unitario $U \in (\oplus_{\alpha\in A}\pi_0, \pi_2)$.

Infatti $AK \in \mathcal{K}$ per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, sicché

$$\begin{aligned} U\pi_2(AK) =& U\pi_2(A)\pi_2(K) = (\oplus\pi_0)(A)(\oplus\pi_0)(K)U \\ =& (\oplus\pi_0)(A)U\pi_2(K) \end{aligned}$$

cioè $(U\pi_2(A) - \widetilde{\pi}(A))U = 0$.

QED

12.5.5 Esempio *Consideriamo lo spazio di Hilbert* $L^2[0,1]$ *(con la misura di Lebesgue) e l'operatore di moltiplicazione:*

$$(Tf)(s) := sf$$

Allora se $\mathcal{A} := C^*\langle T, I\rangle = C[0,1]$ *alla mappa*

$$s \longmapsto \varphi_s(f(T)) = f(s)$$

corrisponde uno stato puro ω *(teorema di Segal) di* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *tale che*

$$\omega|_\mathcal{A} = \varphi_s$$

Dunque π_ω *è irriducibile, se*

$$\pi_\omega(T)\xi_\omega = s\xi_\omega$$

12.5.6 Definizione *Se* $\mathcal{A}$ *è una* C^**-algebra, uno *-isomorfismo suriettivo di* $\mathcal{A}$ *in sé si dice* isomorfismo *di* $\mathcal{A}$*; l'insieme degli automorfismi di* $\mathcal{A}$ *si denota* $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$.

Ovviamente $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ è un gruppo rispetto alla composizione; si tratta inoltre di un gruppo topologico[5]: se $A \in \mathcal{A}$ e $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ si ha per definizione

$$||\alpha(A)|| = ||A||$$

quindi su $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ resta indotta la topologia uniforme (cioè della norma) rispetto alla quale il prodotto è per definizione continuo.

Notiamo che, ovviamente, se $\dim \mathcal{A} < \infty$ allora $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ è un gruppo di Lie di matrici[6].

Vogliamo ora determinare $\mathrm{Aut}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$

12.5.7 Lemma *Una C^*-algebra con identità I è la chiusura dello spazio dei suoi elementi unitari.*

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo che per ogni $A \in \mathcal{A}$:

$$A = A_1 + iA_2$$

e quindi possiamo limitarci agli autoaggiunti con norma ≤ 1; ma se $A \in \mathcal{A}$ è un tale elemento allora, per

$$U := A + i\sqrt{I - A^2}$$

si trova $U^*U = UU^* = I$ e

$$A = \frac{1}{2}(U + U^*)$$

Quindi gli unitari generano $\mathcal{A}$.

QED

12.5.8 Teorema $\mathrm{Aut}(\mathcal{B}(\mathcal{H})) = \mathcal{U}(\mathcal{H})/\mathbb{T}$.

DIMOSTRAZIONE: Sia $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$; allora la mappa $A \longmapsto \alpha(A)$ definisce una rappresentazione di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ irriducibile che è diversa da zero su $\mathcal{K}$, e quindi, per il teorema precedente, esiste $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ tale che $\alpha(A) = UAU^{-1}$.

Abbiamo quindi che gli unici automorfismi di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ sono quelli *interni*, ovvero quelli della forma

$$A \longmapsto UAU^{-1}$$

ove $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$. Ma U e U' inducono lo stesso automorfismo se e solo se esiste un $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$ tale che $U' = zU$; quindi la tesi.

QED

[5]Nel capitolo **??** discuteremo questo importante concetto.

[6]cfr. i capitoli **??** e **??**.

12.5.9 Definizione *Una funzione $\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ che sia moltiplicativa ($\alpha(AB) = \alpha(A)\alpha(B)$), biunivoca e *-antilineare si dice* antiautomorfismo *di $\mathcal{A}$.*

12.5.10 Esempio *In $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, considerando una base ortonormale (e_n) di $\mathcal{H}$, la mappa*

$$J\sum_i c_i e_i := \sum_i \overline{c_i} e_i$$

definisce una mappa antilineare di $\mathcal{H}$ in sé; di più, dato che $J^2 = I$, si dice antiunitario. *Allora la mappa*

$$A \longmapsto JAJ^{-1}$$

è un elemento antiunitario in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Inoltre

$$A \longmapsto J\alpha(A)J^{-1}$$

è un automorfismo, dato che

$$J\alpha(A)J^{-1} = UAU^{-1}$$

e quindi

$$\alpha(A) = JUA(JU)^{-1}$$

Cioè, ogni antiautomorfismo è indotto da un operatore antiunitario.

12.5.11 Teorema *Sia $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$; allora sono equivalenti le*

- *V è una isometria parziale.*
- *V^*V è idempotente.*
- *V^* è una isometria parziale.*

DIMOSTRAZIONE: (1) equivale a dire che l'operatore $V|_{(\ker V)^\perp}$ è isometrico; considerando allora $M := (\ker V)^\perp$ e $x \in M$ si ha $||Vx||^2 = ||x||^2$ cioè, (per polarizzazione),

$$\forall x, y \in M \quad (Vx, Vy) = (x, y)$$

il che significa che $y - V^*Vy \in M^\perp = \ker V$. Ma allora per ogni $x \in \ker V$:

$$(x, y - V^*Vy) = 0$$

dunque $y - V^*Vy \perp M, M^\perp$, ovvero $y - V^*Vy = 0$.

Se $y \in M^\perp$ allora $0 = V^*Vy$, sicché V^*V è la proiezione ortogonale su M, quindi idempotente. Questo dimostra che (1) implica (2).

Viceversa, se $(V^*V)^2 = V^*V$ allora per $x \in V^*V\mathcal{K} = M$ con $V^*Vx = x$ si ha $(x, V^*Vx) = ||x||$, i.e. (2) implica (1).

Infine (1) implica (3): infatti basta far vedere che V^*V è idempotente. Ma

$$(VV^*)^2 = V(V^*V)V^* = VE_MV^* = V^*V$$

(dato che $VE_Mx = Vx = VEx + V(I - E)x$, e quindi $VE = V$).

QED

Capitolo 13

OPERATORI NON LIMITATI

La teoria degli operatori limitati negli spazi di Hilbert è soddisfacente per molti versi, ma non cattura diversi esempi che sono pervasivi nella Fisica Matematica: gli operatori differenziali. Per studiare questa classe di operatori si possono introdurre degli spazi di Hilbert opportuni nei quali questi sono definiti o si debbono considerare gli operatori non limitati e densamente definiti in uno spazio di Hilbert qualsiasi. Privilegiamo il secondo approccio, basato sulla teoria delle estensioni degli operatori hermitiani, dovuta a von Neumann.

13.1 Chiusura di operatori

Consideriamo due spazi vettoriali X e Y ed un operatore lineare $T : X \longrightarrow Y$ definito su un sottoinsieme $\mathcal{D}(T) = \operatorname{Dom} T \subset X$ (il suo *dominio*); ricordiamo che abbiamo anche gli insiemi nucleo

$$\ker T = \{x \in \mathcal{D}(T) \,|\, Tx = 0\} = T^{-1}(0)$$

(che si denota tradizionalmente anche con $\mathcal{N}(T)$) e immagine

$$\operatorname{im} T = \{Tx \,|\, x \in \mathcal{D}(T)\}$$

(che si denota tradizionalmente con $\mathcal{R}(T)$ perché talvolta è chiamato *rango dell'operatore* T). Infine abbiamo il *grafico dell'operatore* T:

$$G_T := \{x \oplus Tx \,|\, x \in \mathcal{D}(T)\} \subset X \oplus Y$$

Osserviamo che non ogni sottoinsieme di $X \oplus Y$ è il grafico di un operatore.

13.1.1 Definizione *Se $T_1, T_2 : X \longrightarrow Y$ sono operatori tali che $\mathcal{D}(T_1) \subset \mathcal{D}(T_2)$ e se $T_2|_{\mathcal{D}(T_1)} = T_1$ si dice che T_2* estende *T_1, e si scrive $T_1 \subset T_2$.*

Evidentemente

$$T_1 \subset T_2 \iff G_{T_1} \subset G_{T_2}$$

Osserviamo inoltre che G_T determina completamente T: infatti se G è un grafico di un operatore, possiamo intanto ricostruire il dominio dell'operatore, come

$$\mathcal{D} = P_X G$$

(ove $P_X : X \oplus Y \longrightarrow X$ e $P_Y : X \oplus Y \longrightarrow Y$ sono le proiezioni sui due fattori). Osserviamo che G è il grafico di un operatore se e solo se

$$\forall x \in G \quad P_X z = 0 \iff z = 0$$

Questo implica che $P_X|_G$ è lineare e biunivoca, quindi possiamo porre

$$T := P_Y \circ (P_X|_G)^{-1}$$

Per definizione $G_T = G$. Ovviamente T è invertibile (i.e. esiste T^{-1}) se e solo se $\mathcal{N}(T) = 0$ e $\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T)$.

Siano ora X e Y spazi di Banach.

13.1.2 Definizione *Un operatore $T : X \longrightarrow Y$ è* chiuso *se lo è il suo grafico come sottospazio di Banach in $X \oplus Y$.*

Un operatore è chiuso se e solo se per ogni $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(T)$ convergente a $x \in X$ tale che $\{T_n x\}$ converga a $y \in Y$ si ha $x \in \mathcal{D}(T)$ e $y = Tx$.

13.1.3 Definizione *Se $\overline{G_T}$ è ancora il grafico di un operatore, si dice che T è* chiudibile*; inoltre, se $\overline{G_T} = G_{\overline{T}}$ si dice che $\overline{T}$ è la* chiusura *di T.*

Ovviamente T è chiudibile se e solo se esiste un $\overline{T}$ chiuso che lo estenda: in effetti $\overline{T}$ si può definire come il più piccolo (rispetto alla relazione di estendibilità) operatore chiuso che estenda T.

Possiamo riformulare il teorema del grafo chiuso 6.5.12 come

Teorema (DEL GRAFICO CHIUSO). *Se $T : X \longrightarrow Y$ è un opeatore chiuso fra spazi di Banach allora*

$$\mathcal{D}(T) \text{ è chiuso} \iff T \text{ è continuo}$$

In effetti la condizione di convergenza enunciata nel teorema del grafo chiuso 6.5.12[1] si riduce alla chiusura di $\mathcal{D}(T)$.

Dunque T è chiudibile se e solo se la chiusura $\overline{G_T}$ è il grafico di un operatore se e solo se $\forall\, 0 \oplus y \in \overline{G_T} \;\; y = 0$.

In altri termini, T è chiudibile se e solo se

$$\exists \{x_n\} \subset \mathcal{D}(T) \; x_n \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad Tx_n \longrightarrow y \implies y = 0$$

Tuttavia si noti che l'essere T chiuso *non implica* che sia necessariamente continuo. Quello che possiamo dire è che

$$T \text{ lineare e chiuso } \Rightarrow \mathcal{N}(T) \text{ chiuso}$$

Infatti $\mathcal{N}(T) = \{x \oplus 0 \,|\, x \in \mathcal{N}(T)\} = G_T \cap (X \oplus 0)$. Inoltre

$$T \text{ lineare, chiuso e invertibile } \Rightarrow T^{-1} \text{ chiuso}$$

dato che $G_{T^{-1}} = \{Tx \oplus x \,|\, x \in \mathcal{D}(T)\} = UG_T$, con $U(x \oplus y) := y \oplus x$ (si tratta di un isomorfismo).

Consideriamo ora operatori lineari $A; \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ in uno spazio di Hilbert, tali che $\mathcal{D}(A)$ sia denso in $\mathcal{H}$. Possiamo definire l'aggiunto di A come

$$\forall y \in \mathcal{D}(A) \quad \mathcal{D}(A^*) := \{x \in \mathcal{H} \,|\, y \longmapsto (x, Ay) \text{ è continua}\}$$

Quindi, per ogni $y \in \mathcal{D}(A)$, esiste un unico $A^*x \in \mathcal{H}$ tale che

$$(A^*x, t) = (x, Ay)$$

Osserviamo che

$$G_{A^*} = \{x \oplus x^* \,|\, \forall y \in \mathcal{D}(A) \; (x^*, y - (x, Ay) = 0\}$$

[1] Richiamiamone la dimostrazione, che poggia sul teorema della mappa aperta (cfr. 6.5.10). Sia $\mathcal{D}(T)$ chiuso; allora $P_X|_{G_T}$ è biunivoco, lineare e continuo da G_T in $\mathcal{D}(T)$ e, per il teorema della mappa aperta, $P_X|_{G_T}^{-1}$ pure è continuo, quindi anche $P_Y \circ P_X|_{G_T}^{-1}$ lo è, e, per quanto visto, è esattamente T.

Viceversa, se T è continuo, allora definiamo su $\mathcal{D}(T)$ una norma come

$$|||x||| := ||x \oplus Tx||$$

che lo rende uno spazio di Banach (questo è sempre vero). Ma

$$||x|| \leq |||x||| = ||x \oplus Tx|| \leq ||x|| + ||Tx|| \leq ||x|| + ||T|| \; ||x||$$

(per continuità di T). Ne segue che $\mathcal{D}(T)$ è completo in X, quindi è un sottospazio chiuso.

e che, se

$$(x \oplus x^*, (-Ay) \oplus y) := (x^*, y) - (x, Ay)$$

allora

$$G_{A^*} = (VG_A)^\perp$$

ove è l'isomorfismo unitario $V(x \oplus y) := (-y) \oplus x$ $(V^2 = -I)$.

Evidentemente, dato che $\mathcal{D}(A)$ è denso, A^* è chiuso.

13.1.4 Teorema (VON NEUMANN) *Se $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ è un operatore lineare densamente definito allora $\mathcal{D}_{A^*}$ è denso se e solo se A è chiudibile. In questo caso $\overline{A} = A^{**}$.*

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo che A sia chiudibile: allora $\overline{G_A} \cap (0 \oplus \mathcal{H}) = 0$. Ma

$$\overline{G_A} = G_A^{\perp\perp} = -G_A^{\perp\perp} = V(VG_A^{\perp\perp}) = V(VG_A\perp)^\perp$$

dato che $V^2 = -I$ e $VM^\perp = UM^\perp$ (essendo V unitario). Dunque A è chiudibile se e solo se $V(VG_A^\perp)^\perp \cap (0 \oplus \mathcal{H}) = 0$ cioè

$$(VG_A^\perp)^\perp \cap (\mathcal{H} \oplus 0) = 0$$

Ma $VG_A^\perp = G_{A^*}$, quindi

$$x \oplus 0 \perp G_{A^*} \Rightarrow x = 0$$

e dunque $\mathcal{D}(A^*)$ è denso.

Viceversa se $\mathcal{D}(A^*)$ è denso allora $G_{A^{**}} = G_A^{\perp\perp} = \overline{G_A}$.

QED

13.1.5 Lemma *Se $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ è un operatore lineare, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- $\forall x \in \mathcal{D}(A) \quad (x, Ax) \in \mathbb{R}$.
- $\forall x, y \in \mathcal{D}(A) \quad (x, Ay) = (Ax, y)$.
- $A \subset A^*$.

DIMOSTRAZIONE: La (2) implica la (3) per definizione; la (3) implica la (1) dato che

$$(x, Ax) = (Ax, x) = \overline{(x, Ax)}$$

La (1) implica la (2) perché, se $(x, Ax) \in \mathbb{R}$ allora $(Ax, x) = (x, Ax)$ e quindi, per polarizzazione

$$(x, Ay) = (Ax, y)$$

QED

Notiamo che la (2) *non implica* che $A = A^*$ se A non è limitato.

13.1.6 Definizione *Un operatore lineare $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ è* hermitiano *se è densamente definito e se vale una delle condizioni equivalenti del lemma.*

Notiamo che se A è hermitiano allora è chiudibile (in quanto estendibile dall'operatore chiuso A^*) e quindi $A^{**} = \overline{A}$.

Notiamo inoltre che $T \subset R$ implica $R^* \subset T^*$; quindi $A \subset A^*$ implica $A^{**} \subset A^*$, dunque $\overline{A} \subset A^*$, cioè

$$A^{***} = A^*$$

Quindi la chiusura di un operatore hermitiano è hermitiano.

13.1.7 Definizione *$A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ è autoaggiunto se $A = A^*$.*

Per quanto detto è chiaro che se A autoaggiunto allora è hermitiano, mentre non vale il viceversa.

Se $A \subset B$ sono hermitiani allora $B^* \subset A^*$ e quindi $A \subset B \subset B^* \subset A^*$: "estendere" A vuol dire quindi "ridurre la distanza fra A e A^*", per cui se $A = A^*$ allora A è hermitiano massimale (cioè non ha altre estensioni se non se stesso). Ovviamente non vale il viceversa.

13.1.8 Teorema (von Neumann) *Se T è un operatore lineare chiuso densamente definito allora T^*T è autoaggiunto*

Dimostrazione: Basta dimostrare che $I+T^*T$ è autoaggiunto: per questo basta dimostrare che $I + TT^*$ è densamente definito e che $\mathcal{R}(I + T^*T) = \mathcal{H}$. Infatti, per ogni $x \in \mathcal{D}(I + T^*T)$:

$$(x, (I + T^*T)x) = (x, x) + (Tx, Tx) \geq (x, x) \geq 0$$

(essendo T chiuso). Quindi $I + T^*T$ è hermitiano.

Ma, se $\mathcal{R}(I+T^*T) = \mathcal{H}$ allora vi è definito $(I+T^*T)^{-1}$, che è una contrazione: infatti abbiamo appena visto come $(x, (I + T^*T)x) \geq 0$ e quindi

$$||x||^2 = (x, x) \leq (x, (I + T^*T)x) \leq ||x||\ ||(I + T^*T)x||$$

cioè $||x|| \leq ||I + T^*T||$. Per questo basta dimostrare che

$$\mathcal{R}(I + T^*T) = \mathcal{H}$$

per avere la tesi[2].

[2]Un argomento alternativo è il seguente: se $A \subset A^*$ è biunivoco e $\mathcal{R}(A) = \mathcal{H}$ allora $A = A^*$.

Dunque dimostriamo questa identità. Per ipotesi G_T è chiuso, quindi

$$G_T + VG_{T^*} = G_T + (G_T)^\perp = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$$

da cui

$$x \oplus 0 = (x_1 + \oplus Tx_1) + V(x_2 \oplus T^* x_2) = (x_1 - T^* x_2) \oplus (Tx_1 + x_2)$$

pertanto

$$x_2 = -Tx_1 \qquad \text{e} \qquad x = x_1 - T^* x_2 = (I + T^* T)(x_2)$$

(si noti che $x_1 \in \mathcal{D}(T)$ e quindi $x_2 \in \mathcal{D}(T^*T)$).

Non resta allora che da mostrare che $\mathcal{D}(T^*T)$ è denso: ma se esistesse un $x_0 \perp \mathcal{D}(T^*T)$ allora

$$\exists x_1 \in \mathcal{D}(T^*T) \quad x_0 = (I + T^*T)(x_1)$$

quindi $(x_0, x_1) = 0$ il che è assurdo (infatti $(x_1, x_1) \leq ((I + T^*T)x_1, x_1) = 0$).

QED

Si noti il

13.1.9 Corollario T^*T *è densamente definito.*

Possiamo ora discutere il teorema di decomposizione polare per operatori non limitati: come nel caso limitato proviamo prima a definire la radice quadrata di un operatore autoaggiunto positivo.

13.1.10 Lemma $B = B^*$ *(non necessariamente limitato) è positivo se e solo se*

$$B = \int \lambda dE(\lambda) \Rightarrow \forall \lambda < 0 \ E(\lambda) = 0$$

DIMOSTRAZIONE: Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^-$, se $x \in \mathcal{D}_B$ allora $E(\lambda)x \in \mathcal{D}_B$ quindi, definendo $y = E(\lambda)x$:

$$(y, By) = \int \lambda' d(y, E(\lambda')y) = \int_{-\infty}^{\lambda} \lambda' d(y, E(\lambda')y) \leq \lambda(y, y)$$

(osservando che, se $\lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda$ allora $(E(\lambda_1) - E(\lambda_2))y = E(\lambda_1)E(\lambda) = E(\lambda_2)E(\lambda) > 0$).

Quindi, per $\lambda < 0$, $(y, By) \leq \lambda(y, y)$ se e solo se $y = 0$.

QED

Quindi, per ogni operatore B autoaggiunto positivo esiste un unico operatore

$$\sqrt{B} := \int_0^\infty \lambda^{\frac{1}{2}} dE(\lambda)$$

la cui famiglia spettrale è $G(\lambda) = E(\lambda^2)$ (l'unicità di $\sqrt{B}$ segue da quella della famiglia spettrale).

Osserviamo inoltre che $\mathcal{D}_B \subset \mathcal{D}_{\sqrt{B}}$: infatti

$$x \in \mathcal{D}_{\sqrt{B}} \iff \int_0^\infty \lambda^2 d(x, G(\lambda)x) < \infty$$

e

$$x \in \mathcal{D}_B \iff \int_0^\infty \lambda^2 d(x, E(\lambda)x) < \infty \Rightarrow \int_0^\infty \lambda d(x, G(\sqrt{\lambda})x) < \infty$$

13.1.11 Teorema (DECOMPOSIZIONE POLARE) *Se A è un operatore lineare chiuso e densamente definito su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ allora esistono unici H e V operatori tali che $H = H^*$ è positivo e V è una isometria parziale e che*

$$A = VH$$

ove $\mathcal{N}(AH) = \mathcal{N}(V) = \mathcal{N}(A)$.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo un operatore lineare A densamente definito su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, chiuso ($A = \overline{A}$); per il teorema di Von Neumann 13.1.8 A^*A è un operatore positivo autoaggiunto, quindi possiamo definire

$$H = \sqrt{A^*A}$$

(quindi $\mathcal{D}_{A^*A} \subset \mathcal{D}_H$).

Ora, se $x \in \mathcal{D}_{A^*A}$ allora $||Ax|| = ||Hx||$, dato che

$$(Ax, Ax) = (x, A^*Ax) = (x, H^2x) = (Hx, Hx) = ||Hx||$$

Ora utilizziamo il seguente lemma

Lemma. *L'insieme $\{x \oplus Ax \,|\, x \in \mathcal{D}_{A^*A}\}$ è denso nel grafico di A.*

Possiamo quindi affermare che

$$\forall x \in \mathcal{D}_A = \mathcal{D}_H \quad ||Ax|| = ||Hx||$$

e definire una isometria su $H\mathcal{D}_A = H\mathcal{D}_H$:

$$V(Hx) := Ax$$

(si tratta di una isometria perché $||Ax|| = ||Hx||$), la cui chiusura è una isometria parziale:

$$\mathcal{N}(V)^\perp = \mathcal{R}(V^*V) = \overline{\mathcal{R}(H)} = \mathcal{N}(H)^\perp$$

(essendo $H = H^*$). Ne segue che H è chiuso e V è una isometria parziale:

$$\mathcal{N}(V) = \mathcal{N}(H)$$

Ma $\mathcal{N}(H) = \mathcal{N}(A)$ (sempre perché $||Hx|| = ||Ax||$) e quindi, per definizione di V:

$$VHx = Ax$$

i.e. $A = VH$.

Che la decomposizione VH sia unica si dimostra come al solito: se $A = H'V'$ con $\mathcal{N}(H') = \mathcal{N}(V') = \mathcal{N}(A)$, $H' = H'^*$, $H' \geq 0$ e V è una isometria parziale, allora[3]

$$(V'H')A'^* = H'V'^*$$

e

$$A^*A = H'(V'^*V')H' = H'^2$$

sicché $H' = \sqrt{A^*A} = H$ e, dato che $A = V'H = VH$ allora $V' = V$ (perché questa identità è valida su un sottospazio denso e sul nucleo $\mathcal{N}$).

Per concludere non resta che dimostrare il lemma. Ovviamente

$$\{x \oplus Ax \,|\, x \in \mathcal{D}_{A^*A}\} \subset G_A$$

(G_A è il grafico di A). Ma $A = \overline{A}$, quindi G_A è uno spazio di Hilbert; per avere la tesi basta dimostrare che, come sottospazio di Hilbert di G_A:

$$\{x \oplus Az\}^\perp = 0$$

vale a dire che se $z \in G_A$ e, per ogni $x \in \mathcal{D}_{A^*A}$: $(z, x + Ax) = 0$ allora $z = 0$.

Infatti $z = y + Ay$ (con $y \in \mathcal{D}_A$) e quindi

$$(y + Ay, x + Ax) = (y, x) + (Ay, Ax) = (y, x) + (y, A^*Ax) = (y, (I + A^*A)x)$$

Ma, $(I + A^*A)x$ descrive, al variare di $x \in \mathcal{D}_{A^*A}$ l'intero $\mathcal{H}$.

QED

[3]Se $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e T è un operatore qualsiasi in $\mathcal{H}$ allora $(BT)^* = T^*B^*$. Infatti $\mathcal{D}_{(BT)^*} = \{x \in \mathcal{H} \,|\, y \longmapsto (x, BTy)$ è continua su $\mathcal{D}_T\}$ (si noti che $\mathcal{D}_T = \mathcal{D}_B$ perché B è limitato). Ma $(x, BTy) = (B^*x, Ty)$ (sempre perché B è limitato) i.e. $B^*x \in \mathcal{D}_{T^*}$ e quindi $\mathcal{D}_{(BT)^*} = \{x \in \mathcal{H} \,|\, B^*x \in \mathcal{D}_{T^*}\}$.

13.2 Estendibilità di operatori

Consideriamo un operatore hermitiano densamente definito $A.\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$: si ha $\overline{A} \subset \overline{A}^*$ e

$$||(A+\lambda I)x||^2 = (Ax, Ax) + \lambda^2(x,x) + 2\,\mathrm{Re}(\overline{\lambda}(x, Ax))$$

Quindi, per $\lambda = \pm i$ ($(x, Ax) \in \mathbb{R}$):

$$||(A \pm iI)x||^2 = ||Ax||^2 + ||x||^2 = ||x \oplus Ax||^2$$

e le mappe

$$\begin{tikzcd}
(A+iI)x \arrow[dd, "S_0(A)"'] \arrow[dr] & \\
& x \oplus Ax \\
(A-iI)x \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

sono isometrie.

Quindi $\mathcal{D}_\pm(A) := \mathcal{R}(A \pm iI)$ è immagine isometrica di G_A, sicché

$$\mathcal{D}_\pm(\overline{A}) = \overline{\mathcal{D}_\pm(A)}$$

La $S_0(A)$ si dice *trasformata di Cayley*[4], ed è una isometria tale che

$$\mathcal{D}(S_0) = \mathcal{D}_+ \qquad \text{e} \qquad \mathcal{R}(\S_0) = \mathcal{D}_-$$

e quindi tale che $\overline{S_0(A)} = S_0(\overline{A})$. Si noti che

$$\mathcal{H}_\pm := \mathcal{D}_\pm^\perp = \mathcal{R}(A \pm iI)$$

cioè che

$$\mathcal{H}_\pm = \mathcal{N}((A \pm iI)^*) = \mathcal{N}(A^* \mp iI)$$

Ma $\mathcal{H}_\pm, \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^*)$ ($z \in \mathcal{H}_\pm \iff z \in \mathcal{D}(A^*)$ e $A^*z = \pm iz$): gli interi

$$n_\pm := \dim \mathcal{H}_\pm$$

si dicono *indici di difetto* di A.

Abbiamo dunque $\mathcal{D}(S_0) = \mathcal{R}(A + iI)$ e quindi

$$S_0 := (A - iI)(A + iI)^{-1}$$

[4]Si tratta di una generalizzazione della funzione $z \longmapsto \frac{z+i}{z-i} = e^{i\alpha} \longmapsto \cot\frac{\alpha}{2} = z$.

cioè $S_0(A+iI)x = (A-iI)x = (A+iI)x - 2ix$, da cui

$$(I-S_0)(A+iI)x = 2ix \Rightarrow (A+iI)x = 2i(I-S_0)^{-1}x$$

col che $\mathcal{R}(I-S_0) = \mathcal{D}(A)$ (che è denso) e $\mathcal{N}(I-S_0) = 0$ (in quanto $(I-S_0)z = 0$ implica $2ix = 0$, vale a dire $z := (A+iI)x = 0$).

In definitiva, esiste un $(I-S_0)^{-1}$ densamente definito tale che

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathcal{D}(A) \quad Ax &= -ix + 2i(I-S_0)^{-1}x \\ &= -i(I-S_0)(I-S_0)^{-1}x + 2i(I-S_0)^{-1}x \\ &= i(I+S_0)(I-S_0)^{-1}x\end{aligned}$$

(dato che $(I-S_0)(I-S_0)^{-1}x = x$ in $\mathcal{D}(A)$), per cui

$$\forall x \in \mathcal{D}(A) \quad Ax = i(I+S_0)(I-S_0)^{-1}x$$

13.2.1 Lemma *Se $A = \overline{A} \subset A^*$ allora $S_0(A) = \overline{S_0(A)}$ e $\mathcal{D}(S_0) = \mathcal{D}_+$; ponendo $E := E_{\mathcal{D}_+}$ si ha quindi che $S := S_0E$ è una isometria parziale.*

13.2.2 Teorema *Se $A = \overline{A} \subset A^*$ allora $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ come somma diretta di spazi vettoriali (non di Hilbert).*

Dimostrazione: Se $x \in \mathcal{D}(A)$ e $z_\pm \in \mathcal{H}_\pm$ allora

$$x + z_+ + z_- = 0 \Rightarrow x = z_+ = z_- = 0$$

Infatti $\mathcal{H}_\pm, \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^*)$ e quindi ($A^*z = \pm iz$)

$$0 = (A^* + iI)(x + z_+ + z_-) = (A^* + iI)x + 2iz_+ = 0 \in \mathcal{D}_+ + \mathcal{H}_+$$

Ma $\mathcal{H}_+ = \mathcal{D}_+^\perp$, dunque abbiamo una somma di due vettori ortogonali che fa zero, pertanto i due vettori sono nulli e questo dimostra che $z_\pm$ e x sono linearmente indipendenti.

Ora per avere il teorema basta dimostrare che

$$\mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{D}(A) + \mathcal{H}_+ + \mathcal{H}_-$$

Ricordando che $z = (A+iI)x \in \mathcal{D}(S_0)$ e

$$(I-S_0)(A+iI)x = 2ix \qquad \text{e} \qquad (A+iI)(I-S_0)x = 2iz$$

abbiamo che $(I - S - 0)$ è inverso (bilatero) di $(A + iI)$; ma

$$\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}((A + iI)^*)$$

(in quanto, se B è continuo: $\mathcal{D}((A + B)^*) = \mathcal{D}(A^*)$) e quindi

$$y \in \mathcal{D}((A + iI)^*) \iff \exists y^* \ (y, (A + iI)(I - S_0)z) = (y^*, (I - S_0)z)$$

Dato che $(y, (A + iI)(I - S_0)z) = (y, 2iz)$, e che (usando il lemma)

$$\begin{aligned}(y, z) =& (-(2i)^{-1}y^*, (I - S_0)z) =: (y_1, (I - S_0)z)\\ =& (y_1, (I - S)z)\end{aligned}$$

troviamo $y - (I - S)^* y_1 \in \mathcal{H}_+$ e $\mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{H}_+ + \mathcal{R}(I - S^*)$. Ma

$$(I - S)^* = (I - SS^*) + SS^* - S^* = (I - SS^*) + (S - I)S^*$$

e dunque (tenendo conto che $\mathcal{R}(A + B) \subset \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B)$):

$$\mathcal{R}(I - S)^* \subset \mathcal{R}(I - SS^*) + \mathcal{R}((I - S)S^*) = \ \mathcal{H}_- + \mathcal{R}(I - S_0) = \mathcal{H}_- + \mathcal{D}(A)$$

QED

13.2.3 Corollario *Se $A = \overline{A} \subset A^*$ allora $A = A^*$ se e solo se $n_+ = n_- = 0$.*

Il che equivale a dire $A^* z = \pm iz \Rightarrow z = 0$; inoltre

$$n_\pm(\overline{A}) = n_\pm(A)$$

(dato che $(\mathcal{D}_\pm(\overline{A}) = \overline{\mathcal{D}_\pm(A)})$, e quindi

13.2.4 Corollario *Se $A \subset A^*$ allora $\overline{A} = \overline{A}^*$ se e solo se $n_+ = n_- = 0$.*

13.2.5 Teorema *La trasformata di Cayley è un isomorfismo suriettivo che preserva l'ordine (cioè $A_1 \subset A_2 \iff S_0(A_1) \subset S_0(A_2)$) fra*

$$\{A \,|\, A = \overline{A} \subset A^*\}$$

e lo spazio delle isometrie chiuse S tali che $\mathcal{R}(I - S)$ è denso, e fra lo spazio degli autoaggiunti ($A = A^*$) e l'insieme degli operatori unitari U tali che $\mathcal{R}(I - U)$ è denso (cioè $\mathcal{N}(I - U) = 0$).

DIMOSTRAZIONE: Che $A_1 \subset A-2 \iff S_0(A_1) \subset S_0(A_2)$ è ovvio dalla definizione.

Sia ora S una isometria tale che $\mathcal{R}(I-S)$ è denso: allora basta provare le

- $\mathcal{N}(I-S_0) = 0$
- $A := i(I+S_0)(I-S_0)^{-1}$ è densamente definito e $A \subset A^*$.

Per quel che riguarda (1), sappiamo che esiste $S_0 \subset S$ isometria parziale tale che

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(I-S) \subset \mathcal{N}(I-S) = \mathcal{R}((I-S)^*)^\perp \subset \mathcal{R}((I-S)^*|_S)^\perp \\ = \mathcal{R}((I-S^*)S)^\perp = \mathcal{R}(I-S_0)^\perp = 0\end{aligned}$$

(per densità di $\mathcal{R}(I-S_0)$). Il penultimo passaggio si giustifica osservando che (S è una isometria parziale)

$$(I-S^*)S = S - S^*S = S(S^*S) - S^*S = (S-I)S^*S$$

e quindi $\mathcal{R}((S-I)S^*S) = \mathcal{R}(I-S_0)$ (per chiusura di S_0). Ne segue che $\mathcal{N}(I-S_0) = 0$.

Per avere la (2) basta dimostrare che per ogni $x \in \mathcal{D}(A)$ $(x, Ax) \in \mathbb{R}$, cioè che

$$\forall x \in \mathcal{D}(A) \quad (x, i(I+S_0)(I-S_0)^{-1}x) \in \mathbb{R}$$

e dunque $x = (I-S_0)z$ ($z \in \mathcal{D}(S_0)$ per le ipotesi). Allora

$$(x, Ax) = ((I-S_0)z, i(I+S_0)z)$$

quindi

$$\begin{aligned}((I-S_0)z, i(I+S_0)z) &= i((z,z) - (S_0z, S_0z) + (z, S_0z) - (S_0z, z)) \\ &= i((z, S_0z) - \overline{(z, S_0z)}) \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

($(z,z) = 0$ perché S_0 è isometrico).

QED

Osserviamo che $\mathcal{R}(I-S_0)$ è denso perché coincide con $\mathcal{D}(A)$; ma, per ogni $S_0 \subset S$ isometria si ha $I-S_0 \subset I-S$ e quindi $I-S$ ha codominio denso: il teorema implica allora che in questo modo si ottengono tutte le estensioni isometriche di A.

Se $A \subset A^*$, $S_0(A) \subset S_0$ e quindi S_0 è una estensione isometrica, per cui esiste $A' \subset A'^*$ tale che $A \subset A'$. Se ne conclude che *studiare le estensioni di A si riduce a studiare le estensioni isometriche degli operatori di Cayley.*

Se $A = \overline{A}$ allora

$$S_0(A) : \mathcal{D}_+ \longrightarrow \mathcal{D}_-$$

e quindi $\mathcal{D}_+ \subset \mathcal{D}(S_0)$ è determinato da

$$\mathcal{D}(S_0) = \mathcal{D}_+ \oplus (\mathcal{D}_+^\perp \cap \mathcal{D}(S_0))$$

Ma $\mathcal{D}_+^\perp \cap \mathcal{D}(S_0) \subset \mathcal{H}_+$ e $S_0(\mathcal{D}_+^\perp \cap \mathcal{D}(S_0)) \subset \mathcal{H}_-$. In effetti S_0 è una isometria, quindi

$$||S_0 x||^2 = ||x||^2 \iff (S_0 x, S_0 y) = (x, y)$$

(per polarizzazione) e, se $x \in \mathcal{D}_+$, $y \in \mathcal{H}_+ \cap \mathcal{D}(S_0)$ si ha $S_0 y \in \mathcal{H}_-$.

Dunque

13.2.6 Corollario *$A \subset A^*$ è hermitiano massimale (cioè inestendibile) se e solo se $A = \overline{A}$ e $n_+(A) = 0$ oppure $n_-(A) = 0$.*

Osserviamo anche che se $V : \mathcal{H}_+ \longrightarrow \mathcal{H}_-$ è una isometria allora

$$S_0(z + z') := S_0(A)z + Vz'$$

pure è una isometria.

13.2.7 Teorema *$A \subset A^*$ ammette una estensione autoaggiunta se e solo se $n_+ = n_-$.*

DIMOSTRAZIONE: Se A possiede estensioni autoaggiunte allora sia B una di esse:

$$S_0(A) \subset U := S_0(B)$$

ove U è unitario (dato che B è autoaggiunto e $\mathcal{R}(B \pm iI) = \mathcal{H}$) e $U\mathcal{H}_+ = \mathcal{H}_-$, per cui $\dim \mathcal{H}_- = \dim \mathcal{H}_+$.

Viceversa, se $\dim \mathcal{H}_+ = \dim \mathcal{H}_-$ allora deve esistere una isometria $V : \mathcal{H}_+ \longrightarrow \mathcal{H}_-$ per mezzo della quale ottenere l'estensione

$$U(z + z') := S_0(A)z + Vz'$$

e $B \subset B^*$ tale che $n_+(B) = n_-(B) = 0$ e $U = S_0(B)$; ovvero $B = B^*$.

Quindi

$$\mathcal{D}(V) = \mathcal{R}(I - U) = \{x + (I - V)z \,|\, x \in \mathcal{D}(A) \text{ e } z \in \mathcal{H}_+\}$$

Cioè B è tale che $B(x + (I - V)z') = Ax + i(I + V)z'$.

QED

Se $n_+ = n_- = n$ allora le estensioni autoaggiunte sono parametrizzate dal gruppo unitario $U(n)$.

13.2.8 Proposizione *$\mathcal{R}(I-U)$ è denso se e solo se $\mathcal{R}(I-U)^{\perp} = 0$ se e solo se $1 \in \sigma_p(U)$.*

DIMOSTRAZIONE: $1 \notin \sigma_p(U) \iff (I-U)^{-1}$ è limitato $\iff A = i(I+U)(I-U)^{-1}$ è autoaggiunto limitato.

QED

Cioè la trasformata di Cayley non solo pone in corrispondenza gli operatori autoaggiunti A con gli operatori unitari U tali che $\mathcal{R}(I-U)$ è denso, ma anche pone in corrispondenza gli operatori autoaggiunti limitati con gli operatori unitari tali che $1 \notin \sigma(U)$; in effetti l'inverso della trasformata di Cayley

$$A = i(I+U)(I-U)^{-1}$$

è ovunque definito, dunque è limitato (dato che è chiuso), se e solo se $\mathcal{R}(I-U) = \mathcal{H}$, che equivale a $1 \notin \sigma(U)$, essendo $I-U$ chiuso e iniettivo.

13.2.9 Esempio *Consideriamo l'operatore di shift su uno spazio di Hilbert (separabile):*

$$Se_n = e_{n+1}$$

e $S_0(A) = S$; allora $\mathcal{R}(S) = \{e_1\}^{\perp}$ sicché S non è unitario; tuttavia è una trasformazione di Cayley.

Intanto $\mathcal{R}(I-S)$ è denso, dato che $\mathcal{R}(I-S)^{\perp} = \mathcal{N}(I-S^*) = 0$: infatti se $S^*x = x$ allora $x = 0$. Ma $S^*E_{n+1} = e_n$ e quindi $\mathcal{N}(S^*) = e_1$:

$$S^{*m}e_n = \begin{cases} e_{n-m} & \text{se } n > m \\ 0 & \text{se } n \leq m \end{cases}$$

Dunque per ogni $x = \sum_n c_n e_n$ (ove $\sum_n |c_n|^2 = ||x||$) si ha

$$S^{*m}x \xrightarrow{m \longrightarrow 0} 0 \qquad \textit{fortemente}$$

e $S^*x = x$ implica allora $S^{*m} = x$; ma $S^{*m} \longrightarrow 0$ e quindi $x = 0$. Gli indici di difetto sono 0 e 1.

Notiamo che in questo caso $A \subset A^*$ e non ci sono sottospazi invarianti chiusi non banali per A: in effetti, se M fosse un tale sottospazio allora $A(\mathcal{D}(A) \cap M) \subset M$ e, se $E = E_M$, avremmo

$$\forall x \in \mathcal{D}(A) \quad Ex \in \mathcal{D}(A)$$

ovvero $AEx = EAx$, i.e. $EA \subset AE$, da cui $S_0(A)E = ES_0(A)$.

Quindi $ES = SE$, $S^*E = ES^*$, perciò $E \in \{0, I\}$, dato che l'algebra generata *da S e S^* è irriducibile e contiene gli operatori compatti. Contiene inoltre $E_{\mathbb{C}e_1} = I - SS^*$. Ma $Se_n = e_{n+1}$ e quindi*

$$S(I - SS^*)S* = E_{\mathbb{C}e_2}$$

Iterando il procedimento ne concludiamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ $E_{\mathbb{C}e_n}$ è generata da S e S^* e quindi $S_0(A) = S$ è hermitiano massimale ed irriducibile (questa situazione è opposta al caso di un operatore autoaggiunto che, per il teorema spettrale, è "completamente riducibile"). Se in luogo di A si considera $-A$ allora $S_0(A) = S$ ha indici $(1,0)$.

In realtà ogni operatore hermitiano massimale è somma diretta di un autoaggiunto e di un certo numero di operatori hermitiani che agiscono come l'operatore A (o $-A$) nell'esempio precedente.

13.2.10 Teorema (Wold) *Se $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert e S una isometria di $\mathcal{H}$ allora*

$$S = U \oplus (S_0 \oplus S_0 \oplus ...)$$

ove U è un operatore unitario e S_0 è l'operatore di shift. Lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ si decompone quindi in somma diretta

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_U \oplus (\mathcal{H}_{S_0} \oplus \mathcal{H}_{S_0} \oplus ...)$$

ove $S|_{\mathcal{H}_U}$ è un operatore unitario di $\mathcal{B}(\mathcal{H}_U)$ e gli $\mathcal{H}_{S_0}$ sono isomorfi a $l^2(\mathbb{N})$ con $S_{\mathcal{H}_{S_0}}$ operatori di shift.

Dimostrazione: Si ponga

$$\mathcal{H}_U := \bigcap_{n\geq 0} S^n\mathcal{H}$$

Evidentemente $\mathcal{H}_U$ è un sottospazio chiuso S-invariante di $\mathcal{H}$ e $S|_{\mathcal{H}_U} \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_U)$.

Anche il sottospazio $\mathcal{H}_0 := \mathcal{H}_U^\perp$ è S-invariante: se $\mathcal{H}_0 \neq 0$ allora $\mathcal{H}_0 + S\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0 \cap (S\mathcal{H}_0)^\perp$ è non nullo, e

$$\mathcal{H}_0 = \bigcup_{n\geq 0} S^n(\mathcal{H}_0 + S\mathcal{H}_0)$$

Se $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è una base ortonormale in $\mathcal{H}_0 + S\mathcal{H}_0$ e se, per $\alpha \in A$:

$$\mathcal{H}_{S_0} := \langle e_\alpha, Se_\alpha, S^2e_\alpha, ...\rangle$$

è lo spazio di Hilbert (separabile!) generato dalla famiglia $\{S^ne_\alpha\}_{n\geq 0}$ allora possiamo identificarlo con $l^2(\mathbb{N})$, per ogni $\alpha \in A$, e $S|_{\mathcal{H}_{S-0}}$ è un operatore di shift. Ma $\mathcal{H}_0 = \bigoplus_{\alpha\in A} \mathcal{H}_{S_0}$ e quindi

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_U \oplus (\mathcal{H}_{S_0} \oplus \mathcal{H}_{S_0} \oplus ...)$$

QED

13.3 Un esempio: la derivata in $L^2[0,1]$

Sia $\mathcal{H} = L^2[0,1]$ rispetto alla misura di Lebesgue ds e $A = i\frac{d}{ds}$ definito sul dominio $D(0,1)$ delle funzioni f assolutamente continue[5] tali che $f(0) = f(1) = 0$. Allora (indichiamo le derivate con un apice)

$$f \longmapsto if' = Af$$

è un operatore hermitiano, come si vede integrando per parti:

$$(g, if') = (ig', f)$$

e $(A^*x)s = ix'(s)$ con

$$\mathcal{D}(A^*) = \{x \in \mathcal{H} \,|\, x' \in \mathcal{H} \in AC(0,1)\}$$

Quindi A non è chiuso né $\overline{A}$ è autoaggiunto, dato che

$$\mathcal{D}(A^{**}) = \{x \in AC[0,1] \,|\, x' \in \mathcal{H},\, x(0) = x(1) = 0\}$$

e dunque $A^{**} \supsetneq A^*$.

Possiamo usare la teoria delle estensioni in questo caso semplice (che si potrebbe agevolmente trattare “a mano”: è un esercizio determinare le estensioni autoaggiunte di A senza ricorrere alla teoria che stiamo delineando).

Determiniamo gli spazi $\mathcal{H}_\pm$ le cui dimensioni danno gli indici di difetto: ad esempio, per identificare $\mathcal{H}_+$ dobbiamo considerare le soluzioni della

$$A^*x = ix$$

Dato che $x \in D(0,1)$ allora $x \in AC(0,1)$ e quindi ($Ax = ix$) $x' \in AC(0,1)$; iterando questo ragionamento troviamo che $x \in C^\infty(0,1)$ e soddisfa l'equazione $x' = x$: quindi $x = ce^s$, con $c \in \mathbb{C}$; abbiamo cioè

$$\mathcal{H}_\pm = \{ce^{\pm s}\}_{c\in\mathbb{C}}$$

e quindi gli indici di difetto sono $(1,1)$. Ora consideriamo le due funzioni

$$\varphi_\pm := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^2-1}} e^{\pm s} \in \mathcal{H}_\pm$$

[5] Ricordiamo che f è assolutamente continua (AC) se

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \quad \sum |s_i - t_i| < \delta \Rightarrow \sum |f(s_i) - f(t_i)| < \varepsilon$$

Dato che le uniche isometrie parziali $V : \mathcal{H}_+ \longrightarrow \mathcal{H}_-$ sono le mappe

$$\varphi_+ \longmapsto \alpha\varphi_-$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$ di modulo 1 (i.e. $|\alpha| = 1$ si può considerare un elemento della circonferenza unitaria $S^1 = \mathbb{T} \subset \mathbb{C}$), per la corrispondenza fra isometrie parziali e estensioni autoaggiunte, ogni tale estensione H di A è della forma

$$H = A_\alpha = i\frac{d}{ds}$$

con dominio di definizione

$$D_\alpha := \{f + z\varphi_+ + z\alpha\varphi_- \,|\, f \in D(0,1)\, z \in \mathbb{C}\}$$

Si noti che questi domini sono:

$$D_\alpha = \{f \in AC(0,1) \,|\, f(1) = \alpha f(0)\}$$

dato che, se $f \in D_\alpha$:

$$f(0) = \frac{z\sqrt{2}(1+\alpha e)}{\sqrt{e^2-1}}$$

e dunque

$$f(1) = \frac{z\sqrt{2}(\alpha+e)}{\sqrt{e^2-1}} = \frac{\alpha+e}{1+\alpha e} f(0) = \beta f(0)$$

con $|\beta| = \left|\frac{\alpha+e}{1+\alpha e}\right| = 1$. Viceversa ogni tale funzione è un elemento di $\mathcal{D}_\alpha$. Dunque le estensioni autoaggiunte di A sono parametrizzate da $\mathbb{T}$.

13.3.1 Esempio

- *Sia $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, ds)$ e*

  $$A = i\frac{d}{ds} \qquad \text{con} \qquad \mathcal{D}_A = \{x \in \mathcal{H} \,|\, x \in AC(\mathbb{R}), x' \in \mathcal{H}\}$$

  Quindi $A = A^*$ e$A^* f = \pm i f$, sicché $f(s) = ce^{\pm s} \in L^2)(\mathbb{R})$.

- *Se invece ci limitiamo alla semiretta $\mathcal{H} = L^2([0,\infty), ds)$ e*

  $$A_0 = i\frac{d}{ds} \qquad \text{con} \qquad \mathcal{D}_{A_0} = \mathcal{S}(0,\infty)$$

  allora

  $$A_0^* = i\frac{d}{ds} \qquad \text{con} \qquad \mathcal{D}_{A_0^*} = \{x \in \mathcal{H} \,|\, x \in AC[0,\infty), x' \in \mathcal{H}\}$$

dunque $A_0^* f = \pm f$ *i.e.* $f(s) = ce^{\pm s}$ *che appartiene a* $\mathcal{H}$ *se il segno è* $-$ *ma non vi appartiene se il segno è* $+$*. Ora:*

$$A_0^{**} = i\frac{d}{ds} \qquad \text{con} \qquad \mathcal{D}_{A_0^{**}} = \{x \in \mathcal{H} \,|\, x \in AC[0,\infty), x' \in \mathcal{H}, x(0) = 0\}$$

è un operatore hermitiano con indici $(0,1)$ *ed è l'antitrasformata di Cayley dell'operatore di shift:*

$$S_0(A_0^{**}) = S$$

Se $A = A^{**} \subset A^*$ è un operatore hermitiano chiuso densamente definito con indici (m,n) allora $-A$ ha indici (n,m) e quindi

$$A \oplus (-A)$$

ha indici $(n+m, n+m)$, dunque possiede estensioni autoaggiunte. Ne concludiamo che, a meno di estendere lo spazio di Hilbert, possiamo dotare A di estensioni autoaggiunte.

Se $A = A^*$ è densamente definito (e quindi esiste un operatore unitario U tale che $1 \notin \sigma(U)$ allora, scrivendo la decomposizione spettrale di U:

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\vartheta} dF(\vartheta)$$

ove la famiglia spettrale F è tale che

$$\operatorname*{s-lim}_{\vartheta \longrightarrow 0} F(\vartheta) = 0 \qquad \text{e} \qquad \operatorname*{s-lim}_{\vartheta \longrightarrow 2\pi} F(\vartheta) = I$$

con $F(0, 2\pi) = I$.

Notando che

$$\begin{aligned} U &= (A - iI)(A + iI)^{-1} \\ A &= i(I + U)(I - U)^{-1} \end{aligned}$$

e definendo

$$E(\lambda) := F(\vartheta(\lambda))$$

ove $\vartheta(\lambda) := -2\arctan\lambda = F(-2\arctan\lambda)$ si ha

$$\operatorname*{s-lim}_{\lambda \longrightarrow -\infty} E(\lambda) = 0 \qquad \text{e} \qquad \operatorname*{s-lim}_{\lambda \longrightarrow \infty} E(\lambda) = I$$

Questa sarà la famiglia spettrale di A:

13.3.2 Teorema *Se $A = A^*$ è densamente definito allora esiste un'unica famiglia spettrale $E(\lambda)$ tale che valgano le*

- $x \in \mathcal{D}_A \iff \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(x, E(\lambda)x) < \infty$
- $x \in \mathcal{D}_A \Rightarrow Ax = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda)x$ *(ove l'integrale è alla Riemann–Stieltjes).*

Dimostrazione: (1) $x \in \mathcal{D}_A$ se e solo se $x \in \mathcal{R}(I-U)$ i.e. se esiste $z \in \mathcal{H}$ tale che $x = (I-U)z$; ma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(x, E(\lambda)x) = \int_0^{2\pi} \left(i\frac{1+e^{i\vartheta}}{1-e^{i\vartheta}}\right)^2 d(x, F(\vartheta)x)$$

Dato che

$$\left(i\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = \left(\frac{(1+z)(1-\overline{z})}{(1-z)^2}\right) = \left(\frac{2+(z+\overline{z}-2)+2}{2-(z+\overline{z})}\right) = \frac{4}{|1-z|^2} - 1$$

ci basta far vedere che esiste z tale che $x(I-U)z$ se e solo se

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-e^{i\vartheta}|^2} d(x, F(\vartheta)x) < \infty$$

Ma se $x = (I-U)z$ e se consideriamo, per $0 < \vartheta_1 < \vartheta_2 < \vartheta$:

$$g_{12}(\vartheta) := \chi_{[\vartheta_1, \vartheta_2]}(\vartheta)(1-e^{i\vartheta})^{-1}$$

allora, se $G_{12}(\vartheta) = g_{12}(e^{i\vartheta})$ (g_{12} è una funzione boreliana per definizione) e quindi $\int g_{12}(\vartheta)dF(\vartheta) = G_{12}(U)$, abbiamo

$$\int_0^{2\pi} |g_{12}(\vartheta)|^2 d(x, E(\lambda)x) = ||G_{12}(U)x||^2$$

Infatti, per definizione di g_{12}:

$$G_{12}(U)(I-U) = F(\vartheta_2) - F(\vartheta_1)$$

quindi

$$||(F(\vartheta_2) - F(\vartheta_1))z||^2 = (z, F(\vartheta_2) - F(\vartheta - 2)z) \xrightarrow[\substack{\vartheta_2 \longrightarrow 2\pi \\ \vartheta_1 \longrightarrow 0}]{} (z, z)$$

da cui

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-e^{i\vartheta}|^2} d(x, F(\vartheta)x) = (z, z) < \infty$$

Viceversa, se vale questa disuguaglianza allora, se $\vartheta_1^{(n)}$ è una successione convergente a 0 e $\vartheta_2^{(n)}$ è una successione convergente a 2π, con $0 < \vartheta_1^{(n)} < \vartheta_2^{(n)} < \vartheta$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-e^{i\vartheta}|^2} d(x, F(\vartheta)x) = \lim_{\substack{\vartheta_1^{(n)} \longrightarrow 0 \\ \vartheta_2^{(n)} \longrightarrow 2\pi}} \int_{\vartheta_1^{(n)}}^{\vartheta_2^{(n)}} \frac{1}{|1-e^{i\vartheta}|^2} d(x, F(\vartheta)x)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{I_n} \frac{1}{|1-e^{i\vartheta}|^2} d(x, F(\vartheta)x)$$

ove $I_n = [\vartheta_1^{(n)}, \vartheta_1^{(n-1)}] \cup [\vartheta_2^{(n-1)}, \vartheta_2^{(n)}]$ e quindi $I_n \cap I_m = \emptyset$ (abbiamo inoltre tenuto presente che $\lim c_n = \sum_{n=1}^{\infty}(c_n - c_{n-1})$.

Dunque abbiamo che $E_n := F(I_n)$ sono proiettori a due a due ortogonali e, applicando ad essi (per tramite del calcolo funzionale boreliano) le funzioni

$$G_n(e^{i\vartheta}) := \chi_{I_n}(\vartheta)(1-e^{i\vartheta})^{-1}$$

otteniamo

$$n \neq m \Rightarrow G_n(U)G_m(U)^* = 0$$

e quindi

$$\int_{\vartheta_1^{(m)}}^{\vartheta_2^{(m)}} \frac{1}{|1-e^{i\vartheta}|^2} dF(\vartheta)x = \sum_{n=1}^{m} G_m(U)x$$

cioè

$$\left|\left|\sum_m G_m(U)x\right|\right|^2 = \sum_n \int_{I_n} \frac{1}{|1-e^{i\vartheta}|^2} d(x, F(\vartheta)x) < \infty$$

Sicché la serie sotto il segno di norma converge e quindi, poiché si tratta di una serie di vettori a due a due ortogonali, per il criterio di Cauchy, converge anche la serie numerica $\sum_m ||G_m(U)x||$. Allora poniamo

$$z := \lim_n \int_{\vartheta_1^{(n)}}^{\vartheta_2^{(n)}} \frac{1}{|1-e^{i\vartheta}|^2} dF(\vartheta)x < \infty$$

ottenendo $(I-U)z = x$ e quindi $x \in \mathcal{D}_A$.

(2) Se $x \in \mathcal{D}_A$ allora $x = (I-U)z$ e $Ax = i(I+U)z$, sicché

$$z = \lim_{\substack{\vartheta_1^{(n)} \longrightarrow 0^+ \\ \vartheta_2^{(n)} \longrightarrow 2\pi^-}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-e^{i\vartheta}} dF(\vartheta)x$$

Per continuità di $i(I+U)$ e dato che $G_{12}(U)x = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-e^{i\vartheta}} dF(\vartheta)x$ si ha

$$\begin{aligned} Ax &= \lim_{\substack{\vartheta_1^{(n)} \longrightarrow 0^+ \\ \vartheta_2^{(n)} \longrightarrow 2\pi^-}} i(I+U)G_{12}(U)x \\ &= \lim_{\substack{\vartheta_1^{(n)} \longrightarrow 0^+ \\ \vartheta_2^{(n)} \longrightarrow 2\pi^-}} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} i\frac{1+e^{i\vartheta}}{1-e^{i\vartheta}} dF(\vartheta)x = \lim_{\substack{\lambda_1 \longrightarrow -\infty \\ \lambda \longrightarrow \infty}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda dE(\lambda)x \end{aligned}$$

(per definizione di λ).

Non resta quindi che da appurare l'unicità della famiglia spettrale: se G è un'altra famiglia allora

$$Ux = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\lambda - i}{\lambda + i} dG(\lambda)x$$

e, passando dai λ ai ϑ, G diviene una famiglia spettrale su $\mathbb{T}$; ma la decomposizione spettrale di un operatore unitario è unica, dunque lo è E:

$$F'(\vartheta) := G(\lambda(\vartheta)) = F(\vartheta) \Rightarrow G(\lambda) = E(\lambda)$$

QED

13.4 Teoria delle perturbazioni

Ricordiamo che un operatore è estendibile se e solo se ha indici di difetto uguali: cerchiamo ora delle condizioni perché questa uguaglianza sia verificata. Cominciamo con il

13.4.1 Teorema (Criterio di von Neumann) *Se $A \subset A^*$ è densamente definito e se esiste un operatore antiunitario V tale che $VA = AV$ allora $n_+(A) = n_-(A)$.*

Dimostrazione: Se $V(A+I)x = (A-I)Vx$ allora $V : \mathcal{D}_+(A) \longrightarrow \mathcal{D}_-(A)$ è suriettivo e quindi lo è $V : \mathcal{H}_+(A) \longrightarrow \mathcal{H}_-(A)$: ne segue che $\dim \mathcal{H}_+(A) = \dim \mathcal{H}_-(A)$.

QED

Osserviamo che se $A \subset A^*$ allora $BA \subset AB$ e quindi $BS_0(A) \subset S_0(A)B$; se $A = A^*$ e $V = S(A)$ otteniamo $VB = BV$.

Ad esempio, se $A \subset A^*$ e A possiede un vettore ciclico x_0:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_0 \in \mathcal{D}(A^n)$$

(un tale x_0 si dice *vettore differenziabile* per A e si scrive $x_0 \in C^\infty(A)$) e se supponiamo che l'insieme

$$\{x_0, Ax_0, A^2x_0, ...\}$$

sia totale in $\mathcal{H}$ allora

13.4.2 Teorema

- *Se il sottospazio generato da $\{A^n x_0\}$ coincide con $\mathcal{D}_A$ allora A possiede autoaggiunte.*
- *Se $A_{x_0} := A|_{\mathcal{D}_{x_0}}$ (ove $\mathcal{D}_{x_0}$ è il sottospazio generato dall'insieme $\{A^n x_0\}$) ha indici di difetto (n, n) con $n < \infty$ allora A ha estensioni autoaggiunte.*

DIMOSTRAZIONE: (1) Definiamo un operatore antiunitario V; sia

$$v_0(\sum_n a_n A^n x_0) := \sum_n \overline{a_n} A^n x_0$$

Dimostriamo che si tratta di una isometria: dato che $x_0 \in C^\infty(A)$ e A è hermitiano

$$\begin{aligned}\left\|\sum_n a_n A^n x_0\right\|^2 &= \sum_{n,m} \overline{a_n} a_m (A^n x_0, A^m x_0) = \sum_{n,m} \overline{a_n} a_m (x_0, A^{n+m} x_0)\\ &= \sum_{n,m} \overline{a_n} a_m (x_0, A^{m+n} x_0) = \sum_{n,m} \overline{a_m} a_n (A^m x_0, A^n x_0)\\ &= \left\|V_0 \sum_n a_n A^n x_0\right\|^2\end{aligned}$$

Dunque, dato che V_0 è definito su un insieme totale, esiste un operatore antiunitario V per cui possiamo applicare il criterio di Von Neumann.

(2) Sia $A_{x_0} := A|_{\mathcal{D}_{x_0}}$ ove $\mathcal{D}_{x_0}$ è il sottospazio generato dall'insieme $\{A^n x_0\}$; allora $A_{x_0} \subset A$ e, dato che gli indici di difetto di A_{x_0} sono uguali, lo sono anche quelli di A.

QED

13.4.3 Definizione *Un vettore differenziabile $x_0 \in C^\infty(A)$ si dice* vettore di unicità *per $A \subset A^*$ se $A_{x_0} := A|_{\mathcal{D}_{x_0}}$ (ove $\mathcal{D}_{x_0}$ è il sottospazio generato dall'insieme $\{A^n x_0\}$) è un operatore (densamente definito in $\mathcal{H}_{x_0} = \overline{\mathcal{D}_{x_0}}$) essenzialmente autoaggiunto in $\mathcal{H}_{x_0}$.*

13.4.4 Teorema (CRITERIO DI NUSSBAUM) *Se $A \subset A^*$ ammette un insieme totale di vettori di unicità allora A è essenzialmente autoaggiunto.*

DIMOSTRAZIONE: Sia x_0 un vettore di unicità; allora i sottospazi chiusi

$$\overline{(A \pm iI)\mathcal{D}(A)}$$

coincidono con $\mathcal{H}$ se contengono un insieme totale. Quindi basta dimostrare che per ogni vettore di unicità x_0, $x_0 \in \overline{(A \pm iI)\mathcal{D}(A)}$. Ed infatti

$$\overline{(A \pm iI)\mathcal{D}(A)} \supset \overline{(A_{x_0} \pm iI)\mathcal{D}(A_{x_0})} = \overline{\mathcal{D}_\pm(A_{x_0})} = \mathcal{D}_\pm(\overline{A_{x_0}})$$

Ma A_{x_0} è essenzialmente autoaggiunto per ipotesi, sicché $\mathcal{D}_\pm(\overline{A_{x_0}}) = \mathcal{H}$.

QED

Ricordiamo che se B è un operatore limitato, vi possiamo valutare le funzioni analitiche, e.g.

$$e^{\lambda B} = \sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} B^n$$

Più in generale diamo l'importantissima

13.4.5 Definizione *x è un* vettore analitico *per un operatore T se $x \in C^\infty(T)$ è differenziabile per quell'operatore e se esiste un $\lambda > 0$ tale che*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} ||T^n x|| < \infty$$

(cioè se la serie ha raggio di convergenza diverso da zero).

In seguito dimostreremo il risultato fondamentale di Nelson secondo il quale, *se $A \subset A^*$ ha un insieme totale di vettori analitici allora è essenzialmente autoaggiunto.*

Vogliamo formulare per il momento un risultato che appartiene alla "teoria delle perturbazioni" degli operatori: il teorema di Kato–Rellich.

Partiamo dall'osservazione che

$$n_\pm = \dim\{z \mid A^* z = \pm iz\} = \dim\{z \mid A^* z = \lambda z\}$$

con $\operatorname{im}\lambda > 0$ ovvero $\operatorname{im}\lambda < 0$.

Inoltre notiamo che, se, se T è un operatore lineare chiuso e

$$\operatorname{nul} T := \dim \mathcal{N}(T) < \infty \qquad \text{o} \qquad \operatorname{def} T := \dim \mathcal{R}(T) < \infty$$

possiamo definire l'*indice dell'operatore* T come

$$\operatorname{ind} T := \operatorname{def} T - \operatorname{nul} T$$

13.4.6 Definizione *Un operatore T si dice* quasi-Fredholm *se* $\operatorname{nul} T < \infty$ *o* $\operatorname{def} T < \infty$ *e si dice di* Fredholm *se* $\operatorname{nul} T, \operatorname{def} T < \infty$.

Sia T un operatore di Fredholm e B un operatore tale che $\mathcal{D}_B \subset \mathcal{D}_T$:

13.4.7 Definizione *Se T è tale che*

$$\forall x \in \mathcal{D}_T \quad ||Bx|| \leq M(||x|| + ||Tx||)$$

si dice che T è relativamente limitato *limitato rispetto a B (ovvero* limitato nel senso di Kato*) se*

$$\exists\, a', b' \ \forall x \in \mathcal{D}_T \quad ||Bx|| \leq a'||x|| + b'||Tx||$$

Se poniamo
$$|||x||| := a||x|| + b||Tx||$$
allora B è relativamente limitato se lo è come operatore fra gli spazi di Hilbert $(\mathcal{D}_T, |||.|||)$ e $\mathcal{H}$.

Notiamo che se $A = \overline{A} \subset A^*$ (densamente definito) allora, se $z = \mu + i\nu \in \mathbb{C}$ e $\lambda \neq 0$:

$$||(A + zI)x||^2 = ||(A - \mu I)x - i\lambda x||^2 = ||(A - \mu I)x||^2 + \lambda^2||x||^2$$

(i termini misti si elidono); quindi, per ogni $\lambda \neq 0$ l'insieme $\mathcal{R}(A - zI)$ è chiuso, dato che è isometrico al grafo di $A - \mu I$ munito della topologia della norma equivalente a $|||.|||$ con $T = A - \mu I$.

13.4.8 Proposizione $\dim \mathcal{R}(A - zI)^\perp = \begin{cases} n_+ & \textit{se } \operatorname{im} z > 0 \\ n_- & \textit{se } \operatorname{im} z < 0 \end{cases}$

DIMOSTRAZIONE: $A - zI = A - z_0 I - (z - z_0)I$ e quindi, applicandolo a x:

$$(A - zI)(x) = (A - z_0 I)x - (z - z_0)x$$

Ma se $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0 + iy\}_{y\in\mathbb{R}}$ si trova che $(A - z_0 I)^{-1}$ è densamente definito su $\mathcal{D}_{z_0}$ (che è chiuso) ed è ivi continuo, dato che

$$\begin{aligned} ||(A - z_0 I)x||^2 =& ||(A - z \operatorname{Re} z_0 I)x||^2 + |\operatorname{Im} z_0|^2||x||^2 \\ \geq& |\operatorname{Im} z_0|^2||x||^2 \end{aligned}$$

e quindi $x = (A - z_0 I)^{-1}(A - z_0 I)x$ e

$$x = (A - z_0 I)^{-1} E_0 (A - z_0 I)x$$

ove E_0 è la proiezione sul sottospazio $\mathcal{R}(A - z_0 I)$; sia inoltre

$$B := (A - z_0 I)^{-1} E_0$$

Si tratta di un operatore limitato ovunque definito, sicché, per ogni $x \in \mathcal{D}_A$:

$$(A - zI)x = (A - z_0I)x - (z - z_0)x = I - (z - z_0)B(A - z_0I)x$$

Ma, se

$$|z - z_0| < ||B|| \leq |\operatorname{Im} z_0|^{-1}$$

allora l'operatore $S := I - (z - z_0)B$ è invertibile, sicch é

$$(A - zI)x = S(A - z_0I)x$$

e quindi $\mathcal{R}(A - zI) = S\mathcal{R}(A - z_0I)$ (si noti che ambedue questi ranghi sono chiusi) e S è lineare ed invertibile, dunque

$$\dim \mathcal{R}(A - z_0I)^\perp = \dim \mathcal{R}(A - z_0I)$$

dato che, se $x \in \mathcal{R}(A - zI)^\perp$ allora, per ogni $z \in \mathcal{R}(A - z_0I)$:

$$(x, Sz) = 0 \iff X^*x \in \mathcal{R}(A - z_0I)^\perp$$

CIOè $S^*\mathcal{R}(A - z_0I)^\perp = \mathcal{R}(A - zI)^\perp$.

Ma S è invertibile, quindi anche S^* lo è; inoltre, se

$$T := S^*|_{\mathcal{R}(A - zI)^\perp}$$

allora $T = V|T|$ (decomposizione polare) e $\mathcal{N}(T) = 0$ (per invertibilità), sicché V è una isometria il cui codominio è la chiusura del codominio di T, che è già un chiuso: quindi V è l'isometria che realizza l'uguaglianza fra le dimensioni degli spazi.

QED

Osserviamo che, se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall x \in \mathcal{D}_A \quad ||(A - \lambda I)x|| \geq \delta||x||$$

allora gli indici di difetto dell'operatore coincidono: questo è vero, ad esempio, se

$$\lambda(x, x) \leq (x, Ax)$$

dato che, in questo caso, per la disuguaglianza di Schwartz:

$$(x, Ax) \leq ||x||\ ||Ax||$$

e quindi

$$\lambda||x|| \leq ||Ax||$$

Se, per esempio, $A \subset A^*$ è *definito positivo* ($(x, Ax) \geq 0$) allora ha indici di difetto uguali: questa situazione avviene in molte applicazioni, ad esempio nella formulazione di problemi per equazioni differenziali a derivate parziali.

13.4.9 Definizione *Se $A \subset A^*$ e $B \subset B^*$ sono operatori tali che $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}_B$, si dice A-*limite *di B il numero*

$$\inf\{b \mid \exists a_b\ \forall x \in \mathcal{D}_A\ ||Bx|| \le a_b||x|| + b||Ax||\}$$

Ad esempio, se l'A-limite è zero allora B è limitato.

13.4.10 Teorema (KATO–RELLICH) *Se $A \subset A^*$, $B \subset B^*$, $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}_B$ e B è A-relativamente limitato, cioè*

$$\exists a, b\ \forall x \in \mathcal{D}_A\ ||Bx|| \le a_b||x|| + b||Ax||$$

e se l'A-limite di B è minore di 1 allora

$$n_\pm(A+B) = n_\pm(A)$$

In particolare, se A è essenzialmente autoaggiunto allora anche B lo è e $\mathcal{D}_{\overline{A+B}} = \mathcal{D}_{\overline{A}}$.

DIMOSTRAZIONE: Sia $b < 1$ (ciò che possiamo supporre in quanto, per ipotesi, l'A-limite di B è minore di 1); vogliamo studiare l'insieme $\mathcal{R}((A+B) \pm iI)$ ovvero sia $\mathcal{R}((A+B) - zI)$.

Si noti intanto che

$$||Bx|| \le a||x|| + b||Ax|| \le \sqrt{a^2+b^2}||x \oplus Ax|| = \sqrt{(a\varepsilon)^2+b^2}\left|\left|\frac{1}{\varepsilon}x \oplus Ax\right|\right|$$

Ma $b < 1$, sicché esiste $\varepsilon > 0$ con $(aEe)^2 + b^2 < 1$ e quindi

$$\sqrt{(a\varepsilon)^2+b^2}\left|\left|\frac{1}{\varepsilon}x \oplus Ax\right|\right| = b_\varepsilon\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}||x||^2 + ||Ax||^2} = b_\varepsilon||(A \pm i\varepsilon^{-1}I)x||$$

(infatti $\varepsilon^{-2}||x||^2 + ||Ax||^2$ è una norma equivalente sul grafico di A). Dunque, come in precedenza:

$$(A + B \pm i\varepsilon^{-1}I)x = (A \pm i\varepsilon^{-1})x + Bx$$

e scriviamo

$$Bx = B(A \pm i\varepsilon^{-1}I)^{-1}(A \pm i\varepsilon^{-1}I)x$$

ove $(A \pm i\varepsilon^{-1}I)^{-1}$ è continuo e e diviene densamente definito componendo con $E_\pm = E_{\overline{\mathcal{R}(A \pm i\varepsilon^{-1}I)}}$. Sicché

$$Bx = B(A \pm i\varepsilon^{-1}I)^{-1}E_\pm(A \pm i\varepsilon^{-1}I)x$$

Ma
$$||B(A \pm i\varepsilon^{-1}I)^{-1}z|| \leq b_\varepsilon ||(A \pm i\varepsilon^{-1}I)B(A \pm i\varepsilon^{-1}I)^{-1}z|| = b_\varepsilon ||z||$$
e
$$||B(A \pm i\varepsilon^{-1}I)^{-1}E_\pm x|| \leq b_\varepsilon ||E_\pm z|| \leq b_\varepsilon ||z||$$
Quindi la chiusura $C_\pm$ di $B(A \pm i\varepsilon^{-1}I)^{-1}E_\pm$ ha norma $\leq b_\varepsilon < 1$; ne segue che
$$(A + B \pm i\varepsilon^{-1}I)x = (I + C_\pm)(A \pm i\varepsilon^{-1}I)$$
ed il complemento ortogonale del codominio di $(A + B \pm i\varepsilon^{-1}I)$ ha la stessa dimensione di quello di $(A \pm i\varepsilon^{-1}I)$.

QED

Si noti che
$$\mathcal{D}_{\overline{a}} = \mathcal{R}(\overline{A} + iI)^{-1}$$
Ovviamente, se $\lambda \notin \sigma(T)$ allora $(T - \lambda I)$ è di Fredholm e quindi abbiamo il suo spettro essenziale
$$\sigma_{ess}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, (T - \lambda I) \text{ non di Fredholm}\}$$
Se T è normale si tratta dello spettro essenziale da noi già definito; ricordiamo in effetti il teorema di Weyl 10.5.19 *se T è normale e limitato e K compatto allora $\sigma_{ess}(T) = \sigma_{ess}(T + K)$.*

Menzioniamo soltanto che esiste una versione di questo teorema per operatori non limitati: i risultati sono i seguenti:

Teorema. *Se B è una perturbazione limitata nel senso di Kato rispetto a T allora $\sigma_{ess}(T + B) = \sigma_{ess}(T)$.*

Teorema. *Se B è relativamente compatto rispetto a T allora $\sigma_{ess}(T + B) = \sigma_{ess}(T)$.*

ove

13.4.11 Definizione *B è relativamente compatto rispetto a T se $\mathcal{D}_T \subset \mathcal{D}_B$ e l'operatore B è compatto fra lo spazio di Hilbert $\mathcal{D}_T$ rispetto alla norma $|||.|||_T$ e $\mathcal{H}$.*

13.4.12 Proposizione *Se T è un operatore autoaggiunto non necessariamente limitato e $B \subset B^*$ è T-compatto allora $\sigma_{ess}(T + B) = \sigma_{ess}(T)$.*

DIMOSTRAZIONE: In effetti

$$\sigma_{ess}(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} \,|\, \exists\{e_n\} \subset \mathcal{D}_T \text{ b.o. } ||Te_N - \lambda e_n|| \longrightarrow 0\}$$

("b.o." sta per "base ortonormale"). Ma se $\{e_n\}$ è una base ortonormale allora $e_n \longrightarrow 0$ debolmente e quindi

$$Te_n = \lambda e_n + (Te_n - \lambda e_n) \xrightarrow{\text{debolmente}} 0$$

cioè $e_n \oplus Te_n \xrightarrow{\text{debolmente}} 0$ e quindi (per T-compattezza di B):

$$Be_n \xrightarrow{\text{in norma}} 0$$

Dunque $||(T+B)e_n - e_n|| \longrightarrow 0$.

QED

13.5 Un esempio: Il laplaciano in $\mathbb{R}^3$

Consideriamo l'operatore di Laplace (a meno del segno) $A = -\Delta$; in coordinate di $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta = -\left(\frac{\partial^2}{\partial s_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial s_n^2}\right)$$

Il nostro spazio di Hilbert è $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n, ds^n)$, e $\mathcal{D} = C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (funzioni a supporto compatto); consideriamo lo spazio di Schwartz

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in C^\infty \,|\, \left|\left|(1+s^2)^m \frac{\partial^n}{\partial s^n} f\right|\right|_\infty = p_{mn}(f) \Rightarrow p_{mn}(f) < \infty \right\}$$

Sappiamo che $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ è denso nella topologia di $\mathcal{D}$ e che la trasformata di Fourier è un isomorfismo di $\mathcal{S}$ in sé (teorema 8.5.5). Allora, se

$$A_0 := -\Delta|_{\mathcal{D}} \qquad \text{e} \qquad A_1 := -\Delta|_{\mathcal{S}}$$

si ha $A_0 \subset A_0^*$ e $A_1 \subset A_1^*$ e

$$(f, i\frac{\partial g}{\partial s_h}) = (i\frac{\partial f}{\partial s_h}, g) \qquad \text{e} \qquad (f, i\frac{\partial^2 g}{\partial s_h^2}) = (\frac{\partial^2 f}{\partial s_h^2}, g)$$

(integrazione per parti), sicché Δ e $-\Delta$ sono hermitiani. Ora dimostriamo che

$$A_1 \subset \overline{A_0}$$

In effetti per ogni $f\in\mathcal{S}$ esiste $\{g_n\}\subset\mathcal{S}$ tale che $p(g_n-f)\longrightarrow 0$ pr ogni seminorma p della topologia di $\mathcal{S}$, quindi

$$g_n \xrightarrow{L^2} f \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^\nu g_n}{\partial s^\nu} \xrightarrow{L^2} \frac{\partial^\nu f}{\partial s^\nu}$$

(per ogni multiindice ν) dato che

$$f = (1+s^2)^{-k}(1+s^2)^k f$$

e quindi

$$||f||_{L^2} \leq ||(1+s^2)^k f||_\infty ||(1+s^2)^{-k}||_{L^2}$$

il che vale anche per ogni derivata parziale della f. Pertanto

$$\Delta g_n \longrightarrow \Delta f$$

Ora "coniughiamo" rispetto alla trasformata di Fourier (che indichiamo con $\mathfrak{F}$: $\mathfrak{F}f = \widehat{f}$): se

$$B_1 := \mathfrak{F}A_1\mathfrak{F}^{-1} = \left\{ f\in\mathcal{S}\longmapsto \left(h\longmapsto \sum_j k_j^2 f(n)\right)\right\}$$

allora

$$(B_1 f)(k) = k^2 f(k)$$

Notiamo poi che B_1 è essenzialmente autoaggiunto: infatti

$$\mathcal{R}(B_1\pm I) = \{k\longmapsto (k^2\pm i)f(k)\}_{f\in\mathcal{S}} = \mathcal{S}$$

(dato che $g\in\mathcal{S}\Rightarrow k\longmapsto (k^2\pm i)^{-1}g(k)$) e quindi è un insieme denso.

Ora sia (se $H_0 = -\Delta$):

$$\mathcal{D}_{H_0} = \{f\in L^2 \mid \widehat{f}\in L^2 \text{ e } (k\longmapsto k^2\widehat{f}(k))\in L^2\}$$

Allora, dato che

$$||f||_{B_1}^2 = ||f||^2 + \int |k^2 f(k)|^2 d^n k$$

si ha $\mathcal{D}_{H_0} = L^2(\mathbb{R}^n, (1+k^4)d^n s)$.

Consideriamo il caso $n=3$ nell'esempio precedente: se $f\in\mathcal{D}_{H_0}$ allora

$$\widehat{f} = (1+k^2)^{-1}(1+k^2)\widehat{f} \Rightarrow f(s) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int e^{-iks}(1+k^2)^{-1}(1+k^2)\widehat{f}(k)d^3k$$

Ma $\frac{1}{k^4}k^2dk \approx \frac{1}{k^2}dk$ e quindi la funzione integranda è a quadrato sommabile; dato che

$$\widehat{f} = (1+\lambda k^2)^{-1}(1+\lambda k^2)\widehat{f}$$

cioè (ponendo $h = \lambda k$):

$$\int (1+\lambda k^2)^{-2}d^3k = \lambda^{\frac{3}{2}}\int (1+h^2)^{-2}d^3h =: \lambda^{\frac{3}{2}}c \in \mathbb{R}$$

troviamo

$$|f(s)| \leq c\lambda^{-\frac{3}{2}}||\widehat{f} + \lambda k\widehat{f}(k)||_2 = c\lambda - \frac{3}{2}||f + \lambda^2 H_0 f||_2$$

Ma $||f||_2 = ||\widehat{f}||_2$ (teorema di Plancherel) e quindi

13.5.1 Lemma (DISUGUAGLIANZA DI SOBOLEV)

$$|f(s)| \leq c\lambda^{-\frac{3}{2}}||f + \lambda^2 H_0 f||_2$$

Ne segue che

$$|f(s)| \leq c\lambda^{-\frac{3}{2}}||f|| + c\lambda^{\frac{1}{2}}||H_0 f||$$

In altri termini, il funzionale $f \longmapsto f(s)$ (per $f \in \mathcal{D}_{H_0}$) è H_0-limitato, cioè, per ogni $x \in \mathcal{H}$ l'operatore di rango 1 $f \longmapsto f(s)x$ è lineare e relativamente limitato: si badi bene che non è un operatore chiudibile (avendo rango 1 e non essendo continuo).

In Meccanica Quantistica si pone

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar}{2m}\Delta$$

e l'hamiltoniana del sistema è $H_0 + V$ con $(Vf)(s) = V(s)f(s)$.

Se $V \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3, d^3s)$, cioè V misurabile e

$$\forall L > 0 \quad \int_{|s|\leq L} |V(s)|^2 ds < \infty$$

le hamiltoniane corrispondenti ammettono estensioni autoaggiunte. Se

$$(f, (H_0 + V)f) \in \mathbb{R}$$

allora V ammette estensioni autoaggiunte ($V(s) \in \mathbb{R}$).

Notiamo che $\mathcal{D}_{H_0+V} = \mathcal{D}$ (che è lo spazio di Schwartz: se $f \in \mathcal{D}$ allora $V(f) \in L^2$). Dunque, per il criterio di von Neumann, se U è un operatore unitario in L^2:

$$[U, H_0 + V] = 0 \Rightarrow H_0 + V \text{ ha estensioni autoaggiunte}$$

(ove $[A, B] = AB - BA$ è il commutatore).

13.5.2 Teorema *Se $V = f + g$ con $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ e $g \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ allora*

- *V è H_0-limitato con H_0-limite pari a 0.*
- *Se $g(s) \xrightarrow{|s|\longrightarrow\infty} 0$ allora V è H_0-compatto.*

Dimostrazione: (1) Sia $x \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}||Vx||_2 \le&||fx||_2 + ||gx||_2 \le ||x||_\infty||f||_2 + ||g||_\infty||x||_2\\ \le&||f||_2 c\lambda^{-\frac{3}{2}}||x + \lambda H_0 x||_2 + ||g||_\infty||x||_2\\ \le&(||f||_2 c\lambda^{-\frac{3}{2}} + ||g||_2)||x||_2 + c||f||_2\lambda^{\frac{1}{2}}||H_0 x||_2\end{aligned}$$

(per la disuguaglianza di Sobolev). Quindi l'H_0-limite di V è zero.

(2) Dato che $V : \mathcal{D}_{H_0} \longrightarrow \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$, sappiamo che, per $x \in \mathcal{D}_{H_0}$:

$$||Vx|| \le a||x|| + b||H_0 x||$$

con $b \propto \lambda^{\frac{1}{2}}$ e $a \propto \lambda^{-\frac{3}{2}}$ (i.e. $a \approx cb^{-3}$). Dunque, ricordando che

$$a = (\lambda^{-\frac{3}{2}}||f||_2 + ||g||_\infty)c \qquad \text{e} \qquad b = \lambda^{\frac{1}{2}}||f||_2$$

si trova, per $V_n := f_n + g_n$ (scelte due successioni $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ tali che $f_n \xrightarrow{L^2} f$ e $g_n \xrightarrow{L^\infty} g$):

$$V_n \longrightarrow V$$

nella norma di $\mathcal{B}(\mathcal{D}_{H_0}, \mathcal{H})$ (ove su $\mathcal{D}_{H_0}$ si pone la norma $|||.|||$). Quindi V è compatto se lo sono i V_n, cioè se le f_n sono a supporto compatto in $L^2(\mathbb{R}^3)$ e se le g_n sono a supporto compatto in $L^\infty(\mathbb{R}^3)$ (usando l'ipotesi $g(s) \xrightarrow{|s|\longrightarrow\infty} 0$). Quindi possiamo supporre $\operatorname{supp} f, \operatorname{supp} g \subset K$ (compatto) e, per dimostrare la compattezza di V basta far vedere che porta insiemi limitati in insiemi compatti.

Utilizziamo per questo il teorema di Ascoli–Arzelà 3.5.2. Sia $x \in \mathcal{D}_{H_0}$: allora

$$Vx = VEx = EVx$$

(ove $E = M_{\chi_K}$ è l'operatore di moltiplicazione per la funzione caratteristica di K), cioè $V(x|_K) \in \mathcal{H}$; prendiamo x in un insieme limitato S rispetto alla norma del grafico di H_0 $|||.|||$: allora, $V(x|_K)$ appartiene a un compatto di $\mathcal{H}$. Infatti se $x \in S$:

$$||H_0 x|| \le M \qquad \text{e} \qquad ||x|| \le N$$

e quindi ($||\Delta x|| \le M$):

$$-(x, \Delta x) = -\sum_j \int \overline{x(s)} \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} x(s) ds \le M$$

quindi la famiglia S è equicontinua e, per il teorema di Ascoli–Arzelà, S è compatto in $C(K)$: esiste cioè una successione uniformemente convergente (su K) e

$$V(x_n) = f(x_n) + g(x_n)$$

QED

Notiamo che dalla (1) segue che, se $V = \overline{V}$ allora $H_0 + V$ è essenzialmente autoaggiunto su ciascun dominio ove lo sia H_0 e $\mathcal{D}_{\overline{H_0+V}} = \mathcal{D}_{H_0}$, per il teorema di Kato–Rellich; dalla (2) possiamo invece inferire che $\sigma_{ess}(H_0 + V) = \sigma_{ess}(H_0) = \sigma(H_0) = [0, \infty)$ (ricordando che $\widehat{H_0}$ è la moltiplicazione per k^2).

13.5.3 Esempio *Se*

$$V = -\frac{e^2}{|s|} = -\frac{e^2}{|s|}\chi_U - \frac{e^2}{|s|}\chi_{\complement U}$$

con U intorno limitato, lo spettro che si ottiene è quello dell'atomo di idrogeno: questo esempio ha sostanzialmente motivato la teoria.

Osserviamo che se $x \in \mathcal{D}_{H_0}$ allora

$$x(s) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int 1 \cdot e^{-isk}\widehat{x}(k)d^3k$$

e $(1 = (1 + k^2)^{-1}(1 + k^2))$:

$$x(s') - x(s'') = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \left(e^{-is'k} - e^{-is''k}\right)(1 + k^2)^{-1}(1 + k^2)\widehat{x}(k)d^3k$$

Ma $(e^{-is'k} - e^{-is''k})(1 + k^2)^{-1} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ e $(1 + k^2)\widehat{x}(k) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, sicché

$$\begin{aligned} |x(s') - x(s'')| \leq & ||(e^{-is'k} - e^{-is''k})(1 + k^2)^{-1}||\ ||x + H_0x|| \\ = & ||G_{s'} - G_{s''}||\ ||x + H_0x|| \\ = & ||G_{s'-s''} - G||\ ||x + H_0x||\dagger) \end{aligned} \qquad (()$$

ove $G = \mathfrak{F}^{-1}((1+k^2)^{-1})$ e G_s è la traslazione per s in $L^2(\mathbb{R}^3)$ $((G_sf)(t) = f(t-s))$; quindi

$$||G_s||^2 = \int |G(h - s)|^2dh = ||G||^2$$

il che giustifica l'ultimo passaggio delle (†).

Inoltre, $||G_s - G|| \xrightarrow{s\longrightarrow 0} 0$ in norma (questo vale in L^p con $p < \infty$: questi spazi sono il completamento di $C_c(\mathbb{R}^n)$ in norma $||.||_p$). Osserviamo pure che se $||f - f'|| < \varepsilon$ allora $||f_h - f'_h|| < \varepsilon$ e

$$||f_h - f|| \leq ||f_h - f'_h|| + ||f'_h - f'|| + ||f' - f|| < 2\varepsilon + ||f'_h - f'||$$

Tornando alle (†):

$$|x(s') - x(s'')| < \varepsilon ||x + H_0 x|| \leq \varepsilon(||x|| + ||H_0 x||) = \varepsilon |||x|||$$

Quindi se $\{x\}$ è equilimitato nella norma del grafico $|||.|||$ è pure equicontinuo.
Per ulteriori sviluppi di questo esempio si può consultare [29], §10.

Parte III

Gruppi, Operatori e Quantizzazione

Capitolo 14

GRUPPI TOPOLOGICI

In questo capitolo discutiamo i gruppi topologici, che generalizzano da un lato i gruppi di matrici dell'Algebra Lineare, dall'altro la teoria delle serie e dell'integrale di Fourier, sviluppata nel capitolo **??**. L'intera teoria poggia sulla possibilità di definire un integrale per questi gruppi che generalizza l'integrale di Lebesgue sul gruppo additivo dei numeri reali.

14.1 Gruppi topologici e misure di Haar

L'analogia esistente fra la teoria di Fourier in $\mathbb{R}^n$ e la teoria delle serie di Fourier non è un caso: possiamo in effetti formulare una generalizzazione di queste teorie che metta in luce quali sono i loro caratteri comuni.

Osserviamo ad esempio che, nel definire le convoluzioni in $\mathbb{R}^n$, abbiamo in realtà usato solo due ingredienti essenziali: l'esistenza di una misura boreliana completa su $\mathbb{R}^n$ (la misura di Lebesgue), l'operazione di somma vettoriale in $\mathbb{R}^n$ che lo rende un gruppo commutativo e la compatibilità esistente fra queste due strutture espressa dall'invarianza della misura di Lebesgue per traslazioni. Nel caso delle serie di Fourier, pure gli unici ingredienti erano l'esistenza di una misura boreliana completa sulla circonferenza unitaria $\mathbb{T}$, l'esistenza di un prodotto commutativo fra gli elementi di $\mathbb{T}$ ($e^{it}e^{is} = e^{i(s+t)}$) e l'invarianza della misura per le traslazioni di questa struttura gruppale.

Possiamo quindi immaginare di generalizzare la teoria di Fourier al caso di un gruppo G commutativo sul quale esista una misura boreliana completa invariante per la moltiplicazione del gruppo. Naturalmente una misura boreliana presuppone l'esistenza di una topologia, e questa topologia dovrà necessariamente essere compatibile con la struttura gruppale, cioè l'operazione di moltiplicazione del gruppo dovrà essere continua. Si arriva in questo modo alla

14.1.1 Definizione *Un* gruppo topologico *è un insieme G che sia al tempo stesso un gruppo rispetto ad una operazione $\cdot$ ed uno spazio topologico rispetto* *ad una topologia $\mathcal{T}$ in modo che la funzione*

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto g \cdot h^{-1} \end{aligned}$$

sia continua (su $G \times G$ si considera la topologia prodotto).

Si osservi che non è richiesta la commutatività.

14.1.2 Esempio

- *Uno spazio vettoriale topologico V, rispetto alla sua topologia ed all'operazione di somma di vettori è un gruppo topologico commutativo.*

- *Ogni gruppo finito è un gruppo topologico rispetto alla topologia discreta (il che fornisce esempi di gruppi non commutativi).*

- *Dato che il prodotto di compatti è compatto, un prodotto infinito di gruppi finiti è un gruppo compatto (rispetto alla struttura gruppale di prodotto diretto e topologica di prodotto topologico) non discreto (ovviamente un gruppo discreto compatto è finito!): un esempio è il prodotto numerabile di copie di $\mathbb{Z}_2$ (il gruppo moltiplicativo $\{-1, +1\}$) che risulta quindi essere un gruppo topologico compatto non discreto.*

- *Il gruppo $\mathbb{Z}$ come sottogruppo topologico di $\mathbb{R}$ è un gruppo topologico localmente compatto; inoltre, dato che il quoziente di gruppi è un gruppo, il gruppo $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (toro unidimensionale ovvero circonferenza unitaria in $\mathbb{R}^2$) è un gruppo topologico rispetto alla topologia quoziente: dato che si identifica con la circonferenza $\{z \in \mathbb{C} | \ |z| = 1\}$ è compatto.*

- *Il gruppo $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ degli operatori unitari di uno spazio di Hilbert è pure un gruppo topologico (cfr. il lemma 9.1.9).*

14.1.3 Proposizione *Un gruppo topologico è T_1 se e solo se è T_2.*

DIMOSTRAZIONE: Se è T_2 è *a fortiori* T_1; viceversa, se è T_1 la diagonale $\Delta \subset G \times G$ è la controimmagine $m^{-1}(e)$ dell'insieme chiuso $\{e\}$ per la mappa continua $m(x, y) := x^{-1}y$, e quindi è chiusa.

QED

Non ogni gruppo dotato di una topologia è necessariamente topologico: ad esempio $\mathbb{R}$ con la topologia di Zariski (gli aperti sono i complementari degli insiemi finiti) non è un gruppo topologico, dato che, come spazio, è T_1 (i punti sono chiusi) ma non T_2 (ogni aperto è denso!) e quindi per la proposizione precedente non può essere un gruppo topologico.

14.1.4 Esempio *Una classe notevole di gruppi topologici è data dai gruppi di matrici come il* gruppo lineare generale reale

$$GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$$

(ed il suo analogo complesso); il prodotto in $GL(n, \mathbb{R})$ è il prodotto di matrici e la sua topologia è quella indotta da $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ del quale è un aperto (in quanto è il complementare dell'insieme $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 0\}$ che è il luogo degli zeri di una funzione continua, quindi un chiuso). Poiché il prodotto di matrici AB dipende in modo polinomiale dalle entrate delle matrici A e B, l'operazione di gruppo è continua e quindi il gruppo lineare generale è un gruppo topologico non commutativo, ma localmente compatto (lo è $\mathbb{R}^{n^2}$).

14.1.5 Definizione *Una* misura di Haar sinistra *(rispettivamente* misura di Haar destra*) su un gruppo topologico è una misura boreliana regolare positiva μ invariante a sinistra (rispettivamente a destra) per la moltiplicazione del gruppo, cioè tale che*

$$\forall f \in L^1(G) \qquad \int f(g'g)d\mu(g) = \int f(g)d\mu(g)$$

Se una misura di Haar è invariante sia a sinistra che a destra, si dice misura di Haar biinvariante *e si parla di "misura di Haar" senza altre specifiche.*

Consideriamo un gruppo topologico localmente compatto: esiste il seguente teorema, per il quale si rimanda ad esempio ai classici [32] o [26], oppure a [30]:

Teorema (Haar). *Se G è un gruppo topologico localmente compatto allora*

- *G possiede una misura di Haar sinistra (rispettivamente destra) unica a meno di un fattore moltiplicativo.*
- *La misura di Haar sinistra e la misura di Haar destra sono assolutamente continue l'una rispetto all'altra.*
- *Se G è compatto allora la misura di Haar sinistra e la misura di Haar destra coincidono e sono finite.*

Dimostreremo questo teorema solo nel caso commutativo e, più avanti, per i gruppi di Lie; l'esistenza della misura di Haar è un fatto cruciale nella teoria dei gruppi topologici, perché, ad esempio, consente di sviluppare la teoria delle rappresentazioni. Questo spiega perché i gruppi che si considerano sono localmente compatti: solo per essi si può dare una misura di Haar[1].

[1] Una domanda che è legittimo porsi è se non si possa dare un concetto di "gruppo misurabile" indipendente dalla topologia: se quello che realmente conta nella teoria è l'esistenza della misura di Haar, *a priori* non è necessario che il gruppo sia topologico; si dimostra comunque che se un gruppo possiede una misura invariante allora è denso in un gruppo topologico localmente compatto (teorema di Weil, cfr. [32]

14.1.6 Esempio *Un gruppo non localmente compatto è il gruppo additivo di uno spazio vettoriale topologico di dimensione infinita.*

Osserviamo che, per il teorema di Riesz–Markov 9.2.2, il teorema di Haar equivale all'esistenza di un funzionale lineare positivo invariante a sinistra (risp. a destra):

$$I : C_c(G) \longrightarrow \mathbb{R}$$

ove $I : C_c(G)$ è lo spazio delle funzioni complesse a supporto compatto su G.

14.1.7 Definizione *La derivata di Radon–Nikodym*

$$\Delta = \frac{d\mu_L}{d\mu_R}$$

delle misure di Haar sinistra e destra si dice funzione unimodulare *del gruppo topologico G; se $\Delta = 1$ il gruppo stesso di dice* unimodulare.

14.1.8 Esempio

- *Un gruppo topologico localmente compatto e commutativo è unimodulare, dato che la misura di Haar destra e sinistra debbono coincidere ($gg' = g'g$); anche un gruppo compatto qualsiasi lo è, come segue dal teorema di Haar.*
- *Consideriamo il gruppo delle matrici triangolari superiori a coefficienti in $\mathbb{R}$:*

$$N_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right\}_{a_{ij}\in\mathbb{R}}$$

Si tratta di un gruppo topologico omeomorfo a $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$: esiste quindi la misura di Lebesgue

$$d\mu = \prod_{i<j} da_{ij}$$

Si vede immediatamente che questa è una misura di Haar su $N_n(\mathbb{R})$, cioè che è invariante a sinistra: infatti, se $A, B \in N_n(\mathbb{R})$, il coefficiente nella riga i-sima e nella colonna s-esima della matrice AB è

$$(AB)_{is} = \sum_k a_{ik}b_{ks} = b_{is} + a_{is} + \sum_{i<k<s} a_{ik}b_{ks}$$

cioè è pari a $b_{is} + a_{is}$ più una costante (che non dipende dagli elementi di indici $_{is}$): ne segue che $d\mu(AB) = d\mu(B)$; analogamente si dimostra che $d\mu$ è invariante a destra, sicché il gruppo è unimodulare.

14.1.9 Teorema *Se G è un gruppo topologico commutativo localmente compatto allora esiste un'unica misura Haar su G.*

Dimostrazione: L'operazione di moltiplicazione in G induce l'operatore di traslazione, se $g \in G$:

$$\begin{aligned} L_g : C_c(G)^* &\longrightarrow C_c(G) \\ \varphi &\longmapsto (f \longmapsto \varphi(f_g)) \end{aligned}$$

(con f_g denotiamo la funzione $f(h) := f(gh)$ da G in $\mathbb{R}$). Evidentemente L_g è continua rispetto alle topologie *-deboli e, al variare di g abbiamo la famiglia

$$\mathcal{L} := \{L_g\}_{g\in G}$$

di trasformazioni lineari continue che commutano a due a due (perché G è commutativo: $L_gL_h = L_{gh} = L_{hg} = L_hL_g$). Se consideriamo il convesso

$$K := \{\varphi \in C_c(G)^* \mid ||\varphi|| \le 1\} \cap \{\varphi \in C_c(G)^* \mid F(1) = 1\}$$

è immediato verificare che la famiglia $\mathcal{L}$ lascia invariante K: $\mathcal{L}K \subset K$. Ma, per il teorema di Alaoglu, K è compatto; possiamo quindi applicare alla famiglia $\mathcal{L}$ ed al convesso compatto K il teorema del punto fisso di Markov–Kakutani 8.3.11 e dedurre l'esistenza di un punto fisso $\varphi_0 \in K$. Abbiamo cioè un funzionale lineare continuo su $C_c(G)$ invariante per ogni traslazione del gruppo: per il teorema di Riesz–Markov 9.2.2 questo funzionale determina univocamente una misura di Radon μ che è proprio la misura invariante cercata.

QED

La misura di Haar sul gruppo commutativo G è positiva, in quanto lo sono i funzionali lineari in K, ed è finita sui compatti perché φ_0 è continuo (di nuovo per il teorema di Riesz–Markov).

14.1.10 Esempio

- *È facile rendersi conto che, nel caso di $\mathbb{R}^n$, questa costruzione dà luogo esattamente alla misura di Lebesgue (a meno di multipli costanti).*
- *Se il gruppo è compatto, $\mu(G)$ è finito, ed in genere si normalizza la misura in modo che $\mu(G) = 1$.*
- *Nel caso $G = \mathbb{Z}$ la misura di Haar ν è semplicemente la media sulle funzioni a supporto compatto $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, cioè su quelle che non valgono zero se non in un numero finito di punti:*

$$\int_{\mathbb{Z}} f(n)d\nu(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\nu(\{n\})$$

In questo caso si normalizza la misura in modo che

$$\nu(\{n\}) = 1$$

per ogni punto $n \in \mathbb{Z}$ e quindi la misura di Haar è la misura # che conta: $\nu(E) = \#E = \text{Card}\, E$.

- *In particolare, su un gruppo abeliano finito (che è della forma $\mathbb{Z}_m$: classi di congruenza modulo m), la misura di Haar pure è la misura che conta #.*

Possiamo quindi considerare la teoria della misura su G: ad esempio gli spazi L^p, il teorema di Fubini ed i teoremi di convergenza degli integrali. Osserviamo che nel definire la convoluzione di funzioni in $C_c(\mathbb{R}^n)$ e $L^1(\mathbb{R}^n)$ non abbiamo usato altro che l'invarianza della misura e le proprietà gruppali della somma di vettori: *mutatis mutandis* possiamo quindi riformulare tutta la teoria per un gruppo commutativo localmente compatto G; la teoria della trasformata di Fourier è il caso $G = \mathbb{R}^n$ e la teoria delle serie di Fourier il caso $G = \mathbb{T}$.

14.1.11 Teorema *Se G è un gruppo topologico che ammette una misura di Haar, lo spazio di Banach $L^1(G)$ è un'algebra di Banach rispetto alla convoluzione, che è commutativa se e solo se lo è il gruppo.*

DIMOSTRAZIONE: Definiamo la convoluzione di due elementi di $L^1(G)$ come

$$\varphi * \psi(g) := \int_G \varphi(h)\psi(h^{-1}g)dh$$

Vediamo intanto che $\varphi * \psi \in L^1(G)$: dato che la funzione $(g, h) \longmapsto (h^{-1}g, h)$ è un omeomorfismo di $G \times G$ in sé, porta funzioni misurabili in funzioni misurabili: quindi, dato che il prodotto punto per punto $\varphi(g)\psi(g)$ è misurabile se lo sono φ e ψ, anche $\varphi(h)\psi(h^{-1}g)$ lo è; allora:

$$\begin{aligned}\int\int |\varphi(h)\psi(h^{-1}g)|dgdh &= \int |\varphi(h)| \int |\psi(h^{-1}g)|dg \\ &= \int |\varphi(h)|dh \int |\psi(g)|dg < \infty\end{aligned}$$

Cioè $\varphi(h)\psi(h^{-1}g) \in L^1(G \times G)$ e quindi, per il teorema di Fubini, $\varphi * \psi \in L^1(G)$.

Che la convoluzione renda $L^1(G)$ un'algebra associativa si dimostra con gli stessi passaggi del caso $G = \mathbb{R}^n$; dimostriamo dunque che, rispetto alla sua struttura di spazio di Banach, $L^1(G)$ è un'algebra di Banach. Infatti

$$\begin{aligned}||\varphi * \psi||_1 &= \int \left| \int \varphi(h)\psi(h^{-1}g)dh \right| dg \le \int \left(\int |\varphi(h)|\, |\psi(h^{-1}g)|dh \right) dg \\ &= \int \left(\int |\psi(h^{-1}g)|dg \right) |\varphi(h)dh = \int |\psi(g)|dg \int |\varphi(h)|dh \\ &= ||\varphi||_1\, ||\psi||_1\end{aligned}$$

Infine, abbiamo che se G è abeliano allora

$$\begin{aligned}\varphi * \psi(g) &= \int \varphi(h)\psi(h^{-1}g)dh = \int \varphi(gk^{-1})\psi(k)dk \\ &= \int \psi(k)\psi(k^{-1}g)dk = \psi * \varphi(g)\end{aligned}$$

(col cambio di variabile $h^{-1}g = k$ e tenendo conto che $dh = d(gh)$ e $dh = dh^{-1}$ per invarianza della misura di Haar) e viceversa.

QED

14.1.12 Esempio

- *Su un gruppo abeliano finito G, l'algebra $L^1(G)$ è semplicemente l'*algebra di gruppo *cioè lo spazio*

$$\mathbb{C}[G] = \left\{ \sum_{g\in G} a_g g \mid a_g \in \mathbb{C} \right\}$$

(infatti una funzione $G \longrightarrow \mathbb{C}$ è un elemento di $\mathbb{C}^G = \mathbb{C}^{\operatorname{Card} G}$, cioè una $(\operatorname{Card} G)$*-pla, che scriviamo come una somma formale negli elementi di g) con la convoluzione*

$$a * b(g) = \int_G a(gh^{-1})b(h)dh = \sum_{h\in G} a(gh^{-1}b(h) = \sum_{h_1h_2=g\in G} a(h_1)b(h_2)$$

- *Se G è un gruppo discreto, possiede ovviamente la misura di Haar che assegna ad ogni $\{g\}$ (per $g \in G$) un valore positivo fissato, ad esempio 1.*

14.1.13 Proposizione *L'algebra $L^1(G)$ possiede un elemento neutro e se e solo se il gruppo G è discreto.*

Dimostrazione: Ovviamente, se G è discreto, la funzione $\varepsilon : G \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\varepsilon(g) := \delta_{ge}$$

(che si identifica all'elemento $e\in G$) è diversa da zero in $L^1(G)$, dato che $\mu(\{e\}) > 0$:

$$\int_G \varepsilon(g)d\mu(g) = \mu(\{e\}) = 1$$

ed è ovviamente l'elemento neutro per la convoluzione.

Viceversa, se $L^1(G)$ contiene un elemento neutro $e : G \longrightarrow \mathbb{R}$ allora la misura degli insiemi aperti non vuoti possiede un limite inferiore positivo: se così non fosse, per ogni $\varepsilon > 0$ esisterebbe un U intorno dell'elemento neutro $e \in G$ in G tale che

$$\int_G |e(g)|dg < \varepsilon$$

Consideriamo allora un intorno V di $e \in G$ tale che se $g \in V$ anche $g^{-1} \in V$ e che $V^2 \subset U$ (V^2 è l'insieme dei prodotti di elementi di V con se stesso). Per $g \in V$ si ha quindi

$$1 = \chi_V(g) = \chi_V * e(g) = \int_G \chi_V(gh^{-1})e(h)dh = \int_{gV} e(h)dh \leq \int_U |e(h)|dh < \varepsilon$$

che è assurdo. Quindi deve esistere un $a > 0$ tale che, per ogni aperto non vuoto $A \subset G$, $a \leq \mu(A)$; se $g \in G$, possiamo considerare una successione di aperti $A_n \subset A_{n+1}$ tali che $\cap_n A_n = \{e\}$. Infatti $\{g\}$ è intersezione della famiglia di intorni che lo contiene (perché la topologia del gruppo è Hausdorff[2]), e ciascuno di questi intorni contiene un aperto contenente g, quindi possiamo scegliere una successione di questi aperti. Allora

$$\mu(\{g\}) = \mu\left(\bigcap_n A_n\right) = \lim_{n \longrightarrow \infty} A_n$$

cioè $\mu(\{g\}) \geq a$. Quindi i punti hanno misura positiva, e quindi devono essere aperti; infatti se U è un aperto di misura finita (che esiste per locale compattezza del gruppo):

$$\infty > \mu(U) = \mu\left(\bigcup_{g \in U}\{g\}\right) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{g_i\}\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(\{g_i\}) = \infty$$

per ogni successione $\{g_i\} \subset U$; dunque ogni $\{g\}$ è aperto e quindi G è discreto.

QED

14.2 Gruppi compatti e rappresentazioni

In questa sezione ci occupiamo principalmente di gruppi compatti e delle loro rappresentazioni: tutti i nostri ragionamenti si baseranno sull'esistenza di un'unica misura di Haar finita per questi gruppi, fatto che abbiamo supposto senza dimostrazione ma che dimostreremo per la classe dei gruppi di Lie, sostanzialmente i gruppi di interesse nelle applicazioni. Ricordiamo la seguente

[2] Se l'intersezione degli intorni di g fosse un insieme I non ridotto al solo $\{g\}$, allora, se $h \in I$ e $h \neq g$, i punti h e g non possiederebbero intorni disgiunti.

14.2.1 Definizione *Se X è uno spazio vettoriale topologico, una* rappresentazione *di un gruppo topologico G è un omomorfismo di gruppi topologici*

$$\rho : G \longrightarrow GL(X)$$

Se $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert, una rappresentazione unitaria *di G in $\mathcal{H}$ è un omomorfismo del gruppo nel gruppo $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ degli operatori unitari di X in sé.*

Considereremo solo rappresentazioni di G in spazi di Hilbert: si noti che una rappresentazione in uno spazio di Hilbert non è necessariamente unitaria: inoltre la parola "continua" riferita alla rappresentazione vuol dire "fortemente continua".

Ricordiamo che se π_1 e π_2 sono rappresentazioni di un gruppo topologico G negli spazi di Hilbert $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, l'insieme degli operatori *di allacciamento* è

$$(\pi_1, \pi_2) := \{A : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2) \mid A\pi_1 = \pi_2 A\}$$

Esattamente come nel caso delle C*-algebre, due rappresentazioni di un gruppo topologico G si dicono *disgiunte* se $\dim \hom_G(V_1, V_2) = 0$, e si dicono *equivalenti* se l'insieme $\hom_G(V_1, V_2)$ contiene un isomorfismo A.

Abbiamo i concetti di irriducibilità e completa riducibilità di rappresentazioni per un gruppo topologico come nel caso di un gruppo qualsiasi: π si dice *topologicamente irriducibile* se non esistono sottospazi invarianti chiusi di V. Ricordiamo inoltre che nel caso di un gruppo topologico, una *sottorappresentazione* di una rappresentazione $\mathcal{H}$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{H}$ invariante per la rappresentazione di G (si riveda il capitolo **??** per questi concetti nel caso delle C*-algebre e il capitolo **??** nel caso dei gruppi finiti).

Dal fatto che il complemento ortogonale $W^\perp$ si un sottospazio invariante W di uno spazio di Hilbert pure è invariante, segue che

14.2.2 Lemma *Ogni rappresentazione unitaria è completamente riducibile.*

e quindi il seguente e fondamentale

14.2.3 Teorema *Ogni rappresentazione unitaria di dimensione finita è completamente riducibile.*

Ricordiamo inoltre che il nucleo e l'immagine di un operatore di allacciamento sono sottospazi invarianti, quindi:

14.2.4 Lemma (Schur) *Se V_1 e V_2 sono rappresentazioni irriducibili allora ogni operatore di allacciamento è zero oppure è un isomorfismo.*

14.2.5 Corollario *Se V è una rappresentazione irriducibile di G in uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita, allora* $\hom_G(V,V)=\mathbb{C}$.

DIMOSTRAZIONE: Se $A\in\hom_G(V,V)$ allora esiste $\lambda\in\mathbb{C}$ tale che $A-\lambda I$ non sia invertibile (infatti $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso e quindi ogni matrice ammette sempre autovalori); per il lemma si ha allora $A-\lambda I=0$.

QED

14.2.6 Lemma *Se $\mathcal{H}$ è una rappresentazione unitaria topologicamente irriducibile di G allora* $\hom_G(\mathcal{H},\mathcal{H})=\mathbb{C}$.

DIMOSTRAZIONE: Per prima cosa notiamo che

$$A\in\hom_G(\mathcal{H},\mathcal{H})\Rightarrow A^*\in\hom_G(\mathcal{H},\mathcal{H})$$

Infatti

$$A^*\pi(g)=A^*\pi(g^{-1})^*=(\pi(a^{-1})A)^*=(A\pi(g^{-1}))^*=\pi(g^{-1})^*A^*=\pi(g)A^*$$

Dato che ogni operatore si decompone in somma di autoaggiunti:

$$A=\frac{1}{2}(A+A^*)\frac{1}{2}(A-A^*)$$

basta dimostrare il lemma per gli elementi autoaggiunti di $\hom_G(\mathcal{H},\mathcal{H})$.

Usiamo quindi la teoria spettrale: se A commuta con un operatore unitario, lo stesso fa ogni proiezione spettrale E_λ di A (per unicità della decomposizione spettrale di A). Quindi se $A\in\hom_G(\mathcal{H},\mathcal{H})$ allora anche ogni $E_\lambda\in\hom_G(\mathcal{H},\mathcal{H})$ e, per l'ipotesi di irriducibilità, ogni E_λ risulta essere 0 oppure I. Ne segue che A è scalare.

QED

Dato che ogni rappresentazione unitaria è completamente riducibile, il seguente teorema è il più fondamentale nella teoria dei gruppi compatti[3]:

14.2.7 Teorema *Ogni rappresentazione di dimensione finita di un gruppo compatto è equivalente ad una rappresentazione unitaria.*

[3]Questo teorema ed i seguenti sono del tutto analoghi a quelli dati per i gruppi finiti nel capitolo **??**: in effetti quei risultati sono casi particolari di questi, dato che un gruppo finito è un gruppo topologico e l'integrale di Haar si riduce alla somma sui suoi elementi.

DIMOSTRAZIONE: Sia $\pi : G \longrightarrow GL(V)$ la rappresentazione; per avere la tesi basterà dotare V di un prodotto hilbertiano invariante rispetto agli operatori $\{\pi(g)\}_{g\in G}$. Consideriamo su V un qualsiasi prodotto scalare (basta ad esempio prendere una base e dichiararla ortogonale) $\langle,\rangle$; allora per $x, y \in V$, poniamo

$$(x, y) := \int_G \langle \pi(g)x, \overline{\pi(g)y}\rangle dg$$

Evidentemente la (.) è sesquilineare, non degenere e tale che

$$\begin{aligned}(\pi(g)x, \pi(g)y) &= \int_G \langle \pi(h)(\pi(g)x), \overline{\pi(g)(\pi(h)y)}\rangle dh \\ &= \int_G \langle \pi(hg)x, \overline{\pi(hg)y}\rangle dh \\ &= \int_G \langle \pi(k)x, \overline{\pi(k)y}\rangle dk = (x, y)\end{aligned}$$

(per invarianza della misura di Haar per traslazioni: $d(hg) = dh$)

QED

Se $\dim V < \infty$ possiamo associare alla rappresentazione unitaria π la matrice i cui elementi sono

$$p_{x,y}(g) := (\pi(g)x, y)$$

14.2.8 Teorema *Ogni rappresentazione $\pi : g \longrightarrow GL(V)$ topologicamente irriducibile di un gruppo compatto è di dimensione finita e gli elementi della sua matrice soddisfano le relazioni*

$$\int_G p_{x,y}(g)\overline{p_{x',y'}(g)}dg = \frac{1}{\dim V}(x, x')(y, y')$$

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo la funzione

$$x \longmapsto \int_G p_{x,y}(g)\overline{p_{x',y'}(g)}dg$$

Si tratta evidentemente di un funzionale lineare sullo spazio di Hilbert V, quindi, per il teorema di Riesz, è della forma $x \longmapsto (x, z)$ per qualche $z \in V$, che dipende da y, x', y'.

Inoltre, fissati y e y', z dipende in modo continuo da x' e quindi esiste un operatore A su V tale che $z = Ax'$; si ha che

$$A \in \hom_G(V, V)$$

Questo segue dall'invarianza per traslazioni dell'integrale di Haar e dalla

$$p_{\pi(g)x,y}(h) = \pi_{x,y}(hg)$$

Quindi, per il lemma di Schur, $A = \lambda I$, con $\lambda \in \mathbb{C}$ (che dipende ovviamente da y e y'). Ragionando come in precedenza troviamo allora che

$$\lambda = c\overline{(y, y')}$$

ove c è una costante che stavolta dipende solo da π. Quindi

$$(*) \qquad \int_G p_{x,y}(g)p_{x',y'}(g)dg = c(x, x')(y, y')$$

Se ora $\{x_1, ..., x_n\}$ è un insieme ortonormale di V si ha che

$$\sum_{i=1}^{n} |p_{x,x_i}(g)|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(\pi(g)x, x_i)| \leq ||\pi(g)x||^2 = ||x||^2$$

Integrando questa disuguaglianza su G ed usando la (*) otteniamo

$$cn||x||^2 \leq ||x||^2$$

cioè $n \leq c^{-1}$. Questo prova che $\dim V < \infty$.

Per $n = \dim V$ si ottiene immediatamente la seconda asserzione del teorema.

QED

14.2.9 Corollario (Relazioni di Ortogonalità) *Se $\pi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\rho : G \longrightarrow GL(W)$ sono rappresentazioni irriducibili non equivalenti di un gruppo compatto G allora*

$$\int_G p_{x,y}(g)\overline{\rho_{x',y'}(g)}dg = 0$$

Le relazioni di ortogonalità mostrano che gli elementi della matrice associata alla rappresentazione irriducibile π sono un sistema ortonormale nello spazio $L^2(G)$ e che, per rappresentazioni irriducibili non equivalenti, questi sistemi sono fra loro ortogonali. In realtà, l'unione di tutti questi sistemi ortonormali al variare di π nell'insieme di tutte le rappresentazioni irriducibili, è una base ortonormale di $L^2(G)$.

14.2.10 Teorema (Peter–Weyl) *Ogni funzione continua su un gruppo compatto G si può approssimare (in norma uniforme) con combinazioni lineari di elementi di matrici associate a rappresentazioni irriducibili di G.*

Dimostrazione: Sia $A(G)$ lo spazio delle combinazioni lineari finite di elementi di matrici associate a rappresentazioni irriducibili di G; dato che se una rappresentazione π è irriducibile anche la sua aggiunta π^* lo è, lo spazio $A(G)$ è chiuso rispetto alla coniugazione: $f \in A(G) \Rightarrow \overline{f} \in A(G)$.

Inoltre se π_1 e π_2 sono rappresentazioni di dimensione finita, il loro prodotto tensoriale $V_1 \otimes V_2$ è uno spazio di dimensione finita e quindi si decompone in somma di rappresentazioni irriducibili, e quindi il prodotto di due elementi di matrici associate a rappresentazioni irriducibili è combinazione lineare di elementi di matrici: questo significa che $A(G)$ è una sottoalgebra di $C(G)$. Per dimostrare che $\overline{A(G)} = C(G)$ usiamo quindi il teorema di Stone–Weierstrass 9.2.9: l'unica ipotesi che ci resta da verificare per applicarlo è che gli elementi di $A(G)$ separino i punti di G.

Ora, ogni rappresentazione unitaria è somma di rappresentazioni irriducibili; in particolare la rappresentazione regolare

$$R : G \longrightarrow \mathcal{U}(L^2(G))$$

definita come

$$(R(g))(f)(h) = f(hg)$$

si decompone in irriducibili, i.e. se $h \neq h'$ sono elementi di G esiste una rappresentazione irriducibile π tale che $\pi(h) \neq \pi(h')$ (infatti se così non fosse avremmo $R(h) = R(h')$ e quindi, per ogni $g \in G$: $gh = gh'$).

QED

La teoria delle rappresentazioni dei gruppi topologici che stiamo qui delineando presenta forti analogie con la teoria delle C*-algebre: precisiamo questo legame: cominciamo con l'osservare che il gruppo $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ degli operatori unitari di uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ è sempre un gruppo topologico (anche se non è localmente compatto a meno che la dimensione di $\mathcal{H}$ non sia finita), come si verifica immediatamente.

14.2.11 Teorema *Esiste una corrispondenza biunivoca fra le rappresentazioni unitarie continue di un gruppo topologico G e le rappresentazioni non degeneri dell'algebra di Banach $L^1(G)$ (si noti che, in generale, $L^1(G)$ non è una C*-algebra).*

Dimostrazione: Sia $U : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ una rappresentazione unitaria di G: definiamo

$$\forall f \in L^1(G) \quad (x, \pi(f)y) := \int f(g)(x, U(g)y)dg$$

Evidentemente $\pi : L^1(G) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è un omomorfismo di spazi di Banach:

$$||\pi(f)|| \leq ||f||_1$$

Vediamo che si tratta di una rappresentazione:

$$\begin{aligned}(x, \pi(f)\pi(f')y) &= \int f(g)(x, U(g)\pi(f')y)dg = \int f(g)(U(g)^*x, \pi(f')y)dg \\ &= \int f(g) \int f'(h)(U(g)^*x, U(h)y)dhdg \\ &= \int f(g) \int f'(g^{-1}h')(x, U(g)U(g^{-1}h')y)dh'dg \\ &= \int f(g) \int f'(g^{-1}h')(x, U(h')y)dh'dg = (x, \pi(f) * \pi(f')y)\end{aligned}$$

(l'ultimo passaggio usa il teorema di Fubini). Si tratta di una *-rappresentazione:

$$\begin{aligned}(y, \pi(f)^*x) &= \overline{(x, \pi(f)y)} = \overline{\int f(g)(x, U(g)y)d\mu(g)} \\ &= \int \overline{f(g)}(U(g)y, x)d\mu(g) = \int \overline{f(g)}(y, U(g)^*x)d\mu(g) \\ &= \int \overline{f(g^{-1})}(y, U(g)x)\frac{d\mu(g)}{d\mu(g^{-1})}d\mu(g)\end{aligned}$$

cioè $f^*(g) = \lambda(g)\overline{f(g^{-1})}$ ove $\lambda(g) = \frac{d\mu(g)}{d\mu(g^{-1})}$. Osserviamo che U determina univocamente π, dato che

$$U(g)\pi(f) = \pi(f_g)$$

($f_g(h) := f(g^{-1}h)$ è la traslazione della funzione f) e

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad x \perp \pi(f)x \Rightarrow f = 0$$

Dunque, per densità di $\{\sum_i \pi(f_i)x_i\}$ π è univocamente determinata.

Viceversa, se π è una rappresentazione non degenere della *-algebra di Banach $L^1(G)$ allora

$$\lim_{g \longrightarrow e} ||f_g - f||_1 = 0$$

e, dato che $f_g^* * h_g = f^*h$ (analogamente al caso $G = \mathbb{R}$) abbiamo che l'operatore

$$U_0(g)\sum_j \pi(f_j)y_j := \sum_j \pi(f_j)g)y_i$$

è isometrico e densamente definito: la sua estensione $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ è la rappresentazione di G voluta: le mappe

$$U(g)\pi(f)x = \pi(f_g)x$$

e

$$\pi(f) = \int f(g)U(g)d\mu(g)$$

sono l'una inversa dell'altra

QED

Nel caso dei gruppi finiti, l'algebra di gruppo è una rappresentazione rispetto all'azione del gruppo su se stesso per traslazioni: nel caso di un gruppo compatto qualsiasi, questo non sarà vero che su un sottospazio di $L^1(G)$: lo spazio delle funzioni di quadrato sommabile.

Consideriamo dunque lo spazio $\mathcal{H} = L^2(G)$ e la *rappresentazione regolare* di G in $\mathcal{H}$:

$$(\lambda(g)x)(h) := x(g^{-1}h)$$

Si tratta di una isometria, dato che

$$\int |f(g^{-1}h)|^2 d\mu(h) = \int |f(h)|^2 d\mu(h)$$

cioè $\lambda : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ è una rappresentazione unitaria di G; le corrisponde quindi una rappresentazione

$$(\pi_\lambda(f)x, h) = \int f(g)x(g^{-1}h)d\mu(g)$$

dell'algebra $L^1(G)$ nello spazio $\mathcal{B}(L^2(G))$; osserviamo che

$$\pi_\lambda(f)x = f * x$$

per $f \in L^1(G)$, $x \in L^2(G)$, sicché

$$||f * x||_2 \le ||f||_1 ||x||_2$$

e quindi π_λ è una rappresentazione fedele (priva di nucleo), dato che

$$\forall x \in L^2(G) \quad f * x = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ in } L^1(G)$$

Questo si dimostra usando le identità approssimanti in $L^1(G)$, che sono l'analogo dei nuclei di Fejér (cfr. proposizioni 7.3.7 e 7.4.5): la loro esistenza per i gruppi compatti segue dal

14.2.12 Teorema *Se $f \in L^1(G)$ allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $\varphi \in L^1(G)$ tale che*

$$||f * \varphi - f||_1 < \varepsilon \qquad e \qquad ||\varphi * f - f||_1 < \varepsilon$$

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo un intorno U dell'elemento neutro $e \in G$ e una funzione $\varphi_U \geq 0$ con supporto in U e tale che

$$\int \varphi_U(g)d\mu(g) = 1$$

(ad esempio basta prendere $\varphi U = \frac{1}{\mu(U)}\chi_U$); allora

$$\varphi_U * f(g) = \int \varphi_U(h)f(h^{-1}g)d\mu(h) = \int \varphi_U(h)f_h(g)d\mu(h)$$

e quindi (il gruppo è compatto, quindi $\mu(G) < \infty$ e possiamo supporre, a meno di normalizzare, che $\mu(G) = 1$)

$$\begin{aligned} ||\varphi_U * f - f||_1 &= \left|\left|\int \varphi_U(h)f_h d\mu(h) - f\right|\right|_1 = \left|\left|\int \varphi_U(h)(f_h - f)d\mu(h)\right|\right|_1 \\ &\leq \int \varphi_U(h)||f_h - f||_1 d\mu(g) \end{aligned}$$

Per continuità della $h \longmapsto f_h$ possiamo scegliere U_ε tale che

$$\forall h \in U_\varepsilon \quad ||f_h - f||_1 < \varepsilon$$

ottenendo

$$||\varphi_{U_\varepsilon} * f - f|| < \varepsilon \int_{U_\varepsilon} \varphi_{U_\varepsilon}(h)d\mu(h) = \varepsilon$$

In modo analogo si dimostra che $||f * \varphi_U - f|| \longrightarrow 0$.

QED

Ora, se $f \in L^1(G)$ allora possiamo definire la *norma ridotta* di f come

$$||f||_r := ||\pi_\lambda(f)||$$

e considerare quindi la norma

$$||f|| := \sup_\pi ||\pi(f)||$$

Evidentemente $||f||_r \leq ||f||$ e quindi possiamo considerare le C*-algebre

$$C_r^*(G) := \overline{L^1(G)}^{||.||_r} \qquad \text{e} \qquad C^*(G) := \overline{L^1(G)}^{||.||}$$

che si dicono *C*-algebra ridotta* e *C*-algebra del gruppo G*: $C_r^*(G)$ è quoziente di $C^*(G)$; osserviamo che si tratta delle C*-algebre inviluppanti di $L^1(G)$ rispetto alle norme $||.||_r$ e $||.||$.

Notiamo che, avendosi $||\pi(f)|| \le ||f||$, segue che per ogni rappresentazione $\pi : L^1(G) \longrightarrow \mathcal{H}$, si ha
$$\pi(f) = \widetilde{\pi}|_{L^1(G)}(f)$$
ove $\widetilde{\pi}$ è l'estensione di π alla C*-algebra di G: se estendiamo la rappresentazione regolare otteniamo (dato che è fedele) la successione esatta di algebre di Banach:

$$C^*(G) \longrightarrow C^*_r(G) \longrightarrow 0$$

In realtà vale il seguente

Teorema. $\ker \pi_\lambda = 0$ *se e solo se* G *è amenabile.*

(che non dimostreremo) ove

14.2.13 Definizione *Un gruppo* G *è* amenabile *se lo spazio* $C_B(G)$ *delle funzioni continue limitate su* G *è una C*-algebra commutativa con unità e se esiste uno stato* ω *di* $C_B(G)$ *invariante, cioè tale che*

$$\forall g \in G \quad \omega(f_g) = \omega(f)$$

Ad esempio un gruppo commutativo è amenabile, per il teorema di Markov–Kakutani 8.3.11[4], così come ogni gruppo compatto: la misura di Haar realizza lo stato invariante sulle funzioni continue di G.

Consideriamo una rappresentazione non degenere π di $C^*(G)$: sappiamo che esistono le corrispondenze biunivoche

$$\pi \leftrightarrow \pi|_{L^1(G)} \leftrightarrow U_\pi$$

Ora dimostriamo che

14.2.14 Proposizione π *è irriducibile se e solo se lo è* U*.*

DIMOSTRAZIONE: Questo segue dal fatto che $L^1(G)$ è densa in norma in $C^*G()$ (per definizione) e quindi

$$\pi(C^*(G))' = \pi(L^1(G))'$$

e, dato che $\pi(f) = \int f(g)U(g)d\mu(g)$:

$$\pi(L^1(G))' = U(G)'$$

QED

Evidentemente

[4]Esempi di gruppi non amenabili sono i gruppi liberi (su almeno due generatori, ma anche $SL(2)$, il gruppo delle matrici di ordine 2 con determinante 1).

14.2.15 Proposizione *π è ciclica se e solo se lo è U.*

Consideriamo ora gli stati $\mathcal{S}(C^*(G))$ della C*-algebra $C^*(G)$: sappiamo per la teoria GNS che corrispondono alle rappresentazioni come

$$\omega(f) = (\xi, \pi_\omega(f)\xi)$$

Limitandoci, come è sufficiente, ad un sottoinsieme denso in $C^*(G)$, ad esempio $L^1(G)$, troviamo che

$$\omega(f) = \int f(g)(\xi, U(g)\xi)d\mu(g)$$

pertanto gli stati corrispondono biunivocamente alle funzioni

$$\varphi(g) := (\xi, U(g)\xi)$$

sul gruppo. Osserviamo infatti che se f ha supporto finito allora

$$\begin{aligned} \left|\left|\sum_{g\in G} f(g)U(g)\xi\right|\right|^2 &= \sum_{g,h\in G} \overline{f(g)}f(h)(\xi, U(g^{-1}h)\xi) \\ &= \sum_{g,h\in G} \overline{f(g)}f(h)\varphi(g^{-1}h) \geq 0 \end{aligned}$$

Quindi si tratta di funzioni di tipo positivo, nel senso della seguente

14.2.16 Definizione *Una funzione $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ si dice* di tipo positivo *se $\varphi(e) = 1$ e, per ogni $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ a supporto finito:*

$$\sum_{g,h\in G} \overline{f(g)}f(h)\varphi(g^{-1}h) \geq 0$$

Il seguente teorema è l'analogo del teorema GNS per i gruppi, ed è una versione del *teorema di Bochner*:

14.2.17 Teorema *φ è una funzione di tipo positivo su G se e solo se esiste una rappresentazione unitaria $U : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ tale che*

$$\varphi(g) = (\xi, U(g)\xi)$$

ove $\xi \in \mathcal{H}$ è un vettore ciclico per U con $||\xi|| = 1$.

Dimostrazione: Abbiamo appena osservato che la condizione è sufficiente. Sia quindi φ una funzione di tipo positivo e consideriamo lo spazio vettoriale delle funzioni a supporto finito (se si vuole delle successioni finite di elementi di G); su questo spazio consideriamo la forma sesquilineare

$$\langle p, q\rangle := \sum_{g,h\in G} \overline{p(g)}q(h)\varphi(g^{-1}h)$$

Ovviamente $\langle p, p\rangle \geq 0$ e, quozientando per il sottospazio delle funzioni p tali che $\langle p, p\rangle = 0$ e completando si ottiene uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ sul quale gli operatori

$$U(g)[p] := [p_g]$$

(con $[p]$ si indica la classe in $\mathcal{H}$ della funzione a supporto finito p) definiscono la rappresentazione unitaria richiesta.

QED

14.2.18 Proposizione *Se φ è continua in $e \in G$ allora è continua in G e anche U è continua.*

Dimostrazione: Dimostriamo che

$$\lim_{g\longrightarrow e} ||U(g)U(h)\xi - U(h)\xi||^2 = 0$$

Infatti, se $\varphi \longrightarrow 1$ per $g \longrightarrow e$:

$$\begin{aligned}||U(g)U(h)\xi - U(h)\xi|| =& 2 - 2\,\mathrm{Re}(U(h)\xi, U(gh)\xi) = 2 - 2\,\mathrm{Re}(\xi, U(h^{-1}gh)\xi)\\ =& 2 - 2\,\mathrm{Re}\,\varphi(h^{-1}gh) \xrightarrow{g\longrightarrow e} 0\end{aligned}$$

(dato che $h^{-1}gh \xrightarrow{g\longrightarrow e} e$).

QED

14.3 Gruppi a un parametro e teorema di Stone

Ci occupiamo ora di un caso rilevantissimo di rappresentazioni: i gruppi a un parametro, cioè le rappresentazioni del gruppo topologico $\mathbb{R}$ fortemente continue negli operatori unitari di uno spazi di Hilbert: il teorema di Stone 14.3.6 ne darà una classificazione completa.

Consideriamo un operatore autoaggiunto $A = A^*$ e la trasformata di Cayley:

$$U = S_0(A) = (A - iI)(A + iI)^{-1}$$

Se $f \in C_0(\mathbb{R})$ (funzioni continue nulle all'infinito, cioè il cui limite all'infinito è zero), allora, per il calcolo funzionale continuo, $f(A) = g(U)$ per una certa $g \in C_0(\mathbb{T} \setminus \{1\})$ (funzioni continue nulle all'infinito sull'intervallo $(0,1)$: immaginiamo il toro unidimensionale S^1 come l'intervallo $(0,1)$ nel quale si identifichino i punti 0 e 1, cioè lo pensiamo come la compattificazione di Alexandroff di $(0,1)$). Abbiamo dunque

$$f \in C_0(\mathbb{R}) \longmapsto g \in C_0(\mathbb{T} \setminus \{1\})$$

Inoltre

$$f(A) = \int f(\lambda) dE(\lambda)$$

(integrale alla Riemann–Stieltjes).

Ora, se, per $t \in \mathbb{R}$

$$f_t(\lambda) := e^{it\lambda}$$

possiamo calcolare

$$f_t(A) = e^{itA} =: U(t)$$

Si tratta di un operatore unitario (dato che il calcolo funzionale è uno *-omomorfismo) ed è ovvio che

$$U(t+t') = U(t)U(t')$$

Inoltre, per ogni λ: $f_{t'}(\lambda) \xrightarrow{t' \longrightarrow t} f_t(\lambda)$. Ma, ogni tale f ha modulo 1e quindi le f_t sono equilimitate:

$$U(t') \xrightarrow{\text{fortemente}} (t)$$

se $t' \longrightarrow t$.

Cioè l'insieme $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ soddisfa alla seguente

14.3.1 Definizione *Una famiglia $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ di operatori unitari in uno spazio di Hilbert si dice* gruppo ad un parametro fortemente continuo *se*

- $U(t+t') = U(t)U(t')$.
- *Se $t' \longrightarrow t$ allora $U(t') \xrightarrow{\textit{fortemente}} U(t)$.*

L'operatore A si dice generatore infinitesimale *del gruppo a un parametro.*

Un gruppo ad un parametro non è altro che una rappresentazione unitaria fortemente continua del gruppo additivo $\mathbb{R}$.

Osserviamo che per un gruppo a un parametro (fortemente continuo) la funzione $t \longmapsto U(t)x$ è continua, per ogni $x \in \mathcal{H}$ fissato e

$$||U(t) - I|| \xrightarrow{t \longrightarrow \infty} 0 \iff ||A|| < \infty$$

14.3.2 Teorema

- *$\mathcal{D}_A = \{x \in \mathcal{H} \,|\, t \longmapsto U(t)x$ è una funzione $C^1\}$.*
- *Se $x \in \mathcal{D}_A$ allora*
$$Ax = \frac{1}{i}\left(\frac{d}{dt}U(t)x\right)_{t=0}$$
*e se $A = A^*$ allora l'*equazione di Schrödinger
$$i\frac{d}{dt}x = Ax$$
possiede un'unica soluzione x tale che $x(0) = x_0 \in \mathcal{H}$, e tale soluzione è esattamente
$$x(t) = e^{itA}x_0$$

Dimostrazione: (1) Siano $x \in \mathcal{D}_A$, t_n una successione di numeri reali infinitesima ($t_n \longrightarrow 0$) e
$$z_n := \frac{1}{t_n}(U(t_n)x - x)$$
Per dimostrare la (2) basta allora far vedere che $z_n \longrightarrow 0$. Per farlo basta far vedere che

- $\exists z\ (x, z_n) \longrightarrow (x, z)$ (convergenza debole).
- $||z_n|| \longrightarrow ||z||$.

Infatti, se valgono a) e b):
$$||z_n - z||^2 = (z_n - z, z_n - z) = ||z_n|| + ||z|| - 2\,\mathrm{Re}(z, z_n) \longrightarrow 0$$
Ora dimostriamo le (a) e (b).
$$\begin{aligned}\left|\left|\frac{1}{t_n}((U(t_n) - I)x)\right|\right|^2 &= (x, \left(\frac{1}{t_n}(U(t_n) - I)\right)^* \left(\frac{1}{t_n}(U(t_n) - I)\right) x)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{e^{it_n\lambda} - 1}{t_n}\right|^2 d(x, E(\lambda)x)\end{aligned}$$
Ma
$$\left|\frac{e^{it\lambda} - 1}{t}\right|^2 = \left|\frac{e^{\frac{it\lambda}{2}} - e^{-\frac{it\lambda}{2}}}{2t\frac{\lambda}{2}}\right|^2 \lambda^2 = \lambda^2 \left(\frac{\sin^2\left(\frac{t\lambda}{2}\right)}{t\frac{\lambda}{2}}\right)^2 \leq \lambda^2$$

Possiamo quindi applicare il teorema della convergenza dominata di Lebesgue per passare al limite sotto il segno di integrale (λ^2 è una funzione L^1 rispetto alla misura $d(x, E(\lambda)x) =$) ottenendo

$$\left|\left|\frac{1}{t_n}((U(t_n) - I)x)\right|\right|^2 \longrightarrow \int \lambda^2 d(x, E(\lambda)x) < \infty$$

(si rammenti che $x \in \mathcal{D}_A$). Dunque

$$\left|\left|\frac{1}{t}((U(t) - I)x)\right|\right|^2 \xrightarrow{t \longrightarrow 0} ||Ax||^2$$

Ma allora

$$(x, \frac{1}{t_n}((U(t_n) - I)x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\lambda} - 1}{t} d(x, E(\lambda)x) \longrightarrow i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(x, E(\lambda)x)$$

e quindi

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad (x, \frac{1}{t_n}((U(t_n) - I)x)) \xrightarrow{t \longrightarrow 0} i(x, Ax)$$

La formula di polarizzazione ci consente allora di scrivere

$$\forall x, y \in \mathcal{H} \quad (y, \frac{1}{t_n}((U(t_n) - I)x)) \xrightarrow{t \longrightarrow 0} i(y, Ax)$$

Ponendo

$$z(t) := \frac{1}{t_n}((U(t_n) - I)x$$

otteniamo allora un elemento $z(t)$ convergente debolmente a Ax su $\mathcal{D}_A$, e quindi che soddisfa le (a) e (b). Dunque la (2) è dimostrata.

Ora dimostriamo la (1). Sia B tale che

$$\mathcal{D}_B = \{x \in \mathcal{H} \,|\, t \longmapsto U(t)x \text{ è di classe } C^1\}$$

Osserviamo che, per ogni $x \in \mathcal{D}_B$:

$$Bx := \frac{1}{i}\left(\frac{d}{dt}U(t)x\right)_{t=0}$$

Abbiamo appena visto che B è densamente definito, dato che $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}_B$ e $A \subset B$; quindi per dimostrare il teorema non resta che mostrare $A = B$.

Ma A è autoaggiunto, e se proviamo che B è hermitiano allora da $A \subset B$ seguirà $A = B$. Che B sia hermitiano segue ovviamente da

$$\forall x \in \mathcal{D}_B \quad (x, Bx) = \frac{1}{i}\left(\frac{d}{dt}(x, U(t)x)\right)_{t=0} = \frac{1}{i}\left(\frac{(x, U(t)x) - (x, x)}{t}\right)_{t \longrightarrow 0} \in \mathbb{R}$$

Infatti

$$\begin{aligned}\overline{(x,Bx)} =& -\frac{1}{i}\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\overline{(x,U(t)x)}-(x,x)}{t} = -\frac{1}{i}\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{(U(t)x,x)-(x,x)}{t}\\ =&\frac{1}{i}\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{(x,U(-t)x)-(x,x)}{-t} = \frac{1}{i}\left(\frac{d}{dt}U(t)x\right)_{t=0} = (x,Bx)\end{aligned}$$

Quindi $\overline{(x,Bx)} = (x,Bx)$, cioè $(x,Bx)\in\mathbb{R}$.

QED

Osserviamo che questo teorema è una generalizzazione al caso di dimensione infinita della teoria delle equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti: in effetti ogni tale equazione è risolta dall'esponenziale di una matrice (nel nostro caso l'operatore A). Quello che dobbiamo far vedere, per completare l'analogia, è che ogni gruppo ad un parametro si ottiene come esponenziale di un operatore, ottenendo così una profonda generalizzazione di noti risultati sull'esponenziale delle matrici: questa generalizzazione sarà il contenuto del teorema di Stone.

Studiamo ora i gruppi a un parametro fortemente continui dal punto di vista della teoria delle rappresentazioni: intanto osserviamo che la forte continuità può essere indebolita nella condizione

$$\forall x,y\in\mathcal{H}\quad (x,U(t)y)\longrightarrow(x,y)$$

dato che

$$||U(t)y|| = ||y||$$

(le $U(t)$ sono isometrie). Ricordando le (a) e (b) della dimostrazione del teorema precedente abbiamo quindi che la continuità debole di $U(t)$ implica la continuità in norma.

Ora, se $U:\mathbb{R}\longrightarrow\mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una rappresentazione unitaria (fortemente continua) del gruppo topologico additivo dei numeri reali, fissati $x,y\in\mathcal{H}$, la $t\longmapsto (x,U(t)y$ è lineare e continua (disuguaglianza di Schwartz) e quindi

$$\forall f\in L^1(\mathbb{R})\quad (x,U(t)y)f(t)\in L^1(\mathbb{R})$$

sicché

$$\left|\int(x,U(t)y)f(t)dt\right|\leq ||x||\ ||y||\ ||f||_1$$

e, per il teorema di Riesz, esiste un unico operatore π

$$\pi(f) := \int f(t)U(t)dt$$

lineare e continuo con $||\pi(f)|| \leq ||f||_1$. Allora, per ogni $f, g \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}(y, \pi(f)\pi(g)x) &= \int f(t)(y, U(t)\pi(g)x)dt = \int f(t)(U(-t)y, \pi(y)x)dt \\ &= \int f(t) \left(\int g(t')(y, U(t+t')x)dt' \right) dt \\ &= \int \int f(t)g(t')(y, U(t+t')x)dt'dt\end{aligned}$$

Ma $f(t)g(t')(y, U(t+t')x) \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ come si è detto, quindi possiamo applicare il teorema di Fubini e dedurre:

$$(y, \pi(f)\pi(g)x) = \int f(t)g(s-t)(y, U(s)x)dtds$$

(per $s = t + t'$). In altri termini

$$\pi(f)\pi(g) = \pi(f * g)$$

(prodotto di convoluzione). Inoltre

$$(y, \pi(f)^* x) = \overline{(x, \pi(f)y)} = \int \overline{f(t)(x, U(t)y)}dt = \int \overline{f(t)}(y, U(-t)x)dt$$

cioè, se $f^*(t) := \overline{f(-t)}$,

$$\pi(f)^* = \pi(f^*)$$

Quindi abbiamo dimostrato il

14.3.3 Lemma *π è una rappresentazione dell'algebra di Banach $L^1(\mathbb{R})$ (rispetto al prodotto di convoluzione).*

Dimostriamo che π è non degenere; se $x \in \{\pi(f)y \,|\, f \in L^1(\mathbb{R}), y \in \mathcal{H}\}^\perp$ allora

$$\forall f \quad (x, \pi(f)x) = 0 \Rightarrow \int f(t)(x, U(t)x)dt = 0$$

cioè $(x, U(t)x) = 0$ q.o. e, per continuità, $(x, U(t)x) = 0$ ovunque. Quindi $x = 0$ e $U(1) = I$.

Ora invertiamo questa costruzione: data una rappresentazione non degenere di $L^1(\mathbb{R})$ ricostruiamo $U(t)$:

$$(x, U(t)\pi(f)y) = \int f(t')(x, U(t+t')y)dt' = \int f(s-t)(x, U(s)y)ds$$
$$= \pi(f_t))$$

(si rammenti che $f_t(s) := f(s-t)$). Ma la misura di Lebesgue è invariante per traslazioni e quindi

$$||f_t - f||_1 \xrightarrow{t \longrightarrow 0} 0 \implies U(t)\pi(f)y = \pi(f_t)y$$

e quindi abbiamo una mappa iniettiva

$$\left\{ \begin{matrix} \text{gruppi ad un parametro} \\ \text{fortemente continui} \end{matrix} \right\} \longrightarrow \{\pi : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \text{ non degeneri}\}$$

Dimostriamo che si tratta di una mappa biunivoca:

14.3.4 Teorema *I gruppi unitari ad un parametro fortemente continui corrispondono biunivocamente alle rappresentazioni unitarie non degeneri dell'algebra di Banach $L^1(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione: Consideriamo π come rappresentazione non degenere dell'algebra di Banach $L^1(\mathbb{R})$ (ricordiamo che dato che $L^1(\mathbb{R})$ è l'algebra di gruppo di $\mathbb{R}$, le rappresentazioni del gruppo e quelle dell'algebra si corrispondono biunivocamente) e sia

$$U(t)\pi(f)y := \pi(f_y)y$$

(dato che la rappresentazione è non degenere l'insieme $\{\pi(f)y\}_{y\in\mathcal{H}}$ è denso, quindi ci basta aver definito $U(t)$ sugli elementi della forma $\pi(f)y$).

Dimostriamo che si tratta di un gruppo ad un parametro fortemente continuo: intanto definisce una famiglia ad un parametro di operatori unitari (basta all'uopo far vedere che sono lineari isometrici).

Infatti

$$\begin{aligned} \int (f_t^*)(s')g_t(s-s')ds' &= \int \overline{f_t(-s')}g_t(s-s')ds' \\ &= \int f(-(s'+t))g(s-(s'+t))ds' \end{aligned}$$

sicché

$$f_t^* * g_t = f^* * g$$

da cui

$$\pi(f_t^* * g_t) = \pi(f^* * g)$$

cioè $\pi(f_t)^*\pi(g_t) = \pi(f)^*\pi(g)$, dunque

$$(\pi(f_t)x, \pi(g_t)y) = (\pi(f)x, \pi(g)y)$$

Quindi la famiglia ad un parametro $\{U(t)\}$ è unitaria: è inoltre un gruppo ad un parametro, dato che

$$U(t')U(t)\pi(f)x = \pi\left((f_t)_{t'}\right)x = \pi(f_{t+t'})x = U(t+t')\pi(f)x$$

Dimostriamo infine che è fortemente continua: abbiamo che

$$||U(t)\pi(f)x - \pi(f)x|| = ||\pi(f_t)x - \pi(f)x|| = ||\pi(f_t - f)x|| \le ||f_t - f||_1||x||$$

e $||f_t - f||_1 \longrightarrow 0$, pertanto

$$||U(t)y - y|| \longrightarrow 0$$

Il gruppo ad un parametro $U(t)$ dà luogo, per tramite della costruzione precedente, alla rappresentazione π:

$$\int U(t)g(t)dt\pi(f)x = \int g(t)\pi(f_t)xdt$$

e, per definizione di convoluzione:

$$\pi(g * f)x = \pi(\int g(t)f_t dt) = \int U(t)g(t)dt\pi(f)x$$

QED

Notiamo che abbiamo utilizzato il fatto che

$$||\pi(f)|| \le ||f||_1$$

(uno *-omomorfismo di un'algebra di Banach in una C*-algebra è una contrazione).

Il seguente criterio ci permette di semplificare questo risultato nel caso di spazi di Hilbert separabili:

14.3.5 Teorema (von Neumann) *Se $U : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una rappresentazione unitaria di $\mathbb{R}$ su uno spazio di Hilbert separabile allora $t \longmapsto (x, U(t)y)$ è misurabile secondo Lebesgue e la rappresentazione unitaria è fortemente continua.*

Dimostrazione: Per ipotesi ha senso definire π come

$$(x, \pi(f)y) := \int f(t)(x, U(t)y)dt$$

in modo da ottenere una rappresentazione di $L^1(\mathbb{R})$; se questa rappresentazione è non degenere allora

$$\pi(f) = \int f(t)V(t)dt$$

e V è fortemente continua. Quindi non resta che dimostrare che π è non degenere.

Per separabilità di $\mathcal{H}$, esiste una successione $\{y_n\}$ densa; se x è tale che

$$\forall n \quad x \perp \pi(f)y - n$$

allora

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \qquad \int (x, U(t)y_n)f(t)dt = 0$$

cioè per ogni n $(x, U(t)y_n) = 0$ q.o. e quindi $(x, U(t)y_n) = 0$ in $\mathbb{R} \setminus N_n$ ove N_n è un insieme di misura nulla. Dato che

$$N := \bigcup_n N_n$$

ha ancora misura nulla,

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus N \quad (x, U(t)y_n) = 0$$

e quindi (dato che x è ortogonale a tutti i $\pi(f)y_n$: $x = 0$.

QED

L'ipotesi di separabilità è irrinunciabile: se ad esempio $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{R})$ allora per

$$(U(t)x)(s) := x(s - t)$$

la funzione $(x', U(t)x)$ è misurabile secondo Lebesgue, ma la U si guarda bene dall'essere fortemente continua.

14.3.6 Teorema (Stone) *Se $U : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una rappresentazione unitaria fortemente continua di $\mathbb{R}$ allora esiste un unico operatore A autoaggiunto tale che*

$$U(t) = e^{itA}$$

Dimostrazione: Abbiamo visto (teorema 14.3.4) che dare un gruppo ad un parametro fortemente continuo è come dare una rappresentazione non degenere $\pi : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tale che

$$\pi(f) = \int f(t)U(t)dt$$

(e quindi $||\pi(f)|| \leq ||f||_1$). Se consideriamo lo spazio $C_c^\infty(\mathbb{R})$ delle funzioni infinitamente differenziabili a supporto compatto, sappiamo che è denso in $L^1(\mathbb{R})$ e quindi l'insieme

$$\{\pi(f)\}_{f \in C_c^\infty(\mathbb{R})}$$

è un'algebra non degenere, dato che

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad \overline{\pi(C_c^\infty(\mathbb{R}))x} = \overline{\pi(L^1(\mathbb{R}))x} \ni x$$

Ore definiamo A come

$$Ax := \frac{1}{i}\left(\frac{d}{dt}U(t)\right)_{t=0}(x)$$

Dimostriamo che $\mathcal{D}_A$ è denso, osservando che

$$\mathcal{D}_A = \{x \in \mathcal{H} \mid t \longmapsto U(t)(x) \in C^1(\mathbb{R})\}$$

e che, se

$$A_0 := \frac{1}{i}\left(\frac{d}{dt}U(t)\right)_{t=0}$$

con

$$\mathcal{D}_0 = \{\pi(f)x \mid x \in \mathcal{H}\,, f \in C_c^\infty(\mathbb{R})\}$$

allora $\mathcal{D}_0$ è denso, dato che

$$U(t)\pi(f)x = \pi(f_y)x$$

e

$$\frac{1}{i}\left(\frac{d}{dt}U(t)\right)_{t=0} y = \frac{1}{i}\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\pi(f_t - f)}{t}(x)$$

Ma, dato che $\dfrac{1}{t}(f_t - f) \longrightarrow f'$ in $L^1(\mathbb{R})$, si ha

$$\frac{\pi(f_t - f)}{t} \xrightarrow{\|\cdot\|} \pi(f') \implies \frac{\pi(f_t - f)}{t}x \longrightarrow \pi(f')x$$

quindi $\mathcal{D}_0$ è denso. Abbiamo cioè che

(1) A_0 è densamente definito.

e vogliamo dimostrare inoltre che

(2) A_0 è hermitiano;
(3) A_0 è essenzialmente autoaggiunto;
(4) $A_0 = \overline{A_0}$;

Cominciamo con la (2). Se $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e

$$y_1 := \pi(f)x \qquad \text{e} \qquad y_2 := \pi(g)y$$

dimostriamo che

$$(y_1, A_0 y_2) = (A_0 y_1, y_2)$$

In effetti

$$(y_1, A_0 y_2) = (\pi(f)x, \frac{1}{i}\pi(g')y) = \frac{1}{i}(x, \pi(f^* * g')y)$$

e

$$(A_0 y_1, y_2) = (\frac{1}{i}\pi(f')x, \pi(g)y) = -\frac{1}{i}(x, \pi(f'^* * g)y)$$

Basta allora dimostrare che $f^* * g' = f'^* * g$ per avere la (2), il che è semplicemente la regola di integrazione per parti combinata con la definizione di convoluzione (tenendo conto che f e g hanno supporto compatto).

$$\begin{aligned}(f^* * g')(t) &= \int f^*(s)g'(t-s)ds = -\int f^*(s)dg \\ &= (f^*g)|_{\partial K} - \int g(s)df^* = \int g(t-s)df^* \\ &= \int f'^*(s)g(t-s)ds = (f'^* * g)(t)\end{aligned}$$

(ove $K = \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g$ è compatto).

Dimostriamo la (3): abbiamo $U(t)\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0$ dato che $U(t)\pi(f)x = \pi(f_t)x$ (se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ anche $f_t \in C_c^\infty(\mathbb{R})$) e viceversa.

Ora, se $A_0^* z = \pm iz$ ha come unica soluzione $z = 0$ abbiamo la (3); ma

$$(U(t)x, A_0^* z) = (U(t), \pm iz)$$

e $(U(t)x \in \mathcal{D}_0)$ $(U(t)x, A_0^* z) = (A_0 U(t)x, z)$, sicché

$$(A_0 U(t)x, z) = \pm i(U(t)x, z)$$

Si ricordi ora che

$$A_0 U(t)y = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}U(t)y$$

dato che

$$A_0 \pi(f_t)x = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}\pi(f_t)x = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}U(t)y$$

e quindi

$$(A_0 U(t)x, z) = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}(U(t)x, z)$$

Ne segue che $\xi := (U(t)x, z)$ soddisfa l'equazione

$$\xi' = \mp\xi$$

dunque $\xi(t) = ce^{\mp t}$ e

$$|\xi(t)| \le ||U(t)x||\ ||z|| = ||x||\ ||z|| = \text{costante}$$

il che è possibile se e solo se $c = 0$ e quindi $z = 0$ (dato che è ortogonale ad un insieme denso). Ne segue la (3).

Infine dimostriamo (4). Se $A := \overline{A_0}$ ha senso considerare e^{itA} che è un gruppo ad un parametro fortemente continuo di operatori unitari; vogliamo dimostrare che per ogni $y \in \mathcal{D}_0$ (che è denso) si ha che

$$w(t) := e^{itA}y - U(t)y$$

è zero per ogni $t \in \mathbb{R}$. Intanto $w(0) = 0$ per definizione; inoltre

$$\frac{d}{dt}||w(t)||^2 = 0$$

dato che $w(t)$ è "C^1 in norma" e quindi

$$\frac{d}{dt}||w(t)||^2 = \frac{d}{dt}(w(t), w(t)) = (w'(t), w(t)) + (w(t), w'(t))$$

e

$$w'(t) = (e^{itA}y - U(t)y)' = iAe^{itA}y - iA_0U(t)y$$

Per $U(t)y$ generico in $\mathcal{D}_0$ e $A = \overline{A_0}$ (in particolare $A_0 \subset A$), abbiamo che, su $\mathcal{D}_0$, $A = A_0$, e quindi

$$w'(t) = iAe^{itA}y - iA_0U(t)y = iAw(t)$$

Dunque

$$\frac{d}{dt}||w(t)||^2 = i\left((w(t), Aw(t)) - (Aw(t), w(t))\right) = 0$$

(A è hermitiano). Allora $||w(t)|| = 0$ (è nullo in 0 e ha derivata nulla, quindi è costante) e quindi $w(t) = 0$. Ne segue

$$e^{itA} = U(t)$$

QED

Traiamo alcune conseguenze da questo importante risultato. Se $A = A^*$, allora i seguenti oggetti si determinano univocamente a due a due (dare l'uno equivale a dare l'altro):

- Un operatore unitario U con $1 \notin \sigma(U)$;
- Una famiglia spettrale $\{E(\lambda)\}$;
- Una rappresentazione $\rho : f \longmapsto f(A)$ di $C_0(\mathbb{R})$ non degenere;
- Un gruppo ad un parametro unitario fortemente continuo $\{U(t)\}$;

- Una rappresentazione π della *-algebra di Banach $L^1(\mathbb{R})$;

ove, se A è limitato allora nel caso (1) $1 \notin \sigma(A)$, nel caso (2) $\operatorname{supp} E$ è compatto, nel caso (3) $\operatorname{supp} \rho$ è compatto, nel caso (4) $t \longmapsto U(t)$ è uniformemente continua.

Si passa dall'operatore A all'unitario U con la trasformata di Cayley, da questo alla famiglia spettrale con la formula di decomposizione spettrale, da questa alla rappresentazione ρ con il calcolo funzionale continuo, da questa al gruppo $U(t)$ con il teorema di Stone 14.3.6 e da questo alla rappresentazione π col teorema 14.3.4.

Consideriamo ora una n-pla di operatori essenzialmente autoaggiunti A_1, ..., A_n tali che
$$e^{itA_1} \cdots e^{itA_n} = e^{it\sum_k A_k}$$
Questa scelta determina un *gruppo a n parametri fortemente continuo*
$$U(t) = e^{itA_1} \cdots e^{itA_n} = e^{it\sum_k A_k}$$
Ponendo
$$\forall\lambda \in \mathbb{R} \quad U_t(\lambda) := U(\lambda t)$$
otteniamo una rappresentazione del gruppo (topologico) additivo dei numeri reali:
$$\lambda \longmapsto e^{i\lambda A_t}$$
ove
$$A_t = \sum_k t_k A_k$$
In questo modo otteniamo una generalizzazione della teoria fin qui svolta da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$ (che è sempre un gruppo topologico[5] abeliano localmente compatto): ci si potrebbe spingere più oltre e generalizzare questa costruzione ad un gruppo di Lie[6] G parametrizzando gli operatori A con gli elementi u dell'algebra di Lie del gruppo ed ottenendo
$$M(\exp \lambda x) = e^{i\lambda A_x}$$
e $[A_u, A - v] = iA_{[u,v]}$ (cioè una rappresentazione dell'algebra di Lie di G).

Concludiamo questa discussione sui gruppi ad un parametro con un n-esimo teorema di von Neumann.

Osserviamo preliminarmente che, riandando alla dimostrazione del teorema di Stone 14.3.6, abbiamo che da $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_A$ e
$$e^{itA}\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0$$

[5] Per una discussione di questi gruppi, cfr. il capitolo **??**.

[6] Fra due capitoli si daranno dei cenni su gruppi e algebre di Lie.

(ricordiamo che $A = A^*$) segue che $A|_{\mathcal{D}_0}$ è essenzialmente autoaggiunto: cioè $\mathcal{D}_0$ un *cono* per A.

Per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$ abbiamo

$$\int f(t)U(t)dt = \int f(t)e^{itA}dt$$

Ma

$$e^{itA} = \int e^{it\lambda}dE(\lambda)$$

sicché

$$\int f(t)U(t)dt = \int f(t) \int e^{it\lambda}dE(\lambda)dt$$

Inoltre, se

$$(x, \int f(t)U(t)dty) := \int f(t)(x, U(t)y)dt = \int f(t) \left(\int e^{it\lambda} d(x, E(\lambda y) \right) dt$$

e quindi, dato che $e^{it\lambda}$ è continuo e di norma 1 e $f \in L^1$, possiamo applicare il teorema di Fubini:

$$\begin{aligned} (x, \int f(t)U(t)dty) &= \int \int f(t)e^{it\lambda}dtd(x, E(\lambda)y)) \\ &= \int \widehat{f}(\lambda)d(x, E(\lambda)y) = (x, \int \widehat{f}dE(\lambda)y) \end{aligned}$$

Osserviamo che, per il lemma di Riemann–Lebesgue 7.4.9, $\int \widehat{f}dE(\lambda)$ è il calcolo funzionale di A con $\widehat{f}$. In definitiva:

$$\pi(f) = \int f(t)U(t)dt = \widehat{f}(A) = \rho(\widehat{f})$$

Se $U(t)$ è unitario allora

$$R(n) := U^n$$

è una rappresentazione del gruppo additivo $\mathbb{Z}$ e, considerando la proiezione ortogonale E_0 sul sottospazio $\ker(I - U)$ allora

$$E_0 = \operatorname*{s-lim}_{N \longrightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N} U^n$$

come già sappiamo.

14.3.7 Teorema (Ergodico di von Neumann) *Se $\{U(t)\}$ è un gruppo ad un parametro fortemente continuo di operatori unitari in uno spazio di Hilbert e se E_0 è la proiezione sul sottospazio dei vettori invarianti di $U(t)$:*

$$\{x \in \mathcal{H} \,|\, \forall t \in \mathbb{R}\ U(t)x = x\}$$

allora

$$E_0 = \operatorname*{s-lim}_{N \longrightarrow \infty} \frac{1}{2N} \int_{-N}^{N} U(t)dt$$

Dimostrazione: Siano

$$g := \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]} \qquad \text{e} \qquad g_n(t) := g\left(\frac{t}{N}\right)\frac{1}{N}$$

Allora

$$\frac{1}{2N}\int_{-N}^{N} U(t)dt = \int g_n(t)U(t)dt$$

Ma, se $f \in L^1(\mathbb{R})$ è tale che

$$\int f(t)dt = 1$$

e se $f_N := \frac{1}{N}f(t/N)$ allora

$$\int f_N(t)U(t)dt \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} E_0$$

fortemente. Infatti, per il teorema di Stone 14.3.6, $U(t) = e^{itA}$ e

$$\widehat{g_N}(A) = \int g_N(t)U(t)dt$$

dunque $\{\widehat{g_N}\}$ è equilimitata e converge puntualmente a $\chi_{\{0\}}$, il che si dimostra come segue:

$$\int e^{i\frac{t}{N}\lambda N} g\left(\frac{t}{N}\right)\frac{dt}{N} = \widehat{g_N}(\lambda)$$

da cui $\widehat{g_N}(\lambda) = \widehat{g}(N\lambda)$; dunque, se $\lambda = 0$ allora $\widehat{g}(0) = \widehat{g_N}(0)$, mentre se $\lambda \neq 0$ allora

$$\lim_N \widehat{g_N}(\lambda) = \lim_N \widehat{g}(N\lambda) = 0$$

per il lemma di Riemann–Lebesgue. Ne segue che $\{\widehat{g_N}\}$ è equilimitata e converge a zero puntualmente; ma $\widehat{g}(0) = \int g(t)dt = 1$ (per scelta di f) e $\widehat{g_N}$ è uniformemente limitata. Allora

$$\widehat{g_N}(A) \longrightarrow \chi_{\{0\}}(A) = E_{\{x \in \mathcal{H} \,|\, Ax=0\}}$$

Ma $\{x \mid Ax = 0\} = \{x \mid, U(t)x = x\}$ (dato che $x \in \mathcal{D}_A \iff U(t)x$ è derivabile con derivata continua in t e $U'(t)x = iAU(t)x = iU(t)Ax$.

Quindi

$$\widehat{g_N}(A) \xrightarrow{N\longrightarrow\infty} E_0$$

fortemente.

QED

14.4 Vettori analitici

Vogliamo dare in questa sezione una applicazione importantissima del teorema di Stone: il teorema di Nelson, che fornisce un criterio affinché un operatore sia essenzialmente autoaggiunto.

Cominciamo col ricordare una definizione formulata in precedenza *en passant*:

14.4.1 Definizione *Se A è un operatore lineare su uno spazio di Banach X, un vettore $x \in X$ si dice* analitico *se $x \in C^\infty(A)$ (cioè se per ogni n $x \in \mathcal{D}_{A^n}$) e se esiste $\lambda > 0$ tale che*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^n}{n!}||A^n x|| < \infty$$

ovvero se la serie $\sum_n (i\lambda)^n/n!\, A^n x$ ha raggio di convergenza maggiore di zero.

Se A è autoaggiunto possiamo trovare moltissimi vettori analitici: per il teorema spettrale

$$A = A^* = \int \lambda dE(\lambda)$$

e quindi, se

$$\mathcal{H}_n := E_{[-n,n]}\mathcal{H} = (E(n) - E(-n))\mathcal{H} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{H}_\omega = \bigcup_n \mathcal{H}_n$$

(ovviamente $\mathbb{R} = \cup_n[-n, n]$) allora

$$\forall x \in \mathcal{H}_\omega \ x \text{ è analitico per } A$$

e il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(i\lambda)^n}{n!} A^n x$$

è infinito.

14.4.2 Definizione *Se per un vettore analitico x il raggio di convergenza della serie*
$$\sum_{n\geq 0} \frac{(i\lambda)^n}{n!} A^n x$$
è infinito, x si dice intero.

Torniamo ora al nostro esempio $x \in \mathcal{H}_\omega$: esiste n tale che $x \in \mathcal{H}_n$, quindi
$$A_n := A|_{\mathcal{H}_n}$$
è autoaggiunto e limitato (infatti $||A_n|| \leq n$ dato che $|(x, Ax)| \leq n$); ma, per ogni n: $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{D}_A$, dato che se $x \in \mathcal{H}_n$ allora
$$\int \lambda^2 d(x, E(\lambda)x) = \int_{-n}^{n} \lambda^2 d(x, E(\lambda)x) < \infty$$
Quindi $\mathcal{H}_\omega \subset \mathcal{D}_A$. Inoltre ogni vettore di $\mathcal{H}_n$ è autovettore di A e quindi $A\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}_n$, sicché per ogni $x \in \mathcal{H}_n$: $x \in C^\infty(A)$ a $A_n^k x = A^k x$. Ma
$$\sum_{m\geq 0} \frac{(i\lambda)^m}{m!} A^m x = \sum_{m\geq 0} \frac{(i\lambda)^m}{m!} A_n^m x = e^{i\lambda A_n} x$$
(il raggio di convergenza è, in questo caso, infinito). Dunque ogni elemento di $\mathcal{H}_\omega$ è un vettore analitico per A.

Ne segue, dato che $\overline{\mathcal{H}_\omega} = \mathcal{H}$:

14.4.3 Proposizione *Se A è autoaggiunto possiede un insieme denso di vettori analitici.*

Osserviamo che, se x è un vettore analitico e
$$e^{itA} x = \sum_{n\geq 0} \frac{(i\lambda)^n}{n!} A^n x$$
Per quel che sappiamo sui gruppi ad un parametro:
$$x \in \mathcal{D}_A \iff t \longmapsto U(t)x \in C^1(\mathbb{R})$$
e quindi
$$x \in \mathcal{D}_{A^n} \iff t \longmapsto U(t)x \in C^n(\mathbb{R})$$
In particolare
$$x \in C^\infty(A) \iff t \longmapsto U(t)x \in C^\infty(\mathbb{R})$$

14.4.4 Teorema *Se A è autoaggiunto, un vettore $x \in C^\infty(A)$ è analitico per A se e solo se la funzione $t \longmapsto U(t)x$ è analitica, cioè è la restrizione a $\mathbb{R}$ di una funzione olomorfa in $\{|\operatorname{Im} z| < \delta\}$ (ove δ è il raggio di convergenza della serie 14.4.1).*

DIMOSTRAZIONE: Sia A autoaggiunto e $x \in C^\infty(A)$. Se x è analitico allora, per ogni $y \in \mathcal{H}$:

$$\left(\sum_{n\geq 0} \frac{(it)^n}{n!} A_m^n x, y\right) = \left(\sum_{n\geq 0} -\frac{(it)^n}{n!} A_m^n y, x\right) = (e^{-itA_m} y, x)$$

(per continuità passiamo il prodotto scalare sotto il segno di sommatoria). Ma

$$e^{itA_m} y = e^{itA} y = \int e^{it\lambda} dE(\lambda) y$$

(avendosi $E(\lambda)y = E_m(\lambda)y$, ove $E_m(\lambda)$ è la famiglia spettrale associata a A_m), quindi

$$\begin{aligned}(y, \sum_{n\geq 0} \frac{(it)^n}{n!} A_m^n x) &= (\sum_{n\geq 0} \frac{(-it)^n}{n!} A_m^n y, x)\\ &= (e^{-itA} y, x) = (U(-t)y, x) = (y, U(t)x)\end{aligned}$$

Cioè

$$U(t)x = \sum_{n\geq 0} \frac{(it)^n}{n!} A_m^n x$$

Ma, se $t = z$ con $|z| < \delta$ allora questa serie definisce nel disco $\{|z| < \delta\}$ una funzione analitica e quindi, per $|t| < \delta$ è la restrizione di una funzione olomorfa nel disco. Se

$$x_\lambda = U(t)x$$

e se ripetiamo il ragionamento, allora questa funzione olomorfa è definita nel disco di centro λ e raggio δ: possiamo, al variare di λ, descrivere con l'unione di questi dischi l'intera striscia di piano $\{|\operatorname{Im} z| < \delta\}$ e, quindi, per continuazione analitica, abbiamo il teorema.

QED

Ora dimostriamo il risultato chiave sui vettori analitici:

14.4.5 Teorema (NELSON) *Se $A \subset A^*$ possiede un insieme totale di vettori analitici allora è essenzialmente autoaggiunto.*

Dimostrazione: Ci basta mostrare che se x è un vettore analitico per A allora è un vettore di unicità, e quindi applicare il criterio di Nussbaum. Ricordiamo che un vettore differenziabile $x \in C^\infty(A)$ si dice *vettore di unicità* per $A \subset A^*$ se $A_x := A|_{\mathcal{D}_x}$ (ove $\mathcal{D}_x$ è il sottospazio generato dall'insieme $\{A^n x\}$) è un operatore (densamente definito in $\mathcal{H}_x = \overline{\mathcal{D}_x}$) essenzialmente autoaggiunto in $\mathcal{H}_x$.

Consideriamo dunque un vettore x analitico per A e l'operatore A_x: osserviamo che, su $\mathcal{H}_x$ esiste un operatore antiunitario V definito come

$$V : aA^n x \longmapsto \overline{a}A^n x$$

sui generatori (gli elementi di $\mathcal{D}_x$) ed estendendo per linearità e continuità a tutto $\mathcal{H}_x$; per definizione $VA_x = A_x V$ e quindi, per il criterio di von Neumann 13.4.1 A_x possiede un'unica estensione autoaggiunta $H = H^*$; allora x è analitico per H, dato che $A_x^n x = H^n x$ e $A^n x = A_x^n x$, cioè

$$A(A^n x) = A_x(A^n x) = H(A^n x)$$

e quindi x è analitico per H. Allora (se $|t| < \delta$):

$$e^{itH}x = \sum_{n\geq 0} \frac{(it)^n}{n!} H^n x = \sum_{n\geq 0} \frac{(it)^n}{n!} A^n x$$

sicché $e^{itH}x$ non dipende dall'estensione H ma solo da A, se $|t| < \delta$; tuttavia, per t qualsiasi, possiamo scrivere

$$e^{itH} = e^{iH(t_1+\ldots+t_n)}$$

con $|t_i| < \delta$.

Quindi tutte le estensioni autoaggiunte di A_x danno luogo al medesimo gruppo ad un parametro e^{itH} e dunque, per il teorema di Stone 14.3.6, esiste un'unica estensione autoaggiunta di A_x; ma (criterio di Von Neumann 13.4.1) A_x ne possiede almeno una. quindi è essenzialmente autoaggiunto e x è un suo vettore di unicità.

QED

Consideriamo una applicazione del teorema di Nelson. Sia μ una misura regolare positiva sull'asse reale $\mathbb{R}$ con supporto in un intervallo compatto I: allora è univocamente determinata dai suoi *momenti*

$$q_n := \int_I \lambda^n d\mu(\lambda)$$

al variare di $n \in \mathbb{N}$ (per il teorema di Stone–Weierstrass 9.2.9 e la densità delle funzioni continue in I nell'algebra $L^1(I)$).

Ci chiediamo se questo sia vero per una misura a supporto non compatto: se μ è semplicemente una misura regolare positiva su $\mathbb{R}$ e

$$a_n := \int_{\mathbb{R}} \lambda^n d\mu(\lambda)$$

possiamo formulare il *problema dei momenti (*HAMBURGER): *data una successione* $\{a_n\}$ *esiste una misura regolare positiva su* $\mathbb{R}$ *della quale i momenti siano gli elementi della successione?*

Intanto possiamo osservare che, se una tale misura esiste, allora per ogni polinomio $p \in \mathbb{C}[z]$:

$$\int |p(\lambda)|^2 d\mu(\lambda) \geq 0$$

e che, se $p(z) = \sum_n c_n z^n$ allora

$$0 \leq \int \left| \sum_n c_n \lambda^n \right|^2 d\mu(\lambda) = \sum_{n,m} c_n \overline{c_m} \int \lambda^{n+m} d\mu(\lambda)$$

così che $a_{n+m} = \int \lambda^{n+m}$.

in altri termini, la

$$\sum_{n,m} c_n \overline{c_m} a_{n+m} \geq 0$$

è una condizione necessaria per l'esistenza della misura μ. Il risultato interessante è che questa condizione è anche sufficiente.

14.4.6 Teorema *Il problema dei momenti ammette soluzione per una successione* $\{a_n\}$ *se e solo se*

$$\sum_{n,m=1}^{N} c_n \overline{c_m} a_{n+m} \geq 0$$

per ogni $N \in \mathbb{N}$ *e* $c_1, ..., c_N \in \mathbb{C}$.

DIMOSTRAZIONE: L'idea è di scrivere

$$a_n = (\xi, A_0^n \xi)$$

per qualche operatore hermitiano A_0 che ammette estensioni autoaggiunte e tale che $\xi \in C^\infty(A)$: infatti avremmo in questo caso

$$a_n = (\xi, A^n \xi) = \int \lambda^n d(\xi, E(\lambda)\xi)$$

per ogni estensione $A_0 \subset A = A^*$.

Consideriamo dunque lo spazio vettoriale X delle funzioni $c : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ a supporto finito (i coefficienti c_n) col prodotto

$$(c, c') := \sum_{m,n=0}^{\infty} c_n \overline{c_m} a_{n+m}$$

(si tratta di una forma sesquilineare semidefinita positiva per ipotesi). Se

$$N = \{c \in X \mid (c, c) = 0\}$$

allora sullo spazio vettoriale X/N la forma sesquilineare diviene una struttura prehilbertiana: sia $\mathcal{H}$ lo spazio di Hilbert ottenuto completando questo spazio prehilbertiano.

Definiamo su X l'operatore

$$(A_0 c)(n) := c_{n-1}$$

(con $(A_0 c)(0) := 0$). Dato che, se $(c, c) = 0$ allora $A_0 c = 0$ A_0 induce su X/N un operatore, che è hermitiano: infatti

$$\begin{aligned}
(c', A_0 c) &= \sum_{n,m=0}^{\infty} c'_n (A_0 c)(m) a_{n+m} = \sum_{n=0,m=1}^{\infty} c'_n c_{m-1} a_{n+m} \\
&= \sum_{n,l=0}^{\infty} c'_n c_l a_{n+l+1} = \sum_{n,l=0}^{\infty} c'_n c_l a_{(n+1)+l} \\
&= \sum_{k=1,l=0}^{\infty} c'_{k-1} c_l a_{k+l} = \sum_{k=0,l=0}^{\infty} (A_0 c')(k) c_l a_{k+l} \\
&= (A_0 c', c)
\end{aligned}$$

Abbiamo dunque un operatore densamente definito A_0 su $\mathcal{H}$ ($\mathcal{D}_{A_0} = X/N$). Ora consideriamo gli elementi di X:

$$e_i : \mathbb{N} \longrightarrow X \qquad \text{tale che} \qquad e_i(n) = \delta_{in}$$

Ovviamente $A_0 e_i = e_{i+1}$; se $\xi = \overline{e_0}$ è la sua classe di equivalenza in $\mathcal{H}$, allora

$$\xi \in C^\infty(A_0)$$

e

$$(\xi, A_0^k \xi) = (\overline{e_0}, \overline{e_k}) = (e_0, e_k) = \sum_{n,m=0}^{\infty} e_0(n) e_k(m) a_{n+m} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \delta_{0n} \delta_{km} a_{n+m} = a_k$$

Dunque ξ è un vettore ciclico oltre che differenziabile per A_0: ne segue che l'operatore hermitiano A_0 ammette estensioni autoaggiunte.

QED

Osserviamo che, se $A_0 \subset A = A^*$ nella dimostrazione precedente, allora A induce una rappresentazione dell'algebra $C(\mathbb{R})$

$$\pi(f) := f(A)$$

che ha ξ come vettore ciclico, dato che

$$A^n\xi = \operatorname*{s-lim}_{k\longrightarrow\infty} f_k(A)\xi$$

se $f_k \in C_0(\mathbb{R})$ è una funzione nulla all'infinito. Quindi, per la teoria GNS, la rappresentazione è univocamente determinata da uno stato

$$\omega(f) := (\xi, f(A)\xi) = \int f(\lambda)d\mu(\lambda)$$

Dunque le estensioni autoaggiunte sono in corrispondenza biunivoca con le misure regolari, la cui unicità equivale all'essere A_0 essenzialmente autoaggiunto. Ma per il teorema di Nelson A_0 è essenzialmente autoaggiunto perché X/N è un insieme di vettori analitici.

14.5 Gruppi commutativi e dualità di Pontriagin

Vogliamo infine giustificare l'affermazione fatta in calce al capitolo, secondo la quale è possibile generalizzare la teoria di Fourier al caso di un gruppo commutativo localmente compatto qualsiasi.

14.5.1 Definizione *Un* morfismo *fra i gruppi topologici G e H è una funzione $\varphi : G \longrightarrow H$ continua che sia un morfismo di gruppi.*

Ovviamente i gruppi topologici e i loro morfismi definiscono una categoria. Combinando le proprietà delle applicazioni continue e dei morfismi di gruppi si ottengono le proprietà dei morfismi di gruppi topologici: ad esempio, il nucleo $\ker\varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = e\}$ di un morfismo di gruppi topologici è un sottospazio chiuso (per continuità della φ) di G e lo spazio quoziente $G/\ker\varphi$ è un gruppo topologico isomorfo all'immagine $\operatorname{im}\varphi$; ovviamente un isomorfismo di gruppi topologici è un omeomorfismo che sia un morfismo di gruppi.

Particolare interesse hanno certi morfismi associati ad un gruppo G:

14.5.2 Definizione *Se G è un gruppo topologico, un* carattere *è un morfismo*

$$\chi : G \longrightarrow \mathbb{T}$$

del gruppo topologico G nel gruppo topologico $\mathbb{T}$.

In altri termini un carattere di G è una funzione continua a valori complessi tale che

- $|\chi(g)| = 1$
- $\chi(gh) = \chi(g)\chi(h)$

Osserviamo che l'insieme dei caratteri di un gruppo topologico è ancora un gruppo topologico: infatti il prodotto $\chi_1\chi_2$ di due caratteri soddisfa ancora le (1)-(2) e quindi è un carattere; lo stesso vale per l'inverso, definito come

$$\chi^{-1} := \overline{\chi}$$

(complesso coniugato). Rispetto a queste operazioni, l'insieme

$$\widehat{G} := \{\chi : G \longrightarrow \mathbb{T} \mid \chi \text{ carattere}\}$$

è un gruppo. Inoltre, $\widehat{G}$ è uno spazio topologico: basta definire la convergenza di una successione $\{\chi_n\}$ come la convergenze uniforme sui compatti $K \subset G$; in altri termini, una base di intorni dell'identità $e \in \widehat{G}$ è data dagli insiemi

$$\{\chi \in \widehat{G} \mid |\chi(g)| < \varepsilon\}_{g\in K}$$

al variare di K fra i compatti di G. Come accade per gli spazi vettoriali topologici, la topologia su un gruppo topologico è completamente determinata una volta che sia data intorno all'elemento e: infatti le traslazioni sono per definizione continue, e, se $g \in G$, e U è un intorno di e allora gU è un intorno di g.

Rispetto a questa topologia, $\widehat{G}$ è a sua volta un gruppo topologico: infatti se χ_1, χ_2, χ_3 e χ_4 sono caratteri di G, per ogni $g \in G$ si ha (denotiamo additivamente la moltiplicazione in $\mathbb{T}$, che immaginiamo come la circonferenza unitaria nel piano complesso e moltiplicativamente quella in $\widehat{G}$)

$$\begin{aligned}|\chi_3(x)\chi_4(x) - \chi_1(x)\chi_2(x)| =& |(\chi_3(x) - \chi_1(x))\chi_4(x) - \chi_1(x)(\chi_4(x) - \chi_2(x))| \\ \le& |\chi_3(x) - \chi_1(x)| + |\chi_4(x) - \chi_2(x)|\end{aligned}$$

(dato che $\chi(x) \in \mathbb{T}$ si tratta di numeri complessi di modulo 1) e da questo scende la continuità del prodotto (la continuità del passaggio all'inverso è ovvia).

Osserviamo che la topologia di $\widehat{G}$ è indotta dalla topologia su $C_B(G)$ (funzioni continue e limitate su G) data dalle seminorme

$$p_K(f) = \sup_{g\in K} |f(g)|$$

Infatti $\widehat{G} \hookrightarrow C_B(G)$.

Inoltre $\widehat{G}$ è commutativo, dato che lo è $\mathbb{T}$:

$$(\chi_1\chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g) = \chi_2(g)\chi_1(g) = (\chi_2\chi_1)(g)$$

Calcoliamo il gruppo dei caratteri degli esempi che abbiamo dato:

14.5.3 Teorema *Il gruppo topologico $\widehat{\mathbb{Z}}$ è isomorfo al gruppo topologico $\mathbb{T}$.*

DIMOSTRAZIONE: Intanto stabiliamo una corrispondenza biunivoca fra $\widehat{\mathbb{Z}}$ e $\mathbb{T}$: un carattere $\chi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{T}$ è completamente determinato dal valore che assume su $1 \in \mathbb{Z}$, dato che

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \chi(n) = \chi(1 + ... + 1) = \chi(1)...\chi(1) = \chi(1)^n$$

(il prodotto in $G = \mathbb{Z}$ è la somma $+$). Per il resto, la funzione $\chi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{T}$ è completamente arbitraria: ne segue che per ogni $z \in \mathbb{T}$ esiste un carattere di $\mathbb{Z}$, determinato dalla

$$\chi_z(1) := z$$

Ovviamente se $\chi_z(1) = \chi_w(1)$ allora $z = w$ e quindi abbiamo una corrispondenza biunivoca

$$\widehat{\mathbb{Z}} \overset{\chi}{\longleftrightarrow} \mathbb{T}$$

Di più, abbiamo che

$$\chi_{z_1 z_2} = \chi_{z_1}\chi_{z_2}$$

e quindi questa corrispondenza biunivoca è un isomorfismo di gruppi.

Resta da verificare che si tratta di un omeomorfismo di spazi topologici. Ma $\mathbb{Z}$ ha la topologia discreta: quindi i suoi compatti sono precisamente gli insiemi finiti e dunque la convergenza in $\widehat{\mathbb{Z}}$ è, per definizione, quella punto per punto. In particolare:

$$\chi z_n \longrightarrow \chi_z \iff \chi_{z_n}(1) \longrightarrow \chi_z(1)$$

il che accade se e solo se $z_n \longrightarrow z$.

QED

14.5.4 Teorema *Il gruppo topologico $\widehat{\mathbb{R}}$ è isomorfo al gruppo topologico $\mathbb{R}$.*

DIMOSTRAZIONE: Per ogni fissato $\lambda \in \mathbb{R}$, la funzione

$$\begin{aligned} \chi_\lambda : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{T} \\ x &\longmapsto e^{2\pi i \lambda x} \end{aligned}$$

è un carattere di $\mathbb{R}$: ma ogni altro carattere di $\mathbb{R}$ è di questa forma (per il teorema di Stone 14.3.6 nel caso dello spazio di Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{C}$), pertanto $\chi_\lambda \longleftrightarrow \lambda$ è una una mappa biunivoca $\mathbb{R} \longrightarrow \widehat{\mathbb{R}}$, che ovviamente è un omeomorfismo, ed un morfismo di gruppi topologici:

$$\chi_{\lambda+\mu}(t) = e^{i(\lambda+\mu)t} = e^{i\lambda t}e^{i\mu t} = \chi(\lambda)\chi(\mu)$$

QED

Possiamo stabilire dei semplici risultati sulla dualità nei gruppi abeliani: ricordiamo che se H è un sottogruppo di G (gruppo abeliano), un elemento $g \in G$ si dice ortogonale a un elemento $\chi \in \widehat{G}$ se $\chi(x) = 1$. Se G è topologico e S è un suo sottoinsieme, l'insieme degli elementi $\chi \in \widehat{G}$ ortogonali a *tutti* gli elementi di S si dice *annullatore di* S e si denota $S^\perp$. Si tratta ovviamente di un sottogruppo chiuso in $\widehat{G}$.

14.5.5 Lemma *Se G è un gruppo topologico localmente compatto abeliano e H è un sottogruppo chiuso di G, il duale del gruppo*[7] *quoziente, è isomorfo all'annullatore di H in $\widehat{G}$.*

Dimostrazione: Consideriamo l'epimorfismo canonico

$$p : G \longrightarrow G/H$$

ed il suo duale

$$\widehat{p} : \widehat{G/H} \longrightarrow \widehat{G}$$

definito come $\widehat{p}(\chi)(g) = \chi(p(g))$ ove $\chi \in \widehat{G/H}$ e $g \in G$. Allora $\widehat{p}$ è un monomorfismo di gruppi: se $\widehat{p}(\chi) = 1$ allora $\chi(p(g)) = 1$ e quindi $\chi \in H^\perp$, i.e. è il carattere 1 in $\widehat{G/H}$; inoltre $\operatorname{im}\widehat{p} = H^\perp$: infatti un carattere $\chi \in \widehat{G}$ è della forma $p(\chi')$ se e solo se χ è 1 su H.

Infine $\widehat{p}$ è un omeomorfismo: è aperta perché p è continua ed è continua perché p è aperta.

QED

14.5.6 Proposizione *Il duale di un gruppo finito è isomorfo al gruppo stesso.*

Dimostrazione: Il duale di $\mathbb{Z}_n$ è isomorfo all'annullatore in $\mathbb{T}$ di $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$: si tratta quindi del sottogruppo di $\mathbb{T}$, immagine, per mezzo della mappa canonica $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}$, del sottoinsieme dei numeri reali x tali che

$$e^{2\pi i x n} = 1$$

Si vede facilmente che questo gruppo è ciclico di ordine n, e ne deduciamo che il duale di un gruppo ciclico è isomorfo al gruppo stesso; combinando questo risultato col noto teorema di Algebra secondo il quale ogni gruppo abeliano finito è prodotto di gruppi ciclici, otteniamo la tesi

QED

Dato che, ovviamente

[7]Ogni sottogruppo di un gruppo abeliano è normale, quindi il quoziente è sempre un gruppo.

14.5.7 Proposizione *Il duale di un prodotto di gruppi è il duale dei prodotti.* abbiamo che $\widehat{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$, $\widehat{\mathbb{T}^n} = \mathbb{Z}^n$ e $\widehat{\mathbb{Z}^n} = \mathbb{T}^n$: in particolare osserviamo che ognuno di questi gruppi è isomorfo al suo biduale (nel caso di $\mathbb{R}^n$ questa non è altro che la dualità canonica fra uno spazio vettoriale ed il suo biduale). In generale è vero il seguente

14.5.8 Teorema (DUALITÀ DI PONTRIAGIN) *Il duale del duale di un gruppo topologico G è canonicamente isomorfo al gruppo stesso.*

In altri termini si tratta di una vastissima generalizzazione dell'isomorfismo canonico fra uno spazio vettoriale ed il suo biduale, al caso di un gruppo topologico commutativo qualsiasi:

$$\widehat{\widehat{G}} \cong G$$

Per la dimostrazione si veda ad esempio [32] oppure, per una dimostrazione che usi l'Analisi Funzionale, [21].

Dato che G è commutativo, anche $L^1(G)$ e quindi $C^*(G)$ lo è; allora, per il teorema di Gel'fand–Najmark 9.5.1, esiste uno spazio topologico localmente compatto X tale che

$$C^*(G) \cong C_0(X)$$

Per definizione, la compattificazione di X è lo spettro dell'algebra $\mathcal{A}$ ottenuta aggiungendo un elemento neutro a $C^*(G)$: si tratta cioè dello spazio dei funzionali lineari moltiplicativi su $C^*(G)$, e quindi dello spazio delle rappresentazioni unitarie di dimensione 1 (continue) di $C^*(G)$; ma sappiamo che esiste una corrispondenza biunivoca fra queste rappresentazioni e le rappresentazioni unitarie di dimensione 1 di G, ovvero dei suoi caratteri. Quindi

$$X \leftrightarrow \widehat{G}$$

La catena di corrispondenze che abbiamo enunciato è continua in ambedue i sensi, quindi ha luogo l'omeomorfismo

$$X \cong \widehat{G}$$

Osserviamo in ogni caso, che se G è compatto allora $C^*(G) = C(X)$ possiede un'unità, quindi X è discreto; viceversa se G è discreto allora $L^1(G)$ possiede una unità, quindi, per il teorema di Gel'fand–Najmark, X è compatto. Dunque

14.5.9 Corollario *Il duale di un gruppo compatto è un gruppo discreto e viceversa.*

Si noti che, se G è un gruppo commutativo localmente compatto e se consideriamo $\widehat{G}$ con la topologia discreta, allora il duale di $\widehat{G}$ è un gruppo compatto nel quale G si immerge, e che si dice *compattificazione di Bohr*.

Osserviamo che, per la funtorialità espressa dal teorema di Gel'fand–Najmark 9.5.1:

$$C^*(G) \cong C_0(\widehat{G})$$

(isomorfismo di C*-algebre).

Quindi: ogni rappresentazione non degenere ρ di $C_0(\widehat{G})$ corrisponde unicamente ad una rappresentazione non degenere π di $C^*(G)$ che corrisponde unicamente ad una rappresentazione unitaria (fortemente continua) U di G, e la corrispondenza è realizzata dalle

$$\pi(f) = \int f(g)U(g)d\mu(g) = \rho(\widehat{f})$$

ove $\widehat{f}$ è la trasformata di Gel'fand di f.

Possiamo allora estendere ρ ad una rappresentazione dell'algebra delle funzioni boreliane limitare

$$\widetilde{\rho} : \beta(\widehat{G}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

in modo che

$$\widetilde{\rho}(\chi_\Delta) = E(\Delta)$$

(misura spettrale). Quindi, per ogni funzione boreliana $f \in \beta(\widehat{G})$ possiamo esprimere $\widetilde{\rho}(f)$ come limite (in norma) di somme alla Lebesgue–Stieltjes:

$$\widetilde{\rho}(f) = \int_{\widehat{G}} f(\chi)dE(\chi)$$

In particolare, per $h \in C_0(\widehat{G})$:

$$\widetilde{\rho}(h) = \rho(h) = \int_{\widehat{G}} h(\chi)dE(\chi)$$

sicché, per $h = \widehat{f}$ (trasformata di Gel'fand di una funzione $f \in L^1(G)$):

$$\pi(f) = \rho(\widehat{f}) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\chi)dE(\chi)$$

e quindi, dato che la mappa

$$\eta_g : \chi \longmapsto \chi(g)$$

è un funzionale su $\beta(\widehat{G})$, troviamo

$$\widetilde{\rho}(\eta_g) = \int_{\widehat{G}} \chi(g)dE(\chi)$$

Ora applichiamo il seguente teorema per concludere che

$$\widetilde{\rho}(\eta_g) = U(g)$$

14.5.10 Teorema (STONE–NAJMARK–AMBROSE–GODEMENT)

$$\int_{\widehat{G}} \chi(g)dE(\chi) = U(g)$$

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo che, se, al solito, $f_g(h) = f(g^{-1}h)$ da

$$\widehat{f}(\chi) = \omega(f) = \int f(g)\chi(g)d\mu(g)$$

segue che

$$\widehat{f}_g(\chi) = \int f(g^{-1}h)\chi(h)d\mu(h) = \int f(h)\chi(gh)d\mu(h) = \chi(g)\widehat{f}(\chi)$$

cioè $\widehat{f}_g(\chi) = \chi(g)\widehat{f}(\chi)$, da cui ($\rho$ è un omomorfismo):

$$\begin{aligned} U(g)\pi(f) &= \pi(f_g) = \rho(\widehat{f}_g) = \widetilde{\rho}(\widehat{f}_g) = \widetilde{\rho}(\chi(g)\widetilde{\rho}(\widehat{f}) \\ &= \widetilde{\rho}(\eta_g)\pi(f) = \left(\int_{\widehat{G}} \chi(g)dE(\chi)\right)\pi(f) \end{aligned}$$

Pertanto, dato che π è non degenere, $\{\pi(f)x\}$ è totale per ogni x al variare di f:

$$U(g) = \int_{\widehat{G}} \chi(g)dE(\chi)$$

QED

Definiamo ora la trasformata di Fourier per i gruppi localmente compatti abeliani semplicemente come la trasformata di Gel'fand

$$\widehat{\ }: L^1(G) \longrightarrow C_0(\widehat{G})$$

Evidentemente

$$\widehat{L^1(G) \cap L^2}(G) = C_0(\widehat{G}) \cap L^2(\widehat{G})$$

e possiamo scegliere la misura di Haar su $\widehat{G}$ (semplicemente scalandola per un fattore non nullo) in modo che

$$\int_G |f(g)|^2 d\mu(g) = \int_{\widehat{G}} |\widehat{f}(\chi)|^2 d\widehat{\mu}(\chi)$$

in modo da generalizzare il teorema di Plancherel al caso dei gruppi:

14.5.11 Teorema *La trasformata di Gel'fand si estende ad un isomorfismo unitario fra lo spazio di Hilbert $L^2(G)$ e lo spazio di Hilbert $L^2(\widehat{G})$.*

Capitolo 15

GRUPPI CLASSICI

In questo capitolo studiamo una classe notevolissima di gruppi topologici: i gruppi classici di matrici, che hanno origine in Algebra Lineare, ma sono fondamentali nella Fisica moderna (sia relativistica che quantistica). Anche se i concetti introdotti saranno elementari (potrebbero svilupparsi con i soli strumenti forniti dall'Algebra Lineare e dalla Topologia elementare) useremo la teoria generale dei gruppi topologici del capitolo precedente, in particolare quando discuteremo i gruppi semplicemente connessi e i gruppi *spin*. Nel paragrafo finale introdurremo il concetto di varietà differenziabile, motivato dagli esempi dati dai gruppi classici.

15.1 Gruppi di matrici.

Gli esempi più importanti di gruppi topologici localmente compatti probabilmente si trovano fra i gruppi di matrici: l'insieme ($n > 0$)

$$GL_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$$

è un gruppo rispetto al prodotto di matrici, ed è topologico visto che è un aperto in $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. Ovviamente il prodotto di matrici è continuo[1]. Più intrinsecamente, se V è uno spazio vettoriale topologico, il gruppo $\operatorname{Aut} V$ degli endomorfismi invertibili di V è un gruppo topologico, sottospazio di $\operatorname{End} V$. Il gruppo $GL(V)$ si dice *gruppo lineare generale* dello spazio vettoriale V. Ovviamente la definizione può darsi nel caso complesso. Si noti che $GL_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (che è uno spazio topologico non connesso) mentre $GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (che è uno spazio topologico connesso). Notiamo che, ancora più in generale, se $\mathcal{A}$ è un'algebra associativa di dimensione finita, l'insieme $\mathcal{A}^{-1}$ dei suoi elementi invertibili è un gruppo topologico che generalizza $GL_n(\mathbb{R})$.

[1] Le entrate della matrice prodotto AB sono polinomi nelle entrate di A e B: quindi il prodotto è addirittura una funzione analitica!

Si noti che $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ come spazi vettoriali reali: tuttavia

$$GL_n(\mathbb{C}) \subsetneq GL_n(\mathbb{R})$$

Infatti il gruppo lineare generale complesso "preserva la struttura complessa" di $\mathbb{C}^n$, cioè la moltiplicazione per i, ovvero la decomposizione di ogni matrice complessa A in $A = B + iC$ con B, C matrici reali: in altri termini

$$GL_n(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \middle| A, B \in GL_n(\mathbb{R}) \right\}$$

Un altro esempio è il *gruppo lineare speciale*

$$SL_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$

che è un sottogruppo topologico di $GL_n(\mathbb{R})$. Osserviamo che si tratta di un chiuso in $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ poiché i suoi elementi sono gli zeri della funzione continua $\det A - 1$. Non si tratta però di un gruppo compatto: per vederlo consideriamo una qualsiasi norma sullo spazio $M_n(\mathbb{R})$ (che essendo uno spazio vettoriale topologico di dimensione finita è normato e su di esso tutte le norme sono equivalenti), ad esempio

$$||A|| := n \max_{1 \le i,j \le n} |a_{ij}|$$

è immediato che, rispetto a questa norma, $M_n(\mathbb{R})$ è un'algebra di Banach; ora una matrice della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$$

appartiene a $SL_n(\mathbb{R})$ per ogni $\varepsilon \neq 0$, e quindi il gruppo contiene elementi di norma arbitrariamente grande. Ragionamenti del tutto analoghi possono svolgersi per il gruppo $SL_n(\mathbb{C})$.

Dato che l'algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, se $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, è l'algebra delle matrici, il gruppo unitario $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ diviene un gruppo di matrici: il *gruppo unitario*

$$U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid AA^* = I\}$$

(ove $A^* = \overline{A^T}$ è la matrice trasposta coniugata). Questo gruppo dipende dalla presenza di un prodotto hermitiano su $\mathbb{C}^n$, ad esempio

$$(v, w) = \sum_i v_i \overline{w_i}$$

Si tratta di un gruppo compatto: è chiuso per continuità delle funzioni $A^*A - I$ (che sono funzioni nelle entrate delle matrici), ed è compatto perché se $A \in U(n)$ allora $|\det A| = 1$ e quindi, se $((a_{ij})) = A$:

$$|a_{ij}|^2 = a_{ij}\overline{a_{ij}} \leq \sum_k a_{ik}\overline{a_{ik}} = 1$$

(dato che $AA^* = I$).

Notiamo che il determinante di una matrice unitaria è un numero complesso di modulo 1: le matrici unitarie che hanno effettivamente determinante 1 sono un sottogruppo, che si dice *gruppo unitario speciale*

$$SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\} = U(n) \cap SL_n(\mathbb{C})$$

Ovviamente $SU(n)$ è compatto, dato che è chiuso in $U(n)$. Si noti inoltre che

$$U(1) = \mathbb{T} = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = SU(1)$$

e che $U(n) = U(1) \times SU(n)$.

Osserviamo che $U(n)$ è un *sottogruppo compatto massimale in* $GL_n(\mathbb{C})$; infatti se K fosse un sottogruppo compatto contenente $U(n)$ allora la rappresentazione $K \hookrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ sarebbe unitaria (per compattezza di K) e quindi $K \subset U(n)$. In particolare, *ogni sottogruppo compatto massimale di* $GL_n(\mathbb{C})$ *è coniugato a* $U(n)$.

Consideriamo ora oggetti analoghi per il caso reale: sia cioè V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita dotato di prodotto scalare, ad esempio

$$(v, w) = \sum_i v_i w_i$$

Il *gruppo ortogonale* è allora il gruppo delle matrici che preservano questo prodotto: $(Av, Aw) = (v, w)$, cioè

$$O(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = I\}$$

Ovviamente $O(n)$ è chiuso; per vedere che è compatto di nuovo si ragiona in modo analogo a quanto fatto per $U(n)$: in effetti una matrice ortogonale A è tale che $|\det A| = 1$, quindi $\det A = \pm 1$.

15.1.1 Esempio *$O(2)$ è il gruppo delle matrici $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tali che $a^2 + b^2 = 1 = c^2 + d^2$ e $ac + bc = 0$: in altri termini*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \qquad \textit{oppure} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$$

Il sottogruppo delle matrici di $O(n)$ con determinante 1 è il *gruppo ortogonale speciale*

$$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\} = O(n) \cap SL_n(\mathbb{R})$$

Ovviamente $SO(n)$ è compatto, dato che è chiuso in $O(n)$. Si noti inoltre che

$$SO(2) = \{e^{2\pi i t}\}_{t\in\mathbb{R}} = S^1 = SU(1)$$

e che $O(2) = \{\pm 1\} \times SO(2)$.

Osserviamo che i gruppi $U(n)$ e $O(n)$ sono stati definiti considerando forme bilineari definite positive e simmetriche sugli spazi vettoriali di dimensione finita reali e complessi: in effetti basta considerare forme non degeneri per avere dei gruppi di matrici. Una forma bilineare simmetrica non degenere è sempre riconducibile (teorema di Sylvester) alla

$$(v, w)_k = \sum_{i=1}^{k} v_i w_i - \sum_{i=k+1}^{n} v_i w_i$$

Il gruppo che preserva questa forma è

$$O(k, n-k) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid (Av, Aw)_k = (v, w)\}$$

Ad esempio il gruppo $O(1, 3)$ si dice *gruppo di Lorentz*, perché preserva le trasformazioni di Lorentz nello spazio di Minkowski: questi gruppi non sono compatti. Anche qui possiamo considerare i sottogruppi speciali

$$SO(k, n-k) = O(k, n-k) \cap SL_n(\mathbb{R})$$

Notiamo che $SO(k, n-k) = SO(n-k, k)$.

Infine consideriamo una forma bilineare non degenere ed antisimmetrica: intanto osserviamo che uno spazio possiede una tale forma solo se è di dimensione pari: infatti se $\langle , \rangle$ è una forma bilineare tale che

$$\langle v, w\rangle = -\langle w, v\rangle$$

allora $\langle v, v\rangle = 0$ e quindi, se la forma e non degenere, fissata una base $(e_1, ..., e_k)$, la matrice A della forma $\langle , \rangle$ nella base è tale che

$$A = -A^T \qquad \text{e} \qquad \det A \neq 0$$

cioè $\det A = \det -A^T = (-1)^k \det A$ da cui k deve essere pari.

Una tale forma è sempre riconducibile (teorema di Darboux) alla

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{k} (v_i w_{i+k} - w_i v_{i+k})$$

Il gruppo che preserva questa forma è il *gruppo simplettico*[2]:

$$Sp_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid \langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle\}$$

Osserviamo che $Sp_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{C}) \subset GL_{2n}(\mathbb{R})$. Precisamente, le matrici di $Sp_n(\mathbb{R})$ sono le matrici $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A\end{pmatrix}$ tali che

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0\end{pmatrix}$$

ove $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0\end{pmatrix}$ è la matrice della forma simplettica nella base standard.

È possibile considerare il *gruppo simplettico complesso*, se lo spazio ove si considera la forma simplettica è complesso (e.g. $\mathbb{C}^{2n}$):

$$Sp_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_{2n}(\mathbb{C}) \mid \langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle\}$$

Questi gruppi simplettici non sono compatti: un argomento analogo alla decomposizione polare mostra in effetti che sono, topologicamente, il prodotto di $U(n)$ per $\mathbb{R}^N$; è invece compatto il gruppo

$$Sp(n) = Sp_n(\mathbb{C}) \cap U(2n)$$

Il gruppo $Sp(n)$ può definirsi come gruppo di matrici su uno spazio vettoriale quaternionico: ricordiamo che i quaternioni (cfr. esempio 5.5.9) $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2$ formano un corpo e quindi possiamo considerare spazi vettoriali su di essi, e quindi i gruppi $GL_n(\mathbb{H})$ e $SL_n(\mathbb{H})$: notiamo che $GL_n(\mathbb{H}) \subset GL_{2n}(\mathbb{C})$ (inclusione propria) è il sottogruppo di $GL_{2n}(\mathbb{C})$ delle matrici che preservano la struttura quaternionica, cioè delle matrici della forma

$$\begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A}\end{pmatrix}$$

con $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Allora il gruppo simplettico è l'equivalente del gruppo unitario nel caso quaternionico:

$$Sp(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{H}) \mid AA^* = I\}$$

ed è formato dalle matrici A a coefficienti quaternionici che preservano la forma hermitiana

$$(v, u) = \sum_k u_i \overline{v_i}$$

[2]Il termine, dovuto a H.Weyl, è la versione greca di "complesso".

ove se $u = a1 + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$, il suo coniugato è $\overline{u} = a1 - bi - cj - dk$. Si tratta di un gruppo compatto, che è l'analogo di $U(n)$ e $O(n)$ per gli spazi quaternionici: non esiste un gruppo simplettico speciale, dato che si dimostra che $Sp(n)$ è già speciale:

$$Sp(n) \subset SL_n(\mathbb{H})$$

I gruppi che abbiamo fin qui introdotti si dicono, nella terminologia di H.Weyl, *gruppi classici*.

Studiamo ora le proprietà topologiche dei gruppi classici: riassumiamo quanto fin qui detto con il

15.1.2 Teorema *I gruppi $U(n)$, $O(n)$, $Sp(n)$, $SO(n)$ e $SU(n)$ sono compatti; i gruppi $GL_n(\mathbb{K})$, $SL_n(\mathbb{K})$ non sono compatti, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.*

Notiamo che è definita per ogni gruppo classico G una mappa

$$\det : G \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

In particolare, la mappa $\det : O(n) \longrightarrow \{\pm 1\}$ è continua e suriettiva, quindi *il gruppo $O(n)$ non è connesso.*

15.1.3 Teorema *$O(n)$ ha due componenti connesse: $SO(n)$ e $-I \cdot SO(n)$.*

Per dimostrarlo è sufficiente mostrare che $SO(n)$ è connesso; lo dimostreremo fra breve: intanto notiamo il

15.1.4 Corollario *$GL_n(\mathbb{R})$ ha due componenti connesse: $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A > 0\}$ e $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A < 0\}$.*

DIMOSTRAZIONE: Basta usare la decomposizione polare: ogni matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ si scrive come $A = |A|B$ con $|A|$ matrice simmetrica definita positiva e $B \in O(n)$: allora, dato che l'insieme delle matrici simmetriche definite positive è convesso, ($tA + (1-t)A$ è simmetrica definita positiva se lo è A, al variare di t) è connesso: quindi le componenti connesse di $GL_n(\mathbb{R})$ corrispondono a quelle di $O(n)$.

QED

Osserviamo che questi risultati sono falsi nei casi complesso e quaternionico: in altri termini

15.1.5 Teorema *I gruppi $GL_n(\mathbb{C})$ e $GL_n(\mathbb{H})$ sono connessi.*

Questo seguirà dal seguente risultato

15.1.6 Teorema *I gruppi $SO(n)$, $U(n)$ e $Sp(n)$ sono connessi.*

e dalle decomposizioni polari per i gruppi lineari generali complesso e quaternionico che sono del tutto analoghe a quella reale.

La dimostrazione della connessione di $U(n)$, $SO(n)$ e $Sp(n)$ può svolgersi considerando l'importante concetto di *toro massimale* in un gruppo di matrici.

Ricordiamo che il *toro n-dimensionale* è il gruppo topologico commutativo compatto (connesso) $\mathbb{T}^n = S^1 \times ... \times S^1$. Ogni gruppo classico possiede dei tori massimali che si definiscono come segue.

In $U(n)$ un toro massimale è semplicemente il sottogruppo delle matrici diagonali con elementi di modulo 1:

$$T^n = \left\{ A \in U(n) \,\middle|\, A = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & z_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & z_n \end{pmatrix} \right\}_{z_1,...,z_n \in \mathbb{T}}$$

In $Sp(n)$ un toro massimale è semplicemente

$$T^n = \left\{ A \in Sp(n) \,\middle|\, A = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & c_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & c_n \end{pmatrix} \right\}$$

ove $c_i = \begin{pmatrix} z_i & 0 \\ 0 & \overline{z_i} \end{pmatrix} \in U(2)$ e $z_i \in \mathbb{T}$. Anche in $SO(2n)$ e $SO(2n+1)$ c'è un toro massimale standard della forma

$$T^n = \left\{ A \in SO(2n) \,\middle|\, A = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & R_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & R_n \end{pmatrix} \right\}$$

ove $R_i = \begin{pmatrix} \cos t_i & \sin t_i \\ -\sin t_i & \cos t_i \end{pmatrix}$ ed in $SO(2n+1)$:

$$T^n = \left\{ A \in SO(2n+1) \,\middle|\, A = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & R_n & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & I \end{pmatrix} \right\}$$

Ora sia G è uno dei gruppi $SO(2n)$, $SO(2n+1)$, $U(n)$ o $Sp(n)$: scriviamo A^* in luogo di A^T per i gruppi ortogonali e $\overline{A^T}$ per i gruppi unitari e simplettici.

Osserviamo che se $A \in G$ allora è normale:

$$A^*A = A^{-1}A = I = AA^{-1} = AA^*$$

Possiamo allora usare il teorema spettrale nel caso di dimensione finita per dedurre il seguente teorema dovuto (in una forma più intrinseca) ad Èlie Cartan:

15.1.7 Teorema *Se G è uno dei gruppi classici compatti $SO(2n)$, $SO(2n+1)$, $U(n)$ ovvero $Sp(n)$ allora per ogni suo toro massimale:*

$$G = \bigcup_{g \in G} gT^n g^{-1}$$

Cioè G è unione dei coniugati del toro massimale T^n.

Ora, dato che $\mathbb{T}^n$ è connesso (è un prodotto di spazi connessi S^1) abbiamo scritto G come unione di connessi $gT^n g^{-1}$ che hanno un punto in comune e: quindi

15.1.8 Corollario *I gruppi $SO(n)$, $U(n)$ e $Sp(n)$ sono connessi.*

Segnaliamo che i tori massimali nei gruppi classici giocano un ruolo decisivo nella descrizione di questi gruppi: ad esempio, considerando $T^n \subset G$ e il normalizzatore $N(T^n)$ (cioè il più grande sottogruppo di G che ammetta T^n come sottogruppo normale), il quoziente $N(T^n)/T^n$ si dice *gruppo di Weyl* $W(G)$: il gruppo di Weyl agisce su T^n come (denotiamo con $[n]$ la classe di $n \in N(T^n)$)

$$([n], t) \longmapsto ntn^{-1}$$

Questa azione è ben definita (non dipende dal rappresentante n ma solo dalla classe) e consente di dimostrare il seguente teorema, per il quale si rimanda ai testi specialistici (ad esempio [26], [3] o [21]):

15.1.9 Teorema *Il gruppo di Weyl è finito ed agisce senza punti fissi sul toro massimale.*

15.2 Semplice connessione e Spin

Vogliamo qui discutere un'altra proprietà topologica che i gruppi di matrici possono avere: la semplice connessione. Ad esempio ricordiamo che $S^1 = \mathbb{T} = U(1)$ non è semplicemente connesso: il suo gruppo fondamentale è $\mathbb{Z}$ (cfr. 2.5.14).

Prima di procedere osserviamo che basta limitarsi ai gruppi classici compatti $SO(n)$, $U(n)$ e $Sp(n)$: infatti

15.2.1 Teorema *Il gruppo $GL_n^+(\mathbb{R})$ (rispettivamente $GL_n(\mathbb{C})$, $GL_n(\mathbb{H})$) ha lo stesso gruppo fondamentale di $SO(n)$ (rispettivamente $U(n)$, $Sp(n)$).*

Dimostrazione: Basta ricordare la decomposizione polare:

$$GL_n^+(\mathbb{R}) = SO(n) \times S(n)$$

ove $S(n)$ è lo spazio delle matrici simmetriche definite positive (risp. $GL_n(\mathbb{C}) = U(n) \times H(n)$ con $H(n)$ matrici hermitiane definite positive, $GL_n(\mathbb{H}) = Sp(n) \times Q(n)$ con $Q(n)$ matrici hermitiane quaternioniche definite positive). Ma lo spazio $S(n)$ (risp. $H(n)$, $Q(n)$) è convesso (infatti se $t \in [0,1]$ a $A \in S(n)$ anche $tA + (1-t)A \in S(n)$) e quindi contraibile. Ne segue che

$$\pi_1(GL_n(\mathbb{R})) = \pi_1(O(n) \times S(n)) = \pi_1(O(n))$$

QED

Osserviamo che abbiamo considerato $GL_n^+(\mathbb{R})$ perché $GL_n(\mathbb{R})$ non è connesso, e quindi non ha senso considerare il gruppo fondamentale, ma solo i gruppi fondamentali delle componenti connesse, che in questo caso sappiamo essere due ed omeomorfe fra loro(tramite la $A \longmapsto -A$); basta quindi limitarsi ad una di esse, ad esempio quella contenente l'identità I cioè $GL_n^+(\mathbb{R})$.

Calcoleremo i gruppi fondamentali dei gruppi classici compatti usando il loro legame con le sfere. Sappiamo già che

$$U(1) = SO(2) = S^1$$

ha gruppo fondamentale $\mathbb{Z}$.

15.2.2 Teorema *Il gruppo $SU(2)$ è omeomorfo come spazio topologico alla sfera S^3 a tre dimensioni.*

Dimostrazione: Basta scrivere in modo opportuno le matrici unitarie: un elemento di $SU(2)$ è una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tale che $A^*A = I$ e $\det A = 1$, cioè $a\overline{a} + b\overline{b} = 1 = c\overline{c} + d\overline{d}$, $a\overline{c} + b\overline{d} = 0 = c\overline{a} + d\overline{b}$ e $ad = bc + 1$. Quindi $a = \overline{d}$ e $b = -\overline{d}$ e $|a|^2 + |b|^2 = 1$; con le posizioni

$$x_1 = \frac{a + \overline{a}}{2} \qquad x_2 = \frac{a - \overline{a}}{2} \qquad x_3 = \frac{b + \overline{b}}{2} \qquad x_4 = \frac{b - \overline{b}}{2}$$

definiamo un omeomorfismo $A \leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)$ fra $SU(2)$ e la sfera di centro l'origine e raggio 1 in $\mathbb{R}^4$.

QED

Il seguente risultato è intuitivamente ovvio: un cammino chiuso su una sfera di dimensione maggiore o uguale a due è contraibile.

15.2.3 Teorema *Per $n > 1$ la sfera S^n è semplicemente connessa.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo la sfera S^n come compattificazione di Alexandroff dello spazio $\mathbb{R}^n$: sia $c : [0,1] \longrightarrow S^n$ un cammino in S^n con $c(0) = c(1) = x_0$. Allora, se y_0 è un punto tale che non esiste $t \in [0,1]$ per cui $c(t) = y_0$ (un tale punto esiste sempre, dato che l'immagine di $[0,1]$ tramite c non può essere l'intera S^n), considerando $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{y_0\}$ (compattificazione di Alexandroff) il cammino c è contenuto in $\mathbb{R}^n$ e quindi si contrae al punto x_0 perché $\mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso.

QED

15.2.4 Corollario *$SU(2) = Sp(1)$ è semplicemente connesso.*

Discutiamo ora il più semplice caso nel quale si manifesta il fenomeno dello *spin*: il gruppo $SO(3)$; per farlo realizziamo la sfera $S^3 = SU(2)$ come sfera di raggio 1 in $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ (corpo dei quaternioni): in altri termini realizziamo $SU(2)$ come le unità dei quaternioni, i.e. i quaternioni q tali che $\overline{q} = q^{-1}$.

Ora consideriamo lo spazio dei quaternioni puramente immaginari:

$$\mathbb{H}_0 = \{q \in \mathbb{H} \,|\, q = -\overline{q}\} = \{bi + cj + dk \,|\, , c, d \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$$

Ovviamente la forma bilineare

$$(q_1, q_2) = q_1\overline{q_2}$$

rende $\mathbb{H}_0$ uno spazio euclideo, isomorfo a $\mathbb{R}^3$ col prodotto standard. Ora, la mappa

$$\Phi : SU(2) \longrightarrow GL(\mathbb{H}_0)$$

definita come (rappresentiamo gli elementi di $SU(2)$ come quaternioni)

$$\Phi(A)(q) = AqA^{-1}$$

(prodotto nel corpo dei quaternioni) è lineare e preserva il prodotto scalare in $\mathbb{H}_0$:

$$\begin{aligned}(\Phi(A)q_1, \Phi(A)q_2) &= Aq_1A^{-1}\overline{Aq_2A^{-1}} = Aq_1A^{-1}\overline{A^{-1}}\overline{q_2}\overline{A}\\ &= Aq_1\overline{q_2}\overline{A} = -q_1A(-\overline{A}\overline{q_2}) = q_1\overline{q_2}\end{aligned}$$

(dato che $\overline{A} = A^{-1}$, $\overline{q_i} = -q_i$ e, per ogni coppia di quaternioni q, p si ha $\overline{qp} = \overline{pq}$).Quindi $\Phi(A) \in O(3)$; ovviamente Φ è suriettiva e continua, quindi, dato che $SU(2)$ è connesso, l'immagine di Φ è connessa: questa immagine è $SO(3)$. Inoltre il nucleo della mappa Φ è formato dagli elementi $\pm I$ di $SU(2)$: infatti se $\Phi(A)(q) = q$ per ogni $q \in \mathbb{H}_0$ allora $AqA^{-1} = q$, cioè $Aq = qA$; questo accade solo se il quaternione è reale (cioè se ha nulle le coordinate i, j, k): ma gli elementi di $\mathbb{H}_0$ hanno nulla la componente reale e $\overline{q} = -q$, e quindi $A = \pm I$.

In definitiva abbiamo l'isomorfismo di gruppi topologici:

$$SU(2)/\{\pm I\} \cong SO(3)$$

o, se si vuole, la successione esatta di gruppi

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow SU(2) \longrightarrow SO(3) \longrightarrow 1$$

In particolare, dato che lo spazio proiettivo si ottiene dalla sfera identificandone coppie di punti (antipodali):

15.2.5 Teorema *$SO(3)$ è omeomorfo allo spazio proiettivo reale tridimensionale $\mathbb{P}^3$.*

Dal punto di vista geometrico l'isomorfismo $SU(2)/\{\pm 1\} = SO(3)$ può descriversi come segue: alla matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$ associamo la trasformazione lineare fratta

$$z \longmapsto \frac{az + b}{-\overline{b}z + \overline{a}}$$

della retta proiettiva complessa $\mathbb{CP}^1$ in sé. Ma, per tramite della proiezione stereografica, $\mathbb{CP}^1$ si identifica alla sfera S^2, della quale le trasformazioni lineari fratte divengono le rotazioni. Si ottiene così di nuovo la mappa $SU(2) \longrightarrow SO(3)$: evidentemente due trasformazioni lineari fratte inducono la medesima rotazione se e solo se differiscono per il segno.

Abbiamo visto come i gruppi unitari speciali in dimensione 1 e 2 siano delle sfere; in generale non sarà vero che ogni gruppo unitario è una sfera, ma possiamo stabilire un risultato, valido per i gruppi classici compatti, che lega questi oggetti alle sfere di dimensione qualsiasi. Consideriamo le sfere S^{n-1} come le sfere di centro l'origine e raggio 1 in $\mathbb{R}^n$.

15.2.6 Teorema *Il gruppo $SO(n)$ (rispettivamente $SU(n)$, $Sp(n)$) agisce in modo transitivo sulla sfera S^{n-1} (rispettivamente S^{2n-1}, S^{4n-1}), lo stabilizzatore nel punto $e = (1, 0, ..., 0) \in S^n$ è il sottogruppo $I \times SO(n-1)$ (rispettivamente $I \times U(n-1)$, $I \times Sp(n-1)$). Hanno quindi luogo gli omeomorfismi*

$$SO(n)/SO(n-1) = S^{n-1}, \qquad SU(n)/SU(n-1) = S^{2n-1},$$
$$Sp(n)/Sp(n-1) = S^{4n-1}$$

DIMOSTRAZIONE: Facciamo la dimostrazione per $SO(n)$: negli altri casi procede in modo del tutto analogo. Consideriamo quindi l'azione di $SO(n)$ su $\mathbb{R}^n$ data dal prodotto di una matrice per un vettore Av: ovviamente

$$v \in S^{n-1} \Rightarrow Av \in S^{n-1}$$

(dato che $||Av||^2 = (Av, Av) = ||v||^2$). Questa azione è transitiva, dato che ogni punto $v \in S^{n-1}$ viene spostato in e da un elemento di A: infatti un elemento $v \in S^{n-1}$ per definizione è tale che $||v||^2 = 1$; possiamo quindi completare il vettore $\{v\}$ ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$: $(v, v_2, ..., v_n)$. Allora la matrice $A = (v, v_2, ..., v_n)$ le cui colonne sono i vettori della base è in $SO(n)$ ed è tale che $Av = e$. Dunque, dato che l'azione è transitiva, abbiamo che

$$S^{n-1} = SO(n)/G_e$$

ove G_e è lo stabilizzatore di e: ma

$$G_e = \{A \in SO(n) \,|\, Ae = e\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \,\middle|\, A \in SO(n-1) \right\} = I \times SO(n-1)$$

e quindi abbiamo l'omeomorfismo cercato.

QED

Ad esempio, nel caso di $SO(3)$, l'omeomorfismo $SO(3)/SO(2) = S^2$ è la *fibrazione di Hopf*

$$S^3 \longrightarrow S^2$$

cioè una mappa suriettiva di S^3 in S^2 le cui controimmagini (le "fibre") sono isomorfe a S^1.

Per calcolare i gruppi fondamentali dei gruppi classici compatti di dimensione qualsiasi, dobbiamo svolgere qualche considerazione sui gruppi semplicemente connessi. Sappiamo che esistono gruppi non semplicemente connessi, $U(1)$ ad esempio; tuttavia $U(1) = S^1$ è quoziente di uno spazio semplicemente connesso $\mathbb{R}$, e la mappa $p : t \longmapsto e^{it}$ che realizza questo quoziente è un omeomorfismo locale.

15.2.7 Definizione *Un* rivestimento *di uno spazio topologico X è una mappa continua suriettiva $E \xrightarrow{p} X$ a uno spazio topologico E in X tale che*

- *per ogni $x \in X$ la controimmagine $p^{-1}(x)$ sia un insieme discreto;*
- *p sia un omeomorfismo locale;*
- *la topologia di X sia la topologia quoziente indotta dalla mappa p.*

L'esempio $\mathbb{R} \xrightarrow{p} S^1$ è quello fondamentale: in questo caso $\mathbb{R}$ soddisfa anche la definizione seguente

15.2.8 Definizione *Un rivestimento* $E \xrightarrow{p} X$ *si dice* universale *se* E *è semplicemente connesso.*

Ovviamente, se esiste, il rivestimento universale è unico: due tali rivestimenti $E_1 \xrightarrow{p_1} X$ e $E_2 \xrightarrow{p_2} X$ danno luogo a rivestimenti $E_1 \xrightarrow{p_2^{-1}p_1} E_2$ e $E_2 \xrightarrow{p_1^{-1}p_2} E_1$ che sono omeomorfismi: questo segue dal

15.2.9 Lemma *Se* $E \xrightarrow{p} X$ *è un rivestimento,* $x_0 \in X$ *e* $e_0 \in p^{-1}(x)$ *allora per ogni mappa continua* $f : Y \longrightarrow X$ *da uno spazio connesso* Y *tale che* $f(y_0) = x_0$ *esiste un unica mappa* $f' : Y \longrightarrow E$ *tale che* $f'(y_0) = e_0$ *e* $pf' = f$*.*

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo che $f'' : Y \longrightarrow E$ soddisfi la tesi del lemma e siano

$$A = \{y \in Y \mid f'(y) = f''(y)\} \qquad \text{e} \qquad B = \{y \in Y \mid f'(y) \neq f''(y)\}$$

Allora $Y = A \cup B$ e $y_0 \in A$. Mostreremo che sia A che B sono aperti, il che è assurdo, dato che Y è connesso ($A \cap B = \emptyset$).

Sia $y_1 \in Y$ e U un intorno di $f(y_1)$ tale che $p^{-1}(U)$ sia unione disgiunta di intorni a lui omeomorfi; se $y_1 \in A$ allora $f'(y-1) = f''(y-1)$ appartiene a qualche componente connessa C di $p^{-1}(U)$ e quindi $f'^{-1}(C) \cap f''^{-1}(C)$ è un aperto contenente y_1 e contenuto in A; dunque A contiene con ogni suo punto un intorno aperto di questo punto ed è pertanto aperto. Se invece $y_1 \in B$ allora $f'(y_1)$ appartiene a qualche componente connessa C di $p^{-1}(U)$ e $f''(y_1)$ appartiene a qualche componente connessa $D \neq C$ di $p^{-1}(U)$, da cui $f'^{-1}(C) \cap f''^{-1}(D)$ è un intorno aperto di y_1 contenuto in D. Quindi anche D è aperto.

QED

Osserviamo che non è affatto garantita l'esistenza di un rivestimento universale: infatti, se $\widetilde{X}$ è un rivestimento universale, dato che è localmente omeomorfo a X, ed è semplicemente connesso, X deve essere *localmente semplicemente connesso*, cioè ogni suo punto deve possedere un intorno aperto semplicemente connesso. Questa condizione è pure sufficiente:

15.2.10 Teorema *Se* X *è uno spazio topologico connesso, localmente connesso e localmente semplicemente connesso allora possiede un rivestimento universale.*

DIMOSTRAZIONE: Diamo solo l'idea della dimostrazione, rimandando a [3], [26] o [27], per una trattazione completa.

Sia $x_0 \in X$ e consideriamo l'insieme $\mathfrak{C}(x_0)$ dei cammini in X con punto iniziale x_0: se $c, c' : [0,1] \longrightarrow X$ sono due tali cammini, diciamo che sono equivalenti ($c \sim c'$) se $c(1) = c'(1)$ e sono omotopi. Poniamo

$$\widetilde{X} = \mathfrak{C}(x_0)/\sim$$

e definiamo $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ come

$$p[c] = c(1)$$

Ora rendiamo X uno spazio topologico in modo che $\widetilde{X} \xrightarrow{p} X$ sia un rivestimento universale. La topologia si definisce considerando come base in $\widetilde{X}$, la famiglia degli insiemi

$$A(V, c) := \{[cc'] \mid c' \in \mathfrak{C}(x_0)\, c'(0) = c(1)\, c'([0,1]) \subset V\}_{c \in \mathfrak{C}(x_0),\, V \text{ intorno aperto di } p[c]}$$

Si vede facilmente che si tratta di una base di intorni per una topologia e che rende continua la mappa p: inoltre, se $V \subset X$ è un intorno connesso semplicemente connesso di un punto $x \in X$, allora $p^{-1}(x)$ è unione disgiunta degli $A(V, c)$ tali che $p[c] \in V$, e $p(A(V, c)) = V$: quindi p è un omeomorfismo locale. Non è difficile verificare che $\widetilde{X}$ è connesso, mentre la semplice connessione segue quasi per definizione.

QED

Il caso che ci interessa è quello di un gruppo topologico.

15.2.11 Teorema *Se G è un gruppo topologico connesso, localmente connesso e localmente semplicemente connesso allora il suo rivestimento universale $\widetilde{G} \xrightarrow{p} G$ è in modo unico un gruppo topologico con elemento neutro $e_0 \in p^{-1}(e)$ (e è l'elemento neutro in G) e p è un omomorfismo di gruppi topologici.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo la mappa $m : G \times G \longrightarrow G$ definita come

$$m(x, y) = xy^{-1}$$

Se $\widetilde{G} \xrightarrow{p} G$ è il rivestimento universale di G, in $\widetilde{G} \times \widetilde{G} \xrightarrow{p \times p} G \times G$ possiamo sollevare unicamente m, ottenendo così la struttura di gruppo topologico voluta: l'unicità del sollevamento implica la validità delle proprietà gruppali.

QED

15.2.12 Lemma *Se G è un gruppo topologico connesso, H un suo sottogruppo chiuso connesso e semplicemente connesso e se il quoziente G/H è semplicemente connesso allora anche G è semplicemente connesso.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo il rivestimento universale $\widetilde{G} \xrightarrow{p} G$ di G ed il suo sottogruppo $\widetilde{H} := p^{-1}(H)$ che è chiuso per continuità della p (ed è un sottogruppo perché p è un omomorfismo di gruppi). Dato che un rivestimento è un omeomorfismo locale e che G/H e $\widetilde{G}/\widetilde{H}$ sono semplicemente connessi p induce l'omeomorfismo

$$\widetilde{G}/\widetilde{H} \cong G/H$$

Ma notiamo che, essendo H semplicemente connesso e $\widetilde{H} \xrightarrow{p|_{\widetilde{H}}} H$ il suo rivestimento universale, deve essere $H = \widetilde{H}$, sicché $\widetilde{G}/H = G/H$ e quindi la mappa $G \longrightarrow G/H$ che si solleva unicamente a $G \longrightarrow \widetilde{G}/H$ e viene a coincidere con $\widetilde{G} \longrightarrow \widetilde{G}/\widetilde{H} = \widetilde{G}/H$: dunque $\widetilde{G} \cong G$. Ne segue che G è semplicemente connesso.

QED

Siamo ora in grado di calcolare i gruppi fondamentali dei gruppi classici compatti:

15.2.13 Teorema *Per ogni $n \geq 1$ $SU(n)$ e $Sp(n)$ sono semplicemente connessi, mentre $\pi_1(SO(2)) = \pi_1(U(n)) = \mathbb{Z}$ e $\pi_1(SO(n+2)) = \mathbb{Z}_2$.*

Dimostrazione: Usiamo il fatto che

$$S^{n-1} = SO(n)/SO(n-1)\,, \qquad S^{2n-1} = SU(n)/SU(n-1)\,,$$
$$S^{4n-1} = Sp(n)/Sp(n-1)$$

ed il fatto che le sfere sono semplicemente connesse. Nel caso di $SU(n)$ e $Sp(n)$ si procede per induzione applicando il lemma: per $n = 1$ abbiamo $\pi_1(SU(1)) = \pi_1(SO(2)) = \mathbb{Z}$ mentre $\pi_1(Sp(1)) = \pi_1(SU(2)) = \pi_1(S^3) = 0$; quindi, applicando il lemma, otteniamo che $SU(n+1)$ e $Sp(n)$ sono semplicemente connessi perché lo sono le sfere e $SU(n)$ e $Sp(n-1)$ per $n > 1$, per induzione.

Per quel che riguarda $SO(n)$ non possiamo applicare il lemma; tuttavia notiamo che le immersioni $\iota_n : SO(n-1) \hookrightarrow SO(n)$ inducono degli epimorfismi di gruppi

$$\pi_1(SO(n)) \xrightarrow{\iota_{n*}} \pi_1(SO(n-1)) \longrightarrow 1$$

i cui nuclei sono i gruppi $\pi_1(S^{n-1})$; infatti l'epimorfismo assegna ad una classe $[\sigma]$ di cammini in $SO(n)$ la classe $[\sigma \circ \iota]$, e quindi $\iota_{n*}([\sigma]) = 0$ se e solo se il cammino σ ha immagine in $SO(n)/SO(n-1)$; ma in questo caso è contraibile a un punto, per la semplice connessione di S^{n-1}, e quindi ι_{n*} sono isomorfismi:

$$\mathbb{Z}_2 = \pi_1(SO(3)) = \pi_1(SO(4)) = ... = \pi_1(SO(n)) = ...$$

QED

Dato che i gruppi ortogonali $SO(n)$, per $n \geq 3$ non sono semplicemente connessi (ma si noti che "lo sono quasi": il loro gruppo fondamentale è il più piccolo gruppo non banale che esista!) ha senso dare la seguente

15.2.14 Definizione *Se $n \geq 3$ si dice* gruppo spinoriale *$Spin(n)$ il rivestimento universale di $SO(n)$.*

15.2.15 Esempio $Spin(3) = SU(2)$.

In generale è possibile realizzare ogni gruppo spinoriale come sottogruppo di un opportuno gruppo unitario. Vediamo qualche altro esempio.

15.2.16 Proposizione *$Spin(4) = Spin(3) \times Spin(3)$.*

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo che se $u, u' \in SU(2) = Spin(3)$ sono due quaternioni unitari, la mappa

$$q \longmapsto uqu'$$

è una isometria di $\mathbb{H}$ in sé, dato che

$$|uq\overline{u'}| = |u|\,|q|\,|\overline{u'}| = |q|$$

Abbiamo quindi una mappa continua

$$\Phi : Spin(3) \times Spin(3) \longrightarrow SO(4)$$

che è un omomorfismo di gruppi:

$$u(vq\overline{v'})\overline{u'} = (uv)q\overline{u'v'}$$

Il nucleo di Φ è formato solo da $(1,1)$ e $(-1,-1)$, mentre l'immagine coincide con $SO(4)$. Quindi si tratta del rivestimento universale di $SO(4)$.

QED

Seguendo questa linea si può dimostrare che (cfr. ad esempio [27])

15.2.17 Teorema *$Spin(5) = Sp(2)$ e $Spin(6) = SU(4)$.*

15.3 Esponenziale di matrici

In questa sezione facciamo una digressione sull'esponenziale di matrici, che è lo strumento fondamentale col quale, ad esempio, viene formulata la teoria dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie.

Consideriamo dunque una matrice qualsiasi $X \in M_n(\mathbb{R})$, e poniamo

$$e^X := 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + ...$$

cioè la serie esponenziale classica. Questa è una scrittura che ha formalmente senso perché coinvolge solo somme e prodotti di matrici, e, perché definisca una matrice, dobbiamo trovarne un dominio di convergenza.

15.3.1 Lemma *Per ogni matrice X la serie e^X converge.*

Dimostrazione: Usiamo il criterio di Cauchy tramite la disuguaglianza triangolare della norma di matrici

$$\left|\left|\frac{X^m}{m!}+\frac{X^{m+1}}{(m+1)!}+...+\frac{X^{m+k-1}}{(m+k-1)!}\right|\right|<\frac{||X||^m}{m!}+...+\frac{||X||^{m+k-1}}{(m+k-1)!}$$

Ma la serie numerica $e^{||X||}$ converge per ogni X e quindi le somme parziali di e^X costituiscono una successione di Cauchy nella norma delle matrici il che dimostra la convergenza della serie.

QED

Notiamo alcune proprietà immediate dell'esponenziale di matrici: intanto è ovvio che

$$\left(e^A\right)^T=e^{A^T}$$

Inoltre, se $B\in GL_n(\mathbb{R})$, dato che per ogni $m\in\mathbb{N}$: $BA^mB^{-1}=(BAB^{-1})^m$ allora

$$Be^AB^{-1}=e^{BAB^{-1}}$$

Se la matrice A è triangolare superiore, cioè della forma

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & ... & a_{nn}\end{pmatrix}$$

allora, dato che gli elementi diagonali delle matrici (triangolari) A^m sono $\{a_{ii}^m\}$ e quindi anche e^A è triangolare con elementi diagonali $\{e^{a_{ii}}\}$. In particolare

15.3.2 Proposizione $\forall A\in M_n(\mathbb{R})\quad \det e^A=e^{\operatorname{tr}A}$

Dimostrazione: Infatti per ogni $A\in M_n(\mathbb{R})$ esiste una matrice $B\in GL_n(\mathbb{R})$ tale che BAB^{-1} è triangolare superiore (con coefficienti in generale complessi) e quindi, dato che $\operatorname{tr}BAB^{-1}=\operatorname{tr}A$ si ha la tesi.

QED

15.3.3 Corollario *Per ogni $A\in M_n(\mathbb{R})$, $e^A\in GL_n^+(\mathbb{R})$.*

Quindi ogni matrice esponenziale è invertibile con determinante positivo: non è però vero che ogni matrice $A\in GL_n^+(\mathbb{R})$ sia l'esponenziale di qualche matrice $B\in M_n(\mathbb{R})$: ad esempio

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\in GL_2^+(\mathbb{R})$$

non lo è: il motivo è ovvio, e risiede nel fatto che non è definito il logaritmo di un numero negativo. Nel caso di matrici complesse, la mappa esponenziale è invece suriettiva, ed il motivo risiede proprio nell'esistenza delle determinazioni del logaritmo complesso.

15.3.4 Proposizione *Se A e B sono matrici che commutano, cioè $AB = BA$ allora*
$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B$$

DIMOSTRAZIONE: Per l'ipotesi fatta su A e B otteniamo:
$$\begin{aligned} e^A \cdot e^B &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right)\left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{B^h}{h!}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(\sum_{h+k=m} \frac{m!}{k!h!} A^k B^h\right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(A+B)^m = e^{A+B} \end{aligned}$$

Infatti se A e B commutano, vale la formula del binomiale per calcolare $(A+B)^n$ esattamente come per gli scalari.

QED

15.3.5 Corollario $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ *e* $e^0 = I$.

In generale $e^A e^B \neq e^B e^A$: invece di produrre un controesempio (cosa peraltro semplicissima) produciamone un'intera classe: scriviamo
$$[A, B] = AB - BA$$
per il *commutatore delle matrici* A e B (che quindi commutano se e solo se $[A, B] = 0$). Ricordiamo che, ovviamente $[A, B] = -[B, A]$, e che lo spazio $M_n(\mathbb{R})$ è un'algebra di Lie rispetto al commutatore, cioè che vale l'identità di Jacobi:
$$[[A, B], C] + [[C, A], B] + [[B, C], A] = 0$$

15.3.6 Teorema (WEYL) *Se A e B sono matrici tali che*
$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$$
allora
$$e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]} e^A e^B$$

DIMOSTRAZIONE: (*Glauber*) Consideriamo la funzione
$$F(t) = e^{tA} e^{tB}$$
Allora
$$\frac{d}{dt} F(t) = (A + e^{tA} B e^{-tA}) F(t)$$

$(e^{-tA} = (e^{tA})^{-1})$. Ma le ipotesi su A e B sono che

$$[A,[A,B]]AAB - 2ABA + BAA = 0 \Rightarrow AAB + BAA = 2ABA$$

quindi $[B, A^2] = BAA - AAB = BAA + AAB - 2AAB = 2ABA - 2AAB = 2A[B, A]$. Per induzione:

$$[B, A^m] = mA^{m-1}[B, A]$$

e per conseguenza:

$$[B, e^{-tA}] = \sum_m \frac{(-t)^m}{m!}[B, A^m] = -te^{-tA}[B, A]$$

L'equazione differenziale precedente si scrive quindi come

$$\frac{d}{dt}F(t) = (A + B + t[A, B])F(t)$$

che, con la condizione $F(0) = I$, ammette la soluzione (tenendo conto del fatto che A e $[A, B]$ commutano e B e $[A, B]$ commutano):

$$F(t) = e^{t(A+B)+\frac{1}{2}t^2[A,B]} = e^{t(A+B)}e^{\frac{1}{2}t^2[A,B]}$$

Ma allora, per l'unicità delle soluzioni di un'equazione differenziale ordinaria con coefficienti analitici:

$$e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}e^{\frac{1}{2}t^2[A,B]}$$

e, in $t = 1$, la tesi del teorema.

QED

15.3.7 Corollario *Se* $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ *allora*

$$e^A e^B = e^{[A,B]}e^B e^A$$

Dimostrazione: Per il teorema, abbiamo:

$$e^{-\frac{1}{2}[A,B]}e^A e^B = e^{A+B} = e^{B+A} = e^{-\frac{1}{2}[B,A]}e^B e^A$$

Ma, per l'identità di Jacobi:

$$[[A, B], [B, A]] = -[[[B, A], A], B] - [[B, [B, A]], A] = 0$$

(per le ipotesi su A e B). Dunque

$$e^{[A,B]}e^{-[B,A]} = e^{[A,B]-[B,A]} = e^{2[A,B]}$$

e quindi

$$e^A e^B = e^{\frac{1}{2}[A,B]}e^{-\frac{1}{2}[B,A]}e^B e^A = e^{[A,B]}e^B e^A$$

QED

Il teorema precedente ci permette di esprimere, nelle ipotesi $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$, il prodotto di matrici esponenziali in termini della somma e del commutatore degli esponenti.

Abbiamo osservato che non ogni matrice invertibile è l'esponenziale di una matrice: consideriamo quindi delle condizioni affinché lo sia.

15.3.8 Proposizione *La mappa $e : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ è un diffeomorfismo locale.*

DIMOSTRAZIONE: Dobbiamo dimostrare che esistono degli intorni V di $0 \in M_n(\mathbb{R})$ e U di I in $GL_n(\mathbb{R})$ tali che e ristretta a V sia un diffeomorfismo, cioè un omeomorfismo differenziabile con inverso differenziabile: dimostreremo addirittura che è analitico.

Ovviamente e è una mappa analitica da $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ nell'aperto (denso) $GL_n(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$, visto che è determinata da una serie di potenze. Per dimostrare il nostro enunciato basterà dimostrare che, nel punto $0 \in M_n$, lo jacobiano di e è diverso da zero, ed invocare quindi il teorema della funzione inversa.

Ora, se $X = ((x_{ij}))$ e $e^X = A = ((a_{ij}))$, allora

$$\frac{\partial a_{kl}}{\partial x_{ij}} = \delta_{ki}\delta_{lj} + \cdots$$

dove i puntini indicano i termini che si annulanno in $X = 0$. Quindi la matrice jacobiana della mappa esponenziale ha la forma

$$\left(\left(\frac{\partial a_{kl}}{\partial x_{ij}}\right)\right) = ((\delta_{ki}\delta_{lj}))$$

che è una matrice unitaria di rango massimo, il che dimostra la tesi.

QED

Questo risultato fondamentale può essere ulteriormente precisato: possiamo cioè cercare di stimare gli intorni U e V nei quali e è un diffeomorfismo: per farlo scriviamo esplicitamente un inverso locale dell'esponenziale di matrici.

Ispirandoci al caso $n = 1$, consideriamo la serie logaritmica

$$(A - I) - \frac{(A - I)^2}{2} + ... + (-1)^{m+1}\frac{(A - E)^m}{m} + \cdots$$

Dato che la corrispondente serie numerica $\sum_m (-1)^{m+1} z^m/m$ converge per $|1 - z| < 1$, la serie logaritmica della matrice A converge assolutamente per $||A - I|| < 1$: osserviamo quindi che si ha convergenza nell'intorno U dell'I in $GL_n(\mathbb{R})$ individuato dal lemma 9.1.9. Quindi, se $A \in U$ possiamo definire $\ln A$ come la somma della serie logaritmica di A. Un calcolo del tutto analogo a quello per gli esponenziali mostra le proprietà elementari del logaritmo di matrici:

15.3.9 Proposizione *Se* $A, B \in U$ *e* $AB = BA$ *allora* $\ln(AB) = \ln A + \ln B$.

Ora notiamo che, se $A \in U$ allora ha senso considerare $e^{\ln A}$: si tratta proprio di A (basta sostituire formalmente le serie l'una nell'altra):

$$e^{\ln A} = A$$

Viceversa, se $||A|| < \ln 2$

$$\ln e^A = A$$

Il perché di questa limitazione è semplice: l'equazione $\ln e^A = A$ può infatti essere falsa anche se $||e^A - I|| < 1$; ad esempio se

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

allora ($A^{2n} = \begin{pmatrix} -t^{2n} & 0 \\ 0 & -t^{2n} \end{pmatrix}$ e $A^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & t^{2n+1} & 0 \\ -t^{2n+1} & 0 & \end{pmatrix}$):

$$e^A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

e quindi, per $t = 2\pi$: $e^A = I$, per cui $\ln e^A = 0 \neq A$. Il raggio di convergenza della serie $\ln e^A$ è $\ln 2$.

Osserviamo ora che la mappa esponenziale è suriettiva sullo spazio delle matrici complesse:

15.3.10 Teorema *Se* $X \in GL_n(\mathbb{C})$ *esiste una* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *tale che* $e^A = X$.

DIMOSTRAZIONE: Naturalmente, se X è diagonale a blocchi

$$X = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & D_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & D_m \end{pmatrix}$$

allora $e^X = \prod_k e^{D_k}$. Ora rammentiamo che ogni matrice si decompone in blocchi diagonali di Jordan:

$$X = \begin{pmatrix} C(\lambda_1) & 0 & ... & 0 \\ 0 & C(\lambda_2) & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & C(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

ove

$$C(\lambda_k) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_k & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_k & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

è una matrice $k \times k$ con l'autovalore λ_k di X sulla diagonale.

Supponiamo quindi che $X = C(\lambda)$ con $\lambda \neq 0$ (altrimenti $\det X = 0$). Quindi $X = \lambda I + Y = \lambda(I + \lambda^{-1}Y)$ ove Y ha non nulli solo gli elementi della i-sima riga e $(i-1)$-sima colonna uguali a λ; dato che Y è nilpotente ($Y^k = 0$) (quindi lo è $\lambda^{-1}Y$), pertanto la serie esponenziale è un polinomio, dunque possiamo definire

$$B = \ln(I + \lambda^{-1}Y)$$

e quindi

$$X = \lambda I + Y = \lambda e^B$$

Dato che $\lambda \neq 0$ esiste μ tale che $\lambda = e^\mu$, cioè

$$X = e^\mu I e^B = e^{\mu I + B}$$

e dunque $A = \mu I + B$ è la matrice cercata.

QED

Il calcolo delle matrici esponenziali è fondamentale nella teoria delle equazioni differenziali ordinarie: infatti un sistema di equazioni differenziali ordinarie può scriversi come:

$$\dot{y} = Ay + b$$

ove y è una funzione vettoriale e A una matrice. Allora la soluzione del sistema omogeneo associato $\dot{y} = Ay$ si ottiene per $y(t) = e^{tA}y_0$ ove y_0 rappresenta il vettore che contiene i dati iniziali. Infatti

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt}e^{tA}y_0 = Ae^{tA}y_0 = Ay(t)$$

Sappiamo che la mappa

$$t \longmapsto e^{tA}$$

è un gruppo ad un parametro, e sappiamo che tutti i gruppi ad un parametro sono di questo tipo (teorema di Stone 14.3.6) nel caso di matrici simmetriche ($A^T =$

A). Possiamo comunque utilizzare le proprietà dell'esponenziale in dimensione finita[3] per dimostrare il teorema di Stone in questo caso:

15.3.11 Teorema *Se $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ è un gruppo ad un parametro, esiste un'unica matrice A tale che per ogni $t \in \mathbb{R}$ $\rho(t) = e^{tA}$.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo un intorno V di 0 in $M_n(\mathbb{R})$ ed un intorno U di I in $GL_n(\mathbb{R})$ in modo che la mappa esponenziale ristretta a V sia un diffeomorfismo fra V ed U. Definiamo poi:

$$\psi(t) := \ln(\rho(t))$$

per quei $t \in \mathbb{R}$ tali che $\rho(t) \in U$ (l'insieme di questi t starà in un intorno T dello zero in $\mathbb{R}$). Allora, se $t \in T$ e $s \in T$ sono tali che $\rho(t+s) \in U$ si ha

$$\psi(t+s) = \ln(\rho(t+s)) = \ln(\rho(t)\rho(s)) = \ln(\rho(t)) + \ln(\rho(s)) = \psi(t) + \psi(s)$$

Dunque ψ è una funzione lineare in t e quindi è della forma

$$\psi(t) = tA$$

per una determinata matrice A, sicché

$$e^{\psi(t)} = \rho(t) = e^{tA}$$

per ogni $t \in T$.

Per ottenere il risultato per qualsiasi $t \in \mathbb{R}$ scriviamo un qualsiasi numero $x \in \mathbb{R}$ come $x = nt$ ove $t \in T$ e $n \in \mathbb{Z}$. Allora

$$\rho(x) = \rho(t)^n = (e^{tA})^n = e^{xA}$$

QED

15.4 Coordinate canoniche sui gruppi classici

Diamo una prima interessante applicazione dell'esponenziale di matrici, per determinare su ogni gruppo di matrici delle coordinate come nel caso del teorema 15.3.8.

Osserviamo intanto che i gruppi di matrici posseggono delle "coordinate" naturali per mezzo delle quali parametrizzare i loro elementi: le entrate delle

[3] Anche definendo in modo opportuno il concetto di "differenziabilità" nell'ambito infinito-dimensionale, può mostrarsi che la mappa esponenziale non è in quel caso un diffeomorfismo locale.

matrici stesse: a X associamo le coordinate $((x_{ij}))$; in altri termini abbiamo delle funzioni continue

$$x_{ij} : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

che all'elemento $X \in G$ associano l'elemento $x_{ij}(X)$ che figura nella sua i-sima riga e j-sima colonna. In generale l'insieme completo delle coordinate $\{x_{ij}\}$ sarà ridondante, poiché esistono delle relazioni che legano queste coordinate, espresse dalle equazioni che definiscono il gruppo: ad esempio, se il gruppo è $GL_n(\mathbb{R})$ abbiamo la relazione $\det X \neq 0$; nel caso di $O(n)$ abbiamo le relazioni $\sum_k x_{ik}x_{jk} = \delta_{ij}$: se possiamo estrarre dalle coordinate $\{x_{ij}\}$ un sottoinsieme di funzioni indipendenti allora otteniamo un *sistema di coordinate locali* nel senso proprio del termine; va precisato, ovviamente, il concetto di "indipendenza" di funzioni. In generale si può adottare la seguente definizione:

15.4.1 Definizione *Se X è uno spazio topologico, $x_0 \in X$ e $U \subset X$ è un aperto di X contenente il punto x_0, un insieme di funzioni $\{x_1, ..., x_n\}$:*

$$x_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

continue si dice sistema di coordinate locali *se la mappa $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$:*

$$u \longmapsto (x_1(u), ..., x_n(u))$$

è un omeomorfismo di U su un intorno aperto di 0 *in $\mathbb{R}^n$. In questo caso, la coppia $(U, x = (x_1, ..., x_n))$ si dice* carta locale *o* sistema di coordinate locali *di dimensione n.*

Le *coordinate* di un punto $u \in U$ sono $(x_1(u), ..., x_n(u))$. Naturalmente, su un gruppo topologico G, basta avere una carta locale (U, x) intorno all'elemento neutro e per averne una intorno ad ogni altro $g \in G$: se $L_g(h) = gh$ è la traslazione basti considerare $(L_g(U), x \circ L_{g^{-1}})$.

15.4.2 Esempio

- *Se $G = \mathbb{R}^n$ abbiamo ovviamente le coordinate vettoriali $(x_1, ..., x_n)$ associate ad una base fissata $(e_1, ..., e_n)$. Si noti che G può essere visto come gruppo di matrici: basta considerare le matrici diagonali in $M_n(\mathbb{R})$ i cui elementi siano gli esponenziali delle coordinate degli elementi di $\mathbb{R}^n$: precisamente, all'elemento $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $x_i(v) = v_i$, i.e. $v = \sum_i v_i e_i$, associamo la matrice*

$$\begin{pmatrix} e^{v_i} & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{v_2} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & e^{v_n} \end{pmatrix}$$

Allora, se A è una tale matrice, ponendo $x_i(A) = v_i$ otteniamo delle coordinate che realizzano un omeomorfismo di G con $\mathbb{R}^n$: in altri termini (G, x) stesso è una carta locale. In questo caso il prodotto di elementi di G è tale che

$$x_i(AB) = x_i(A) + x_i(b)$$

- *Il gruppo abeliano $\mathbb{T}^n = S^1 \times ... \times S^1$ si può parametrizzare con degli angoli $(t_1, ..., t_n)$, dato che i suoi elementi sono prodotti di numeri complessi della forma $e^{it_k} = \cos t_k + i \sin t_k$: ovviamente questa parametrizzazione è omeomorfa solo localmente, per intorni di un punto (in $\mathbb{R}^n$) di raggio minore di 2π, dato che $e^{i \sum_k t_k} = \prod_k e^{i(2\pi + t_k)}$. Consideriamo comunque n gruppi ad un parametro*

$$\gamma_1 : \mathbb{R} \longrightarrow U(1) \quad ... \quad \gamma_n : \mathbb{R} \longrightarrow U(1)$$

cioè curve continue tali che $\gamma_k(t + s) = \gamma_k(t)\gamma_k(s)$; sappiamo (teorema di Stone 14.3.6 oppure il fatto che $\widehat{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$) che tali gruppi sono della forma

$$\gamma_k(t) = e^{a_k t}$$

Quindi il prodotto del gruppo $\mathbb{T}^n$ determina ed è determinato dalla somma di vettori $(a_1, ..., a_n)$ in $\mathbb{R}^n$. Osserviamo che in questo caso non abbiamo delle coordinate globali, cioè l'aperto U nel quale sono definite non può coincidere con tutto G (questo caso si ha ovviamente solo se G è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$).

Vogliamo estendere la costruzione dell'ultimo esempio al caso di gruppi qualsiasi: in questo caso la non commutatività del gruppo rende insufficiente la sola somma in $\mathbb{R}^n$ nel descrivere il prodotto del gruppo: possiamo comunque utilizzare la topologia che i gruppi di matrici ereditano da $M_n(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^{n^2}$.

Consideriamo quindi l'algebra delle matrici $M_n(\mathbb{R})$: sappiamo che rispetto ad ogni norma è uno spazio di Banach: in particolare, rispetto alla norma

$$||A|| := n \max_{i,j} |a_{ij}|$$

è un'algebra di Banach: in particolare possiamo considerare in $M_n(\mathbb{R})$ la convergenza delle serie. Rammentiamo il lemma 9.1.9 che possiamo formulare come

15.4.3 Lemma *Se $X \in M_n(\mathbb{R})$ e $||X|| < 1$, allora la matrice $A = I + X$ è invertibile, cioè appartiene a $GL_n(\mathbb{R})$.*

Cioè le matrici A che verificano la condizione

$$||A - I|| < 1$$

per il lemma formano un intorno U della matrice I in $GL_n(\mathbb{R})$. A questo punto, per avere un intorno di una qualsiasi altra matrice $B \in GL_n(\mathbb{R})$ basta considerare $B \cdot U$ che è un intorno di B in quanto la moltiplicazione di matrici è C^∞. In questo modo abbiamo le coordinate locali sul gruppo: scriviamole in concreto. Sia B la matrice intorno alla quale vogliamo le coordinate. Allora, se $C = B^{-1} = ((c_{ij}))$ si pone:

$$\begin{cases} x_{ij}(A) & = \sum_{k=1}^n c_{ik} a_{kj} - \delta_{ij} \\ x_{ij}(B) & = 0 \end{cases}$$

Le coordinate $\{x_{ij}\}$ sono valide per ogni matrice A tale che

$$||A - B|| < ||B||$$

Abbiamo quindi determinato per il gruppo $GL_n(\mathbb{R})$ delle coordinate del tutto simili a quelle di $\mathbb{R}^n$, in un suo intorno U di I:

$$x_1, ..., x_{n^2} : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

date dalle entrate delle matrici $\ln A$ al variare di $A \in U$: $(U, \ln)$ risulta quindi una carta locale di dimensione n^2 per il gruppo $GL_n(\mathbb{R})$.

Vogliamo ora trovare delle carte locali per i gruppi classici: basta, per questo, determinare degli intorni di I in essi diffeomorfi, per tramite del logaritmo di matrici, a degli intorni di 0 in *qualche sottospazio di* $M_n(\mathbb{R})$: dobbiamo cioè determinare dei sottospazi vettoriali di $M_n(\mathbb{R})$ le cui coordinate parametrizzeranno i punti dei gruppi classici.

Fissiamo intanto l'intorno U di I in $GL_n(\mathbb{R})$ tale che ln sia un diffeomorfismo di U su un intorno V dello zero in $M_n(\mathbb{R})$.

15.4.4 Teorema *Se $U' = U \cap SL_n(\mathbb{R})$ allora* ln *è un diffeomorfismo fra U' e un intorno dello zero nello spazio delle matrici a traccia nulla.*

DIMOSTRAZIONE: Se $\operatorname{tr}(X) = 0$, consideriamo la curva

$$A(t) = e^{tX}$$

che è un gruppo a un parametro $(A(t+s) = A(t)A(s))$ e quindi, se $d(t) := \det A(t)$ si ha

$$d(t + s) = d(t)d(s)$$

sicché la funzione d è un gruppo a un parametro in $\mathbb{R}$, per cui deve esistere una costante c tale che $d(t) = e^{ct}$. Dimostriamo che $c = 0$. In effetti è

$$d(t) = \det e^{tX} = \det(1 + tX + o(t)) = t \operatorname{tr} X + o(t)$$

ove $o(t)$ è una matrice tale che $\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{o(t)}{t} = 0$. Allora l'ipotesi che $\operatorname{tr} X = 0$ implica che

$$c = \left(\frac{df}{dt}\right)_{t=0}$$

il che dimostra la tesi.

QED

Abbiamo quindi determinato una carta locale di $SL_n(\mathbb{R})$ data dalle coordinate dello spazio vettoriale

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} A = 0\}$$

che ha dimensione $n^2 - 1$.

15.4.5 Teorema *Se $U'' = U \cap O(n)$ (rispettivamente $U'' = U \cap U(n)$, $U'' = U \cap Sp(n)$) allora* ln *è un diffeomorfismo fra U'' e un intorno dello zero nello spazio delle matrici antisimmetriche (rispettivamente antihermitiane, antihermitiane quaternioniche). Per i gruppi speciali $SO(n)$, $SU(n)$ vale lo stesso enunciato rispetto alle matrici antisimmetriche speciali e antihermitiane speciali.*

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamolo solo nel caso di $O(n)$: negli altri due la dimostrazione è la stessa. Osserviamo che se X è antisimmetrica, i.e. $X + X^T = 0$ allora X e X^T commutano, e quindi

$$(e^X)^T e^X = e^{X^T + X} = e^0 = I$$

cioè $e^X \in O(n)$.

QED

Gli spazi delle matrici antisimmetriche, antihermitiane e antihermitiane quaternioniche si denotano con

$$\mathfrak{so}(n)\,, \qquad \mathfrak{su}(n)\,, \qquad \mathfrak{sp}(n)$$

Consideriamo di nuovo l'esempio del gruppo $\mathbb{T}^n$ considerato in precedenza: possiamo realizzarlo come toro massimale T^n in ciascuno dei gruppi classici compatto $SO(n)$, $SU(n)$ e $Sp(n)$; allora è ovvio che su T^n la mappa esponenziale è suriettiva (ogni suo elemento è un esponenziale di un numero reale) e non iniettiva: in effetti la mappa esponenziale da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{T}^n$ è esattamente la mappa che realizza il quoziente

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = \mathbb{T}^n$$

Ma ogni elemento di un gruppo classico compatto è coniugato ad un elemento di un suo toro massimale, quindi

15.4.6 Teorema *La mappa esponenziale è suriettiva dallo spazio $\mathfrak{so}(n)$ delle matrici antisimmetriche (rispettivamente $\mathfrak{su}(n)$, $\mathfrak{sp}(n)$) nel gruppo $SO(n)$ (rispettivamente $SU(n)$, $Sp(n)$).*

Abbiamo fin qui considerato gruppi di matrici, ed abbiamo mostrato come, nei nostri esempi, questi gruppi possiedano oltre alla struttura di gruppo topologico, anche una struttura "localmente euclidea": infatti abbiamo determinato delle carte locali su essi, quindi degli omeomorfismi locali con $\mathbb{R}^n$. Abbiamo inoltre visto il legame esistente fra le coordinate e il prodotto nel gruppo, per tramite della mappa esponenziale.

In generale, se G è un gruppo di matrici che possiede per ogni suo punto delle coordinate (basta che le possieda intorno all'I) le sue *coordinate canoniche* sono le coordinate $(x_1, ..., x_m)$ definite come segue: consideriamo la mappa esponenziale ed un intorno U di I diffeomorfo tramite essa ad un intorno V di 0 in un sottospazio $\mathfrak{g}$ (di dimensione m) dello spazio delle matrici $M_n(\mathbb{R})$. Se $(e_1, ..., e_m)$ è una base dello spazio vettoriale $\mathfrak{g}$, possiamo scrivere, per ogni $A \in \mathfrak{g}$:

$$A = \sum_{k=1}^{m} a_k e_k$$

Se $g \in U$, $\ln g \in V$ e scriviamo

$$\ln g = \sum_{k=1}^{m} x_k(g) e_k$$

In questo modo determiniamo delle coordinate x_i su G che si dicono canoniche. Viceversa, se consideriamo un elemento $A \in \mathfrak{g}$ qualsiasi, esisterà certo un $t > 0$ tale che $tA \in V$. Quindi $e^{tA} \in U \subset G$. Se $A, B \in \mathfrak{g}$, possiamo moltiplicare e^{tA} e e^{tB} rispetto al prodotto in G: dato che il prodotto è continuo, possiamo scrivere

$$e^{tA} e^{tB} = e^{tC}$$

Naturalmente C dipende da A e B, e riuscendo ad esprimerlo in termini di A e B otterremmo un legame completo fra le coordinate ed il prodotto: per il calcolo effettivo di C per mezzo della serie di Campbell–Hausdorff, si rimanda a [26], [27] o [22]. Limitiamoci qui a dare delle approssimazioni per questo elemento C.

15.4.7 Proposizione *Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora*

$$e^{A+B} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{n}A} e^{\frac{1}{n}B} \right)^n \tag{1}$$

$$e^{[A,B]} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{n}A} e^{\frac{1}{n}B} e^{-\frac{1}{n}A} e^{-\frac{1}{n}B} \right)^{n^2} \tag{2}$$

Dimostrazione: Utilizziamo l'identità di Weyl 15.3.6 e il suo corollario. Notiamo infatti che, per ogni A, B:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}[\frac{1}{n}A,[\frac{1}{n}A,\frac{1}{n}B]] = \lim_{n\longrightarrow\infty}[\frac{1}{n}B,[\frac{1}{n}A,\frac{1}{n}B]] = 0$$

e dunque le ipotesi per applicare queste formule sono verificate al limite per $n \longrightarrow \infty$. Quindi:

$$e^{A+B} = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(e^{\frac{A}{n}+\frac{B}{n}}\right)^n = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(e^{-\frac{1}{2}[\frac{A}{n},\frac{B}{n}]}e^{\frac{A}{n}}e^{\frac{B}{n}}\right)^n = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(e^{\frac{A}{n}}e^{\frac{B}{n}}\right)^n$$

dato che $-\frac{1}{2n^2}[A,B]$ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\frac{A}{n}$ e $\frac{B}{n}$), il che prova la (1). Per la (2) si noti che, per il corollario all'identità di Weyl:

$$e^{[A,B]} = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(e^{[\frac{A}{n},\frac{B}{n}]}\right)^{n^2} = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(e^{\frac{A}{n}}e^{\frac{B}{n}}e^{-\frac{A}{n}}e^{-\frac{B}{n}}\right)^{n^2}$$

cioè la (2).

QED

Usando questa proposizione possiamo scrivere

$$e^{tA}e^{tB} = e^{tA+tB+\frac{1}{2}t^2[A,B]+O(t^3)}$$

ed ottenere così una approssimazione al secondo ordine per la funzione C.

15.5 Varietà differenziabili

La presenza di carte locali intorno ad ogni punto di uno spazio topologico rende quest'ultimo un oggetto geometrico sul quale è possibile sviluppare il calcolo differenziale: non ci addentreremo in questi sviluppi, ma diamo, motivati dagli esempi dei gruppi classici, una fondamentale

15.5.1 Definizione *Una* varietà differenziabile *è uno spazio topologico tale che ogni suo punto possieda una carta locale (U, x) di dimensione n (cioè un omeomorfismo x di U su un aperto di $\mathbb{R}^n$) in modo che, se (U, x) e (V, y) sono carte locali e $U \cap V \neq \emptyset$ allora la funzione definita da un aperto di $\mathbb{R}^n$ ed a valori in $\mathbb{R}^n$*

$$y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \longrightarrow y(U \cap V)$$

*è infinitamente differenziabile (*condizione di compatibilità per carte locali*).*

In altri termini una varietà differenziabile non solo è localmente omeomorfa a $\mathbb{R}^n$, ma i "cambiamenti di coordinate" fra una carta e l'altra sono effettuati da funzioni differenziabili.

Il numero n si dice *dimensione della varietà*. Ovviamente l'insieme degli intorni U dati dalle carte locali è un ricoprimento della varietà: quindi se la varietà, come spazio topologico, è compatta, possiamo considerare sempre un insieme finito di carte su essa.

Gli esempi di varietà pervadono la Matematica moderna e non possiamo dare qui nemmeno i rudimenti della teoria: ci limitiamo a citare i più ovvi. Intanto $\mathbb{R}^n$ con le coordinate vettoriali è una varietà differenziabile[4], come pure lo sono $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{H}^n$.

15.5.2 Esempio

- *Ovviamente $\mathbb{R}^n$ rispetto alla singola carta data dalla mappa identica $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è una varietà differenziabile.*

- *Un aperto U di una varietà differenziabile V è ancora una varietà differenziabile rispetto alla carta identica $U \longrightarrow U$. Ad esempio, dato che $M_n(\mathbb{R})$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^{n^2}$ è una varietà per l'esempio (1), come pure è una varietà $GL_n(\mathbb{R})$ che è l'aperto $\{\det(A) \neq 0\}$ in $M_n(\mathbb{R})$.*

- *Un modo diretto di notare che $GL_n(\mathbb{R})$ è una varietà è rammentare il teorema 15.3.8: esiste un intorno dell'origine nello spazio vettoriale M_n tale che, ristretta a questo intorno, e è un diffeomorfismo su un intorno dell'identità di $GL_n(\mathbb{R})$. Quindi il suo inverso costituisce una carta intorno all'identità della varietà $GL_n(\mathbb{R})$, e questo introduce delle coordinate privilegiate su $GL_n(\mathbb{R})$ che si dicono canoniche.*

- *I teoremi 15.4.4 e 15.4.5 ci dicono che $SL_n(\mathbb{R})$, $O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$, $SO(n)$ e $SU(n)$ sono varietà differenziabili: infatti queste proposizioni forniscono delle carte locali intorno agli elementi neutri di questi gruppi, e, per moltiplicazione, queste carte danno luogo a carte locali intorno ad ogni elemento del gruppo.*

Diamo ora due classi di esempi non banali di varietà (che contengono i casi $U(1) = S^1$, $SU(2) = S^3$ e $SO(3) = \mathbb{RP}^3$):

15.5.3 Esempio *Le sfere*

$$S^n = \{(x_0, x_1, ..., x_n) \,|\, x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

sono varietà differenziabili. Consideriamo il punto $N = (1, 0, ..., 0)$ (il "polo nord"); se $P = (p_0, p_1, ..., p_n) \in S^n$ è un qualsiasi altro punto allora possiamo

[4] Notiamo che uno spazio vettoriale di dimensione infinita non è una varietà secondo la nostra definizione.

considerare la retta per P e N, le cui equazioni cartesiane sono

$$\frac{x_0 - 1}{p_0 - 1} = \frac{x_1}{p_1} = \cdots = \frac{x_n}{p_n}$$

Questa retta interseca il piano $x_0 = 0$ nel punto $f(P)$ di coordinate

$$f(P) = (0, \frac{p_1}{1 - p_0}, \frac{p_2}{1 - p_0}, ..., \frac{p_n}{1 - p_0})$$

(proiezione stereografica di P). Questa funzione $f : S^n \setminus \{N\} \longrightarrow \{x_0 = 0\}$ risulta essere un omeomorfismo dall'aperto $S^n \setminus \{N\} \subset S^n$ allo spazio cartesiano $(n-1)$-dimensionale $\{x_0 = 0\} = \{(0, x_1, ..., x_n)\} \cong \in\mathbb{R}^{n-1}$.

In modo analogo, se togliamo a S^n il "polo nord" $S = (-1, 0, ..., 0)$, possiamo costruire un altro omeomorfismo $g : S^n \setminus \{S\} \longrightarrow \{x_0 = 0\}$:

$$g(P) = (0, \frac{p_1}{1 + p_0}, \frac{p_2}{1 + p_0}, ..., \frac{p_n}{1 + p_0})$$

Sull'intersezione $S^n \setminus \{N, S\}$ entrambe le funzioni f e g sono definite e sono omeomorfismi sull'aperto $\{x_0 = 0\} \setminus \{(0, 0, ..., 0)\}$; calcoliamo allora

$$g \circ f^{-1}(0, t_1, ..., t_n) = g(p_0, p_1, ..., p_n)$$

dove $(p_0, p_1, ..., p_n)$ si ottiene intersecando la retta per N e $(0, t_1, ..., t_n)$ con la sfera S^n:

$$1 - p_0 = \frac{p_1}{t_1} = \cdots = \frac{p_1}{t_1}, \qquad p_0^2 + p_1^2 + \cdots + p_n^2 = 1$$

Se poniamo $\alpha := p_1^2 + \cdots + p_n^2$ troviamo allora

$$p_0^2(1 + \alpha) - 2p_0\alpha + (\alpha - 1) = 0$$

quindi (la soluzione $p_0 = 0$ viene ovviamente scartata):

$$p_0 = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}, p_1 = \frac{2t_1}{1 + \alpha}, \ldots, p_n = \frac{2t_n}{1 + \alpha}$$

Quindi la funzione $g \circ f^{-1}$ vale su un punto di $\{x_0 = 0\} \setminus \{(0, 0)\}$:

$$\begin{aligned} g \circ f^{-1}(0, t_1, ..., t_n) &= g(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}, \frac{2t_1}{1 + \alpha}, ..., \frac{2t_n}{1 + \alpha}) \\ &= (0, \frac{t_1}{\alpha}, ..., \frac{t_n}{\alpha}) \end{aligned}$$

ed è dunque un omeomorfismo infinitamente differenziabile.

15.5.4 Esempio *Lo spazio proiettivo $\mathbb{RP}^n$ è una varietà differenziabile: rammentiamo che si tratta dell'insieme delle rette per l'origine di $\mathbb{R}^{n+1}$. Possiamo rappresentare un punto $p \in \mathbb{RP}^n$ con le sue coordinate omogenee $p = [p_0 : p_1 : \cdots : p_n]$ dove non tutti i numeri reali $p_0, p_1, ..., p_n$ sono nulli.*

Definiamo per ogni $i = 0, ..., n$ gli aperti

$$U_n = \{p \in \mathbb{RP}^n \,|\, p_i \neq 0\}$$

e le funzioni $f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definite come

$$f_i(p) = (\frac{p_0}{p_i}, ..., \frac{p_{i-1}}{p_i}, \frac{p_{i+1}}{p_i}, ..., \frac{p_n}{p_i})$$

È ovvio che si tratta di carte locali: dimostriamo che su $U_i \cap U_j$ vale la condizione di compatibilità, precisamente calcoliamo

$$f_i \circ f_j^{-1}(p_1, ..., p_n)$$

dove $(p_1, ..., p_n) \in f_j(U_i \cap U_j)$: quest'ultimo è l'insieme dei punti $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tali che $x_j \neq 0$. Allora

$$\begin{aligned} f_i \circ f_j^{-1}(p) &= f_i([p_1 : \cdots : p_{j-1} : 1 : p_{j+1} : \cdots : p_n]) \\ &= \begin{cases} (\frac{p_1}{p_i}, ..., \frac{p_{i-1}}{p_i}, \frac{p_{i+1}}{p_i}, ..., \frac{p_{j-1}}{p_i}, \frac{p_{j+1}}{p_i} ..., \frac{p_n}{p_i}) & \text{se } i < j \\ (\frac{p_1}{p_i}, ..., \frac{p_{j-1}}{p_i}, \frac{p_{j+1}}{p_i}, ..., \frac{p_{i-1}}{p_i}, \frac{p_{i+1}}{p_i} ..., \frac{p_n}{p_i}) & \text{se } i \geq j \end{cases} \end{aligned}$$

e quindi $f_i \circ f_j^{-1}$ è un omeomorfismo differenziabile.

Dato che le coordinate locali sono omeomorfismi locali con $\mathbb{R}^n$, le proprietà locali di $\mathbb{R}^n$ sono godute anche dalle varietà differenziabili:

15.5.5 Teorema *Una varietà differenziabile è localmente compatta, localmente connessa e localmente semplicemente connessa. In particolare ammette compattificazione di Alexandroff e, se è connessa, un unico rivestimento universale.*

Non è invece detto che una varietà sia paracompatta: è comunque una condizione molto naturale e utile da imporre, dato che implica l'esistenza di partizioni dell'unità (cfr. teorema 2.3.5) differenziabili, per mezzo delle quali molte costruzioni fondamentali non potrebbero effettuarsi (ad esempio i tensori metrici).

Per una varietà, la paracompattezza equivale a proprietà topologiche molto importanti.

15.5.6 Teorema *Se M è una varietà differenziabile di Hausdorff allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- *M è paracompatta.*
- *M è σ-compatta (è unione di una famiglia numerabile di compatti).*
- *M è di Lindelöf (ogni ricoprimento aperto possiede un sottoricoprimento numerabile).*
- *Esiste una funzione propria continua $\varphi : M \longrightarrow (0, \infty)$.*
- *M è a base numerabile.*

DIMOSTRAZIONE: L'equivalenza delle (1)–(4) segue dall'essere M localmente compatta di Hausdorff e dal lemma 2.3.8. D'altronde ogni spazio topologico a base numerabile è di Lindelöf, quindi non resta che dimostrare il viceversa. Dato che M è una varietà possiede un ricoprimento di carte locali, dal quale se ne può estrarre uno numerabile: ma ogni elemento di questo ricoprimento numerabile è un intorno U omeomorfo a un intorno di $\mathbb{R}^n$, quindi possiede una base numerabile. L'unione numerabile dell'unione numerabile degli elementi di questa base è la base numerabile di M cercata.

QED

15.5.7 Esempio *Consideriamo la* varietà di Calabi–Rosenlicht*: si tratta dell'insieme*

$$X = \{x = 0\} \cup \{z = 0\} \cup \bigcup_{a \in \mathbb{R}} U_a \qquad \text{ove } U_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0 \text{ oppure } y = a\}$$

(unione dei piani Oyz, Oxy e del piano Oxy cui sia stata rimossa la retta $\{x = 0\}$ ed aggiunta la retta $\{x = 0,\, y = a\} \subset \mathbb{R}^3$.)

Definiamo le funzioni $f_a : U_a \longrightarrow \mathbb{R}^2$ come

$$f_a(x, y, z) = \begin{cases} (x, \frac{y-a}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ (0, z) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Si tratta ovviamente di un omeomorfismo su $\mathbb{R}^2$; verifichiamo ora la condizione di compatibilità su $U_a \cap U_b$:

$$f_a \circ f_b^{-1}(t, s) = (t, s + \frac{b-a}{t})$$

che è ovviamente differenziabile.

La varietà così costruita è, come spazio topologico, di Hausdorff e connesso, ma non paracompatto: infatti non soddisfa nessuna delle proprietà del teorema precedente: ad esempio non è σ-compatta, come si vede facilmente.

Nel teorema precedente abbiamo supposto che M sia di Hausdorff perché questo non è vero in generale per una varietà: comunque gli esempi di varietà non di Hausdorff sono poco interessanti.

15.5.8 Esempio *Nel piano* $\mathbb{R}^2$ *consideriamo l'insieme* $(\mathbb{R}\setminus\{0\})\cup\{(0,1),(0,-1)\}$, *ed i suoi sottoinsiemi aperti* $U=(\mathbb{R}\setminus\{0\})\cup\{(0,1)\}$ *e* $V=(\mathbb{R}\setminus\{0\})\cup\{(0,1)\}$, *con le funzioni* $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ *e* $g:V\longrightarrow\mathbb{R}$ *definite come*

$$f(x,y)=\begin{cases}x & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}\qquad g(x,y)=\begin{cases}x & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

Evidentemente si tratta di due carte locali e, se $t\in f(U\cap V)=\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$ *e* $s\in g(U\cap V)=\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$ *troviamo*

$$g\circ f^{-1}(x)=g(x,0)=x\qquad e\qquad f\circ g^{-1}(x)=f(x,0)=x$$

quindi la condizione di compatibilità è verificata. Comunque la varietà così ottenuta non è di Hausdorff, dato che $(0,1)$ *e* $(0,-1)$ *non possono essere separati da nessuna coppia di intorni disgiunti.*

La morale della discussione precedente è: *supporremo che le nostre varietà siano di Hausdorff paracompatte.*

15.5.9 Definizione *Se* M *e* N *sono varietà differenziabili di dimensioni* m *e* n, *una funzione* $f:M\longrightarrow N$ *si dice* differenziabile *se, per ogni carta locale* (U,x) *in* M *e* (V,y) *in* N *la funzione*

$$y\circ f\circ x^{-1}:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^n$$

è differenziabile. L'insieme delle funzioni differenziabili da M *in* N *si denota* $C^\infty(M,N)$*; se* $N=\mathbb{R}$ *si scrive semplicemente* $C^\infty(M)$.

Una funzione differenziabile è in particolare continua. Ad esempio una carta locale è una funzione differenziabile per definizione.

Rispetto alle funzioni differenziabili le varietà formano ovviamente una categoria, i cui isomorfismi si dicono *diffeomorfismi* (sono cioè le funzioni biunivoche differenziabili con inversa differenziabile).

Osserviamo che due varietà possono essere omeomorfe ma non diffeomorfe: cioè possono esistere strutture distinte di varietà differenziabile sul medesimo spazio topologico[5].

[5]Un famoso risultato di J. Milnor mostra l'esistenza di strutture differenziabili "alternative" sulla sfera S^7: risultati più recenti e spettacolari mostrano l'esistenza di strutture differenziabili "esotiche" sullo spazio $\mathbb{R}^4$, cfr Donaldson–Kronheimer *The Geometry of 4-manifolds*, Oxford.

Capitolo 16

GRUPPI E ALGEBRE DI LIE

I gruppi di matrici, ai quali abbiamo dedicato spazio perché si tratta dei gruppi che governano la fisica delle particelle, sono gli esempi classici dei gruppi di Lie: questi ultimi vengono di solito definiti in Geometria Differenziale come importanti esempi di varietà differenziabili (cfr. ad esempio [17]). Qui vogliamo invece introdurli come una notevole classe di esempi di gruppi topologici. In particolare non useremo il concetto di fibrato tangente, ma la trattazione delle algebre di Lie associate ai gruppi sarà data in uno spirito più algebrico, anziché nel modo usuale: questo, crediamo, renderà interessante la trattazione anche a chi già conosce queste nozioni per via geometrica.

16.1 Gruppi di Lie

Abbiamo visto come $GL_n(\mathbb{R})$ sia una varietà in quanto è un aperto di una varietà: anche gli altri gruppi classici sono varietà differenziabili, anzi sono molto di più:

16.1.1 Definizione *Un gruppo topologico G si dice* gruppo di Lie *se ammette una struttura di varietà differenziabile in modo che il prodotto $(g,h) \longmapsto gh$ e l'inverso $g \longmapsto g^{-1}$ siano funzioni differenziabili.*

Si può dimostrare (teorema di Pontriagin) che un gruppo di Lie possiede sempre coordinate non solo differenziabili, ma anche analitiche: lo assumeremo sempre nel seguito (per la dimostrazione si può vedere [26]).

Dimostriamo piuttosto che su ogni gruppo di Lie esiste una misura di Haar, ma prima diamo una

16.1.2 Definizione *Se M è una varietà differenziabile e μ una misura di Radon su X, diciamo che μ è una* misura differenziabile *se per ogni carta locale* (U, x)

della varietà esiste una funzione continua (positiva) $\varphi_U : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *tale che, per ogni insieme misurabile* $E \subset U$*:*

$$\mu(E) = \int_E \varphi_U(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n$$

(ove con $dx_1...dx_n$ *indichiamo la misura di Lebesgue in* $\mathbb{R}^n$*) e tale che se* U *e* V *sono carte locali tali che* $U \cap V \neq \emptyset$ *allora*

$$\varphi_V(y) = \left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| \varphi_U(x)$$

ove abbiamo indicato lo Jacobiano in $U \cap V$ *con*

$$\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| = \det\left(\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)\right)$$

La scelta di una tale funzione φ_u per ogni carta locale spesso si dice *forma di volume* sulla varietà differenziabile: le varietà per le quali questa scelta è possibile si dicono *orientabili*. I gruppi di Lie rientrano in questa classe[1]:

16.1.3 Teorema (HURWITZ) *Su un gruppo di Lie esiste un'unica (a meno di un fattore di scala) misura invariante.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo un gruppo di Lie G e due carte locali (U, x) e (V, y) in G tali che $g \cdot U \subset V$ per qualche $g \in G$: perché una forma di volume sia associata ad una misura invariante è necessario che

$$(*) \qquad \varphi_V(gh)\left|\frac{\partial x(g)}{\partial x(h)}\right| = \varphi_U(h)$$

Fissiamo ora $h \in U$ e moltiplichiamo per un fattore costante in modo da avere $\varphi(h) = 1$: allora ogni forma invariante deve essere,

$$(**) \qquad \varphi_V(gh) = \left|\frac{\partial x(g)}{\partial x(h)}\right|^{-1}$$

perché la (*) sia vera. Questo dimostra che, se una forma di volume esiste, allora è unica a meno di un fattore di scala. Ma la (**) può essere usata proprio per definire una tale forma in gh.

QED

[1]In realtà godono di una proprietà ben più forte: sono parallelizzabili, cfr. [17].

Ovviamente $GL_n(\mathbb{R})$ è un gruppo di Lie, dato che prodotto e inverso sono espressi da funzioni polinomiali e razionali, quindi analitiche. Non è così immediato dimostrare che gli altri gruppi classici sono gruppi di Lie: per farlo usiamo un procedimento generale che coinvolge la trasformata di Cayley.

16.1.4 Definizione *Un* omomorfismo di gruppi di Lie *è una funzione differenziabile fra essi che sia anche un omomorfismo di gruppi. Un* isomorfismo di gruppi di Lie *è un isomorfismo di gruppi che sia un diffeomorfismo di varietà differenziabili.*

In particolare un omomorfismo di gruppi è un omomorfismo di gruppi topologici. Possiamo anche definire i sottogruppi di Lie, sebbene possano avere in generale un comportamento bizzarro.

16.1.5 Esempio *Si consideri il gruppo $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$; se consideriamo il sottogruppo di $\mathbb{R}^2$ dato da una retta R passante per l'origine, questo induce sempre sul quoziente $\mathbb{T}^2$ un sottogruppo di Lie: in particolare, se R è una retta che forma un angolo irrazionale con l'asse delle ascisse, ad esempio, allora il sottogruppo indotto in $\mathbb{T}^2$ sarà una curva ergodica, cioè denso in $\mathbb{T}^2$, pur essendo un sottogruppo di dimensione 1.*

Diamo ora una procedura generale per dimostrare che certi gruppi di matrici sono gruppi di Lie.

16.1.6 Definizione *Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ si dice* regolare *se* $\det(A+I) \neq 0$*; se A è regolare, la matrice*

$$A^\# := (I - A)(I + A)^{-1}$$

si dice trasformata di Cayley *di A.*

L'insieme $R_n(\mathbb{R})$ delle matrici regolari è un aperto denso in $M_n(\mathbb{R})$ e quindi è una varietà differenziabile.

16.1.7 Lemma *La funzione $A \longmapsto A^\#$ è un diffeomorfismo di $R_n(\mathbb{R})$ in sé ed è involutivo: $A^{\#\#} = A$.*

Dimostrazione: Sia $B = A^\#$; allora

$$I + B = I + (I - A)(I + A)^{-1} = ((I + A)(I - A))(I + A)^{-1} = 2(I - A)^{-1}$$

e, analogamente

$$I - B = 2A(I + A)^{-1}$$

Quindi $\det(I + B) \neq 0$ e

$$B^\# = (I - B)(I + B)^{-1} = A$$

Che la mappa $A \longmapsto A^\#$ sia differenziabile è ovvio.

QED

16.1.8 Teorema *Un gruppo di matrici G tale che le trasformate di Cayley delle sue matrici regolari sia un aperto in uno spazio vettoriale di matrici M è un gruppo di Lie.*

DIMOSTRAZIONE: Dato che le trasformate di Cayley di $G \cap R_n(\mathbb{R})$ formano uno spazio vettoriale, la mappa $A \longmapsto A^\#$ può vedersi come un sistema di coordinate locali sull'aperto delle matrici regolari in G (che ovviamente è un intorno di I); così abbiamo un sistema di coordinate intorno ad ogni matrice $C \in G$, considerando l'insieme delle matrici della forma AC con $A \in G \cap R_n(\mathbb{R})$ e la mappa $AC \longmapsto A^\#$: per vedere che G è una varietà differenziabile non resta quindi che verificare che il cambiamento di coordinate fra queste carte è differenziabile. Ma, se $C_1, C_2 \in G$, le carte locali intorno ad essi sono formate dai prodotti A_1C_1 e A_2C_2; se esiste un punto in comune a questi due intorni allora $A_1C_1 = A_2C_2$ e quindi le coordinate sono $A_1^\#$ e $A_2^\#$ e sono, per definizione, funzioni razionali nelle entrate delle matrici A_1 e A_2, quindi la loro composizione è certamente differenziabile. Infine, la trasformata di Cayley del prodotto di matrici è una funzione razionale nelle entrate delle matrici stesse, quindi differenziabile. Ne segue che G è un gruppo di Lie.

QED

16.1.9 Esempio *Se $A \in O(n)$ è una matrice ortogonale e $B = A^\#$, allora*

$$\begin{aligned} B^T =&(I + A^T)^{-1}(I - A^T) = (I + A^{-1})^{-1}(I - A^{-1}) \\ =&(I + A^{-1})^{-1}A^{-1}A(I - A^{-1}) = (A(I + A^{-1}))^{-1}(A - I) \\ =&(A + I)^{-1}(A - I) = -(I - A)(I + A)^{-1} = -B \end{aligned}$$

cioè $B + B^T = 0$, i.e. $B \in \mathfrak{so}(n)$. Viceversa, un conto analogo mostra che, se $B \in \mathfrak{so}(n)$ allora $A^T = A^{-1}$ i.e. $A \in O(n)$. In altri termini le matrici ortogonali regolari sono esattamente le trasformate di Cayley delle matrici antisimmetriche.

Un ragionamento analogo vale per i gruppi unitario e simplettico (considerando matrici regolari complesse e quaternioniche), così come per i loro sottogruppi speciali. Quindi

16.1.10 Corollario *I gruppi di matrici $O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$, $SO(n)$ e $SU(n)$ sono gruppi di Lie.*

Notiamo che gli spazi vettoriali delle coordinate dei gruppi classici compatti sono *algebre di Lie*. Ricordiamo che un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è uno spazio vettoriale (su un campo fissato: nel nostro caso $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) fornito di una mappa bilineare

$$\mathfrak{l} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

che scriviamo $[X,Y] = \mathfrak{l}(X,Y)$ che sia anticommutativo e verifichi l'identità di Jacobi:

$$[X,Y]+[Y,X] = 0$$
$$[[X,Y],Z] + [[Z,X],Y] + [[Y,Z],X] = 0$$

16.1.11 Esempio

- *L'algebra delle matrici $M_n(\mathbb{R})$ rispetto al commutatore*

$$[A,B] = AB - BA$$

  è un'algebra di Lie.

- *In generale, se $\mathcal{A}$ è un'algebra associativa (ad esempio un'algebra di Banach), porre $[A,B] = AB - BA$ la rende un'algebra di Lie: ovviamente se $\mathcal{A}$ è pure commutativa, la struttura di Lie che si ottiene è banale (cioè nulla).*

L'algebra di Lie degli operatori lineari di uno spazio vettoriale V rispetto al commutatore $[F,G] = FG - GF$ si denota $\mathfrak{gl}(V)$.

Ora è immediato che, se $A, B \in \mathfrak{so}(n)$, allora

$$\begin{aligned}[A,B] + [A,B]^T =& AB - BA - B^T A^T + A^T B^T = AB - A^T B - BA + BA^T \\ =& (A - A^T)B - B(A + A^T) = 0\end{aligned}$$

Quindi $\mathfrak{so}(n)$ è un'algebra di Lie (analogamente lo sono $\mathfrak{su}(n)$ e $\mathfrak{sp}(n)$). Inoltre, per le identità di Weyl, il prodotto del gruppo $SO(n)$ è legato al commutatore dell'algebra $\mathfrak{so}(n)$ dalla formula

$$e^A e^B (e^A)^{-1} (e^B)^{-1} = e^{[A,B]}$$

a meno di termini superiori al secondo.

16.2 Funtore di Lie

Consideriamo una costruzione che permette di definire algebre di Lie a partire da algebre date qualsiasi (non necessariamente associative): se $\mathcal{A}$ è un'algebra qualsiasi, consideriamo lo spazio $\mathrm{End}(\mathcal{A})$ degli operatori lineari di $\mathcal{A}$ in sé: si tratta di un'algebra associativa rispetto alla composizione di endomorfismi. Sia $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ il sottospazio vettoriale degli elementi $D \in \mathrm{End}(\mathcal{A})$ tali che

$$D(ab) = D(a)b + aD(b)$$

Gli elementi di $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ si dicono *derivazioni* dell'algebra $\mathcal{A}$.

16.2.1 Proposizione Der($\mathcal{A}$) *è un'algebra di Lie.*

DIMOSTRAZIONE: Basta definire il commutatore come

$$[D, D'](a) = D(D'(a)) - D'D((a))$$

Allora $[D, D'] \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$:

$$\begin{aligned}[D, D'](ab) =& D(D'(a)b) + D(aD'(b)) - D'(D(a)b) - D'(aD(b))\\ =& D(D'(a))b + D'(a)D(b) + D(a)D'(b) + aD(D'(b)) -\\ & - D'(D(a))b - D(a)D'(b) - D'(a)D(b) - aD'(D(b))\\ =& (D(D'(a)) - D'(D(a)))b + a(D(D'(b)) - D'(D(b)))\\ =& [D, D'](a)b + a[D, D'](b)\end{aligned}$$

Che [.] definisca una struttura di algebra di Lie si verifica allo stesso modo che per le parentesi $[A, B] = AB - BA$ su $M_n(\mathbb{R})$.

QED

16.2.2 Esempio *Se* $\mathfrak{g}$ *è un'algebra di Lie,* Der($\mathfrak{g}$) *è l'algebra di Lie degli operatori lineari* $D : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ *tali che*

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY]$$

Se consideriamo quindi la rappresentazione aggiunta *di* $\mathfrak{g}$ *su se stessa, cioè la mappa lineare*

$$\begin{aligned}\mathrm{ad} : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g})\\ X &\longrightarrow (Y \longrightarrow \mathrm{ad}_X Y = [X, Y])\end{aligned}$$

l'identità di Jacobi in $\mathfrak{g}$ *vuol dire che* ad_X *è una derivazione per ogni* $X \in \mathfrak{g}$.

16.2.3 Definizione *Se* $\mathfrak{g}$ *è un'algebra di Lie, una* rappresentazione *di* $\mathfrak{g}$ *è un omomorfismo di algebre di Lie*

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

Un omomorfismo fra le algebre di Lie $\mathfrak{g}$ *e* $\mathfrak{h}$ *è un operatore lineare* $F : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ *tale che*

$$F[X, Y] = [FX, FY]$$

rispetto ai commutatori di $\mathfrak{g}$ *e* $\mathfrak{h}$.

Prima di continuare la discussione sulle algebre di Lie, vediamo il motivo per il quale le abbiamo introdotte.

Se M è una varietà differenziabile, possiamo considerare l'algebra $C^\infty(M)$ delle funzioni differenziabili da M in $\mathbb{R}$: si tratta di un'algebra rispetto alla moltiplicazione punto per punto:

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

È quindi un'algebra commutativa e associativa: si tratta una sottoalgebra associativa dell'algebra di Banach $C(M)$ delle funzioni continue sullo spazio topologico M a noi ben nota, ma non una sottoalgebra di Banach: sappiamo infatti che lo spazio $C^\infty(M)$ è solo uno spazio di Fréchet.

Possiamo comunque considerare le derivazioni dell'algebra $C^\infty(M)$:

16.2.4 Definizione *Un* campo di vettori *su una varietà differenziabile M è una derivazione dell'algebra $C^\infty(M)$: l'insieme di tali campi si denota $\mathfrak{X}(M)$.*

16.2.5 Esempio *Se $M = \mathbb{R}$, e se x è una coordinata su $\mathbb{R}$, allora la mappa lineare*

$$f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}$$

è un campo di vettori (per la regola di Leibniz di derivazione del prodotto di funzioni). Si noti che $X(c) = 0$ se c è costante, dato che $X(c) = X(1)c + X(c)1$ e quindi $X(1) = 0$, da cui $X(c) = 0$.

Naturalmente $\mathfrak{X}(M)$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione infinita: inoltre, per la proposizione precedente, è un'algebra di Lie rispetto al commutatore di campi $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$.

16.2.6 Teorema *I campi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono gli* operatori differenziali del primo ordine*, cioè funzionali della forma*

$$X = \sum h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

con $h_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

DIMOSTRAZIONE: Intanto notiamo che su una varietà differenziabile M, un campo di vettori è un operatore "locale", cioè, se $f \in C^\infty(M)$ si annulla in un intorno U di un punto x allora $X(f)$ è nulla in x: basta considerare una funzione h che sia 1 in U e zero fuori da V (ad esempio come quella considerata a pag. 242)

$$X(f)(x) = X(1 - h)(x)f(x) + X(f)(x)(1 - h(x)) = 0$$

Ora mostriamo che in $\mathbb{R}^n$ (e quindi nell'intorno di un punto di una qualsiasi varietà) i campi di vettori sono esattamente gli operatori lineari differenziali. Se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e x in un intorno dello zero di $\mathbb{R}^n$:

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(tx)dt = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt$$

Quindi

$$(Xf)(0) = \sum_{i=1}^n X(x_i)(0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$$

sicché, intorno a zero,

$$X(f) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

con $h_i(0) = X(x_i)(0)$.

QED

Consideriamo ora un gruppo di Lie G: dato che, in particolare è una varietà differenziabile, possiede la sua algebra di Lie dei campi di vettori $\mathfrak{X}(G)$.

16.2.7 Definizione *Se $X \in \mathfrak{X}(G)$, diciamo che si tratta di un* campo invariante a sinistra *se*

$$\forall f \in C^\infty(G)\ \forall g \in G \quad X(f_g) = X(f)$$

ove f_g è la funzione $(f_g)(h) = f(gh)$.

Dato che, se X e Y sono invarianti a sinistra allora

$$[X, Y](f_g) = X(Y(f_g)) - Y(X(f_g)) = X(Y(f)) - Y(X(f)) = [X, Y](f)$$

si ha che

16.2.8 Proposizione *Il sottospazio $L(G) \subset \mathfrak{X}(G)$ dei campi di vettori invarianti a sinistra è una sottoalgebra di Lie dell'algebra dei campi di vettori, che si dice* algebra di Lie del gruppo*.*

Mentre lo spazio $\mathfrak{X}(G)$ è di dimensione infinita, l'algebra di Lie $L(G)$ ha dimensione finita pari alla dimensione del gruppo: per vederlo interpretiamone gli elementi come curve integrali di equazioni differenziali.

Consideriamo cioè $X \in \mathfrak{X}(M)$ su una varietà ed una carta locale (U, x) intorno ad un punto fissato $p \in M$; supponiamo che $x(p) = 0$. Possiamo allora scrivere un'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt}(f \circ c)(t) = X(f)(c(t))$$

ove $f \in C^\infty(M)$ e $c : I \longrightarrow M$ è differenziabile in un intervallo I della retta reale contenente lo zero. Le soluzioni di questa equazione, tali che $c(0) = p$ si dicono *curve integrali* del campo vettoriale X nel punto p. Una *curva integrale massimale* è una curva integrale $c : I \longrightarrow M$ di X tale che non esistano curve integrali $c' : I' \longrightarrow \mathbb{R}$ di X tali che $I \subset I'$ e $c'|_I = c$; un campo vettoriale si dice *completo* se tutte le sue curve integrali sono massimali (e.g. se M è compatta ogni campo è completo).

16.2.9 Definizione *Un* gruppo a un parametro *su un gruppo di Lie G è un omomorfismo di gruppi di Lie $c : \mathbb{R} \longrightarrow G$.*

In particolare $c(0) = e$. Si noti che i gruppi ad un parametro che abbiamo considerato fin qui sono gruppi ad un parametro nel senso della definizione precedente solo se lo spazio di Hilbert sul quale sono definiti è di dimensione finita.

16.2.10 Teorema *I gruppi a un parametro su un gruppo di Lie sono esattamente le curve integrali dei campi invarianti a sinistra.*

Dimostrazione: Consideriamo un gruppo a un parametro c; la curva differenziabile
$$c_g(t) = gc(t)$$
è tale che $c_g(0) = g$ per un fissato $g \in G$. Consideriamo una carta (U, x) intorno a g e definiamo un campo di vettori
$$(Xf)(g) = \left(\frac{d}{dt}(f \circ c_g)\right)_{t=0}$$
Si tratta di una derivazione in $C^\infty(U)$ per la regola di derivazione delle funzioni composte, e per definizione c_g è una sua curva integrale. È un campo invariante perché
$$c_{hg}(t) = hgc(t) = h(c_g(t))$$

Sia ora X un campo di vettori invariante a sinistra, c una sua curva integrale massimale tale che $c(0) = e$; dimostriamo che si tratta di un gruppo a un parametro. Per l'invarianza di X abbiamo che
$$c_{hg} = (c_g)_h$$
(nella notazione precedente). Ora: dato che, fissato s, la curva $t \longmapsto c(t + s)$ è integrale per X e in 0 vale $h = c_e(s)$ allora $c_h(t) = c_e(t + s)$ e quindi
$$c(s + t) = c(t + s) = c_e(t + s) = c_h(t) = hc_e(t) = c_e(s)c_e(t) = c(s)c(t)$$

Resta solo da far vedere che c è definita in $\mathbb{R}$, dato che a priori una curva integrale massimale è definita su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$. Ma anche se $I \subsetneq \mathbb{R}$ allora, per ogni $t \in \mathbb{R}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $t/n \in I$ e quindi se definiamo

$$c(t) = c(t/n)^n$$

otteniamo un gruppo a un parametro che estende c; se mostriamo che è una curva integrale per X abbiamo un assurdo, per massimalità di c.

Ed infatti:

$$\begin{aligned} X(f)(c(t)) =& X(f)(c(t/n)^n) = X(f)(c(t/n)...c(t/n)) \\ =& X(f_{c(t/n)^{n-1}})(c(t/n)) = \frac{d}{dt}(f_{c(t/n)^{n-1}} \circ c)(t/n) \\ =& \frac{d}{dt}(f(c(t/n)^n)) = \frac{d}{dt}(f \circ c)(t) \end{aligned}$$

QED

16.2.11 Corollario *Un campo invariante a sinistra su un gruppo di Lie è completo.*

Ora consideriamo un sistema di coordinate (U, x) di G intorno all'elemento neutro e; se X è un campo invariante a sinistra e c una sua curva integrale massimale, allora c è completamente determinata dai numeri

$$a_i = \left(\frac{dc_i}{dt}\right)_{t=0}$$

ove $c_i = x_i \circ c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; infatti $c_i(0) = 0$ e c_i è l'unica soluzione del sistema differenziale $\dot{c_i} = X(x_i) \circ c$ (teorema di esistenza e unicità: le c_i sono differenziabili).

Quindi, localmente, un gruppo a un parametro è determinato dal "vettore tangente" $(a_1, ..., a_n)$ e viceversa: questo significa che

16.2.12 Proposizione *Lo spazio vettoriale $L(G)$ è isomorfo a $\mathbb{R}^{\dim G}$.*

Inoltre questo mostra che l'algebra di Lie di un gruppo dipende solo dalla struttura locale del gruppo intorno a e: vogliamo mostrare che $L(G)$ determina effettivamente il gruppo intorno a e; per vederlo, basta mostrare che se due gruppi G e U' sono *localmente isomorfi*, cioè se esiste un diffeomorfismo

$$\varphi : U \longrightarrow U'$$

fra una carta locale U in G e una carta locale U' in G tale che

$$\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$$

(per g, h tali che $gh \in U$ e $\varphi(g)\varphi(h) \in U'$), allora le algebre di Lie $L(G)$ e $L(G')$ sono isomorfe (che lo siano come spazi vettoriali segue dal fatto che $\dim G = \dim G'$). Questo è conseguenza dal

16.2.13 Teorema *La mappa $L : G \longmapsto L(G)$ che ad un gruppo di Lie associa la sua algebra è un funtore dalla categoria dei gruppi di Lie alla categoria delle algebre di Lie.*

DIMOSTRAZIONE: Basta far vedere che se $\varphi : G \longrightarrow H$ è un omomorfismo di gruppi di Lie allora è indotto un omomorfismo $L(\varphi) : L(G) \longrightarrow L(H)$ di algebre di Lie. In effetti, basta porre, se $X \in L(G)$ e $f \in C^\infty(H)$:

$$L(\varphi)(X)(f) = X(f \circ \varphi)$$

In effetti, se $L(\varphi)(X)$ è un campo di vettori invariante a sinistra se lo è X, dato che

$$(f \circ \varphi)_g(h) = f(\varphi(gh)) = f(\varphi(g)\varphi(h)) = (f_{\varphi(g)} \circ \varphi)(h)$$

e quindi

$$L(\varphi)(X)(f_{\varphi(g)}) = X(f_{\varphi(g)} \circ \varphi) = X((f \circ \varphi)_g) = X(f \circ \varphi) = L(\varphi)(X)(f)$$

Mostriamo infine che $L(\varphi)$ è un omomorfismo: per vederlo dimostriamo intanto che, se $X \in L(G)$ allora esiste un unico $X' \in L(H)$ tale che

$$(\dagger) \qquad (X'f) \circ \varphi = X(f \circ \varphi) = (L(\varphi)X)(f)$$

Definiamo la funzione $X'f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ in e come

$$(X'f)(e) = X(f \circ \varphi)(e)$$

e, per ogni $h \in H$ (si tenga conto che $\varphi(e) = e$):

$$(X'f)(h) = (X'f_h)(e) = X(f_h \circ \varphi)(e)$$

Allora, per definizione, X' è un campo invariante a sinistra e verifica la ($\dagger$). Ora mostriamo che

$$L(\varphi)[X, Y] = [X', Y'] \circ \varphi$$

Infatti

$$\begin{aligned} L(\varphi)[X, Y]f =& X(Y(f \circ \varphi)) - Y(X(f \circ \varphi)) = X((Y'f) \circ \varphi) - Y((X'f) \circ \varphi) \\ =& (X'(Y'f)) \circ \varphi - (Y'(X'f)) \circ \varphi = ([X', Y']f) \circ \varphi \end{aligned}$$

Infine mostriamo che φ è un omomorfismo di algebre di Lie:

$$\begin{aligned} [L(\varphi)X, L(\varphi)Y]f =& L(\varphi)X(L(\varphi)Y(f)) - L(\varphi)Y(L(\varphi)X(f)) \\ =& (L(\varphi)X)((Y'f) \circ \varphi) - (L(\varphi)Y)((X'f) \circ \varphi) \\ =& (X'(Y'f)) \circ \varphi - (Y'(X'f)) \circ \varphi \\ =& ([X', Y']f) \circ \varphi = L(\varphi)[X, Y](f) \end{aligned}$$

QED

Il funtore L si dice *funtore di Lie*. Abbiamo visto come esista una corrispondenza biunivoca fra gli elementi dell'algebra di Lie $L(G)$ (campi di vettori invarianti a sinistra) e gruppi a un parametro su G: usiamo questa biiezione per costruire la mappa esponenziale su un gruppo di Lie qualsiasi. Precisamente, definiamo

$$\exp : L(G) \longrightarrow G$$

come

$$\exp X = c(1)$$

ove $c : \mathbb{R} \longrightarrow G$ è l'unico gruppo a un parametro associato a X.

Notiamo che $\exp 0 = e$.

16.2.14 Teorema exp *è un diffeomorfismo locale intorno a* $0 \in L(G)$*.*

DIMOSTRAZIONE: Fissiamo delle coordinate (U, x) intorno a $e \in G$ e consideriamo un campo di vettori X invariante ed il corrispondente gruppo ad un parametro c; possiamo scrivere la mappa esponenziale in coordinate:

$$x \circ \exp : L(G) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ottenendo una funzione differenziabile fra spazi vettoriali della stessa dimensione: per mostrare che è un diffeomorfismo intorno a zero basta notare che la sua matrice jacobiana è invertibile in zero ed usare il teorema della funzione inversa. Ma gli elementi della jacobiana sono le funzioni $\partial(x_i \circ \exp)/\partial x_j$ e si calcolano in 0 come segue:

$$\sum_j \left(\frac{\partial x_i \circ \exp}{\partial x_j} \right)_0 \dot{x}_j(0) = \left(\frac{dx_i \circ c}{dt} \right)_0 = a_i$$

ove $(a_1, ..., a_n)$ è il vettore corrispondente a c nell'isomorfismo fra lo spazio dei gruppi a un parametro e $\mathbb{R}^n$ (abbiamo tenuto conto che $c(t) = \exp tX$) che, per $c \neq 0$ è diverso da zero.

QED

Nel caso di un gruppo di matrici, la mappa esponenziale è esattamente l'esponenziale di matrici: ogni gruppo a un parametro è infatti della forma $t \longmapsto e^{tX}$ ove si identificano gli elementi X dell'algebra di Lie con le matrici corrispondenti in una fissata base (si tratta di operatori lineari).

Il funtore di Lie permette di realizzare una equivalenza di categorie, come asserito dal seguente teorema dovuto a E. Cartan:

16.2.15 Teorema *Il funtore di Lie è una equivalenza fra la categoria dei gruppi di Lie connessi e semplicemente connessi e la categoria delle algebre di Lie.*

Questo vuol dire che ogni algebra di Lie (di dimensione finita) è l'algebra di Lie di un gruppo di Lie, e che esiste un solo gruppo connesso e semplicemente connesso per cui questo è vero; per la dimostrazione si rimanda ai testi specialistici, come [26] o [27].

L'idea consiste nei seguenti passi: si fa vedere che ogni algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie di matrici (teorema di Ado, cfr. 16.3.18), si dimostra poi l'esistenza di intorni aperti in $\mathfrak{g}$ tali che la serie di Campbell–Hausdorff che determina C nell'equazione $e^A e^B = e^C$ converga e si dimostra che la struttura di gruppo così trovata si può "globalizzare" ad una struttura di gruppo di Lie.

Facciamo qualche esempio: consideriamo un gruppo di Lie di matrici G per il quale le trasformate di Cayley dei suoi elementi regolari sono un aperto in uno spazio vettoriale V.

16.2.16 Teorema *Lo spazio V è l'algebra di Lie $L(G)$.*

Dimostrazione: Consideriamo $X \in L(G)$ e quindi il corrispondente gruppo a un parametro $t \longmapsto e^{tX}$ (siamo in un gruppo di matrici); ma per ipotesi lo spazio delle matrici regolari in G forma un intorno dell'I e quindi esiste t tale che

$$(e^{tX})^\# = (I - e^{tX})(I + e^{tX})^{-1} \in G^\# = V$$

Ma V è uno spazio vettoriale, quindi la derivata rispetto a t di e^{tX} calcolata in zero appartiene ancora a V e

$$\frac{d}{dt}(e^{tX})^\# = -Xe^{tX}(I + e^{tX})^{-1} + (I - e^{tX})\frac{d}{dt}((I + e^{tX})^{-1})$$

e quindi

$$\left(\frac{d}{dt}(e^{tX})^\#\right)_0 = -\frac{1}{2}X$$

i.e. $X \in V$. Quindi $L(G) \subset V$: ma si tratta di spazi vettoriali della medesima dimensione, quindi $L(G) = V$.

QED

Ad esempio:

$$L(O(n)) = L(SO(n)) = \mathfrak{so}(n)\,, \quad L(SU(n)) = \mathfrak{su}(n)\,, \quad L(Sp(n)) = \mathfrak{sp}(n)$$

Il commutatore dell'algebra di Lie di un gruppo di matrici è esattamente il commutatore di matrici.

Dimostriamo ora due risultati fondamentali sul rapporto fra gruppi e algebre di Lie.

16.2.17 Lemma *Se H è un sottogruppo chiuso di un gruppo di Lie allora*

$$V = \{X \in L(G) \,|\, \forall t \in \mathbb{R} \ \ \exp tX \in H\}$$

è un sottospazio vettoriale di $L(G)$.

Dimostrazione: Notiamo intanto che, se $\{Z_n\}$ è una successione di elementi non nulli in $L(G)$ tale che per ogni n: $\exp Z_n \in H$ allora

$$(*) \qquad \lim_{n \longrightarrow \infty} Z_n = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{Z_n}{||Z_n||} = Z \Rightarrow Z \in V$$

(ove $||.||$ è una norma qualsiasi sullo spazio di dimensione finita V). Infatti, dato che $||Z_n|| \longrightarrow 0$ (e $||Z_n|| \neq 0$) deve esistere una successione di numeri interi $\{k_n\}$ tale che

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} k_n ||Z_n|| = t$$

e quindi

$$\exp tZ = \lim_{n \longrightarrow \infty} \exp(k_n Z_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} (\exp Z_n)^{k_n}$$

ove $(\exp Z_n)^{k_n} \in H$ e, dato che H è chiuso, $\exp tZ \in H$, i.e. $Z \in V$.

Ora si osservi che, scrivendo in coordinate locali lo sviluppo di Taylor, abbiamo, su un intorno di e diffeomorfo tramite exp a un intorno di $L(G)$:

$$(**) \qquad \exp^{-1}(\exp X \cdot \exp Y) = X + Y + O(||X|| + ||Y||)$$

Dimostriamo ora che v è un sottospazio vettoriale di $L(G)$: ovviamente se $X \in V$ e $t \in \mathbb{R}$ allora $tX \in V$, mentre se $X, Y \in V$ sono tali che $X + U \neq 0$, allora per $Z = (X + Y)/||X + Y||$ e

$$Z_n = \exp^{-1}(\exp \frac{1}{n} X \cdot \exp \frac{1}{n} Y)$$

la (*) è soddisfatta (in virtù della (**)). Quindi $X + Y \in V$ e V è un sottospazio vettoriale.

QED

16.2.18 Teorema *Se H è un sottogruppo topologico chiuso di un gruppo di Lie G allora H è un gruppo di Lie e la sua algebra di Lie è formata dagli elementi di $L(G)$ i cui esponenziali appartengono a H.*

Dimostrazione: Scegliamo un sistema di coordinate (U, x) intorno a $e \in G$ (e quindi, traslando, intorno a ogni suo punto) tale che la mappa esponenziale sia in U un diffeomorfismo; preso V come nel lemma, possiamo definire delle coordinate su H semplicemente considerando $\exp^{-1} U \cap V$ in $L(G)$ ed usando ivi la mappa esponenziale per definire delle coordinate che, per il lemma, sono coordinate su H.

QED

Ad esempio ogni sottogruppo chiuso di $GL_n(\mathbb{R})$ è un gruppo di Lie: questo è un metodo che va bene per $SL_n(\mathbb{R})$ e tutti gli altri gruppi classici.

Dimostriamo ora che un gruppo topologico può sostenere al più una struttura di gruppo di Lie.

16.2.19 Lemma *Se $c : \mathbb{R} \longrightarrow G$ è un omomorfismo continuo allora è differenziabile, cioè un gruppo a un parametro.*

Dimostrazione: Scegliamo al solito un intorno U di $e \in G$ sul quale exp sia un diffeomorfismo: possiamo, al più restringendo questo intorno, supporre che per ogni $g \in U$ esista $h \in U$ tale che $h^2 = g$. Allora se $\varepsilon > 0$ è tale che $c([-\varepsilon, \varepsilon]) \subset U$, e se $c(\varepsilon) = \exp X$, allora

$$c\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = c(\varepsilon) = \exp X = \left(\exp\frac{1}{2}X\right)^2$$

Iterando: $c(\varepsilon/2^k) = \exp X/2^k$ e quindi $c(q\varepsilon) = \exp qX$ per ogni $q \in \mathbb{Q}$ della forma $n/2^n \in [-1, 1]$: ma questi razionali sono densi in $[-1, 1]$ e, per continuità di c troviamo allora

$$\forall t \in [-1, 1] \quad c(t\varepsilon) = \exp tX$$

e quindi per ogni $t \in \mathbb{R}$. In particolare c è differenziabile.

QED

16.2.20 Teorema *Se $f : G \longrightarrow G'$ è un omomorfismo di gruppi topologici fra i gruppi di Lie G e G' allora è differenziabile.*

Dimostrazione: Basta mostrare che lo è in un intorno di $e \in G$: fissiamo quindi una carta locale (U, x) intorno a $e \in G'$ e definiamo

$$f_i(t) = f(\exp tE_i)$$

per una fissata base $(E_1, ..., E_n)$ di $L(G)$. Abbiamo così degli omomorfismi continui $f_i : \mathbb{R} \longrightarrow G$, e, per il lemma, sono differenziabili ed esistono $E'_i \in L(G')$ tali che

$$f_i(t) = \exp tE'_i$$

Ora consideriamo due mappe differenziabili

$$h : \mathbb{R}^n \longrightarrow G \qquad \text{e} \qquad h' : \mathbb{R}^n \longrightarrow G'$$

definite come

$$h(t_1, ..., t_n) = \exp t_1E_1 \cdots \exp t_nE_n \qquad \text{e} \qquad h'(t_1, ..., t_n) = \exp t_1E'_1 \cdots \exp t_nE'_n$$

Si tratta, intorno alle $e \in G, G'$ di diffeomorfismi; ora usiamo l'ipotesi che f sia un omomorfismo di gruppi:

$$f(h(t_1, ..., t_n)) = f(t_1) \cdots f(t_n) = \exp t_1 E'_1 \cdots \exp t_n E'_n = h'(t_1, ..., t_n)$$

Cioè intorno a e abbiamo espresso f come $h' \circ h^{-1}$ composizione di mappe differenziabili. Quindi f è differenziabile.

QED

16.2.21 Corollario *Su un gruppo topologico esiste al più una struttura di gruppo di Lie.*

DIMOSTRAZIONE: Se G è un gruppo topologico che possiede due strutture distinte di gruppo di Lie (per la medesima topologia fissata), indichiamo i gruppi di Lie corrispondenti con G' e G'' (come gruppi topologico sono esattamente G). L'identità $\mathrm{id} : G' \longrightarrow G''$ è ovviamente una mappa continua fra questi gruppi di Lie, quindi è differenziabile: anche l'inverso dell'identità lo è e quindi G' e G'' sono isomorfi come gruppi di Lie per mezzo dell'identità: sono cioè lo stesso gruppo di Lie.

QED

Sorge spontanea la domanda se un gruppo topologico possegga sempre una struttura di gruppo di Lie: si tratta di un arduo problema (il quinto nella famosa lista di Hilbert) risolto da von Neumann, Pontriagin, Montgomery, Zippin, Gleason e Yamabe. Citiamo i loro risultati: osserviamo intanto che un gruppo di Lie, essendo una varietà differenziabile, deve essere localmente compatto e localmente connesso. Un'altra condizione necessaria è che non abbia sottogruppi piccoli, nel senso della

16.2.22 Definizione *Un gruppo topologico G* non possiede sottogruppi piccoli *se esiste un intorno U di $e \in G$ che non contiene sottogruppi di G a parte $\{e\}$.*

16.2.23 Lemma *Un gruppo di Lie non contiene sottogruppi piccoli.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo un intorno U di $e \in G$ nel quale exp sia un diffeomorfismo e tale che $V = \exp^{-1}(U)$ sia convesso in $L(G)$. Anche $U' = \exp \frac{1}{2}V$ è un intorno di questo tipo: se per assurdo G possiede un sottogruppo H ($\neq \{e\}$) e tale che $H \subset U'$, sia $h \neq e$ un suo elemento; allora esiste $X \in \frac{1}{2}V$ tale che $\exp X = h$, e, dato che V è limitato e convesso, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $2^k X \in V \setminus \frac{1}{2}V$. Quindi

$$h^{2^r} = \exp 2^r X \in \exp V \setminus U'$$

(dato che exp è iniettiva in V) il che vuol dire che H non è un sottogruppo.

QED

Queste condizioni sono anche sufficienti:

Teorema (GLEASON–YAMABE). *Un gruppo topologico di Hausdorff è un gruppo di Lie se e solo se è localmente compatto e non possiede sottogruppi piccoli.*

Teorema (MONTGOMERY–ZIPPIN). *Un gruppo topologico di Hausdorff è un gruppo di Lie se e solo se è localmente omeomorfo ad uno spazio $\mathbb{R}^n$ fissato.*

Per questi risultati si veda ad esempio [19].
Limitiamoci qui al caso compatto.

16.2.24 Teorema *Se G è un gruppo topologico compatto allora le seguenti proposizioni sono equivalenti.*

- *G non ha sottogruppi piccoli.*
- *G è un sottogruppo chiuso di $O(n)$ per qualche $n > 0$.*
- *G è un gruppo di Lie.*

DIMOSTRAZIONE: (1) implica (2): ci basta trovare una rappresentazione fedele di G, cioè $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ con $\ker \rho = \{e\}$; infatti, dato che il gruppo è compatto, tale rappresentazione è completamente riducibile e quindi, se π è una sua qualsiasi sottorappresentazione irriducibile, questa ha dimensione finita ed è unitaria, i.e. $\pi(G) \subset O(n)$ per qualche n (cfr. §2 cap. precedente). Per l'ipotesi (1), esiste un intorno U di $e \in G$ che non contiene sottogruppi di G; se ρ è una qualsiasi rappresentazione di G, $\ker \rho$ è un sottogruppo normale chiuso di G e si ha

$$\bigcap_\rho \ker \rho = \{e\}$$

al variare di ρ nell'insieme delle rappresentazioni di G; se $F = G \setminus U$ si ha quindi

$$\bigcap_\rho (\ker \rho \cap F) = \emptyset$$

Ma F è un chiuso nel compatto G, quindi è compatto, cioè possiede la proprietà dell'intersezione finita: esistono $\rho_1, ..., \rho_n$ rappresentazioni di G tali che

$$(\ker \rho_1 \cap F) \cap ... \cap (\ker \rho_n \cap F) = \emptyset$$

i.e. $\bigcap_i \ker \rho_i \subset U$ e quindi, per ipotesi (1), $\bigcap_i \ker \rho_i = \{e\}$. La somma diretta $\rho_1 \oplus ... \oplus \rho_n$ è quindi una rappresentazione fedele di G.

(2) implica (3) perché un sottogruppo chiuso di un gruppo di Lie è un gruppo di Lie.

(3) implica (1) per il lemma.

QED

16.3 Algebre di Lie, rappresentazioni e coomologia

Consideriamo un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ su un campo $\mathbb{K}$ (che sarà $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) ed una sua rappresentazione

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

di dimensione finita. Conveniamo di scrivere l'azione di $\mathfrak{g}$ su V come una moltiplicazione, i.e. di scrivere $Xv \in V$ in luogo di $\rho(X)(v)$, se $X \in \mathfrak{g}$ e $v \in V$: allora l'essere V una rappresentazione di $\mathfrak{g}$ si esprime come

$$[X, Y]v = X(Yv) - Y(Xv)$$

per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$ e $v \in V$.

16.3.1 Definizione *Una* cocatena *m-dimensionale sull'algebra $\mathfrak{g}$ a coefficienti nella rappresentazione V è una funzione*

$$c : \mathfrak{g}^m \longrightarrow V$$

multilineare antisimmetrica.

In altri termini possiamo supporre

$$c : \mathfrak{g} \wedge ... \wedge \mathfrak{g} \longrightarrow V$$

Per convenzione una cocatena di dimensione zero è una costante in V. Una cocatena di dimensione uno è semplicemente una mappa lineare

$$c : \mathfrak{g} \longrightarrow V$$

Ovviamente l'insieme $C^m(\mathfrak{g}, V)$ delle m-cocatene su $\mathfrak{g}$ a coefficienti in V è uno spazio vettoriale di dimensione finita (se lo sono V e $\mathfrak{g}$). Possiamo inoltre definire[2] una *mappa di cobordo*

$$\delta : C^m(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow C^{m+1}(\mathfrak{g}, V)$$

come

$$\begin{aligned}(\delta c)(X_0, X_1, ..., X_m) = &\sum_{i=0}^{n}(-1)^i X_i \cdot c(X_1, ..., \widehat{X_i}, ..., X_n) + \\ &+ \sum_{i<j}^{0...n}(-1)^{i+j} c([X_i, X_j], X_1, ..., \widehat{X_i}, ..., \widehat{X_j}, ..., X_n)\end{aligned}$$

(ove $\widehat{X}$ indica l'omissione della variabile X). Per definizione, se $c \in C^m(\mathfrak{g}, V)$ allora $\delta c \in C^{m+1}(\mathfrak{g}, V)$.

[2] Questa definizione si ispira alla definizione del differenziale esterno per le forme su una varietà, che dà luogo al complesso di de Rham.

16.3.2 Esempio *Se* $c : \mathfrak{g} \longrightarrow V$ *è una 1-cocatena allora*

$$\delta c(X, Y) = Xc(Y) - Yc(X) - c([X, Y])$$

La successione

$$V \longrightarrow C^1(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C^m(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow C^{m+1}(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow \cdots$$

non è esatta: possiamo comunque misurare quanto non lo sia. Un semplice calcolo per induzione che qui non riportiamo permette infatti di stabilire che

16.3.3 Proposizione $\delta \circ \delta = 0$.

Una cocatena $c \in C^m(\mathfrak{g}, V)$ tale che $\delta c = 0$ si dice *cociclo*, mentre una cocatena $c \in C^{m+1}(\mathfrak{g}, V)$ tale che esista una cocatena $b \in C^m(\mathfrak{g}, V)$ in modo che $\delta b = c$ si dice *cobordo*. Ovviamente, per la proposizione, un cobordo è un cociclo. Il viceversa non è vero a meno che la successione degli spazi delle cocatene non sia esatta.

Possiamo definire gli spazi formati da cocicli e cobordi come:

$$Z^m(\mathfrak{g}, V) = \ker \left(C^m \xrightarrow{\delta} C^{m+1} \right) \qquad \text{e} \qquad B^m(\mathfrak{g}, V) = \operatorname{im} \left(C^{m-1} \xrightarrow{\delta} C^m \right)$$

Quindi la successione delle cocatene è esatta se $Z^m(\mathfrak{g}, V) = B^m(\mathfrak{g}, V)$ (definizione di successione esatta). In generale, $B^m(\mathfrak{g}, V)$ sarà un sottospazio vettoriale di $Z^m(\mathfrak{g}, V)$: lo spazio quoziente

$$H^m(\mathfrak{g}, V) = Z^m(\mathfrak{g}, V)/B^m(\mathfrak{g}, V)$$

si dice m-esimo *gruppo di coomologia* di $\mathfrak{g}$ a coefficienti nella rappresentazione V. Questi gruppi (che sono spazi vettoriali) sono tutti nulli se e solo se la successione delle cocatene è esatta: altrimenti la loro dimensione ne misura la "non esattezza".

Consideriamo ad esempio $H^0(\mathfrak{g}, V)$: dato che, per definizione, $B^0(\mathfrak{g}, V) = 0$, abbiamo che $H^0(\mathfrak{g}, V) = Z^0(\mathfrak{g}, V)$; inoltre

$$H^0(\mathfrak{g}, V) = \ker \rho$$

Infatti $c \in H^0(\mathfrak{g}, V)$ se e solo se $0 = \delta c(X) = Xc$ i.e. $c \in \ker \rho$. Notiamo che se ρ è la rappresentazione aggiunta $ad : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ allora $\ker ad = H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ è il centro dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$.

Identifichiamo ora $H^1(\mathfrak{g}, V)$: un 1-cociclo è una mappa $c : \mathfrak{g} \longrightarrow V$ tale che $Xc(Y) - Yc(X) = c[X, Y]$, mentre un 1-cobordo è una mappa $b : \mathfrak{g} \longrightarrow V$ della forma $bX = Xv$ per qualche $v \in V$. Quindi se $H^1(\mathfrak{g}, V) = 0$ allora per ogni mappa lineare $c : \mathfrak{g} \longrightarrow V$ esiste un $v \in V$ tale che

$$c(X) = Xv$$

Analogamente, se $H^2(\mathfrak{g}, V) = 0$ allora per ogni mappa bilineare antisimmetrica $c : \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \longrightarrow V$ esiste una mappa lineare $b : \mathfrak{g} \longrightarrow V$ tale che

$$c(X, Y) = Xb(Y) - Yb(X) - b([X, Y])$$

Particolarizziamo ora la nostra situazione al caso della rappresentazione banale

$$\beta : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$$

data semplicemente da $\beta(X) = 0$ (si noti che su $\mathbb{K}$ esiste una sola struttura di algebra di Lie: quella identicamente nulla!).

Allora una cocatena è una forma multilineare alternante

$$c : \mathfrak{g} \wedge ... \wedge \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$$

e la formula del cobordo si riduce alla:

$$(\delta c)(X_0, ..., X_n) = \sum_{i<j}^{0...n} (-1)^{i+j} c([X_i, X_j], X_1, ..., \widehat{X_i}, ..., \widehat{X_j}, ..., X_n)$$

In questo caso, $H^0(\mathfrak{g}) = \mathbb{K}$; inoltre, un 1-cociclo è un funzionale lineare $c \in \mathfrak{g}^*$ tale che

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g} \quad c[X, Y] = 0$$

mentre l'unico cobordo è $0 \in \mathfrak{g}^*$. Quindi $H^1(\mathfrak{g})$ è lo spazio dei funzionali lineari che si annullano sugli elementi della forma $[X, Y]$: in particolare $H^1(\mathfrak{g}) = 0$ se e solo se l'unico elemento in $\mathfrak{g}$ della forma $[X, Y]$ è 0.

16.3.4 Definizione *Un'algebra di Lie si dice* semisemplice *se* $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$*, ove* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *è la sottoalgebra degli elementi della forma* $[X, Y]$ *con* $X, Y \in \mathfrak{g}$*. Un'algebra di Lie si dice* semplice *se non è abeliana e non possiede ideali non banali.*

Un'algebra semplice è semisemplice, dato che $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ è un ideale e quindi $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ (se fosse $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$, $\mathfrak{g}$ sarebbe abeliana).

Esempi di algebre semplici sono le algebre di Lie dei gruppi classici compatti e $\mathfrak{sl}(n)$; l'algebra $M_n(\mathbb{R})$ non è semisemplice, dato che $[M_n(\mathbb{R}), M_n(\mathbb{R})] = \mathfrak{sl}(n) \neq M_n(\mathbb{R})$.

Si noti che $\mathfrak{g}$ è abeliana se e solo se $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$. Più in generale, se $\mathfrak{i}$ e $\mathfrak{j}$ sono ideali in $\mathfrak{g}$, anche $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$ (sottoalgebra generata dagli elementi della forma $[X, Y]$ con $X \in \mathfrak{i}$ e $Y \in \mathfrak{j}$) è un ideale. Possiamo quindi generalizzare il concetto di algebra di Lie abeliana nel modo seguente:

16.3.5 Definizione *Un'algebra di Lie si dice* risolubile *se esiste $k \geq 1$ tale che $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ ove la successione di ideali $\{\mathfrak{g}^{(k)}\}$ è definita come*

$$\mathfrak{g}^{(1)} := \mathfrak{g} \qquad \mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \qquad \mathfrak{g}^{(k)} := [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]$$

16.3.6 Esempio

- *Un'algebra abeliana è risolubile con $k = 2$.*
- *L'algebra di Lie delle matrici diagonali superiori rispetto al solito commutatore è risolubile: ad esempio la matrice*

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  non è esprimibile in alcun modo nella forma

  $$[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} 0 & b'(a-a') + b(c'-c) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora notiamo che, se $\mathfrak{i}$ e $\mathfrak{j}$ sono ideali risolubili in un'algebra di Lie qualsiasi $\mathfrak{g}$ allora $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ pure è un ideale risolubile: infatti $(\mathfrak{i} + \mathfrak{j})/\mathfrak{i} \cong \mathfrak{i}/(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j})$ (il quoziente di ideali risolubili è ovviamente risolubile).

Quindi, se $\dim \mathfrak{g} < \infty$ esiste un unico ideale risolubile massimale, cioè la somma di tutti gli ideali risolubili in $\mathfrak{g}$: questo ideale si dice *radicale* e si denota con $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$. Dato che $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ implica $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) = 0$, se $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subsetneq \mathfrak{g}$ allora $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ è risolubile; dunque

16.3.7 Proposizione $\mathfrak{g}$ *è semisemplice se e solo se* $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) = 0$.

Dalla definizione di semisemplicità segue ovviamente che

16.3.8 Proposizione *Se $\mathfrak{g}$ è semisemplice allora $H^1(\mathfrak{g}) = 0$.*

In realtà vale un teorema più forte (per il quale si rimanda ai testi specialistici, come [27] o [10]:

16.3.9 Teorema (PRIMO LEMMA DI WHITEHEAD) *Se $\mathfrak{g}$ è semisemplice allora $H^1(\mathfrak{g}, V) = 0$ per ogni rappresentazione di dimensione finita V di $\mathfrak{g}$.*

L'idea della dimostrazione consiste nel far vedere che, se $\mathfrak{g}$ è semisemplice, allora $H^n(\mathfrak{g}, V)$ è somma diretta di k copie di $H^n(\mathfrak{g})$, ove k è la molteplicità con la quale la rappresentazione banale figura come sottorappresentazione di V. Una notevole applicazione è il seguente

16.3.10 Teorema (WEYL) *Ogni rappresentazione di dimensione finita di un'algebra di Lie semisemplice è completamente riducibile.*

DIMOSTRAZIONE: Vogliamo dimostrare, data una rappresentazione $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$, che per ogni sottorappresentazione $P \subset V$ ne esiste una complementare $Q \subset V$ tale che $P \oplus Q = V$. Questo è equivalente a dimostrare che esiste una proiezione E_P sul sottospazio P che sia un morfismo di rappresentazioni:

$$\forall X \in \mathfrak{g} \quad \rho(X)E_P = E_P\rho(X)$$

Per questo consideriamo lo spazio $W \subset End(V)$ degli operatori lineari $A : V \longrightarrow V$ tali che

$$\operatorname{im} A \subset P \subset \ker A$$

(e quindi tali che $A^2 = 0$). Si tratta non solo di un sottospazio vettoriale di $End(V)$, ma anche di una rappresentazione di $\mathfrak{g}$, rispetto alla mappa $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(W)$ data da

$$\pi(X)(A) = [\rho(X), A]$$

Se E è un operatore di proiezione su P allora

$$\forall X \in \mathfrak{g} \quad [\rho(X), E] \in W$$

sicché possiamo definire un operatore lineare $c : \mathfrak{g} \longrightarrow W$ come

$$c(X) := [\rho(X), E]$$

cioè una cocatena in $C^1(\mathfrak{g}, W)$. Ma, per l'identità di Jacobi:

$$Xc(Y) - Yc(X) - c[X,Y] = [\rho(X), [\rho(Y), E]] - \\ - [\rho(Y), [\rho(X), E]] - [\rho([X,Y]), E] = 0$$

e quindi c è un cociclo; ma per il lemma di Whitehead deve allora esistere un cobordo $A \in W$ tale che $c(A) = (\delta A)(X) = A(X)$, sicché

$$[\rho(X), E] = [\rho(X), A]$$

Questo significa che l'operatore $E_P := E - A$ commuta con tutti gli operatori $\rho(X)$ e quindi è un morfismo della rappresentazione V in sé; resta solo da notare che si tratta di una proiezione su P:

$$\forall v \in P \quad E_Pv = Ev - Av = v - 0 = v$$

(dato che $P \subset \ker A$).

QED

Torniamo a considerare la coomologia a coefficienti nella rappresentazione banale. Definiamo prima una rappresentazione di $\mathfrak{g}$ sullo spazio vettoriale $\mathfrak{g}^*$ come

$$\forall X \in \mathfrak{g}\ \forall \xi \in \mathfrak{g}^* \quad \mathrm{ad}^*_X(\xi) = -\xi \circ \mathrm{ad}_X$$

che si dice *rappresentazione coaggiunta* di $\mathfrak{g}$; si tratta della rappresentazione duale della rappresentazione aggiunta. Ora definiamo una mappa, per $m > 0$:

$$\varphi : C^m(\mathfrak{g}) \longrightarrow C^{m-1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$$

come

$$(\varphi(c)(X_1, ..., X_{m-1}))(X) = c(X_1, ..., X_{m-1}, X)$$

16.3.11 Lemma *$\delta \circ \varphi = \varphi \circ \delta$.*

Dimostrazione: Si tratta di un calcolo:

$$\begin{aligned}
&(\delta\varphi(c))(X_1,.., X_m))(X) = \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} (X_i(\varphi(c)(X_1, ..., \widehat{X_i}, ..., X_m)))(X) + \\
&\qquad\quad + \sum_{i<j}^{1...m} (-1)^{i+j} (\varphi(c)([X_i, X_j], X_1, ..., \widehat{X_i}, ..., \widehat{X_j}, ..., X_m))(X) \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} (\varphi(c)(X_1, ..., \widehat{X_i}, ..., X_m))([X_i, X]) + \\
&\qquad\quad + \sum_{i<j}^{1...m} (-1)^{i+j} c([X_i, X_j], X_1, ..., \widehat{X_i}, ..., \widehat{X_j}, ..., X_m, X) \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} c(X_1, ..., \widehat{X_i}, ..., X_m, [X_i, X]) + \\
&\qquad\quad + \sum_{i<j}^{1...m} (-1)^{i+j} c([X_i, X_j], X_1, ..., \widehat{X_i}, ..., \widehat{X_j}, ..., X_m, X) \\
&\qquad = (\varphi(\delta c)(X_1, ..., X_m))(X)
\end{aligned}$$

QED

In particolare se c è un cociclo, anche $\varphi(c)$ lo è.

16.3.12 Proposizione *Se $\mathfrak{g}$ è semisemplice allora $H^2(\mathfrak{g}) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE: Se $u \in Z^2(\mathfrak{g})$ allora, per il primo lemma di Whitehead, esiste una cocatena $\xi \in C^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*) = \mathfrak{g}^*$ tale che

$$\varphi(c) = \delta\xi$$

e quindi, per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} c(X,Y) =& ((\varphi(c))(X))(Y) = ((\delta\xi)(X))(Y) \\ =& (\mathrm{ad}^*_X \xi)(Y) = -\xi([X,Y]) = (\delta\xi)(X,Y) \end{aligned}$$

dunque $c = \delta\xi$, pertanto $H^2(\mathfrak{g}) = 0$.

QED

Notiamo che in generale $H^3(\mathfrak{g}) \neq 0$: il funzionale bilineare

$$\mathfrak{k}(X,Y) := \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y)$$

induce un 3-cociclo che non è mai un cobordo se $\mathfrak{g}$ è semisemplice: in effetti se $\mathfrak{g}$ è semisemplice allora la forma bilineare $\mathfrak{k}$ è non degenere (teorema di Cartan) e quindi non può essere il cobordo di un funzionale lineare su $\mathfrak{g}$.

Di nuovo, vale un teorema più forte:

16.3.13 Teorema (SECONDO LEMMA DI WHITEHEAD) *Se $\mathfrak{g}$ è semisemplice allora $H^2(\mathfrak{g}, V) = 0$ per ogni rappresentazione di dimensione finita V.*

Diamo anche per questo una applicazione.

16.3.14 Definizione *Una* estensione *di un'algebra di Lie $\mathfrak{a}$ per mezzo di una sottoalgebra $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie $\mathfrak{h}$ tale che la successione*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

sia esatta.

In altri termini $\mathfrak{a}$ è un ideale di $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{h}/\mathfrak{a} = \mathfrak{h}$. Un'estensione si dice *banale* se $\mathfrak{h}$ possiede una sottoalgebra di Lie isomorfa a $\mathfrak{g}$ per mezzo della proiezione $\alpha : \mathfrak{h}/\mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{g}$.

Due estensioni $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{h}'$ si dicono *equivalenti* se esiste un omomorfismo di algebre di Lie $e : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}'$ tale che il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathfrak{h} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "e"] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[r] & \mathfrak{h} \arrow[r, "\alpha"] & \mathfrak{g} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

sia commutativo. Allora necessariamente e è un isomorfismo.

Notiamo che esiste una mappa lineare $\beta : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ tale che $\alpha \circ \beta = \text{id}$: l'estensione è banale se e solo se la β può essere scelta in modo che sia un omomorfismo di algebre di Lie; in generale non lo sarà, cioè la funzione

$$c(X, Y) = [\beta X, \beta Y] - \beta[X, Y]$$

sarà non identicamente nulla.

Se $\mathfrak{a}$ è abeliana allora c è un 2-cociclo nello spazio delle cocatene $C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, ove la rappresentazione di $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{a}$ è definita dalla formula, per $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{a}$:

$$\rho(X)(Y) = [\beta X, Y]$$

Che si tratti di un cociclo segue dall'identità di Jacobi; se l'estensione è banale il cociclo è un cobordo, quindi

16.3.15 Proposizione *Se $\mathfrak{a}$ è abeliana, lo spazio $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle estensioni di $\mathfrak{g}$ tramite $\mathfrak{a}$ a meno di equivalenza.*

Quindi, per il secondo lemma di Whitehead:

16.3.16 Corollario *Una estensione $\mathfrak{h}$ di un'algebra di Lie semisemplice $\mathfrak{g}$ per mezzo di un'algebra abeliana $\mathfrak{a}$ è banale.*

Abbiamo osservato in precedenza che un'algebra di Lie qualsiasi possiede sempre un unico ideale risolubile massimale, $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g})$, e che $\mathfrak{g}/\operatorname{Rad}(\mathfrak{g})$ è semisemplice. Una immediata conseguenza del corollario precedente è che, se il radicale è abeliano, allora

$$\mathfrak{g} = \operatorname{Rad}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$$

oe $\mathfrak{s}$ è una sottoalgebra semisemplice isomorfa a $\mathfrak{g}/\operatorname{Rad}(\mathfrak{g})$ (la somma diretta è nel senso degli spazi vettoriali). Questo risultato è vero in generale.

16.3.17 Teorema (Levi) *Ogni algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è, come spazio vettoriale, somma diretta del radicale e di una sottoalgebra semisemplice.*

Dimostrazione: Procediamo per induzione sulla dimensione di $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g})$; se $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g}) = 0$ allora $\mathfrak{g} = \mathfrak{s}$ è semisemplice e il teorema è banale; se $\dim \operatorname{Rad}(\mathfrak{g}) = 1$ allora $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g})$ è abeliano ed il teorema segue dal corollario precedente. La stessa conclusione vale se l'ideale $\mathfrak{a} = [\operatorname{Rad}(\mathfrak{g}), \operatorname{Rad}(\mathfrak{g})]$ è zero (che implica $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g})$ abeliano).

Sia, per induzione, valido il teorema per $m < n$ con $n > 0$; dato che $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g})$ è risolubile, $\dim \operatorname{Rad}(\mathfrak{g})/\mathfrak{a} < n$ e che $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g})/\mathfrak{a}$ è il radicale dell'algebra quoziente

$\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, allora, per ipotesi induttiva, $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ è somma diretta di $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})/\mathfrak{a}$ e di una sua sottoalgebra semisemplice, che si solleva ad una sottoalgebra $\mathfrak{b}$ di $\mathfrak{g}$ tale che

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) + \mathfrak{b} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$$

Ma $\mathrm{Rad}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$; infatti $\mathfrak{a}$ è un ideale risolubile in $\mathfrak{b}$ ed il quoziente $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ è semisemplice.

Dato che $\dim \mathfrak{b} < n$, per induzione, esiste un'algebra semisemplice $\mathfrak{s}$ in $\mathfrak{b}$ tale che $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$; cioè

$$\begin{aligned} \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{s} &= \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{b} \cap \mathfrak{s} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{s} = 0\,, \\ \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) + \mathfrak{s} &= \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) + \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{b} + \mathfrak{s} = \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) + \mathfrak{a} + \mathfrak{s} \\ &= \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) + \mathfrak{b} = \mathfrak{g} \end{aligned}$$

Quindi $\mathfrak{g} = \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$.

QED

Il teorema di Levi ha una conseguenza capitale nel teorema di Ado, secondo il quale ogni algebra di Lie è un'algebra di matrici (in realtà vale un enunciato più preciso).

16.3.18 Teorema (ADO) *Ogni algebra di Lie di dimensione finita possiede una rappresentazione fedele.*

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo intanto che il teorema è vero se $\mathfrak{g}$ è semisemplice: infatti in questo caso la rappresentazione aggiunta $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ è fedele, dato che il suo nucleo è il centro di $\mathfrak{g}$ che sta nel radicale (essendo un ideale abeliano è risolubile) che è zero.

Se $\mathfrak{g}$ non è semisemplice ma possiede una rappresentazione ρ che, ristretta al centro $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ di $\mathfrak{g}$ è fedele, allora la rappresentazione

$$\mathrm{ad} \oplus \rho$$

è fedele su $\mathfrak{g}$: infatti $\ker \mathrm{ad} \cap \ker \rho = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \ker \rho = 0$. Il teorema si riduce quindi alla ricerca della rappresentazione ρ.

Consideriamo ora il centro $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$: possiede sempre rappresentazioni fedeli (uno spazio vettoriale V si immerge in $\mathrm{End}(V)$) e sia ζ una di esse. Vogliamo costruire a partire da ζ una rappresentazione di $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ che sia fedele sul centro. Per farlo notiamo che se $\mathfrak{r}$ è un'algebra risolubile, allora esiste una successione di ideali

$$(\dagger) \qquad \mathfrak{z}(\mathfrak{r}) \subset \mathfrak{r}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{r}_k \subset \mathfrak{r}$$

tali che $\dim \mathfrak{r}_{i+1}/\mathfrak{r}_i = 1$. Infatti abbiamo la successione di ideali

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{r}) = \mathfrak{r}^{(k-1)} \subset \mathfrak{r}^{(k-2)} \subset \cdots \subset \mathfrak{r}^{(2)} = [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r}$$

Se questa sequenza non soddisfa il requisito $\dim \mathfrak{r}^{(k+1)}/\mathfrak{r}^{(k)} = 1$ possiamo comunque "infittirla" con altre sottoalgebre di $\mathfrak{r}$ in modo da ottenere una sequenza (†) con $[\mathfrak{r}_{i-1}, \mathfrak{r}_i] \subset \mathfrak{r}_i$.

Per dedurre da $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ una rappresentazione di $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ usiamo allora questo ragionamento ed il seguente

Lemma. *Se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie e $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{h}$ (come spazi vettoriali) ove $\mathfrak{r}$ è un ideale risolubile in $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ una sottoalgebra, allora ogni rappresentazione σ di $\mathfrak{r}$ induce una rappresentazione ρ di $\mathfrak{g}$ tale che $\mathfrak{r} \cap \ker \rho \subset \ker \sigma$.*

Prima di dimostrare il lemma concludiamo la dimostrazione del teorema di Ado: in virtù del lemma possiamo costruire per ogni $\mathfrak{r}_i$ una rappresentazione a partire da una di $\mathfrak{r}_{i-1}$ e quindi una rappresentazione di $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ fedele su $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ a partire da una rappresentazione fedele di $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Infine applichiamo il teorema di Levi ed il lemma per indurre una rappresentazione di $\mathfrak{g}$ fedele sul centro, che era quanto richiesto per avere il teorema di Ado.

Resta solo da provare il lemma, il che è facile: infatti se σ è una rappresentazione di $\mathfrak{r}$ e se consideriamo $\rho = \sigma \oplus \mathrm{ad}$ (ove ad è la rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{h}$: $\mathrm{ad} : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{h})$) allora otteniamo una rappresentazione di $\mathfrak{g}$ il cui nucleo è

$$\ker \rho = \ker \sigma \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$$

cioè $\mathfrak{r} \cap \ker \rho = \ker \sigma$.

QED

Un simile risultato è falso per i gruppi di Lie: concludiamo la nostra discussione fornendo un esempio di gruppo di Lie non di matrici.

Osserviamo intanto che un gruppo discreto è certamente un gruppo di Lie, di dimensione zero (ogni punto $\{g\}$ è una carta locale con la mappa $g \longmapsto 0$ come coordinata), e che la sua algebra di Lie è 0.

16.3.19 Definizione *Un gruppo di Lie G si dice* semplice *se non è abeliano e se ogni suo sottogruppo normale è di dimensione zero (e quindi, se è chiuso, è discreto).*

In particolare, a differenza dei gruppi per sé presi, un gruppo di Lie può essere semplice anche se ha centro non banale: basta che questo centro sia discreto; si noti che un gruppo è semplice se e solo se lo è la sua algebra: questo suggerisce anche la

16.3.20 Definizione *Un gruppo di Lie G è* semisemplice *se lo è la sua algebra di Lie $L(G)$.*

Notiamo che $\pi : G \longrightarrow GL(V)$ una rappresentazione di un gruppo di Lie ne induce una dell'algebra: infatti, per funtorialità, se $\varphi : G \longrightarrow H$ è un omomorfismo di gruppi di Lie, il diagramma

$$\begin{tikzcd} L(G) \arrow[r, "L(\varphi)"] \arrow[d, "\exp"'] & L(H) \arrow[d, "\exp"] \\ \mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi"'] & \mathfrak{h} \end{tikzcd}$$

è commutativo

16.3.21 Teorema *Il centro di un gruppo semisemplice di matrici è finito.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo $A \in G$, gruppo di matrici in $GL(V)$: dato che A commuta con ogni elemento di G, commuta anche con ogni elemento della sua algebra di Lie (tramite l'esponenziale) e dato che l'algebra di Lie di G è semisemplice, per il teorema di Weyl, possiamo decomporre V in somma diretta di sue rappresentazioni irriducibili

$$A = A_1 \oplus ... \oplus A_n$$

Ora usiamo il lemma di Schur per dedurre che $A_i = \lambda_i I$, con $\lambda_i \in \mathbb{C}$: che i coefficienti siano complessi non è un problema, dato che possiamo immergere V nello spazio complesso $V^{\mathbb{C}} = V \oplus iV$ preservando l'irriducibilità della rappresentazione. Le matrici della forma A_i sono un sottogruppo G_i di G, quindi, dato che $[G, G] = G$, anche $[G_i, G_i] = G_i$ e quindi G_i è composto da matrici di determinante 1. Quindi $\det A_i = 1$ cioè esistono $n_i \in \mathbb{N}$ tali che

$$\lambda_i^{n_i} = 1$$

Dunque λ_i è una radice n_i-esima di $1 \in \mathbb{C}$; ne esiste solo un numero finito, quindi anche di matrici A_i ne esiste solo un numero finito e, per conseguenza, esiste solo un numero finito di matrici A nel centro di G.

QED

Quindi un gruppo di Lie semisemplice che possegga centro infinito non può essere un gruppo di matrici: diamone un esempio, ma prima svolgiamo qualche osservazione generale.

16.3.22 Lemma *Sia G un gruppo topologico connesso.*

- *G non possiede sottogruppi aperti distinti da G stesso.*
- *Ogni intorno V di $e \in G$ genera il gruppo G.*
- *Un sottogruppo discreto normale K di G sta nel centro di G.*

DIMOSTRAZIONE: (1): Poiché H è aperto, ogni laterale sinistro gH di H è aperto (dato che $L_g : h \longmapsto gh$ è un omeomorfismo) e quindi l'insieme

$$\bigcup_{g \neq e} gH$$

è aperto, essendo unione di aperti; ma si tratta del complementare di H, che quindi risulta essere chiuso. Dato che G è connesso e $H \neq \emptyset$, è $H = G$ (si noti che abbiamo in generale dimostrato che in un gruppo topologico qualsiasi, un sottogruppo aperto è anche chiuso).

(2) Sia H il sottogruppo generato da V: si tratta di un sottogruppo aperto per definizione e, per (1), $H = G$.

(3) Sia $k \in K$ e U un intorno di k non contenente altri elementi di K; per continuità della mappa $g \longmapsto g^{-1}kg$ esiste un intorno V di e tale che $V^{-1}kV \subset U$. Ma K è normale in G e $U \cap K = \{e\}$, quindi

$$\forall h \in V \quad h^{-1}kh = k$$

e quindi il sottogruppo Z_k degli elementi di G che commutano con k contiene l'intorno V, che genera G per (2), e quindi $Z_k = G$, pertanto k sta nel centro di G.

QED

Consideriamo ora il gruppo di Lie $SL_n(\mathbb{R})$: la sua algebra di Lie è

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr} A = 0\}$$

Notiamo che $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$ allora $\operatorname{tr}[A, B] = 0$ e quindi $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ è un ideale in $M_n(\mathbb{K})$; dunque

16.3.23 Proposizione *L'algebra di Lie $M_n(\mathbb{K})$ non è semplice.*

a differenza del caso associativo. Dimostriamo ora la semplicità di $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ nel caso più facile di $n = 2$.

Scriviamo una base di $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il prodotto di Lie è completamente determinato dalle relazioni

$$[E, F] = H \qquad [H, E] = 2E \qquad [H, F] = -2F$$

In altri termini, E e F sono autovettori per l'applicazione lineare $L_H(X) = [H, X]$ di autovalori 2 e -2; sia ora I un ideale non nullo e

$$A = aE + bF + cH$$

un suo elemento non nullo. Allora

$$[E,[E,A]] = [E, bH - 2cE] = -2bE \in I\,,$$
$$[F,[F,A]] = [F, -aH + 2cF] = -2aF \in I$$

Quindi, se $a \neq 0$ oppure $b \neq 0$ abbiamo $E, F \in I$ e quindi $H \in I$, cioè $I = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. Se invece $a = b = 0$ allora $c \neq 0$ e quindi $H \in I$, da cui, dato che $[H, E] = 2E$ e $[H, F] = -2F$, $E, F \in I$ e di nuovo $I = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$.

Dunque il gruppo $SL_2(\mathbb{R})$ è semplice perché lo è la sua algebra di Lie; ricordiamo che si tratta di un gruppo non semplicemente connesso, perché si contrae sul gruppo ortogonale speciale $SO(2) = S^1$ (abeliano) che ha gruppo fondamentale $\mathbb{Z}$. Possiamo quindi considerare il suo rivestimento universale $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$: in generale, se G è un gruppo di Lie connesso, localmente connesso e localmente semplicemente connesso, sappiamo che il suo rivestimento universale $\widetilde{G} \longrightarrow G$ è un gruppo topologico; se G è un gruppo di Lie allora possiamo considerare un suo intorno U di $e \in G$ che sia una carta locale (U, x) e che sia omeomorfo, tramite p, a un intorno $p^{-1}(U)$ di $e_0 \in p^{-1}(e) \in \widetilde{G}$; componendo p con x otteniamo allora delle coordinate locali su $\widetilde{G}$:

16.3.24 Teorema (WEYL) *Il rivestimento universale di un gruppo di Lie G è un gruppo di Lie che ha la stessa algebra di Lie di G (essendo localmente isomorfo a G).*

Quindi il rivestimento universale $\widetilde{SL(2)}$ di $SL(2)$ è un gruppo di Lie la cui algebra di Lie è $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$; tuttavia, dato che la mappa di rivestimento

$$p : \widetilde{SL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow SL_2(\mathbb{R})$$

è un epimorfismo di gruppi di Lie, il nucleo è un sottogruppo normale, che quindi, dato che $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ è semplice, deve essere discreto. Per la (3) del lemma, $\ker p$ sta nel centro di $SL_2(\mathbb{R})$: se dimostriamo che $\ker p$ è infinito, il teorema 16.3.21 implica che $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ non può essere un gruppo di matrici.

Ma il nucleo di p è infinito dato che il gruppo fondamentale di $SL_2(\mathbb{R})$ è $\mathbb{Z}$: infatti, per la decomposizione polare, $SL_2(\mathbb{R})$ è prodotto delle matrici 2×2 simmetriche definite positive (uno spazio contraibile, quindi semplicemente connesso) e di $SO(2) = S^1$, che ha gruppo fondamentale $\mathbb{Z}$. Così il rivestimento universale di $SL_2(\mathbb{R})$ deve contenere il rivestimento universale di $SO(2)$ che è $\mathbb{R}$, e il nucleo di p contiene il nucleo di $\mathbb{R} \longrightarrow S^1$, che è $\mathbb{Z}$.

Quindi $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ non è un gruppo di matrici.

16.4 Teorema di Nelson

Discutiamo da ultimo alcuni risultati che combinano la teoria dei vettori analitici con quella delle algebre di Lie, in particolare un altro fondamentale teorema di Nelson.

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile e $A = A^*$ un operatore autoaggiunto, corrispondente a un gruppo a un parametro $U(t) = e^{iAt}$. Sappiamo che un vettore x è analitico per A se e solo se la funzione $T \longmapsto U(t)$ è la restrizione di una funzione olomorfa in una striscia $\{a+ib \,|\, |b| < \delta\} \subset \mathbb{C}$; ad esempio se x appartiene all'immagine dell'operatore $e^{-\frac{1}{2}A^2}$ allora x è analitico.

Supponiamo ora che A sia completo, i.e. che

$$\forall t \in \mathbb{R}\ BU(t) = U(t)B \Rightarrow B \in \{U(t)\}''_{t\in\mathbb{R}}$$

ovvero

$$U(\mathbb{R})' = U(\mathbb{R})'' = \{f(A) \,|\, f \in C_0(\mathbb{R})\} = \{f(A) \,|\, f \in L^\infty(\mathbb{R}, d\mu)\}$$

con $d\mu$ misura basica. In questo caso $x \in L^\infty(\mathbb{R}, d\mu)$ e

$$(U(t)x)(\lambda) = e^{it\lambda}x(\lambda)$$

e possiamo realizzare $\mathcal{H}$ come $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$; la misura è determinata da

$$(\xi, f(A)\xi) = \int f(\lambda)d\mu(\lambda)$$

Basta cioè conoscerne i momenti

$$(\xi, A^n\xi) = \int \lambda^n d\mu(\lambda)$$

16.4.1 Proposizione *Se per ogni x ciclico consideriamo $\xi = e^{-\frac{1}{2}A^2}x$ allora ξ è ciclico ed analitico per A.*

DIMOSTRAZIONE: Vediamo che ξ è ciclico. Se

$$\forall f \in C_0(\mathbb{R}) \quad (y, f(A)e^{-\frac{1}{2}A^2}x) = 0$$

allora $(e^{-\frac{1}{2}A^2}y, f(A)x)$; ma $\{f(A)x\}$ è denso (e $e^{-\frac{1}{2}A^2}$ è autoaggiunto), sicché

$$e^{-\frac{1}{2}A^2}y = 0$$

che, siccome $e^{-\frac{1}{2}A^2}$ è iniettiva, implica $y = 0$.

Per mostrare che ξ è analitico basta provare che

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} A^n e^{-\frac{1}{2}A^2}$$

è convergente nella norma uniforme degli operatori: ed infatti

$$\left|\left|A^n e^{-\frac{1}{2}A^2}\right|\right| \leq \sup_s \left|s^n e^{-\frac{1}{2}s^2}\right| = \sqrt{\frac{n}{e}}$$

(derivando e valutando in $s = 0$). Ma $e^{-\frac{1}{2}s^2} s^n$ è limitata, e, dato che il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \sqrt{\frac{n}{e}}$$

è infinito, si ha l'analiticità di ξ.

QED

Estendiamo ora la teoria svolta per un singolo A ad una famiglia finita commutativa: consideriamo cioè una famiglia $\{A_1, ..., A_n\}$ di operatori permutabili, nel senso che le famiglie spettrali commutano a due a due e $\{A_1, ..., A_n\}$ è completa. Per $f_1, ..., f_n \in C_0(\mathbb{R})$:

$$C^*(A_1, ..., A_n) = C^*(f_1(A_1), ..., f_n(A_n))$$

è una C*-sottoalgebra commutativa di $C^*(U_1, ..., U_n)$ (trasformate di Cayley) e si trova che

$$C^*(A_1, ..., A_n) = C_0(j\sigma(f_1(A_1), ..., f_n(A_n)))$$

(spettro congiunto). La determinazione della misura basica avviene in modo completamente analogo: $A_1^{m_1} ... A_n^{m_n} e^{-\frac{1}{2}(A_1^2 + ... + A_n^2)}$ è limitato e i momenti sono

$$(\xi, A_1^{m1} ... A_n^{m_n} \xi) = \int \lambda^{m_1} ... \lambda^{m_n} d\mu(\lambda)$$

e

$$(\xi, e^{i(t_1 A_1^{m1} + ... + t_n A_n^{mn})} \xi) = \int e^{i(\lambda, t)} d\mu(t)$$

(trasformata di Fourier).

Enunciamo da ultimo il fondamentale teorema di Nelson che generalizza ai gruppi di Lie quello che abbiamo visto in dettaglio nel caso di gruppi a un parametro.

Se G è un gruppo di Lie connesso, è generato da un suo intorno dell'identità: a meno di estendere con traslazioni del gruppo possiamo quindi definire i concetti che non dipendono dalla topologia di G (dalla sua struttura globale) supponendo che i suoi elementi siano della forma $\exp tX$ con $X \in L(G)$ (algebra di Lie del gruppo) e $t \in \mathbb{R}$; ad esempio, se $U : G \longmapsto \mathcal{U}(\mathcal{H})$ è una rappresentazione unitaria (fortemente continua) in uno spazio di Hilbert di G, per ogni $X \in L(G)$ abbiamo

$$U(\exp tX) = e^{iJ_X t}$$

(teorema di Stone) ove J_X è autoaggiunto e

$$[J_X, J_Y] = iJ_{[X,Y]}$$

Cioè le rappresentazioni unitarie fortemente continue di G inducono rappresentazioni dell'algebra di Lie $L(G)$. Il teorema di Nelson stabilisce delle condizioni per invertire questa corrispondenza ed "integrare" le rappresentazioni dell'algebra al gruppo: in altri termini, dato J_X autoaggiunto vogliamo determinare U. Ovviamente, in generale, questo non sarà possibile: ad esempio basta considerare $G = U(1) = S^1$, per il quale $e^{iAt} = I$ solo se $t \in 2\pi\mathbb{Z}$; in questo caso la difficoltà è legata alla impossibilità di sollevare in modo unico la rappresentazione, che è conseguenza della struttura topologica di S^1.

Partiamo quindi da una rappresentazione J di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ nello spazio degli operatori hermitiani di uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$: ad ogni $X \in \mathfrak{g}$ associamo un J_X, in modo che

$$[J_X, J_Y] = iJ_{[X,Y]}$$

Dato che l'algebra $\mathfrak{g}$ ha dimensione finita, fissata una sua base $(X_1, ..., X_n)$ il suo commutatore è determinato dalle costanti di struttura

$$[X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}^k X_k$$

Possiamo in particolare scrivere

$$J_X = \sum c_i J_i$$

ove $J_i = J_{X_i}$. Poichè data $\mathfrak{g}$, la teoria di Lie ci dice che esiste un unico gruppo di Lie connesso semplicemente connesso G tale che $L(G) = \mathfrak{g}$, non è sorprendente che dovremo richiedere queste proprietà topologiche.

Poiché l'algebra di Lie viene rappresentata in un'algebra di operatori, ha senso considerare, fissata una base $(X_1, ..., X_n)$ di $\mathfrak{g}$ l'algebra generata da

$$X_i \qquad \text{e} \qquad H_{ij} = X_i X_j + X_j X_i$$

Denoteremo con $\mathcal{U}_2$ questa algebra associativa[3]: si tratta di un'algebra di dimensione finita, al più $n + n(n+1)/2$.

[3]Si tratta di una sottoalgebra dell'algebra inviluppante universale di $\mathfrak{g}$: cfr. [10].

16.4.2 Teorema (Nelson) *Se G è un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso e J è una rappresentazione di $L(G)$ nello spazio degli operatori hermitiani su $\mathcal{H}$ in modo che il dominio $\mathcal{D}$ di J_X ($X \in L(G)$) sia invariante rispetto alla rappresentazione (i.e. $J_X\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$) e che valgano le condizioni seguenti*

- $[J_X, J_Y] = iJ_{[X,Y]}$
- $\Delta = \sum_k J_k^2$ *è essenzialmente autoaggiunto su $\mathcal{D}$.*

Allora esiste un'unica rappresentazione unitaria fortemente continua $U : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ tale che

$$U(\exp tX) = e^{iJ_X t}$$

Dimostrazione: Scriviamo $J_i := J_{X_i}$ e consideriamo

$$\xi = J_1 + ... + J_n$$

Dimostriamo intanto che, se $\alpha = \Delta - I$ allora esiste c tale che, per ogni x:

$$(*) \qquad ||\xi x|| \leq c||\alpha x|| \qquad \text{e} \qquad ||(ad_\xi)^n \alpha x|| \leq c^n||\alpha x||$$

(ove ad_ξ è l'azione aggiunta). Infatti, per la disuguaglianza di Schwartz:

$$\begin{aligned}\sum_i ||J_i x||^2 =& \sum (Jx_i, Jx_i) = (-\Delta x, x) \leq (\left(\frac{1}{2}\Delta^2 - \Delta + \frac{1}{2}\right) x, x)\\ =&(\frac{1}{2}(\Delta - I)^2 x, x) = \frac{1}{2}||(\Delta - I)x||^2\end{aligned}$$

cioè

$$\sum_i ||J_i x|| \leq \sqrt{\frac{n}{2}}||(\Delta - I)x||$$

Consideriamo ora l'algebra $\mathcal{U}_2$ generata da J_i e $H_{ij} = J_iJ_j + J_jJ_i$ e notiamo che, rispetto alla norma

$$|||B||| := \inf\{k \,|\, \forall x \; ||B|| \leq k||\alpha x||\}$$

è un'algebra di Banach.

Per definizione $\mathcal{U}_2$ è stabile rispetto a ad_{J_i} e quindi esistono delle costanti $c_1, ..., c_n$ tali che

$$|||ad_{J_i} B||| \leq c_i|||B|||$$

Per $c = n \max c_i$ otteniamo cioè

$$||(ad_\xi)^n \alpha x|| = \sum_{i_1 ... i_n} ||ad_{J_n ... J_i} \Delta x|| \leq ||c_{i_1} ... c_{i_n} \alpha x|| \leq c^n||\alpha x||$$

Da cui la (*).

Ora consideriamo la chiusura $\overline{\Delta}$ dell'operatore Δ, una sua famiglia spettrale $E(\lambda)$ e l'insieme

$$\mathfrak{B} = \{x \in \mathcal{H} \,|\, \exists\Phi \text{ boreliano } E(\Phi)x = x\}$$

Per il teorema spettrale possiamo dedurre che

$$\mathfrak{B} \subset \bigcap \mathcal{D}(\overline{\Delta^n}) \qquad \text{e} \qquad \overline{\mathfrak{B}} = \mathcal{H}$$

e che la serie

$$\sum_{n\geq 0} \frac{||\widetilde{\alpha}^n x||}{n!} s^n$$

converge per $s \geq 0$, ove $\widetilde{\Delta}$ è la restrizione di $\overline{\Delta}$ all'intersezione $\cap\mathcal{D}(\overline{\Delta^n})$ e $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\Delta} + I$.

Quindi, per $X \in \mathfrak{g}$, iJ_X è essenzialmente autoaggiunto (ogni vettore analitico per ξ lo è per X). Ora consideriamo l'unico gruppo di Lie connesso semplicemente connesso G la cui algebra di Lie è $\mathfrak{g}$, e un intorno N_e di $e \in G$ nel quale exp è un diffeomorfismo: allora il prodotto del gruppo è determinato, in N_e, dal prodotto dell'algebra

$$\exp X \exp Y = \exp Z$$

con $Z \in \exp^{-1} N_e$; se x è tale che

$$\sum_{n\geq 0} \frac{||J^n_{X+Y} x||}{n!} s^n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{||J^n_Z x||}{n!} s^n$$

convergono allora possiamo "integrare" la rappresentazione J ad una rappresentazione U di G definita in N come

$$U(\exp X) = e^{iJ_X}$$

in modo che, in U:

$$U(g)U(h) = U(gh)$$

Ma sappiamo che questo è vero su un insieme denso $\mathfrak{B} \subset \mathcal{H}$ e quindi, nell'intorno N, possiamo effettivamente definire la rappresentazione $U_G : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$: per connessione del gruppo questa si estende a tutto il gruppo G e per semplice connessione questa estensione è unica. Abbiamo quindi la rappresentazione cercata.

QED

Questo teorema vale anche se la (2) è sostituita dalla

(2′) Ogni $x \in \mathcal{D}$ è un vettore analitico per J_k.

Per discussione più approfondita si vedano: E. Nelson, *Annals of Math.* 70 (1959), B. Simon *Comm. Math. Phys.* 28 (1972) oppure J. Frölich, *Comm. Math. Phys.* 54 (1977).

Capitolo 17

SISTEMI QUANTISTICI

In questo capitolo introduciamo l'approccio di von Neumann alla Meccanica Quantistica (cfr. [24]) e mostriamo come questo possa inquadrarsi nella teoria delle rappresentazioni delle C*-algebre da noi precedentemente trattata (capitolo **??**). Introdurremo nel nostro linguaggio i concetti di base della Meccanica Quantistica, ponendo l'accento sul concetto di simmetria, ed utilizzandolo per dare la formulazione relativistica dell'equazione di Schrödinger, data da Dirac. Utilizzeremo alcune nozioni di Relatività Ristretta, almeno una familiarità con i termini: talora utilizzeremo risultati della letteratura non completamente dimostrati in queste note; comunque, come si vedrà, il formalismo delle algebre di Lie introdotto nel capitolo **??** interverrà pesantemente.

17.1 Stati ed osservabili

Consideriamo di un sistema fisico un numero molto grande N di copie, che per definizione si chiama *ensemble*: si consideri inoltre un numero $N' \ll N$ di copie dell'ensemble, e si immagini di eseguire N' misure secondo le procedure di misura in modo da ottenere $\ell_1, \ldots, \ell_{N'}$ valori, che sono proprietà dell'ensemble, posto che gli N' campioni siano scelti a caso e N' sia abbastanza grande.

Il valore ottenuto si dice *attesa* (*expectation*), e si denota Exp.

17.1.1 Definizione *Dato un sistema fisico definiamo:*

- *Gli* stati *del sistema sono le classi di equivalenza di ensemble modulo la relazione*

$$\Omega \approx \Omega' \iff \textit{per ogni procedura } A \quad \mathrm{Exp}(\Omega, A) = \mathrm{Exp}(\Omega', A)$$

- *Gli* osservabili *sono le classi di equivalenza di procedure modulo la relazione*

$$A \approx A \iff \textit{per ogni ensemble } \Omega \quad \mathrm{Exp}(\Omega, A) = \mathrm{Exp}(\Omega, A')$$

Denotiamo l'insieme degli stati con $\mathcal{S}$ e l'insieme degli osservabili con $\mathcal{O}$.

Possiamo supporre che $\mathcal{S}$ sia un insieme convesso: infatti

$$\forall\Omega,\Omega'\in\mathcal{S}\ \forall\alpha,\beta\geq 0\quad \alpha+\beta=1\Rightarrow\alpha\Omega+\beta\Omega'\in\mathcal{S}$$

Questo può vedersi nel seguente modo: se $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$ allora è

$$\alpha=\frac{N_1}{N}\qquad\text{e}\qquad\beta=\frac{N_2}{N}$$

e, preso $N\gg 0$ tale che N_1 e N_2 siano le cardinalità di due ensemble Ω_1 e Ω_2 e se Ω_1 e Ω_2 sono le rispettive classi di equivalenza, allora

$$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$$

è ancora un ensemble: dunque, se Ω è la sua classe di equivalenza:

$$\Omega=\alpha\Omega_1+\beta\Omega_2$$

La funzione

$$\varphi\longmapsto\operatorname{Exp}(\varphi,A)$$

è convessa. Infatti se si considerano n_1 campioni in Ω_1 e n_2 campioni in Ω_2, il numero di campioni prelevati in Ω è $n=n_1+n_2<N$, sicché

$$\frac{n_1}{n}=\frac{N_1}{N}\qquad\text{e}\qquad\frac{n_2}{n}=\frac{N_2}{N}$$

Se i campioni sono scelti a caso, abbiamo che

$$\begin{aligned}\operatorname{Exp}(\varphi,A)=&\frac{\ell_1+...+\ell_{n_1}+\ell_1'+...+\ell_{n_2}'}{n}=\frac{n_1}{n}\frac{\ell_1+...+\ell_{n_1}}{n_1}+\frac{n_2}{n}\frac{\ell_1'+...+\ell_{n_2}'}{n_2}\\=&\frac{n_1}{n}\operatorname{Exp}(\Omega_1,A)+\frac{n_2}{n}\operatorname{Exp}(\Omega_2,A)=\alpha\operatorname{Exp}(\Omega_1,A)+\beta\operatorname{Exp}(\Omega_2,A)\end{aligned}$$

Avrà interesse considerare i punti estremali di questo insieme convesso $\mathcal{S}$, che chiameremo *stati puri*.

Ora consideriamo gli osservabili: se $A\in\mathcal{O}$, consideriamo lo *spettro fisico* di A, vale a dire l'insieme $\sigma_{ph}(A)$ dei valori (si tratta di numeri reali) delle possibili misurazioni di A. Compatibilmente con la nozione di misurazione di una grandezza, questo insieme sarà supposto limitato in $\mathbb{R}$, ed anziché considerare i suoi punti, sarà fisicamente più significativo limitarsi a parlare degli intorni dei suoi punti, per tener conto dell'errore sistematico che affligge ogni misura. (Come regola empirica osserviamo anche che due misure *immediatamente successive* di uno stesso osservabile devono coincidere).

L'altra ipotesi che si farà su $\sigma_{ph}(S)$ è che sia chiuso in $\mathbb{R}$, e quindi compatto. Ora è chiaro che, per calcolare il valore di una funzione f su un osservabile A, bisognerà misurare A per trovare $\ell \in \sigma_{ph}(A)$ e quindi calcolare $f(\ell)$: poiché come abbiamo detto, consideriamo i punti dello spettro fisico sempre associati ad un proprio intorno, diciamo l'intorno di raggio ϵ del punto ℓ, la funzione f deve essere uniformemente continua, in modo che se ℓ e ℓ' differiscono per δ_ε, si avrà $|f(\ell) - f(\ell')| < \varepsilon$. Dato che $\sigma_{ph}(A)$ è compatto la richiesta su f è che sia continua, così

$$\sigma_{ph}(f(A)) = f(\sigma_{ph}(A))$$

Quindi, fissati $A \in \mathcal{O}$ e $\Omega \in \Sigma$ possiamo calcolare $Exp(\Omega, f(A))$ per una qualsiasi funzione continua f ed avere così un funzionale lineare positivo:

$$f \longmapsto \mathrm{Exp}(\Omega, f(A))$$

Positivo significa che $\sigma_{ph}(A) \subset [0, \infty)$ e $\mathrm{Exp}(\Omega, A) \geq 0$ per ogni Ω. Allora il teorema di Riesz–Markov ci dice che

$$\mathrm{Exp}(\Omega, f(A)) = \int f(\ell) d\mu_{\Omega,A}(\ell)$$

In particolare, se $Q \in \mathcal{O}$ è tale che sia $\sigma_{ph}(Q) \in \{0, 1\}$, si dice una *questione*, e verifica la

$$\mathrm{Exp}(\Omega, Q) = \frac{n_1}{n}$$

ove n_1 è il numero di volte in cui si trova il valore 1 in n misurazioni e quindi l'attesa della questione è la probabilità che la risposta alla questione sia "sì" ($Q = 1$). Ora, se $A \in \mathcal{O}$, l'insieme

$$\{f(A) \mid f \in C(\sigma_{ph}(A))\}$$

è una $\mathbb{R}$-sottoalgebra di $\mathbb{R}$: se f è boreliana, ad esempio $f = \chi_\Delta$ ove Δ è un boreliano, si ha

$$\mathrm{Exp}(\Omega, \chi_\Delta(A)) = \mu_{\Omega,A}(\Delta)$$

Notiamo che se A e B sono osservabili qualsiasi può non aver senso considerare $A + B$ o AB: ma se A e B sono *compatibili* (cioè se le misurazioni nelle classi A e B si possono eseguire simultaneamente in modo non contraddittorio) allora $A + B$ e AB hanno come misurazioni la somma ed il prodotto delle misurazioni di A e B: in particolare, se $A + B$ è definita si ha

$$(A, B) \longmapsto \frac{1}{2}(A + B)^2 - A^2 - B^2 =: A \circ B$$

che si dice *prodotto di Jordan* di A e B.

Per procedere dovremo ora, dopo questi preliminari, fare delle ipotesi sulla natura matematica degli oggetti che andiamo considerando: postuleremo quindi che[1]

17.1.2 Assiomi

- $\Sigma = \Sigma(\mathcal{A})$ *sia l'insieme degli stati di una* C^**-algebra* $\mathcal{A}$.
- $\mathcal{O} = \mathcal{A}_{aa}$ *sia la parte autoaggiunta di* $\mathcal{A}$.
- $\mathrm{Exp}(\Omega, A) = \langle\Omega|A\rangle$.

(scriviamo $\langle\Omega|A\rangle$ *per* $\Omega(A)$.*)*

Quindi Extr $\Sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(\mathcal{A})$ sono gli stati puri di $\mathcal{A}$, $\sigma_{ph}(A) = \sigma(A)$ ed il calcolo di funzioni sullo spettro altro non è che il calcolo funzionale.

Per giustificare quest'ultima asserzione si può procedere nel seguente modo: $\ell \in \sigma_{ph}(A)$ se esiste un Ω tale che A misurato nello stato Ω dia con certezza il valore ℓ, cioè, considerando lo scarto medio

$$(\Delta_\Omega A)^2 := \langle\Omega|(A - \langle\Omega|A\rangle I)^2\rangle$$

(qui I è l'identità che corrisponde al non fare misurazione alcuna) la certezza di trovare ℓ si esprime come

$$\Delta_\Omega = 0$$

cioè

$$(\Delta_\Omega A)^2 = \langle\Omega|A^2\rangle - (\langle\Omega|A\rangle)^2 = 0$$

e quindi, considerando la rappresentazione GNS

$$(\xi, \pi((A - \Omega(A)I)^2)\xi) = ||\pi(A)(\xi - \Omega(A)\xi)||^2$$

si trova che

$$(\Delta_\Omega A)^2 = 0 \iff \xi - \Omega(A)\xi \text{ è un autovettore di } \pi(A)$$

cioè se e solo se Ω è uno stato puro: $\pi(f(A))\xi = f(\Omega(A))(\xi)$, ovvero $\langle\Omega|f(A)\rangle = f(\Omega(A))$, ovvero $\Omega(A) \in \sigma(A)$.

Ne concludiamo che

$$\ell \in \sigma_{ph}(A) \iff \exists\Omega \in \Sigma \quad \Delta_o A = 0,\, \Omega(A) = \ell \iff \ell \in \sigma_(A)$$

e quindi che $\sigma_{ph}(A) = \sigma(A)$.

[1] Si rammentino le nozioni del capitolo **??**.

Osserviamo che, se $\mathcal{A}$ è commutativa, allora può vedersi come l'insieme delle funzioni continue su uno spazio topologico compatto Ω (ammettendo che $1 \in \mathcal{A}$) e quindi gli osservabili sono funzioni continue e gli stati misure regolari di probabilità su Ω e

$$\operatorname{Exp}(\Omega, A) = \int_\Omega A(\varphi)d\mu(\varphi)$$

L'insieme Ω corrisponde cioè allo spazio delle fasi e gli stati puri alle misure di Dirac: come si vede, in questo caso in ogni stato puro ogni osservabile assume un valore certo.

In generale, per motivi fisici, l'insieme degli stati puri non sarà l'intero $\Sigma(\mathcal{A})$, ma un suo sottoinsieme Σ. Se consideriamo l'algebra inviluppante di von Neumann $\mathcal{A}^{**}$ di $\mathcal{A}$, allora gli elementi di $\mathcal{A}^{**}_{aa}$ saranno considerati osservabili generalizzati, dato che, per $B \in \mathcal{A}^{**}_{aa}$, in virtù del Teorema di Kaplanski 11.4.2, B è limite forte delle immagini, via la rappresentazione universale $\widehat{\pi}$ di elementi $A_\alpha \in \mathcal{A}_{aa}$ e $||a_\alpha|| \leq ||B||$. Quindi per ogni stato $\Omega \in \Sigma(\mathcal{A})$ esiste un'unica estensione normale $\widehat{\Omega} \in \widehat{\pi}(\mathcal{A})''_* = \mathcal{A}^*$ tale che $\widehat{\Omega}(B)$ sia il limite forte degli $\Omega(A_\alpha)$, che si dice *valor medio* dell'osservabile.

Se ora E è un elemento di $\mathcal{A}$ tale che $E = E^2 = E^*$ allora è una questione e, per ogni stato Ω, $\Omega(E)$ è la misura di probabilità che E abbia risposta affermativa nello stato Ω. Se $\Omega(E) = 1$ si dice che Ω possiede la proprietà descritta da E.

Denotando con $P_\Omega \in \mathcal{A}^{**}$ il più piccolo idempotente autoaggiunto che verifichi la

$$\widehat{\Omega}(P) = 1$$

(si dice *proprietà caratteristica* di Ω), ricordiamo che la probabilità di transizione da uno stato φ ad uno stato Ω è la

$$P_{\varphi,\Omega} = \widehat{\varphi}(P_\Omega)$$

(si tenga presente che $P_{\varphi,\Omega} = 1$ *non* implica che $\varphi = \Omega$ a meno che non si tratti di stati puri).

17.1.3 Lemma *$P_\Omega \in \mathcal{A}^{**}$ è minimale fra i proiettori di $\mathcal{A}^{**}$ se e solo se Ω è uno stato puro.*

DIMOSTRAZIONE: È noto che

$$P_\Omega \widehat{\mathcal{H}} = \{\xi \in \widehat{\mathcal{H}} \mid (\xi, \widehat{\pi}(-)) \in \overline{\mathcal{C}_\Omega}\}$$

ove $\overline{\mathcal{C}_\Omega}$ denota la chiusura in norma degli stati dominati da Ω. Ricordiamo inoltre che $\mathcal{C}_\Omega = \{\Omega\}$ se e solo se Ω è puro.

Ora, sia Ω puro e $P \leq P_\Omega$ un proiettore. Ne segue che, se $\xi \in P\widehat{\mathcal{H}} \subset P_\Omega\widehat{\mathcal{H}}$ si ha che $(\xi, \widehat{\pi}(-)\xi) = \Omega$ (per quanto appena ricordato) e $\widetilde{\Omega}(P) = (\xi, P\xi) = 1$. Ma P_Ω è il più piccolo proiettore che verifichi questa relazione e quindi $P_\Omega \subset P$.

Viceversa, se P_Ω è minimale, allora $P_\Omega\widehat{\pi}(\mathcal{A})''P_\Omega$ è un'algebra di von Neumann, alla quale possiamo applicare il

Lemma. *Se $\mathcal{R}$ è un'algebra di von Neumann, e per $E\in\mathcal{R}$ definiamo $\mathcal{R}_E := E\mathcal{R}E$ e $\mathcal{R}'_E := \mathcal{R}'E$, allora $\mathcal{R}_E$ e $\mathcal{R}'_E$ sono algebre di von Neumann e sono l'una il commutante dell'altra.*

e dedurre che $P_\Omega\widehat{\pi}(\mathcal{A})''P_\Omega = \mathcal{A}P_\Omega$. Quindi per ogni ξ nell'immagine di P_Ω ed ogni T in $P_\Omega\widehat{\pi}(\mathcal{A})''P_\Omega$ si ha

$$(\xi, T\xi) = \widetilde{\Omega}(T)P_\Omega$$

cioè

$$(\xi, \widehat{\pi}(A)\xi) = \Omega(A)$$

e quindi Ω è uno stato puro.

QED

Possiamo allora dedurre che

$$\widehat{\varphi}(P_\Omega) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \Omega$$

Ora siano $A, B \in \mathcal{A}_{aa}$, e definiamo $C \in \mathcal{A}_{aa}$ come

$$iC := AB - BA$$

Se $\Omega \in \Sigma(\mathcal{A})$ vogliamo associare a Ω le indeterminazioni in A e B: $\Delta_\Omega A$ e $\Delta_\Omega B$: queste grandezze sono importanti, perché se $\Delta_\Omega A \neq 0$ si dice che A subisce una *fluttuazione quantistica* in Ω.

17.1.4 Teorema (RELAZIONI DI HEISENBERG)

$$\Delta_\Omega A \cdot \Delta_\Omega B \geq \frac{1}{2}|\Omega(C)|$$

DIMOSTRAZIONE: Se definiamo $A' := A - \Omega(A)I$ allora:

$$A'B' - B'A' = iC$$

e quindi

$$|\Omega(A'B' - B'A')| = |\Omega(C)|$$

Ma, osservando che se A è autoaggiunto, anche A' lo è, e che $\overline{\Omega(A'B')} = \Omega((A'B')^*) = \Omega(B'A')$ si trova

$$\begin{aligned} 2|\operatorname{Im}\Omega(A'B')| =& |\Omega(A'B') - \overline{\Omega(A'B')}| = |\Omega(A'B') - \Omega(B'A') \\ \leq& |\Omega(A'B')| + |\Omega(B'A')| \end{aligned}$$

per cui, tenendo conto della diseguaglianza di Schwartz e dell'autoaggiunzione di A e B:

$$\frac{1}{2}|\Omega(C)| \leq |\Omega(A'B')| \leq \Omega(A'^2)^{\frac{1}{2}}\Omega(B'^2)^{\frac{1}{2}} = \Delta_\Omega A \cdot \Delta_\Omega B$$

QED

Osserviamo che, avendosi per $||\pi_\Omega(T)\xi_\Omega|| = \Omega(T^*T)^{\frac{1}{2}}$:

$$\Delta_\Omega A = ||\pi_\Omega(A)\xi_\Omega - \Omega(A)\xi_\Omega||$$

lo scarto quadratico è zero se e solo se ξ_Ω è un autovettore.

17.1.5 Corollario *A e B sono osservabili compatibili se e solo se $[A, B] = 0$.*

DIMOSTRAZIONE: Che la condizione sia sufficiente segue dal teorema di Heisenberg. Dimostriamo che è necessaria: siano dapprima $\sigma(A)$ e $\sigma(B)$ insiemi finiti, cioè

$$A = \sum_i \ell_i P_i \qquad \text{e} \qquad B = \sum_i \mu_i F_i$$

con $\{P_i, F_j\}$ idempotenti autoaggiunti. Dimostriamo che A e B sono compatibili, cioè che esiste un $G \in \mathcal{A}_{aa}$ tale che, per opportune funzioni f e g si abbia

$$A = f(G) \qquad \text{e} \qquad B = g(G)$$

Ma se $G := A + aB$, e se poniamo

$$f(\ell_i + a\mu_j) := \ell_i \qquad \text{e} \qquad g(\ell_i + a\mu_j) := \mu_j$$

allora $f(G) = A$ e $g(G) = B$.

Il caso generale si dimostra in modo analogo per mezzo del seguente risultato di analisi reale:

Teorema. *Per ogni coppia di operatori autoaggiunti A e B in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ tali che $AB = BA$ esiste un operatore G autoaggiunto e due funzioni boreliane f e g tali che $f(G) = A$ e $f(G) = B$.*

che non dimostreremo.

QED

La non-commutatività di una C*-algebra è equivalente all'esistenza di sue rappresentazioni irriducibili di dimensione maggiore di uno, come è ovvio osservare se si considera la rappresentazione

$$A \longmapsto \bigoplus_{\xi \in \widehat{\mathcal{A}}} \pi_\xi(A)$$

che è fedele: in effetti, se ogni rappresentazione irriducibile fosse di dimensione 1, renderebbe $\mathcal{A}$ sottoalgebra di un'algebra commutativa e quindi a sua volta commutativa.

Fatta questa precisazione, consideriamo una rappresentazione π della nostra C*-algebra $\mathcal{A}$ nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}_\pi$: sappiamo che questo dato ci fornisce una famiglia di stati puri

$$\mathbb{P}\mathcal{H}_\pi \longleftrightarrow \mathcal{V}_\pi \subset \mathcal{P}(\mathcal{A})$$

(stati vettoriali), ove con $\mathbb{P}$ indichiamo lo spazio proiettivo associato ad uno spazio vettoriale dato. Se $\xi, \eta \in \mathcal{H}_\pi$ hanno norma 1, e se definiamo gli stati associati

$$\xi \longmapsto \Omega := (\xi, \pi(-)\xi)\,, \qquad \eta \longmapsto \varphi := (\xi, \pi(-)\xi)$$

è ovvio che se ξ e η sono linearmente indipendenti allora $\Omega \neq \varphi$ e quindi

$$\dim \mathcal{H}_\pi > 1 \iff \#\mathcal{V}_\pi > 1$$

Se ξ e η sono linearmente indipendenti e $x = a\xi + b\eta$ con $a, b \in \mathbb{C}$ in modo che $||x|| = 1$ allora abbiamo uno stato puro $(x, \pi(-)x)$ e

$$(x, \pi(A)x) = |a|^2(\xi, \pi(A)\xi) + |b|^2(\eta, \pi(A)\eta) + 2\,\mathrm{Re}\,\overline{a}b(\xi, \pi(A)\eta)$$

Il terzo termine del secondo membro di questa eguaglianza è l'*interferenza* nella somma degli stati (in analogia con la teoria delle onde).

Ora, se $\Omega, \varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ sono associate a rappresentazioni non equivalenti allora le sovrapposizioni di Ω e φ non sono stati puri, cioè esiste una rappresentazione π che estende le π_Ω e π_φ per cui esistono $\xi, \eta \in \mathcal{H}_\pi$ tali che

$$(\xi, \pi(-)\xi) = \Omega\,, \qquad (\eta, \pi(-)\eta) = \varphi$$

Allora, se $x = a\xi + b\eta$ $(a, b \in \mathbb{C})$ si ha $(x, \pi(-)x) = |a|^2\Omega + |b|^2\varphi$. Ora dimostriamo che se le rappresentazioni associate agli stati Ω e φ non sono equivalenti, non si ha interferenza.

17.1.6 Proposizione $\forall A \in \mathcal{A} \quad (\xi, \pi(A)\eta) = 0$

DIMOSTRAZIONE: Dato che le rappresentazioni π_Ω e π_φ sono irriducibili, non sono equivalenti se e solo se sono disgiunte cioè se e solo se $(\pi_\Omega, \pi_\varphi) = 0$. Ma sappiamo che sono estese ambedue da una rappresentazione π, i.e. che

$$\pi_\Omega \cong \pi|_{\mathcal{H}_1} \qquad \text{e} \qquad \pi_\varphi \cong \pi|_{\mathcal{H}_2}$$

e quindi i proiettori E_1 ed E_2 su questi sottospazi di Hilbert sono elementi di $\pi(\mathcal{A})'$, per cui

$$(\pi_\Omega, \pi_\varphi) = E_1\pi(\mathcal{A})'E_2$$

Allora le rappresentazioni non sono equivalenti se e solo se

$$E_1\pi(\mathcal{A})'E_2 = 0$$

e quindi ciò implica che i proiettori E_1 e E_2 sono ortogonali: $E_1E_2 = 0$. Ma allora, dato che E_2 è π-stabile, si ha l'asserto.

QED

Osserviamo in particolare che, se le rappresentazioni associate a due stati sono disgiunte, allora $(x, \pi(-)x) = |a|^2\Omega + |b|^2\varphi$, e che quindi si possono sovrapporre solo stati puri di una stessa famiglia $\mathcal{V}_\pi$.

17.1.7 Definizione *Le famiglie* $\mathcal{V}_\pi$ *si dicono* settori di superselezione.

Possiamo riassumere nel seguente modo le osservazioni che abbiamo fin qui collezionato:

17.1.8 Teorema *Se* $\mathcal{A}$ *è una* C^**-algebra e* $\Sigma(\mathcal{A})$ *sono i suoi stati, allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- $\mathcal{A}$ *non è commutativa.*
- *Esistono stati puri con fluttuazioni quantistiche.*
- *Non tutti gli osservabili sono fra loro compatibili.*
- *Esistono rappresentazioni irriducibili di dimensione maggiore di uno.*
- *Esistono settori di superselezione nei quali vale il principio di sovrapposizione.*

Per questo motivo, nel caso commutativo parliamo di teorie classiche, e nel caso non commutativo di teorie quantistiche.

17.1.9 Esempio *Supponiamo di avere un solo settore di superselezione (il che vuol dire che stiamo trattando sistemi dinamici con un numero finito di gradi di libertà), di modo che esista un'unica rappresentazione irriducibile e sia*

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$$

con $\mathcal{H}$ spazio di Hilbert separabile *e $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^{**} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ora, gli osservabili sono elementi autoaggiunti di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e gli stati sono gli stati normali su $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, cioè funzionali positivi normalizzati nel preduale*[2] *$\mathcal{B}(\mathcal{H})_*$, quindi*

$$\Omega(A) = \mathrm{tr}(AT)$$

ove $T \geq 0$ ha traccia 1. Dunque Ω è puro se e solo se T ha rango 1 i.e. se $T = T^* = T^2$ (ed è minimale rispetto a queste condizioni) ed in tal caso $T = P_\Omega$. Inoltre la transizione fra stati è data da

$$P_{\Omega,\varphi} = \mathrm{tr}(TR)$$

ove $\Omega = \mathrm{tr}(T-)$ e $\varphi = \mathrm{tr}(R-)$.

Si noti che gli osservabili $\{A_1, ..., A_n, ...\}$ sono compatibili se e solo se commutano a due a due, e formano un insieme completo se, per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{aa}$ e per ogni i $A_iB = BA_i$, allora $B = f(A_1, ..., A_n, ...)$, cioè se l'algebra di von Neumann generata dalla famiglia $\{A_i\}$ degli osservabili in questione è abeliana massimale.

17.1.10 Esempio *Consideriamo lo spazio di Hilbert $\mathcal{H} = L^2(X, d\mu)$ ove X è lo spettro congiunto degli osservabili $\{A_i\}$ e $d\mu$ è la misura basica, allora a $f(A_1, ...)$ corrisponde l'operatore di moltiplicazione M_f in L^2: in altri termini, la famiglia di osservabili si può simultaneamente diagonalizzare.*

Chiediamoci quale sia il significato di $x \in L^2(X, d\mu)$, ove

$$\int_X |x(\xi)|^2 d\mu(\xi) = 1$$

(identifichiamo gli x e x' se esiste una numero complesso a di modulo 1 tale che $x = ax'$).

Intanto osserviamo che il valor medio di B in x è (x, Bx), e che, se B è una questione, allora questo numero rappresenta la probabilità di trovare la proprietà

[2] Si rammenti che il duale dello spazio degli operatori compatti è lo spazio degli operatori nucleari, cioè quelli per i quali è definita la traccia: il duale dello spazio degli operatori nucleari è esattamente $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

B nello stato puro x. Consideriamo allora $B = M_{\chi_\Delta}$ ove Δ è un insieme μ-misurabile. Così B descrive la proprietà che le misure simultanee degli osservabili $\{A_i\}$ diano un valore ξ in Δ, e la probabilità che ciò sia vero è

$$(x, Bx) = \int_X \overline{x(\xi)} f(\xi) x(\xi) d\mu(\xi) = \int_\Delta \overline{x(\xi)} x(\xi) d\mu(\xi) = \int_\Delta |x(\xi)|^2 d\mu(\xi)$$

Quindi x è una funzione d'onda generalizzata, e se è il vettore ciclico che definisce la misura basica, la densità di probabilità è

$$|x(\xi)|^2 d\mu(\xi)$$

17.2 Gruppi di simmetria

Una *simmetria sugli osservabili* è una trasformazione

$$\eta : \Omega \longrightarrow \Omega$$

che deve godere delle seguenti proprietà:

- essere 1–1 su $\mathcal{O}$.
- essere $\mathbb{R}$-lineare.
- soddisfare alla $\eta(A^2) = \eta(A)^2$.

Se, come stiamo postulando, $\mathcal{O} = \mathcal{A}_{aa}$, allora

$$\eta(A + iB) = \eta(A) + i\eta(B)$$

In particolare

$$\eta\left(\frac{1}{2}(AB + BA)\right) = \frac{1}{2}\left(\eta(A)\eta(B) + \eta(B)\eta(A)\right)$$

Se ora scriviamo $A = A_1 + iA_2$ e $B = B_1 + iB_2$ si ha

$$\{A, B\} := AB + BA = \{A_1, B_1\} - \{A_2, B_2\} + i\left(\{A_1, B_2\} + \{A_2, B_1\}\right)$$

(prodotto di Jordan) e quindi $\eta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ deve essere un isomorfismo di spazi vettoriali complessi tale che

$$\eta(\{A, B\}) = \eta(A)\eta(B) + \eta(B)\eta(A)$$

dunque un automorfismo di algebre di Jordan.

Citiamo, rimandando a [12] per la dimostrazione, il

Teorema. *Se $\mathcal{A}$ è una C*-algebra con centro $\mathbb{C} \cdot I$ allora ogni automorfismo di Jordan η è un automorfismo oppure un antiautomorfismo della C*-algebra (un antiautomorfismo è semplicemente uno *-isomorfismo di spazi vettoriali tale che $\eta(AB) = \eta(B)\eta(A)$).*

17.2.1 Esempio *Se $\mathcal{A} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ (al solito $\mathcal{H}$ spazio di Hilbert separabile) allora*

$$\widetilde{\eta}(A) = UAU^{-1}$$

ove η è un automorfismo antilineare e U un operatore unitario o antiunitario.

E. Wigner ha formulato una definizione di simmetria come una biiezione $\Omega \longrightarrow \Omega'$ sugli stati puri tale che

$$P_{\Omega,\varphi} = P_{\Omega',\varphi'}$$

Il Teorema di Wigner afferma che se $\Omega(A) = (\psi, A\psi)$ allora $\Omega'(A) = (\psi', A\psi')$ ove $\psi' = U\psi$.

17.2.2 Definizione *Un gruppo G si dice* gruppo di simmetrie *di una teoria quantistica se esiste un omomorfismo*

$$\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{A}) \cup \mathrm{AntiAut}(\mathcal{A})$$

(Osserviamo che $\mathrm{AntiAut}(\mathcal{A})$ *non è un gruppo, e che Aut($\mathcal{A}$)* $\lhd$ $\mathrm{Aut}(\mathcal{A}) \cup \mathrm{AntiAut}(\mathcal{A})$ *con indice 2).*

Se $\Omega \in \Sigma$ allora $\Omega\alpha_{g^{-1}}$ è l'azione di $g \in G$ su Ω: $G \times \Sigma \longrightarrow \Sigma$. Quindi, se $A \longmapsto \alpha_g(A) = A'$ si trova che $\Omega'(A') = \Omega(A)$.

17.2.3 Esempio *Consideriamo il gruppo generato da $\{g^2\}_{g\in G}$: allora*

$$\forall g \in G \qquad \alpha_g \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$$

dato che $\alpha_{g^2} = \alpha_g^2$ e quindi gli antiautomorfismi dell'algebra non intervengono.

Tratteremo il caso in cui G sia un gruppo di Lie connesso. È noto che $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ è un gruppo topologico, (è un sottospazio di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$), ed è quindi naturale chiedersi se α sia continua o meno. Se lo è, allora

$$||\alpha_g - 1|| \xrightarrow[g\longrightarrow e]{} 0 \implies \forall\Omega \quad ||\Omega \cdot \alpha_g - \Omega|| \xrightarrow[g\longrightarrow e]{} 0$$

il che fisicamente è inaccettabile. Per chiarire diamo la

17.2.4 Definizione Ω *si dice* stato regolare *per* α *se la sua* orbita è continua*, cioè se, preso* $A \in \mathcal{A}$ *la mappa* $g \longmapsto \alpha_a(A)$ *è continua (vale a dire* $||\alpha_g(A) - A|| \longrightarrow 0$ *per* $g \longrightarrow e$*) sull'orbita di* A*.*

Consideriamo ora l'insieme $U = \{g \mid ||\Omega\alpha_g - \Omega|| < 2\}$, ed osserviamo che se Ω è regolare per α, allora U è un intorno dell'identità del gruppo di Lie G, e che quindi genera G come gruppo (dato che è connesso per ipotesi, cfr. lemma 16.3.22).

Se oltre ad essere regolare, Ω è anche puro, allora gli stati $\Omega\alpha_g$ sono stati vettoriali della rappresentazione GNS π di Ω, cioè: se $g \in U$, la rappresentazione $\pi\circ\alpha_g = \pi_{\Omega\alpha_g}$ è unitariamente equivalente a π, dunque esiste un operatore unitario V_g tale che

$$V_g\pi(A)V_g^{-1} = \pi(\alpha_a(A))$$

e quindi, dato che U genera G, per ogni $g = g_1...g_n \in G$ con $\{g_i\} \subset U$, ponendo $V_g = V_{g_1}...V_{g_n}$ abbiamo ancora un operatore unitario.

In definitiva, quello che richiederemo sarà al più la continuità dell'orbita di un operatore.

Consideriamo di nuovo l'operatore V_g unitario, che è definito a meno di multipli complessi di modulo 1 (e quindi a rigore sullo spazio proiettivo associato allo spazio di Hilbert in questione): ciò significa che, se $V'_g = z(g)V_g$ per $z(g) \in \{|z| = 1\} = \mathbb{T}$ è ancora un operatore unitario (in effetti $V_{g_1g_2}^{-1}V_{g_1}V_{g_2} \in \pi(\mathcal{A})'' = \mathbb{C}$).

17.2.5 Definizione *Una rappresentazione* π *di* $\mathcal{A}$ *si dice* covariante *se esiste una rappresentazione unitaria* U *di* G *tale che*

$$U(g)\pi(A)U(g)^{-1} = \pi(\alpha_g(A))$$

cioè che

$$Ad\ U(g)\pi = \pi \circ \alpha_g$$

Diciamo che $\pi : \mathrm{Aut}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi))$ *è un* operatore di allacciamento *fra questi due spazi.*

È ora facile rendersi conto che l'operatore V_g è di allacciamento: resta solo da capire se e quando V sia una rappresentazione, cioè che

$$V_{g_1}V_{g_2} = w(g_1, g_2)V_{g_1g_2}$$

ove $w : G \times G \longrightarrow \mathbb{T}$ è un valore complesso di modulo 1. Ora,

$$\begin{aligned} V'_{g_1}V'_{g_2} &= z(g_1)z(g_2)V_{g_1}V_{g_2} = z(g_1)z(g_2)w(g_1, g_2)V_{g_1g_2} \\ &= z(g_1)z(g_2)w(g_1, g_2)z(g_1g_2)^{-1}V'_{g_1g_2} = \delta z(g_1, g_2)w(g_1, g_2)V'_{g_1g_2} \end{aligned}$$

ove abbiamo definito

$$\delta z(g_1, g_2) = z(g_1)g(z_2)z(g_1g_2)^{-1}$$

Quindi $\delta z : G \times G \longrightarrow \mathbb{T}$. Il simbolo δ indica il cobordo di un complesso di cocatene per il quale w è un 2-cociclo, nel senso seguente:

$$w(g_1, g_2)w(g_1g_2, g_3) = w(g_1, g_2g_3)w(g_2, g_3) \tag{†}$$

(in virtù dell'identità $(V_{g_1}V_{g_2})\, V_{g_3} = V_{g_1}\, (V_{g_2}V_{g_3})$).

Se cioè denotiamo con $C^n(G, \mathbb{T})$ le funzioni da G^n in $\mathbb{T}$ abbiamo le mappe di cobordo:

$$C^1(G, \mathbb{T}) \xrightarrow{\delta} C^2(G, \mathbb{T}) \xrightarrow{\delta} C^3(G, \mathbb{T})$$

ove la $\delta : C^1(G, \mathbb{T}) \longrightarrow C^2(G, \mathbb{T})$ è definita come

$$\delta z(g_1, g_2) = z(g_1)z(g_2)z(g_1g_2)^{-1}$$

e la $\delta : C^2(G, \mathbb{T}) \longrightarrow C^3(G, \mathbb{T})$ è definita come

$$\delta w(g_1, g_2, g_3) = w(g_1, g_2)w(g_1g_2, g_3)w(g_1, g_2g_3)^{-1}w(g_2, g_3)^{-1}$$

Quindi, dato che se z è un omomorfismo di gruppi allora $(\delta z)(g_1, g_2) = 1$, δz "misura quanto z non è un omomorfismo"; analogamente δw "misura quanto w non soddisfa la (†)". Inoltre

$$\begin{aligned}\delta(\delta z)(g_1, g_2, g_3) &= (\delta z)(g_1, g_2)(\delta z)(g_1g_2, g_3)(\delta z)(g_1, g_2g_3)^{-1}(\delta z)(g_2, g_3)^{-1}\\ &= z(g_1)z(g_2)z(g_1g_2)^{-1}z(g_1g_2)z(g_3)z(g_1g_2g_3)^{-1}\\ &\qquad z(g_1g_2g_3)z(g_2g_3)^{-1}z(g_1)^{-1}z(g_2g_3)z(g_3)^{-1}z(g_2)^{-1} = 1\end{aligned}$$

cioè

$$\delta \circ \delta = 1$$

Il che ci dice che esiste una coomologia $H^2(G, \mathbb{T})$ che misura "quanto un cociclo non è esatto". In particolare, dalle relazioni precedenti, abbiamo che

$$H^2(G, \mathbb{T}) = 0 \implies V_g' \text{ è una rappresentazione di } G$$

Osserviamo esplicitamente che se $\omega \in \mathbb{V}_\pi$ allora $\omega\alpha_g$ converge fortemente a ω per $g \longrightarrow e$, e quindi le funzioni z e w sono continue: questo significa che stiamo considerando la coomologia continua del gruppo, cioè consideriamo solo le mappe continue come cocatene.

Notiamo che se G è connesso e $\mathfrak{g} = L(G)$ è la sua algebra di Lie, allora possiamo far corrispondere ad ogni elemento di $C^k(G, \mathbb{T})$ un elemento di $C^k(\mathfrak{g})$, lo spazio vettoriale delle cocatene di $\mathfrak{g}$ a coefficienti nella rappresentazione banale. Infatti, il diagramma

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "z"] & \mathbb{T} \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\widetilde{z}"'] & \mathbb{R} \arrow[u, "e^{2\pi i}"'] \end{tikzcd}$$

è commutativo: l'immagine di exp è un intorno di $e \in G$ che genera G (poiché è connesso). Possiamo analogamente sollevare una 2-cocatena:

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "w"] & \mathbb{T} \\ \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp\times\exp"] \arrow[r, "\widetilde{w}"] & \mathbb{R} \arrow[u, "e^{2\pi i}"'] \end{tikzcd}$$

In generale i gruppi di coomologia saranno diversi: questo perché la coomologia di G riflette informazioni topologiche che $\mathfrak{g}$ non può contenere; in generale, il sollevamento di un elemento di G a $\mathfrak{g}$ per tramite della mappa esponenziale non è unico: in effetti in ogni rivestimento di gruppi $G_1 \longrightarrow G_2$ le algebre di Lie coincidono. Per avere l'unicità bisogna limitarsi al rivestimento universale, cioè ai gruppi semplicemente connessi. In questo caso, la teoria di Lie ci dice che esiste un unico gruppo (connesso) semplicemente connesso del quale $\mathfrak{g}$ è l'algebra di Lie e che quindi i morfismi da G in $\mathbb{T}$ si sollevano in modo unico.

17.2.6 Teorema (BARGMANN–WIGNER) *Se la mappa $g \longmapsto \alpha_g$ è fortemente continua, G è semplicemente connesso e $H^2(L(G),\mathbb{R}) = 0$ allora $H^2(G,\mathbb{T}) = 1$ e quindi π è covariante.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo un cociclo w del gruppo di Lie G, e scriviamo

$$(*) \qquad e^{ic(X,Y)} = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{1}{t} w(\exp tX, \exp tY)$$

Dimostriamo che c è un cociclo per l'algebra di Lie. Per vederlo ci mettiamo in un intorno dell'identità del gruppo nel quale la mappa esponenziale sia invertibile, e quindi nel quale possiamo scrivere $g_i = \exp tX_i$; la condizione $\delta w = 1$ diviene:

$$\begin{aligned} 1 =& w(\exp tX_1, \exp tX_2) w(\exp -tX_2, \exp -tX_3) \\ & w(\exp tX_1 \exp tX_2, \exp tX_3) w(\exp tX_1, \exp tX_2 \exp tX_3)^{-1} \\ =& w(\exp tX_1, \exp tX_2) w(\exp -tX_2, \exp -tX_3) \\ & w\left(\exp\left(tX_1 + tX_2 + \frac{1}{2}t^2[X_1,X_2] + o(t^3)\right), \exp tX_3\right) \\ & w\left(\exp tX_1, \exp\left(tX_2 + tX_3 + \frac{1}{2}t^2[X_2,X_3] + o(t^3)\right)\right)^{-1} \end{aligned}$$

e quindi, usando la (*) e la

$$(**)\qquad \exp(tX_1 + tX_2 + t^2/2[X_1, X_2] + o(t^3)) = \exp tX_1 \exp tX_2$$

(cfr. proposizione 15.4.7) otteniamo

$$1 = e^{-ic([X_1,X_3],X_2)} e^{ic([X_1,X_2],X_3)} e^{-ic(X_1,[X_2,X_3])}$$

che implica

$$0 = c([X_1, X_2], X_3) - c([X_1, X_3], X_2) + c([X_2, X_3], X_1) = \delta c(X_1, X_2, X_3)$$

Quindi c è un 2-cociclo per $\mathfrak{g}$; ma, per ipotesi, ogni 2-cociclo per $\mathfrak{g}$ è un cobordo, i.e. esiste un $f \in \mathfrak{g}^*$ tale che

$$c(X, Y) = -f([X, Y])$$

sicché

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t} w(\exp tX_1, \exp tX_2) = e^{-if([X_1,X_2])}$$

Ma, di nuovo per la (**):

$$\begin{aligned} w(\exp X_1, \exp X_2) =& e^{if(X_1)} e^{if(X_2)} e^{-if(X_1 - itX_2 - i\frac{1}{2}t^2([X_1,X_2]) - io(t^3))} \\ =& z(g_1)z(g_2)z(g_1 g_2)^{-1} = (\delta z)(g_1, g_2) \end{aligned}$$

con $z(g) = e^{if(X)}$. Abbiamo cioè dimostrato, assumendo la forte continuità di w, che se $H^2(\mathfrak{g}) = 0$ allora $H^2(G, \mathbb{T}) = 1$, dato che il ragionamento svolto è valido in un intorno di G che genera tutto il gruppo (essendo G connesso).

QED

L'ipotesi di forte continuità della α implica che, per ogni stato ω puro e regolare:

$$||\omega \circ \alpha_g - \omega|| \xrightarrow{g \longrightarrow e} 0$$

Se $\omega_g := \omega \circ \alpha_{g^{-1}}$ allora

$$P_{\omega,\omega_g} \xrightarrow{g \longrightarrow e} 1 \iff ||\omega \circ \alpha_g - \omega|| \xrightarrow{g \longrightarrow e} 0$$

Pertanto la formula di Roberts–Elkstrom[3]

$$P_{\omega,\varphi} = 1 - \frac{1}{4} ||\omega - \varphi||^2$$

e la forte continuità di α implicano la continuità di P_{ω',ω_g} per ogni ω', ω.

[3]Per una discussione più approfondita si veda: D.J. Simms, *Lect. Notes in Math.* #52, oppure le lezioni di Les Houches (1961) di A.S. Wightman.

17.2.7 Esempio

- *Questo teorema si applica ai gruppi ad un parametro ($G = \mathbb{R}$), cioè $\pi : t \longmapsto \alpha_t$ è covariante e quindi $U(t) = \exp(itH)$ ove l'operatore hamiltoniano H non è in generale limitato.*

- *Invece il teorema non vale per $\mathbb{R}^2$, che non soddisfa l'ipotesi $H^2(L(G), \mathbb{R}) = 0$, né per $SO(3)$ che non è semplicemente connesso. Tuttavia, per il secondo lemma di Whitehead 16.3.13 ogni gruppo semisemplice semplicemente connesso soddisfa le ipotesi del teorema.*

Osserviamo che il gruppo $H^2(G)$ parametrizza, come nel caso delle algebre di Lie, le estensioni centrali di G; un caso fondamentale, che ricorre nelle applicazioni alla Meccanica Quantistica, è quello del prodotto semidiretto con un gruppo abeliano.

In generale il prodotto semidiretto è una generalizzazione del prodotto $G \times H$. Nel caso del prodotto, G e H divengono sottogruppi normali $G \times \{e\}$ e $\{e\} \times H$ di $G \times H$; nel caso del prodotto semidiretto non abbiamo questa condizione ma una più debole: un sottogruppo è effettivamente normale, mentre l'altro non lo è ma agisce per automorfismi sul primo.

Precisamente, siano H e N gruppi (nel nostro caso gruppi di Lie connessi) e consideriamo un omomorfismo (di gruppi di Lie)

$$\eta : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$$

cioè $\eta(hh')(n) = (\eta h)((\eta h')(n))$. Allora il *prodotto semidiretto* $N \ltimes H$ di N e H rispetto alla rappresentazione η è l'insieme (varietà differenziabile) $N \times H$ equipaggiata della struttura di gruppo (di Lie) data dal prodotto

$$(h, n) \cdot (h', n') = (hh', n\eta(h)(n'))$$

L'inverso è dato da

$$(h, n)^{-1} = (h^{-1}, \eta(h^{-1})(n^{-1}))$$

Nel caso in cui $N = \mathbb{R}$, abbiamo ad esempio che il prodotto semidiretto equivale ad una estensione centrale

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ltimes G \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

Se G è un gruppo di Lie connesso ma non semplicemente connesso, è sempre possibile considerare il suo rivestimento universale $\widetilde{G}$ (come varietà differenziabile) che è un gruppo di Lie a sua volta:

$$\eta : \widetilde{G} \longrightarrow G$$

(η è un diffeomorfismo locale, quindi G e $\widetilde{G}$ hanno la stessa algebra di Lie, che è determinata da un intorno dell'identità).

Allora possiamo sostituire $\widetilde{G}$ a G nei nostri ragionamenti, per avere almeno una delle ipotesi del teorema di Bargmann–Wigner sempre verificate: in effetti, se α è la solita rappresentazione del gruppo G, evidentemente $\widetilde{\alpha} := \alpha \circ \eta$ è una rappresentazione del gruppo $\widetilde{G}$, e se

$$U|_{\ker(\eta)} = I$$

allora la rappresentazione (π, V) è covariante per $\widetilde{G}$.

Fino al termine della sezione ci occuperemo di un esempio importantissimo: il *gruppo di Lorentz* $O(1, n-1)$. Ricordiamo che si tratta del gruppo di trasformazioni lineari nello spazio $\mathbb{R}^n$ che preservano la forma

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 - \sum_{i=2}^n x_i y_i$$

Questo gruppo non è connesso: ad esempio, nel caso $n = 2$, i suoi elementi sono matrici delle forme

$$\begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ \sinh t & -\cosh t \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -\cosh t & \sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & -\cosh t \end{pmatrix}$$

e ciascun tipo corrisponde ad una componente connessa distinta. In generale $O(1, n-1)$ ha quattro componenti connesse: per vedere che ne possiede almeno quattro basta osservare che esiste l'omomorfismo di gruppi

$$\Phi : O(1, n-1) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

definito come

$$\Phi(A) = (\det A, \operatorname{sgn}\langle e_1, Ae_1\rangle)$$

ove e_1 è il versore dell'asse x_1.

Qui ci interessa il caso delle trasformazioni dello spazio della Relatività Ristretta $\mathbb{R}^4$ con la metrica di Minkowski: $O(1, 4)$; richiamiamo qualche nozione sullo spazio di Minkowski $\mathbb{R}^4_1$.

17.2.8 Definizione *Se $v \in \mathbb{R}^4_1$ è un vettore non nullo, v e la retta $v\mathbb{R}$ generata da v si dicono*

- spaziali *(*space-like*) se* $\langle v, v\rangle < 0$.

- isotropi *(*light-like*) se* $\langle v, v\rangle = 0$.
- temporali *(*time-like*) se* $\langle v, v\rangle > 0$.

Vettori dello stesso tipo formano un cono nello spazio di Minkowski: così abbiamo la decomposizione in unione disgiunta

$$\mathbb{R}^4_1 = S \cup V \cup T$$

ove $V = V_+ \cup V_-$ è il cono di luce, che consta di due componenti connesse: si tratta della superficie di equazione

$$x_1^2 = x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

Anche il cono T dei vettori temporali ha due componenti connesse, mentre il cono dei vettori spaziali è connesso: la differenza si spiega considerando le superficie in $\mathbb{R}^4_1$ definite dalle

$$\Omega_m := \{v \in \mathbb{R}^4_1 \,|\, \langle x, x\rangle = m^2\} \quad \text{e} \quad \Omega_{im} := \{v \in \mathbb{R}^4_1 \,|\, \langle x, x\rangle = -m^2\}$$

che si dicono *iperboloidi di massa*: Ω_m è un iperboloide a due falde $\Omega_m = \Omega_m^+ \cup \Omega_m^-$ (omeomorfe a $\mathbb{R}^3$), mentre Ω_{im} è un iperboloide ad una falda (omeomorfo a $S^2 \times \mathbb{R}^2$).

Definiamo anche i semiconi $C_\pm = T_\pm \cup V_\pm$, che sono chiusi convessi i cui punti estremali sono $V_\pm$: si tratta dei semiconi dei vettori che orientati al futuro (C_+) e orientati al passato (C_-).

Consideriamo ora il gruppo di Lorentz omogeneo L di tutte le trasformazioni dello spazio di Minkowski (che ne preservano la metrica); abbiamo la decomposizione, esattamente come nel caso delle rotazioni, in trasformazioni proprie e improprie, secondo che il determinante sia 1 o -1:

$$L = L_+ \cup L_-$$

Inoltre abbiamo anche una decomposizione in *trasformazioni ortocrone* e antiortocrone, secondo che preservino V_- e V_+ oppure li scambino:

$$L = L^\uparrow \cup L^\downarrow$$

Abbiamo cioè la decomposizione nelle quattro componenti connesse di L data da

$$L = L_+^\uparrow \cup L_-^\uparrow \cup L_+^\downarrow \cup L_-^\downarrow$$

Ad esempio $L_+^\uparrow$ è la componente connessa dell'identità, cioè è il sottogruppo delle trasformazioni di determinante 1 che conservano il segno della variabile temporale: dato che questo gruppo contiene $SO(3)$, non è semplicemente connesso.

Se $\Lambda \in L_+^\uparrow$ è una trasformazione (non identica) che lascia fisso punto per punto un piano P, ci sono tre possibilità:

- P è un sottospazio di vettori temporali (Λ è una rotazione);
- P è un sottospazio di vettori spaziali;
- P è un sottospazio di vettori isotropi (Λ è una "rotazione isotropa");

Procedendo come per i gruppi delle rotazioni, possiamo determinare delle forme canoniche per gli elementi di $L_+^\uparrow$, vedendo i suoi elementi come matrici 4×4. Una rotazione si può sempre scrivere nella forma

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

ove $t \in [0, \pi)$ è un angolo. Un $\Lambda \in L_+^\uparrow$ di tipo (2) si può sempre scrivere nella forma

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} \cosh r & \sinh r & 0 & 0 \\ \sinh r & \cosh r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ove $r > 0$ è una "rapidità". Una rotazione isotropa si può sempre scrivere nella forma

$$\Lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Infine una trasformazione Λ può essere della forma $VR = RV$ ove R è una rotazione e V di tipo (2); in questo caso

$$\Lambda_4 = \begin{pmatrix} \cosh r & \sinh r & 0 & 0 \\ \sinh r & \cosh r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Queste trasformazioni sono diagonalizzabili nello spazio di Minkowski complessificato. Il seguente teorema appartiene agli elementi della Teoria della Relatività Ristretta:

17.2.9 Teorema *Ogni trasformazione di Lorentz propria ortocrona* $\Lambda \in L_+^\uparrow$ $(\neq I)$ *è della forma* $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_4$.

Il *gruppo inomogeneo* di $L_+^\uparrow$ è il gruppo di Poincarè $\mathcal{P}_+^\uparrow$, che per definizione è il prodotto semidiretto di $L_+^\uparrow$ con $\mathbb{R}^4$, ed ha quindi come moltiplicazione la:

$$(a, \Lambda) \cdot (a', \Lambda') := (a + \Lambda a', \Lambda\Lambda')$$

Determiniamo ora il rivestimento universale di $L_+^\uparrow$: se $\Lambda \in M_4(\mathbb{R})$ è un elemento di $L_+^\uparrow$ e se

$$\forall x \in \mathbb{R}^4 \qquad (\Lambda x, g\Lambda x) = (x, gx)$$

ove $g(x, y) = \langle x, y\rangle$ è la metrica di Lorentz con segnatura $(+ - --)$, cioè se

$$\Lambda^T g\Lambda = g$$

allora $\det\Lambda = 1$ e $\Lambda_{00} > 0$. Ora osserviamo che lo spazio delle matrici 2×2 complesse autoaggiunte è, come spazio vettoriale, un $\mathbb{R}^4$, con coordinate

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & c \end{pmatrix}$$

($a, c \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{C}$) ed identificazione data da

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^4 &\longrightarrow M_2(\mathbb{C}) \\ (x_0, ..., x_4) &\longmapsto \widetilde{x} := \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi

$$\det\widetilde{x} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

mentre

$$\mathrm{tr}(\widetilde{x}) = x_0$$

(consideriamo la traccia normalizzata: se $A \in M_n$, $\mathrm{tr}(A) = \frac{1}{n}\sum_i A_{ii}$).

Evidentemente la trasformazione

$$H \longmapsto AHA^*$$

è un automorfismo delle matrici hermitiane ($\cong \mathbb{R}^4$) che preserva il determinante se $\det A = \pm 1$ (la condizione di ortocronia $\mathrm{tr}(AA^*) \geq 0$ è sempre vera). Con ciò abbiamo che una matrice $A \in SL(2, \mathbb{C})$ dà luogo ad una trasformazione che preserva il determinante.

Allora abbiamo l'omomorfismo delle matrici speciali nel gruppo di Lorentz

$$\begin{aligned} SL(2, \mathbb{C}) &\longrightarrow L \\ A &\longmapsto \Lambda(A) \end{aligned}$$

ove $\Lambda(A)x := A\widetilde{x}A^*$, che ha nucleo $\{\pm 1\}$: si tratta cioè di un rivestimento doppio e, dato che $SL(2,\mathbb{C})$ è semplicemente connesso, del rivestimento universale del gruppo di Lorentz [4].

Osserviamo che

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_0+x_3 & 0 \\ 0 & x_0-x_3 \end{pmatrix} &= x_0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= x_0 I + x\cdot\sigma\end{aligned}$$

ove $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sono le matrici di Pauli. È un esercizio verificare che per ogni vettore di norma 1 u si ha $(u\cdot\sigma)^2 = 1$, e quindi osservare che

$$U := e^{i\frac{\vartheta}{2}u\cdot\sigma}$$

è una matrice unitaria per ogni $\vartheta\in\mathbb{R}$. Viceversa, ogni matrice unitaria è di questo tipo, e si ha:

$$U\widetilde{x}U^* = \widetilde{R(U)x}$$

ove $R(U)$ è una rotazione di un angolo ϑ attorno all'asse individuato dal versore u. I valori $L_u = u\cdot\sigma$ si dicono *momenti angolari*.

17.3 Rappresentazioni del gruppo di Lorentz

Abbiamo visto alla fine del paragrafo precedente che per studiare le rappresentazioni del gruppo di Lorentz possiamo concentrarci sulle rotazioni e sulle traslazioni.

Consideriamo ora una rappresentazione covariante π e la rappresentazione di G indotta $\mathcal{U}(a, A)$. Alle matrici unitarie U dell'esempio precedente corrispondono i generatori infinitesimali del gruppo delle rotazioni

$$\mathcal{U}\left(0, e^{\frac{i}{2}\varphi u\cdot\sigma}\right) = e^{iL_u\varphi}$$

[4]Ricordiamo per quale motivo il gruppo speciale *complesso* sia semplicemente connesso: intanto abbiamo la decomposizione polare $A = VH$ di ogni matrice speciale A in una matrice V unitaria ed una H hermitiana positiva, entrambe di determinante 1. H è una trasformazione di Lorentz pura, in quanto $H = UDU^*$, ove $U \in SU(2)$ e D è diagonale definita positiva e di determinante 1, i.e. $D = \begin{pmatrix} e^{\gamma} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma}\end{pmatrix}$, per $\gamma\in\mathbb{R}$. Se ora $t \longmapsto A(t)$ è una curva (continua) chiusa ($A(0) = A(1)$) in $SL(2,\mathbb{C})$, la possiamo deformare in una curva $V(t)$ in $SU(2)$, dato che la mappa $(t,s) \longmapsto A(t,s) := V(t)H(t)^s$ è evidentemente l'omotopia che realizza questa deformazione. Quindi $\pi_1(SL(2,\mathbb{C})) = \pi_1(SU(2)) = 1$, dato che $SU(2)$ altri non è che la sfera S^3.

Per studiare le rappresentazioni del gruppo delle rotazioni studiamo quelle irriducibili del gruppo SU(2), che è il suo rivestimento universale: sia j un indice variabile nell'insieme dei seminteri non negativi $\{\frac{n}{2}\}_{n\in\mathbb{N}}$, e sia

$$D^{(j)}(U) := \left(U^{\otimes 2j}\right)|_{\mathrm{Sym}^{2j}(\mathbb{C}^2)}$$

(ove $\mathrm{Sym}^n(V)$ denota i tensori simmetrici di grado n su V). Consideriamo ad esempio una rotazione di un angolo φ intorno all'asse x_3:

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} = e^{i\frac{\varphi}{2}\sigma_3}$$

Se $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, si ha (per $k \in \{-2j, ...2j\}$):

$$D^{(j)}(U)u^k v^{2j-k} = \left(e^{i\frac{\varphi}{2}}\right)^k \left(e^{-i\frac{\varphi}{2}}\right)^{2j-k} u^k v^{2j-k} = e^{ik\frac{\varphi}{2}-ij\varphi+ik\frac{\varphi}{2}} = e^{i(k-j)\varphi}$$

e quindi (scrivendo il momento angolare L_{x_k} come L_k):

$$L_3 u^k v^{2j-k} = (k-j)u^k v^{2j-k}$$

Osserviamo esplicitamente che $\dim D^{(j)} = 2j+1$. Lo spettro di L_3 è

$$\sigma(L_3) = \{j, j-1, ..., -j\}$$

Quindi, L_3 è un operatore con molteplicità uniforme pari a uno, ed i suoi autovalori sono tutti interi o tutti seminteri secondoché lo sia o meno j. Ciò naturalmente può dirsi anche per L_2 e L_3. Se

$$L^2 := L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$$

questo operatore è invariante per rotazioni, dato che

$$\mathcal{U}(0,U)L^2\mathcal{U}(0,U)^{-1} = L^2$$

17.3.1 Proposizione *Nella decomposizione della rappresentazione U di $SU(2)$ in rappresentazioni irriducibili*

$$\mathcal{U}(0,U) = \bigoplus \mathcal{U}_n(U)$$

l'operatore L^2 si decompone in somma di scalari:

$$L^2 = \bigoplus k_n I$$

Dimostrazione: Ognuna delle componenti di $\mathcal{U}_n(U)$ è $\mathcal{U}_n(U) = D^{j_n}(U)$, e si ha

$$k_n = j_n(j_n + 1)$$

Ora lavoriamo sull'algebra di Lie $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(3)$, che è determinata dai generatori infinitesimali

$$e^{i\frac{\varphi}{2}\sigma_k} \longmapsto \frac{1}{2}\sigma_k$$

(matrici di Pauli) e ricordiamo le regole di moltiplicazione

$$\begin{aligned} \sigma_j\sigma_k &= i\sigma_l \\ \sigma_j^2 &= I \\ \sigma_j\sigma_k &= -\sigma_k\sigma_j\,, \qquad \text{se } k \neq 0 \end{aligned}$$

ove (j, k, l) è una permutazione ciclica di (123), da cui

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2\sigma_j\sigma_k = 2i\sigma_l$$

Quindi l'algebra di Lie è determinata da

$$[\mathcal{U}_k, \mathcal{U}_l] = \sum_m \epsilon_{kl}^m \mathcal{U}_m$$

ove ϵ_{kl}^m è zero se (klm) non è una permutazione ciclica, altrimenti ne è il segno. Ora consideriamo

$$\mathcal{U}\left(e^{\frac{i}{2}\varphi\sigma_k}\right) = e^{i\varphi L_k}$$

in modo che

$$[L_k, L_j] = iL_m$$

(al solito (klm) è una permutazione ciclica). Calcoliamo allora L^2:

$$[L_3, (L_1 + iL_2)] = iL_2 + L_1 = L_1 + iL_2 =: A$$

Quindi

$$L_3A = A(L_3 + I)$$

Se Φ è un autovettore di L_3 di autovalore j, si ha che

$$L_3A\Phi = (j + 1)A\Phi$$

Cioè, se Φ sta in un sottospazio di Hilbert $\mathcal{H}_j$ ove la rappresentazione sia irriducibile, per $\Phi = u^{2j}v^0$ si trova

$$L_j\Phi = j\Phi$$

e quindi $A\Phi = 0$ (per irriducibilità). Dunque $L^2|_{\mathcal{H}_j} = k_j I$ con

$$L^2\Phi = L_3^2\Phi + (L_1^2 + L_2^2)\Phi = j^2\Phi + (L_1^2 + L_2^2)\Phi$$

Ora, $A^* = L_1 - iL_2$, il che ci consente di calcolare $L_1^2 + L_2^2$:

$$A^*A = L_1^2 + L_2^2 + i[L_1, L_2] = L_1^2 + L_2^2 + iL_3 = L_1^2 + L_2^2 - L_3$$

ed infine

$$L^2\Phi = j^2\Phi + (A^*A + L_3)\Phi = j^2\Phi + j\Phi = j(j+1)\Phi$$

QED

Osserviamo che si potrebbe dimostrare anche una formula di Clebsh–Gordan:

$$D^{(j)} \otimes D^{(j')} = \bigoplus_{|j-j'|\leq s\leq j+j'} D^{(s)}$$

Ora consideriamo il sottogruppo delle traslazioni dato dalla formula spettrale

$$a \longmapsto \mathcal{U}(a, I) = \int e^{ip\cdot a} dE(p)$$

ove la misura $\Delta \longmapsto E(\Delta)$ sui boreliani di $\mathbb{R}^4$ è invariante per trasformazioni di Lorentz:

$$\mathcal{U}(0, A)E(\Delta)\mathcal{U}(0, A)^{-1} = E(\Lambda(A)\Delta)$$

(le trasformazioni $a \longmapsto \mathcal{U}(a, I)$ e $a \longmapsto \mathcal{U}(\Lambda(A)a, I)$ sono unitariamente equivalenti). Se $\mathcal{H}$ è separabile, la misura basica è

$$d\mu(p) = (\xi, dE(p)\xi)$$

ove ξ è un vettore separante, ed è invariante per trasformazioni di Lorentz, e la misura

$$d\mu_\Lambda(p) := d\mu(\Lambda_p)$$

è equivalente a $d\mu$.

17.3.2 Teorema *Ogni misura regolare positiva invariante su $\mathbb{R}^4$ è della forma*

$$\int d\rho^+(m)d\Omega_m^+(p) + c\delta_0^{(4)} + \int d\rho^-(m)d\Omega_m^-(p) + \int dpd\Omega_{im}(p)$$

ove $\delta_0^{(4)}$ è la misura di Dirac concentrata in $0 \in \mathbb{R}^4$, dp è la misura di Lebesgue del semiasse positivo, e $d\Omega_m$ la misura su un iperboloide di massa m

$$d\Omega_m(p) := \frac{d^3p}{2\sqrt{p^2 + m}}$$

Per questo teorema si veda [29], §IX.8.

Se ora Δ è un boreliano invariante per trasformazioni di Lorentz: $\Lambda(\Delta)=\Delta$, e quindi $E(\Delta)$ appartiene al commutante di $\mathcal{U}(\widetilde{\mathcal{P}})'$. Ricordiamo che

$$\mathcal{U}(G)''=\pi(L^1(G))''=\widetilde{\pi}(C_0(\widehat{(G)})''$$

e quindi $E(\Delta)$ appartiene al commutante dell'algebra di von Neumann della rappresentazione del gruppo, cioè sta nel centro $\mathcal{U}(\widetilde{\mathcal{P}})'\cap\mathcal{U}(\widetilde{\mathcal{P}})''$.

Ora, se $\{P_0,...,P_4\}$ sono gli operatori fortemente permutabili che generano $\widetilde{\mathcal{P}}$, si ha che

$$M^2=P_0^2-P_1^2-P_2^2-P_3^2\geq 0$$

e

$$M=\int_0^\infty mdG(m)$$

ove $G(B)=E(\Delta)$, se B è un boreliano di $\mathbb{R}^+$ e $\Delta=\{p|\ ||p||\in B\}$.

Se $\mathcal{U}$ è una rappresentazione irriducibile di $\widetilde{\mathcal{P}}$, deve essere

$$M^2=m^2I$$

e la formula spettrale è $E(\Delta)\in\{0,I\}$. Quindi il supporto di E come misura sui boreliani invarianti è una singola orbita, il che significa che esiste un'orbita Ω_m tale che

$$E(\Omega_m)=I$$

Richiamiamo ora alcuni fatti generali sulle rappresentazioni indotte, che si applicano al nostro caso: se G è un gruppo localmente compatto e ρ la sua rappresentazione regolare in $L^2(G,d\mu)$ rispetto alla misura $d\mu$ di Haar del gruppo, e se H è un sottogruppo *chiuso* di G e

$$\mathcal{U}:H\longrightarrow\mathcal{U}(\mathcal{H}_\mathcal{U})$$

una rappresentazione unitaria fortemente continua, vogliamo utilizzarla per indurre delle rappresentazioni di G.

È noto (cfr. [30], §14) che G/H è uno spazio topologico dotato (come pure $H\backslash G$, che è il quoziente di G rispetto all'azione sinistra) di misure quasi-invarianti per l'azione di G. Scegliamo quindi una tale misura (regolare) su $H\backslash G$, e consideriamo le funzioni $\Psi:G\longrightarrow\mathcal{H}_\mathcal{U}$ boreliane e *covarianti* nel senso che

$$\forall h\in H\quad\forall g\in G\qquad\Psi(hg)=\mathcal{U}(k)\Psi(g)$$

Allora, dato che $(\Psi(g),\Psi(g))=(\Psi(kg),\Psi(kg))$ la Ψ passa al quoziente $H\backslash G$ e si ha

$$\int_{H\backslash G}(\Psi(\overline{g}),\Psi(\overline{g}))d\mu(\overline{g})<\infty$$

Queste funzioni formano uno spazio di Hilbert sul quale è definita la rappresentazione

$$(\mathcal{U}^{\mu}(g)\Psi)(h) := \Psi(hg)\sqrt{\frac{d\mu(\overline{h}g)}{d\mu(h)}}$$

(l'espressione sotto radice è la derivata di Radon–Nikodym).

Ora sia $G = N \ltimes H$ (ove $N = \mathbb{R}^4$ e $H = SL(2,\mathbb{C})$) con N gruppo localmente compatto commutativo e normale in G, e H sottogruppo localmente compatto di G, ove il prodotto semidiretto è effettuato rispetto all'azione continua

$$\eta : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$$

Ovviamente, se $\chi \in \widehat{N}$ è un carattere, si ha che $\chi \circ \eta_h$ è un'azione di H sul duale $\widehat{N}$. Inoltre osserviamo che se $H_\chi = \{h \in H \mid \chi \circ \eta_h = \chi\}$ è lo stabilizzatore, e se $\mathcal{U}$ è una rappresentazione di H_χ allora

$$\chi\mathcal{U}(n,h) = \chi(n)\mathcal{U}(h)$$

è una rappresentazione di $N \ltimes H_\chi$, dato che

$$\chi\mathcal{U}((n,h)(n',h')) = \chi\mathcal{U}(n\eta_h(n'), hh') = \chi(n)\chi(n')\mathcal{U}(hh')$$

Allora inducendo dal sottogruppo $N \ltimes H_\chi$ al gruppo $N \ltimes H$ si ottiene una rappresentazione di G: la teoria è dovuta sostanzialmente a Mackey, che ha formulato, fra gli altri, i risultati seguenti:

17.3.3 Teorema

- *se $\chi \in \widehat{N}$ e L è una rappresentazione unitaria fortemente continua di H_χ allora la rappresentazione indotta da χL non varia se χ varia nell'orbita $\chi\eta_H$.*
- *Se $H_\chi \neq H_{\chi'}$ allora $\mathcal{U}^{\chi L} \ncong \mathcal{U}^{\chi' L'}$.*
- *Se L è una rappresentazione unitaria fortemente continua irriducibile di H_χ allora la rappresentazione indotta $\mathcal{U}^{\chi L}$ è irriducibile.*

Qui faremo anche le seguenti e più restrittive ipotesi:

- Esiste un boreliano in $\widehat{N}$ che è una sezione dell'azione di H, cioè incontra tutte le orbite esattamente in un punto).
- H_χ è un gruppo di tipo I (cioè ogni rappresentazione π della sua C*-algebra il cui centro è ridotto al solo $\mathbb{C}$ è tale che $\pi(\mathcal{A})'' = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ per un opportuno spazio di Hilbert, in altre parole: π è un multiplo di una rappresentazione irriducibile: il tipo di un gruppo è il tipo dell'algebra di von Neumann $\pi(\mathcal{A})''$, che, per l'ipotesi che il centro di π sia $\mathbb{C}$, è un fattore).

In questi caso, anche N è di tipo I (e quindi anche $G = N \ltimes H$ lo è) ed ogni rappresentazione irriducibile è della forma $\mathcal{U}^{\chi L}$ ove L è una rappresentazione irriducibile di H_χ.

Applichiamo ora queste nozioni al caso in cui $N = \mathbb{R}^4$ e $H = SL(2,\mathbb{C})$, con

$$\eta_A(a) = \Lambda(A)a$$

essendo Λ il morfismo del rivestimento $SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow L$ del gruppo di Lorentz. In questo modo $G = N \ltimes H = \widetilde{\mathcal{P}}$.

Osserviamo intanto che l'ipotesi (1) precedente è verificata. Le orbite di $\widehat{\mathbb{R}^4} \cong \mathbb{R}^4$ per l'azione di $SL(2,\mathbb{C})$ sono:

- il punto $\{0\}$.
- il cono di luce positivo o negativo meno l'origine:

$$V^\pm := \{p \in \mathbb{R}^4 \,|\, p^2 = 0,\ p_0 \gtrless 0\}$$

- $\Omega_m^\pm$ e Ω_{im}.

Per avere una sezione boreliana, consideriamo l'asse x_0, l'asse x_1^+ (esclusa l'origine), un punto su V^+ ed uno su V^-.

Per verificare che vale l'ipotesi (2), identifichiamo come sono fatte le orbite: nel caso (a) è $H_0 = SL(2,\mathbb{C})$, mentre nel caso (c) è, ad esempio nel punto $p = (1,0,0,0)$, $H_p = SU(2)$, e questi sono gruppi di tipo I cfr. [15].

Restano i casi (b) e (d). Nel caso (b), preso come p il punto $(1,0,0,1)$, la matrice hermitiana che gli corrisponde è $I + \sigma_3$ ovvero

$$\underset{\sim}{p} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cioè gli elementi di H_p sono tali che $A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ma se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$ abbiamo che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\overline{a} & a\overline{c} \\ \overline{a}c & c\overline{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cioè $|a|^2 = 1$ e $c = 0$, e quindi

$$H_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix} \mid |a|^2 = 1 \right\}$$

Ma, se

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{u} & \overline{u}z \\ 0 & u \end{pmatrix}$$

($\overline{u} = a$ e $\overline{z} = a\overline{b}$) e, moltiplicando:

$$\begin{pmatrix} u & \overline{u}z \\ 0 & \overline{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' & \overline{u'}z' \\ 0 & \overline{u'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uu' & z'\overline{u'} + z\overline{uu'} \\ 0 & \overline{uu'} \end{pmatrix}$$

e, scrivendo le matrici come elementi (u, z):

$$(u, z)(u', z') = (\overline{uu'}, z + u^2 z')$$

e quindi H_p è isomorfo al prodotto semidiretto di S^1 e $\mathbb{R}^2$ rispetto all'azione di S^1 su $\mathbb{R}^2$ data da

$$u = e^{i\vartheta} \longmapsto \left(z \longmapsto z + e^{2i\vartheta} z\right)$$

cioè è un rivestimento doppio del gruppo euclideo del piano che ha come orbite circonferenze di centro l'origine e l'origine stessa. Si tratta di un gruppo di tipo I: le rappresentazioni si possono studiare a partire da queste orbite. Nel caso delle circonferenze si ottengono rappresentazioni di dimensione infinita, che non hanno senso fisico (a meno di non concepire spin infiniti!), mentre nel caso dell'orbita ridotta alla sola origine le rappresentazioni sono

$$D(e^{i\vartheta}, z) = e^{2ij\vartheta}$$

ove j è lo spin della particella di massa zero. Abbiamo cioè

$$H_p = \left\{ \begin{pmatrix} u & \overline{u}z \\ 0 & \overline{u} \end{pmatrix} \middle| u \in \mathbb{T} \text{ e } z \in \mathbb{C} \right\}$$

con $p = (1, 0, 0, 1)$.

Nel caso (d), consideriamo invece il punto $p = (0, 0, 1, 0)$: allora $\underset{\sim}{p} = \sigma_2$ e gli elementi di H_p sono le A tali che $A\sigma_2 A^* = \sigma_2$. Ma (A e σ_2 sono invertibili, e σ_2 è inversa di se stessa):

$$A = \sigma_2 A^{*-1} \sigma_2$$

è una rappresentazione (non unitaria) di $SL(2, \mathbb{C})$ la cui rappresentazione controgradiente (cioè duale) verifica la

$$\overline{A} = \sigma_2 A^{*-1} \sigma_2$$

Infatti $\overline{A}\sigma_2 A^* = \sigma_2$ implica che $A\sigma_2 A^T = \sigma_2$ è equivalente a $iA\sigma_2 A^T = i\sigma_2$. Se scriviamo esplicitamente queste relazioni in termini delle entrate delle matrici, otteniamo

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & bc-ad \\ ad-cb & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ne segue che

$$H_p = \{A \,|\, A = \sigma_2 A^{*-1}\sigma_2 = \overline{A}\} = SL(2,\mathbb{R})$$

Consideriamo ora le rappresentazioni unitarie fortemente continue del gruppo $\widetilde{\mathcal{P}}$ tali che lo spettro sia

$$\sigma\left(\mathcal{U}|_{\mathbb{R}^4}\right) \subset \overline{V^+} = \{p \in \mathbb{R}^4 \,|\, p^2 = 0 \text{ e } p_0 \geq 0\}$$

e precisamente quelle irriducibili associate all'orbita Ω_m^+ $(m > 0)$: sia $P_\omega \in \Omega_m^+$, H_{p_ω} lo stabilizzatore in $SL(2,\mathbb{C})$, D una rappresentazione unitaria irriducibile di H_{p_ω} e χ il carattere associato a p_ω; dato che si può scegliere $p_\omega = (m,0,0,0)$, si ha

$$H_{p_\omega} = SU(2)\,, \qquad D = D^{(j)}$$

Quindi la rappresentazione irriducibile è caratterizzata da m e j. Per capire come è fatta, prendiamo una matrice A_p tale che, per ogni p nell'orbita di p_ω

$$A_p \underset{\sim}{p_\omega} A_p^* = p$$

e che $p \longmapsto A_p$ sia continua. Componiamo questa funzione con Φ:

$$\Psi(p) := \Phi(0, A_p^{-1})$$

Evidentemente lo stabilizzatore è $\{(a,A)\}_{A\in H_{p_\omega}}$. Quindi

$$\int ||\Psi(p)||^2 d\Omega_m(p) < \infty$$

Ricordiamo che

$$d\Omega_m(p) = \frac{dp}{\sqrt{\frac{d}{dt}p^{\frac{1}{2}} + m^2}}$$

$D^{(j)}$ opera su $\mathbb{C}^{2j+1}$. Ora abbiamo $\Psi \longmapsto \mathcal{U}(a,A)\Psi$, e, se $A_p^{-1}AA_{\Lambda(A^{-1})_p}$ sta nello stabilizzatore:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(a,A)\Psi =&\mathcal{U}(a,A)\Phi(0,A_p^{-1}) = \Phi((0,A_p^{-1})(a,A)) = \Phi((\Lambda(A_p^{-1})a, A_p^{-1}A))\\
=&\Phi((\Lambda(A_p^{-1})a, A_p^{-1}AA_{\Lambda(A^{-1})_p}A_{\Lambda(A^{-1})_p}))\\
=&\Phi((\Lambda(A_p^{-1})a, A_p^{-1}AA_{\Lambda(A^{-1})_p})(0,A_{\Lambda(A^{-1})_p}))\\
=&e^{ip_\omega\Lambda(A_p^{-1})a}D^{(j)}(A_p^{-1}AA_{\Lambda(A^{-1})_p})\Phi(0,A_{\Lambda(A^{-1})_p}))\\
=&e^{ip_\omega a}D^{(j)}(A_p^{-1}AA_{\Lambda(A^{-1})_p})\Psi(\Lambda(A^{-1})_p))
\end{aligned}$$

(tenendo conto della covarianza della rappresentazione). Che poi $A_p^{-1}AA_{\Lambda(A^{-1})_p}$ stia nello stabilizzatore si verifica facilmente:

$$\Lambda(A_p^{-1}AA_{\Lambda(A^{-1})_p})p_\omega = \Lambda(A_p^{-1})\Lambda(A)\Lambda(A^{-1})_p = \Lambda(A_p^{-1})_p = p_\omega$$

Abbiamo cioè dimostrato il

17.3.4 Teorema (FORMULA DI WIGNER)

$$\left(\mathcal{U}(a,A)\Psi)\right)(p) = e^{ipA}D^{(j)}(A_p^{-1}AA_{\Lambda(A^{-1})_p})\Psi(\Lambda(A^{-1})_p)$$

Si noti ora che

$$\Lambda(A_p)p_\omega = p \qquad \text{e} \qquad A_p\underset{\sim}{p_\omega}A_p^* = \underset{\sim}{p}$$

Se $p_\omega \in \Omega_m^+$ e $m > 0$ possiamo prendere $p_\omega = (m,0,0,0)$ e quindi $\underset{\sim}{p_\omega} = mI$, cioè la matrice A_p è determinata dalla $A_pA_p^* = \underset{\sim}{p}/m$. Osserviamo esplicitamente che, avendosi $\det(\underset{\sim}{p}) = p^2 = m^2$ e $\mathrm{tr}(\underset{\sim}{p}) = 2p_0 \geq 2m$ si ha che $\underset{\sim}{p} > 0$ e quindi possiamo considerare

$$A_p := \sqrt{\underset{\sim}{p}/m}$$

che ci fornisce la sezione continua voluta.

17.4 Equazione di Dirac

Continuiamo a considerare le rappresentazioni del gruppo di Lorentz: poniamo

$$||\Phi(p)||^2 = \left(\Phi(p), D^{(j)}\left(\underset{\sim}{p}/m\right)\Phi(p)\right)$$

introducendo in questo modo una struttura di spazio di Hilbert $\mathcal{H}_{m,j}$ sulle funzioni da Ω_m^+ in $\mathbb{C}^{2j+1}$ misurabili e tali che

$$\int ||D^{(j)}(A_p)\Phi_p||^2 d\Omega_m(p) < \infty$$

Allora la

$$(V\Phi)(p) = D^{(j)}(A_p^{-1})\Phi_p$$

è una trasformazione unitaria $V : \mathcal{H}_{m,j} \longrightarrow \mathcal{H}$, per cui

$$\mathcal{U}_{m,j}(a, A) := V^{-1}\mathcal{U}(a, A)V$$

è una rappresentazione unitaria che opera come

$$(\mathcal{U}m, j(a, A)\Phi)(p) = e^{ipa}D^{(j)}(A)\Phi(\Lambda(A^{-1})_p)$$

Se $\Psi(p) \in \mathbb{C}^{2(2j+1)}$ è il vettore

$$\begin{pmatrix} \Phi(p) \\ D^{(j)}\left(\underset{\sim}{p}/m\right)\Phi(p) \end{pmatrix}$$

allora

$$\left(\Phi(p), D^{(j)}\left(\underset{\sim}{p}/m\right)\Phi(p)\right) = \frac{1}{2}(\Psi(p), \gamma \circ \Psi(p))$$

ove $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$.

In $\mathcal{H}_{m,j}$ abbiamo una ulteriore struttura hilbertiana $\mathcal{H}'$ la cui la norma è

$$|||\Phi(p)|||^2 := ||\Psi||^2 = \int \left(\Psi(p), D^{(j)}\left(\underset{\sim}{p}/m\right)^{-1}\Psi(p)\right) d\Omega_m(p)$$

ed un operatore unitario $V : \mathcal{H}' \longrightarrow \mathcal{H}$:

$$(V\Phi)(p) = D\left(\sqrt{\underset{\sim}{p}/m}\right)\Phi(p)$$

Allora la rappresentazione $V\mathcal{U}(a, A)$ opera (tenendo conto della formula di Wigner 17.3.4) come

$$\begin{aligned}
(V\mathcal{U}(a, A)V^{-1}\Phi)(p) &= D\left(\sqrt{\underset{\sim}{p}/m}\right)(\mathcal{U}(a, A)V^{-1}\Phi)(p) \\
&= e^{ipa}D(A)D\left(\sqrt{\left(\Lambda\underset{\sim}{(A^{-1})}p\right)/m}\right)(V^{-1}\Phi)(\Lambda(A^{-1})p) \\
&= e^{ipa}D(A)\Phi\Lambda(A^{-1})p
\end{aligned}$$

cioè

$$(V\mathcal{U}(a,A)V^{-1}\Phi\Psi)(p) = e^{ipa}D(A)\Psi(\Lambda(A)^{-1}p)$$

Stiamo usando la metrica

$$|||\Psi(p)|||^2 := (\Psi(p), D\left(\underset{\sim}{p}/m\right)\Psi(p))$$

Ma, considerando

$$\Psi(p) := \begin{pmatrix}\psi_1(p)\\ \psi_2(p)\end{pmatrix}$$

(con $\psi_i(p) \in \mathbb{C}^{2j+1}$) e scrivendo

$$\psi_1(p) = \Psi(p) \qquad \text{e} \qquad \psi_2(p) = D\left(\left(\underset{\sim}{p}/m\right)^{-1}\right)\Psi(p)$$

e ricordando le formule per $\widetilde{p}$ e $\underset{\sim}{p}$ e che $(\underset{\sim}{p}/m)^{-1} = \widetilde{p}/m$ troviamo che $\psi(p)$ soddisfa alla

$$\begin{cases}\psi_2(p) = D\left(\widetilde{p}/m\right)\psi_1(p)\\ \psi_1(p) = D\left(\underset{\sim}{p}/m\right)\psi_2(p)\end{cases}$$

che scriviamo in forma più compatta usando l'*operatore di Dirac*

$$\not{P} := \begin{pmatrix}0 & D(\underset{\sim}{p})\\ D(\widetilde{p}) & 0\end{pmatrix}$$

ottenendo l'*equazione di Dirac*

$$\not{P}\Psi(p) = m\Psi(p)$$

Notiamo che

$$\begin{aligned}|||\psi(p)|||^2 = |||\Psi(p)|||^2 &= \frac{1}{2}\left((\psi_1(p), \psi_2(p)) + (\psi_2(p) + \psi_1(p))\right)\\ &= \frac{1}{2}(\Psi(p), \gamma\Psi(p))\end{aligned}$$

(ove $\gamma = \begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}$). Introducendo le *matrici di Dirac*:

$$\gamma_k = \begin{pmatrix}0 & D(\sigma_k)\\ -D(\sigma_k) & 0\end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \gamma_0 = \begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}$$

possiamo anche scrivere l'equazione di Dirac come

$$\not{P} = \sum_k p_k \gamma_k$$

Consideriamo ora nuovamente la rappresentazione

$$(\mathcal{U}_{m,j}(a,A)\Psi)(p) = e^{ipa}\begin{pmatrix} D(A)\psi_1(\Lambda(A)^{-1}(p)) \\ D(\widetilde{p}/m)D(A)\psi_1(\Lambda(A)^{-1}(p)) \end{pmatrix}$$

ed osserviamo che

$$\begin{aligned}(\widetilde{p}/m)\, A =& A^{*-1}\left(A^*\,(\widetilde{p}/m)\,A\right) = A^{*-1}\left(A^{-1}\left(\underset{\sim}{p}/m\right)A^{*-1}\right)^{-1} \\ =& A^{*-1}\left(\Lambda(\underset{\sim}{A^{-1}})p/m\right)^{-1} = A^{*-1}\left(\widetilde{\Lambda(A^{-1})p/m}\right)\end{aligned}$$

(N.B: $A^{*-1} = A^{-1*}$) e quindi che

$$\begin{aligned}(\mathcal{U}_{m,j}(a,A)\Psi)(p) =& e^{ipa}\begin{pmatrix} D(A)\psi_1(\Lambda(A)^{-1}(p)) \\ \\ D(A^{*-1})D(\widetilde{\Lambda(A^{-1})}p/m)\psi_1(\Lambda(A^{-1})(p)) \end{pmatrix} \\ =& e^{ipa}\begin{pmatrix} D(A)\psi_1(\Lambda(A)^{-1}(p)) \\ D(A^{*-1})\psi_2(\Lambda(A^{-1})(p)) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ora definiamo

$$S(A) := D^{(j)}(A) \oplus D^{(j)}(A^{*-1})$$

ove abbiamo scritto

$$D^{(j)}(A) = D^{(j,0)}(A) \qquad \text{e} \qquad D^{(j)}(A^{*-1}) = D^{(0,j)}(A)$$

e quindi $S = D^{(j,0)} \oplus D^{(0,j)}$, sicché

$$(\mathcal{U}_{m,j}(a,A)\Psi)(p) = e^{ipa} S(A)\Psi(\Lambda(A)^{-1}(p))$$

ottenendo così la *covarianza dell'equazione di Dirac*:

$$S(A)\not{P}S(A)^{-1} = \Lambda(A)\not{P}$$

17.4.1 Esempio *Nel caso $j = 0$ possiamo semplicemente considerare*

$$\mathcal{H} = L^2(\Omega_m^+, d\Omega_m)$$

con la rappresentazione

$$((\mathcal{U}(a, A)\Psi)(p) = e^{ipa}\Psi(\Lambda(A)^{-1}(p))$$

Presa l'anti-trasformata di Fourier

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\Omega_m^+} e^{-ipx}\Phi(p)d\omega_m(p)$$

e $p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, troviamo

$$\widetilde{\varphi}(\widetilde{p}) = \Phi(\omega(\vec{p}), \vec{p})$$

pertanto

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\Omega_m^+} e^{ipx}\widetilde{\varphi}(p)\frac{dp}{2p_0}$$

*Abbiamo così ottenuto $(p^2 - m^2)\widehat{\varphi}(p) = 0$, cioè l'*equazione di Schrödinger relativisticamente invariante

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = 0$$

Si tratta di un'equazione del secondo ordine in t: per questo motivo Dirac ha considerato in sua vece la

$$\sum_k i\gamma_k \frac{\partial\psi}{\partial x_k} = m\psi$$

che si deduce dall'equazione di Dirac per $\not{P}$.

Restringiamo ora la nostra indagine al caso $m = 0$: questo vuol dire che ci poniamo sul cono di luce futuro con misura invariante ($j = 0$)

$$\frac{dp}{2|p_0|}$$

Se $j \neq 0$ consideriamo $(1, 0, 0, 1)$ come vettore di riferimento e costruiamo la sezione per mezzo di

$$(p, \vec{p}) := (|\vec{p}|, \vec{p})$$

Se H_p è la trasformazione di Lorentz pura (diagonale) tale che

$$H_p(1, 0, 0, 1) = (p, 0, 0, p)$$

e la componiamo con la rotazione (unitaria) U_p tale che

$$U_p(0,0,0,p) = (p, \vec{p})$$

otteniamo $A_p = U_p H_p$, che non è una matrice definita positiva; tuttavia, se $m = 0$, l'equazione di Dirac e la relazione di covarianza divengono

$$\not{P}\Psi = 0 \qquad \text{e} \qquad S(A)\not{P}S(A)^{-1} = 0$$

Dunque, considerando lo spazio di Hilbert delle funzioni dal cono di luce futuro ai vettori in C^{2j+1} (con la solita metrica definita dalle γ_k) otteniamo una rappresentazione unitaria di $\widetilde{\mathcal{P}}$.

Dimostriamo ora che questa rappresentazione non è irriducibile. Se $p_\omega = (1,0,0,1)$, lo stabilizzatore è

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix} \right\} \subset SL_2(\mathbb{C})$$

e le rappresentazioni di dimensione finita sono

$$D^{(\pm j)} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix} = a^{\pm 2j}$$

Se il segno è (-)+ Lo spin è (anti-)parallelo all'impulso: infatti considerando p nell'orbita di $(1,0,0,1)$ e A nello stabilizzatore troviamo che

$$\Lambda(A)p = p = \Lambda(A)^{-1}p \Rightarrow A_{\Lambda(A)^{-1}(p)} = A_p$$

Inoltre, per $p = p_\omega = (1,0,0,1)$ $A_p = I$ e la formula di Wigner diviene

$$(\mathcal{U}(0,A)\Psi)(p_\omega) = a^{\pm 2j}\Psi(p_\omega)$$

Per A tale che $\Lambda(A)$ sia una rotazione di asse $\vec{p_\omega}$ (l'asse x_3) e angolo φ abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix} \Longrightarrow (\mathcal{U}(0,A)\Psi)(p_\omega) = e^{\pm ij\varphi}\Psi(p_\omega)$$

Dunque, se A appartiene allo stabilizzatore di un punto p dell'orbita di p_ω allora $A_p = A_{\Lambda(A)^{-1}p}$ e la formula di Wigner diviene (si rammenti che $A_p = U_p H_p$)

$$(\mathcal{U}(0,A)\Psi)(p) = D(A_p^{-1}AA_p)\Psi(\Lambda(A)^{-1}p) = (H_p^{-1}U_p^{-1}AU_pH_p)\Psi(\lambda(A^{-1})p)$$

quindi, se A è una rotazione, $U_p^{-1}AU_p$ è una matrice diagonale, precisamente una rotazione di asse x_3, il che consente di affermare che D è una rappresentazione e di scrivere la formula di Wigner come

$$(\mathcal{U}(0,A)\Psi)(p) = D(U_p^{-1}AU_p)\Psi(\Lambda(A)^{-1}p) = e^{\pm ij\varphi}\Psi(\Lambda(A)^{-1}(p))$$

Ma allora l'equazione $\not{P}\Psi = 0$ descrive la rappresentazione

$$[0, \frac{1}{2}] \oplus [0, -\frac{1}{2}]$$

che è riducibile.

Il motivo per cui esiste questa decomposizione è il seguente: consideriamo $\not{P}\Psi(p_\pi) = 0$ ($p_\omega = (1, 0, 0, 1)$); allora

$$\not{P} = \begin{pmatrix} 0 & I + \sigma_3 \\ I - \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi $\not{P}\Psi(p_\omega) = 0$ se e solo se $\psi_3 = \psi_2 = 0$. La rappresentazione è

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{*-1} \end{pmatrix}$$

con $A = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix}$, rotazione di asse x_3 unitaria ($A^{*-1} = A$):

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{*-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \\ 0 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Ora la decomposizione nelle due rappresentazioni $[0, \frac{1}{2}]$ e $[0, -\frac{1}{2}]$ è del tutto evidente.

Capitolo 18

QUANTIZZAZIONE CANONICA

In questo capitolo diamo una descrizione matematica del formalismo (ormai classico) della Meccanica Quantistica di un sistema finito di particelle: si tratta della teoria di Schrödinger–Heisenberg, che discuteremo nell'àmbito della teoria delle algebre di operatori e della simmetria del capitolo precedente. In particolare dimostreremo l'unicità della rappresentazione di Schrödinger (d'onde il nome "canonica") per la forma che Weyl ha dato alle relazioni di Heisenberg: come si vedrà, la differenza degli approcci classici sta solo nella diversa presentazione di stesse algebre di operatori isomorfe fra loro. Preliminarmente richiameremo brevemente il formalismo hamiltoniano per i sistemi classici con finiti gradi di libertà.

18.1 Formalismo canonico

Consideriamo uno spazio vettoriale V di dimensione finita: ogni elemento di $V \otimes V$ si decompone in modo unico come somma di un tensore simmetrico ed un tensore antisimmetrico; questo significa che per studiare le forme bilineari basta limitarsi a queste.

Se $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) è una forma bilineare, possiamo associarle la

$$\varphi^\flat : V \longrightarrow V^*$$

definita come

$$(\varphi^\flat(v))(v') = \varphi(v, v')$$

Dato che $V/\ker \varphi^\flat = \operatorname{im} \varphi$, la forma è non degenere se e solo se $\varphi^\flat$ è un isomorfismo. Una forma bilineare simmetrica non degenere è una forma pseudo-euclidea; il teorema di Sylvester, noto dall'Algebra Lineare, classifica queste forme in termini delle forme quadratiche loro associate: se φ è una forma bilineare non degenere, possiamo associarle una forma quadratica $Q(v) = \varphi(v, v)$ che, in una opportuna base $(e_1, ..., e_n)$, è sempre del tipo

$$Q(x) = x_1^2 + .. + x_k^2 - x_{k+1}^2 - ... - x_n^2$$

Nel caso antisimmetrico, non possiamo definire la forma quadratica, e la classificazione è molto più semplice.

18.1.1 Definizione *Una* forma simplettica *su uno spazio vettoriale V è una funzione bilineare antisimmetrica e non degenere $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$.*

Nel caso in cui $\dim V = \infty$, questa definizione non è precisa: bisogna infatti specificare cosa significhi essere non degenere; se V è uno spazio di Banach, un forma bilineare continua φ è *fortemente non degenere* se la mappa lineare e continua $\varphi^\flat$ è un isomorfismo di spazi di Banach fra V e V^* (duale topologico), mentre è *debolmente non degenere* se $\varphi^\flat$ è semplicemente una isometria; ovviamente uno spazio di Banach ammette forme fortemente non degeneri se e solo se è riflessivo, e una forma debolmente non degenere e suriettiva, è pure fortemente non degenere, per il teorema della mappa aperta.

18.1.2 Esempio *Se $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert complesso, e (x, y) è la sua forma hilbertiana, questa, come forma bilineare simmetrica, è fortemente non degenere: se scriviamo*

$$(x, y) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y)$$

allora $\beta : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una forma simplettica fortemente non degenere su $\mathcal{H}$.

18.1.3 Teorema (DARBOUX) *Se φ è una forma simplettica su uno spazio vettoriale V di dimensione finita, allora esiste una base $(e_1, ..., e_{2n})$ di V nella quale*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} e_i \wedge e_{i+n}$$

Una tale base si dice base simplettica.

DIMOSTRAZIONE: Procediamo per induzione sulla dimensione N di V. Per prima cosa osserviamo che deve aversi $\dim V = 2n$; infatti in una qualsiasi base la forma simplettica è rappresentata da una matrice A antisimmetrica, $A = -A^T$ e quindi tale che $\det A = \det(-A^T) = (-1)^N \det A^T = (-1)^N \det A$, sicché N è pari oppure $\det A = 0$; ma A è non degenere, quindi $\det A \neq 0$, i.e. $N = 2n$ è pari.

Ora sia $n = 1$: allora fissato un vettore non nullo $e_1 \in V$, il funzionale lineare

$$f_{e_1}(v) := \varphi(e_1, v)$$

su V è non nullo (la forma è non degenere), quindi esiste un $e_2 \in V$ tale che $f_{e_2}(e_1) = 1$; ovviamente e_1 e e_2 non possono essere linearmente dipendenti, altrimenti $e_1 = ae_2$ e quindi $\varphi(e_1, e_2) = a\varphi(e_2, e_2) = 0$. Quindi sono una base di V che ha dimensione 2.

Se $n > 1$ e supponiamo che il teorema sia valido per $n-1$ scegliamo di nuovo un vettore $e_1 \in V$ non nullo e, come nel caso precedente, un vettore e_{n+1} linearmente indipendente da e_1 e tale che

$$\varphi(e_1, e_{n+1}) = 1$$

Ora consideriamo i funzionali lineari f_{e_1} e $f_{e_{n+1}}$ dati da

$$f_{e_1}(v) := \varphi(e_1, v) \qquad f_{e_{n+1}}(v) := \varphi(e_{n+1}, v)$$

e gli spazi N_1 e N_{n+1} ortogonali a e_1 e e_{n+1} rispetto alla forma simplettica:

$$N_1 = \{v \in V \,|\, \varphi(e_1, v) = 0\} \qquad N_{n+1} = \{v \in V \,|\, \varphi(e_{n+1}, v) = 0\}$$

si tratta di spazi $(2n-1)$-dimensionali (nuclei di funzionali lineari), la cui intersezione $W = N_1 \cap N_{n+1}$ ha dimensione $2n-2$: infatti $e_1 \notin N_{n+1}$ e $e_{n+1} \notin N_1$. Vogliamo ora dimostrare che su W la forma simplettica φ è non degenere, e quindi applicare l'induzione per dedurre l'esistenza di una base simplettica $(e_2, ..., e_n, e_{n+2}, ..., e_{2n})$ per W: aggiungendo a questa base i vettori e_1 e e_{n+1} si ottiene ovviamente una base simplettica di V e il teorema è dimostrato.

Resta solo quindi da provare che $\varphi|_W$ è non degenere, il che è semplice: se esistesse $w \in W$ tale che, per ogni $w' \in W$, $\varphi(w, w') = 0$, allora, dato che per definizione si ha pure $\varphi(e_1, w) = \varphi(e_{n+1}, w) = 0$, e $W \oplus e_1\mathbb{K} \oplus e_{n+1}\mathbb{K} = V$, allora w sarebbe nel nucleo della forma φ, i.e. $w = 0$.

QED

In altri termini, la forma è, nella base $(e_1, ..., e_{2n})$ determinata dalle equazioni

$$\varphi(e_i, e_j) = 0 \qquad \varphi(e_{i+n}, e_{j+n}) = 0 \qquad \varphi(e_i, e_{j+n}) = \delta_{ij}$$

se $i, j \in \{1, ..., n\}$, ed è quindi, scritta in forma matriciale, la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$.

18.1.4 Definizione *Uno* spazio simplettico *è uno spazio vettoriale dotato di una forma simplettica.*

18.1.5 Corollario *Uno spazio simplettico di dimensione finita ha dimensione pari.*

Una *trasformazione lineare simplettica* è una funzione lineare $f : V \longrightarrow W$ fra spazi vettoriali simplettici che preserva le forme simplettiche

$$\psi(f(v), f(w)) = \varphi(v, w)$$

Una trasformazione lineare simplettica è un *simplettomorfismo* (o isomorfismo simplettico) se è un isomorfismo di spazi vettoriali.

18.1.6 Corollario *Due spazi simplettici della stessa dimensione sono simplettomorfi.*

18.1.7 Esempio *Il più importante (ed in un certo senso l'unico) spazio vettoriale simplettico è il seguente: consideriamo uno spazio vettoriale qualsiasi V, ed il suo spazio duale V^*; allora possiamo definire una forma simplettica su $V \times V^*$ come*

$$\varphi((v, \varphi), (w, \psi)) = \psi(v) - \varphi(w)$$

Per il teorema di Darboux, ogni spazio vettoriale simplettico di dimensione $2 \dim V$ si ottiene in questo modo. In coordinate, scriviamo una base $(q_1, ..., q_n)$ di V ed una base duale $(p_1, ..., p_n)$ di V^*: allora la forma simplettica standard è

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} p_i \wedge q_i$$

Usiamo ora queste nozioni per formalizzare la Meccanica Classica; consideriamo un sistema fisico descritto da energia cinetica E e potenziale U, come ad esempio un sistema di punti con masse m_i e distanze dall'origine r_i, che ha energia cinetica e potenziale

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d}{dt} {r_i}^2 \qquad U = \sum_{i,j} V_{ij}(r_i - r_j)$$

(V_{ij} sono le interazioni fra i punti di masse m_i e m_j, ad esempio il potenziale gravitazionale newtoniano $V_{ij}(r) = -Gm_i m_j/|r|$). I moti $t \longmapsto q(t)$ del sistema sono descritti come gli estremali del funzionale

$$\int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t)) dt \tag{†}$$

ove $L = E - U$ è la lagrangiana del sistema. Se le coordinate lagrangiane $q = (q_1, ..., q_n)$ sono quelle di $\mathbb{R}^n$, la lagrangiana è semplicemente una funzione L :

$\mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$. Come noto dagli elementi della Meccanica gli estremali del funzionale (†) sono localmente descritti dalle equazioni di Eulero–Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

Sotto opportune condizioni di non degenerazione della lagrangiana, questo sistema può trasformarsi in uno equivalente per mezzo della trasformata di Legendre (cfr. [1] o [2]) in un sistema hamiltoniano: si definiscono gli impulsi

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

e le equazioni di Lagrange divengono

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

Considerando ora la funzione hamiltoniana

$$H(p,q,t) = \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q,\dot{q},t)$$

e confrontandone il differenziale

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p}dp + \frac{\partial H}{\partial q}dq + \frac{\partial H}{\partial t}dt$$

col differenziale della trasformata di Legendre $p\dot{q} - L(q,\dot{q},t)$ della lagrangiana L:

$$\dot{q}dp - \frac{\partial L}{\partial q}dq - \dot{L}dt = \dot{q}dp - \dot{p}dq - \dot{L}dt$$

otteniamo le equazioni di Hamilton.

$$\begin{cases} \dot{p}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q_k} \\ \dot{q}_k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \end{cases}$$

18.1.8 Esempio *Se la lagrangiana $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ è una forma quadratica sullo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^n$, ad esempio $L = E - U$ con E prodotto scalare in V, allora $H = E + U$. Infatti la trasformata di Legendre di una funzione quadratica coincide con la forma stessa: $H(p(q)) = pq - L(q) = 2E - (E - U) = E + U$.*

Si può esprimere in forma intrinseca il formalismo hamiltoniano ricorrendo agli spazi simplettici: gli osservabili di un sistema dinamico classico sono le funzioni (differenziabili o comunque che soddisfino ipotesi di regolarità) $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ definite sullo *spazio delle fasi*, che in generale sarà una varietà differenziabile (ad esempio un aperto di $\mathbb{R}^{2n}$); nel caso lineare, V è uno spazio vettoriale simplettico. L'algebra degli osservabili è quindi $C^\infty(V)$ col prodotto di funzioni punto per punto: si tratta di un'algebra associativa e commutativa. Possiamo definire su $C^\infty(V)$ anche una struttura di algebra di Lie, considerando le *parentesi di Poisson*. Per farlo consideriamo una forma simplettica φ su $V = \mathbb{R}^{2n}$ e l'isomorfismo

$$\varphi^\# : V^* \longrightarrow V$$

duale dell'isomorfismo $\varphi^\flat$. Possiamo allora definire un campo di vettori in V come

$$X_H = \varphi^\#(dH)$$

ove dH è il differenziale dell'osservabile $H : V \longrightarrow \mathbb{R}$. Un campo della forma X_H si dice *campo hamiltoniano* di hamiltoniana H; le parentesi di Poisson su $C^\infty(V)$ si definiscono come

$$\{F, G\} = \varphi(X_F, X_G)$$

e le equazioni del moto assumono la forma

$$\dot{F} = \{H, F\}$$

ove H è l'hamiltoniana e F è un osservabile. Per $F = q_k$ e $F = p_k$ otteniamo esattamente le equazioni di Hamilton; gli integrali primi del sistema, le costanti del moto, sono caratterizzati dalla

$$\{H, I\} = 0$$

Se il sistema possiede integrali primi $I_1, ..., I_k$, l'algebra di Lie da essi generata (rispetto alle parentesi di Poisson) corrisponde a un gruppo di Lie che è il gruppo delle simmetrie del sistema: se gli integrali primi sono un sistema completo, nel senso che le relazioni $\{I_k, F\}$ implicano $F = 0$ allora il sistema è completamente integrabile (teorema di Liouville).

Oltre alla presentazione hamiltoniana, esiste anche un punto di vista indipendente dal tempo: per questo si considerano gli stati del sistema, cioè funzionali lineari sugli osservabili $C^\infty(V)$ che abbiano valori positivi sulle funzioni positive e 1 sulla funzione 1 (si tratta di misure di probabilità su V), che variano col tempo secondo le equazioni di Hamilton: se $\rho(p, q, t)$ è la densità di probabilità associata ad uno stato, allora

$$\dot{\rho} = \{\rho, H\}$$

I due approcci sono legati dalla relazione

$$\int_V \{H, F\}\rho dpdq = \int_V F\{\rho, H\}dpdq$$

Questi concetti hanno degli analoghi in Meccanica Quantistica: in questo caso l'algebra degli osservabili non è un'algebra di funzioni ma di operatori (non commutativa), ma esiste un analogo delle parentesi di Poisson dato dal commutatore di operatori: l'equazione del moto è formalmente analoga a quella precedente (*Heisenberg picture*):

$$\hbar\dot{A} = i[H, A]$$

Analogamente al caso classico esiste anche una presentazione nella quale gli operatori che corrispondono agli osservabili non cambiano nel tempo, ma cambiano gli stati (*Schrödinger picture*). L'equazione del moto in questo caso diviene l'equazione di Schrödinger

$$\hbar\dot{\rho} = iH\rho$$

La corrispondenza fra un sistema classico e un sistema quantistico, in modo che ad osservabili classici corrispondano osservabili quantistici, a simmetrie classiche simmetrie quantistiche e alle parentesi di Poisson le parentesi di Lie fra operatori si dice *quantizzazione* del sistema classico: per una discussione precisa di questo concetto si rimanda a [6].

18.2 Rappresentazione di Schrödinger

Consideriamo un sistema nel quale posizione e impulso siano determinati dalle famiglie finite di osservabili

$$q_1, ..., q_n \qquad \text{e} \qquad p_1, ..., p_n$$

di operatori autoaggiunti su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, ove, se $k \neq h$ e $r \neq s$:

$$\begin{cases} [q_k, q_h] = [p_r, p_s] = 0 \\ [p_r, q_k] \subset -i\hbar\delta_{rk}I \end{cases}$$

(si noti che gli operatori non sono continui, quindi dobbiamo considerare l'estensione del commutatore.)

Per semplicità notazionale ci limiteremo al caso $n = 1$, ponendo anche $\hbar = 1$:

$$pq - qp \subset -iI$$

Notiamo che, se lo spazio $\mathcal{H}$ ha dimensione finita, allora possiamo calcolare la traccia di p e q, così come del loro commutatore:

$$\operatorname{tr}[p,q]=0$$

il che contraddice la relazione di Heisenberg precedente.

Quindi lo spazio deve avere dimensione infinita, e lo stesso argomento prova che gli operatori p e q non possono essere nucleari; in realtà

18.2.1 Proposizione *Gli operatori p e q non possono essere continui.*

Dimostrazione: Supponiamo che lo siano: è ben definito allora l'operatore

$$c := \frac{1}{i}[p,q]$$

Se ω è uno stato e se $\Delta_\omega A = \sqrt{\omega(A^2)-\omega(A)^2}$ allora

$$\Delta_\omega(p)\delta_\omega(q) \geq \frac{1}{2}|\omega(c)| = \frac{1}{2}$$

Ma, per continuità di p, $\Delta_\omega p \leq ||p||$ e quindi

$$\Delta_\omega p \geq \frac{1}{2||p||} \qquad \text{e} \qquad \Delta_\omega q \geq \frac{1}{2||q||}$$

Se ω è uno stato tale che $\xi_\omega = E(\Delta)\xi_\omega$, ove

$$p = \int \lambda dE(\lambda)$$

con $E(\Delta)\neq 0$ e $\operatorname{diam}(\Delta)<\varepsilon$ allora

$$\Delta_\omega p = \sqrt{\omega(p^2)-\omega(p)^2} \leq ||(p-\omega(p)I)\xi_\omega|| \leq \varepsilon$$

il che contraddice il principio di Heisenberg.

QED

18.2.2 Esempio *Consideriamo una particella che si muove sulla circonferenza $\mathbb{T}=S^1$ e lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{T},ds)$ (misura di Lebesgue), e gli operatori*

$$(qx)(s) = sx(s) \qquad \text{e} \qquad (px)(s) = -i\frac{\partial}{\partial s}x(s)$$

Notiamo che $\sigma(q)=[0,2\pi]$, mentre $\sigma(p)=\mathbb{Z}$: si noti che in questo caso p è certamente non limitato, mentre lo è q; questo non è in contraddizione col principio di Heisenberg, dato che p è definita (in quanto operatore di derivazione) sulle funzioni assolutamente continue (periodiche in $\mathbb{R}$ di periodo 2π) e quindi il dominio di $[p,q]$ contiene funzioni che in 0 e 2π valgono zero.

Se $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n, ds^n)$ con

$$(q_k x)(s) = s_k x(s) \qquad \text{e} \qquad (p_k x)(s) = -i\frac{\partial}{\partial s_k} x(s)$$

allora

$$\mathcal{D}_{q_k} = \{x \in \mathcal{H} \,|\, (s \longmapsto s_k x(s)) \in \mathcal{H}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_{p_k} = \{x \in \mathcal{H} \,|\, (s \longmapsto s_k \widehat{x}(s)) \in \mathcal{H}\}$$

dato che, se $\mathfrak{F}x = \widehat{x}$ è la trasformata di Fourier, allora

$$\mathfrak{F} q_k \mathfrak{F}^{-1} = p_k$$

e quindi

$$[p_k, q_r] \subset -\delta_{kr} I \qquad \text{e} \qquad [q_h, q_k] = 0$$

Possiamo meglio precisare queste relazioni nel modo seguente: le mappe $U, V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definite come

$$U(\alpha) := e^{i\langle \alpha, q\rangle} \qquad \text{e} \qquad v(\alpha) := e^{i\langle \alpha, p\rangle}$$

sono rappresentazioni unitarie fortemente continue di $\mathbb{R}^n$ e

$$(U(\alpha)x)(S) = e^{i\langle \alpha, s\rangle} x(s) \qquad \text{e} \qquad (V(\alpha)x)(S) = x(s+\alpha)$$

sono operatori unitari (ovvio) fortemente continui (teorema della convergenza dominata).

18.2.3 Definizione *La rappresentazione degli operatori q e p per mezzo delle U e V si dice* rappresentazione di Schrödinger.

Possiamo quindi, per il teorema di Stone 14.3.6, scrivere:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{i}\left(\dfrac{\partial}{\partial \alpha_j} U(\alpha)x\right)_{\alpha=0}(s) = s_j x(s) = q_j(x)(s) \\ \dfrac{1}{i}\left(\dfrac{\partial}{\partial \alpha_j} V(\alpha)x\right)_{\alpha=0}(s) = -i\dfrac{\partial}{\partial s_j} x(s) = p_j(x)(s) \end{cases}$$

Ma

$$\begin{aligned} V(\beta)U(\alpha)(s) =& U(\alpha)(x)(s+\beta) = e^{i\langle \alpha, s+\beta\rangle} x(s+\beta) \\ &= e^{i\langle \alpha, \beta\rangle} e^{i<\alpha, s>} x(s+\beta) \\ &= e^{i\langle \alpha, \beta\rangle} (U(\alpha)V(\beta)x)(s) \end{aligned}$$

Abbiamo cioè ottenuto le *regole di commutazione di Weyl*

18.2.4 Teorema $V(\beta)U(\alpha) = e^{i\langle\alpha,\beta\rangle}U(\alpha)V(\beta)$

Viceversa, partendo da due rappresentazioni unitarie U e V fortemente continue, sempre per il teorema di Stone 14.3.6, possiamo dedurre che sono della forma

$$U(\alpha) = e^{i\langle\alpha,q\rangle} \qquad \text{e} \qquad V(\beta) = e^{i\langle\beta,p\rangle}$$

per p e q opportuni operatori autoaggiunti. Allora, supponendo che le rappresentazioni U, V soddisfino alle relazioni di Weyl, si deduce che

$$[p_k, q_j] \subset -i\delta_{jk}I$$

La corrispondenza fra la rappresentazione di Schrödinger e le relazioni di Weyl non è precisamente biunivoca: in effetti ogni rappresentazione delle relazioni di Weyl è somma diretta di rappresentazioni di Schrödinger. Prima di dimostrarlo approfondiamo qualche proprietà di queste ultime.

18.2.5 Teorema *La rappresentazione di Schrödinger è irriducibile.*

DIMOSTRAZIONE: Sia U, V la rappresentazione di Schrödinger: allora

$$\{U(\alpha)\}''_{\alpha\in\mathbb{R}^n} = \{U(\alpha)\}'_{\alpha\in\mathbb{R}^n}$$

(si tratta di un'algebra di von Neumann abeliana massimale); inoltre

$$\left(\int f(\alpha)U(\alpha)d\alpha x\right)(s) = \widehat{f}(s)x(s)$$

dunque

$$\{U(\alpha)\}''_{\alpha\in\mathbb{R}^n} = \{M_f\}_{f\in L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

(operatori di moltiplicazione). Ma sappiamo che ogni $x\in L^2(\mathbb{R}^n)$ tale che $\{x = 0\}$ abbia misura nulla è ciclico.

Analogamente si procede per V, dato che $\mathfrak{F}^{-1}U\mathfrak{F} = V$ e quindi, se $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ è tale che

$$BU = UB \qquad \text{e} \qquad BV = VB$$

allora $B \in \mathbb{C}I$. in particolare, se $[B, U] = [B, V] = 0$ allora $B = M_f$, con $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$; ma

$$\begin{aligned}(V(\beta)M_f x)(s) =&(M_f x)(s+\beta) = f(s+\beta)x(s+\beta)\\ =&f(s+\beta)(V(\beta)x)(s) = (M_{f_{-\beta}}V(\beta)x)(s)\end{aligned}$$

(f_t è la traslazione per t), ovvero

$$V(\beta)M_fV(\beta)^{-1} = M_{f_{-\beta}}$$

Ma, dato che $[B, U] = 0$, $B = M_f$ e $M_f = M_{f_\beta}$ i.e.

$$M_{f-f_\beta} = 0 \Rightarrow f = f_\beta \text{ q.o.}$$

e quindi f è quasi ovunque costante, cioé $M_f \in \mathbb{C}I$.

Quindi la rappresentazione di Schrödinger è irriducibile.

QED

Consideriamo ora q_k, p_j operatori autoaggiunti su $\mathcal{H}$ che siano una rappresentazione delle relazioni di Heisenberg; ci chiediamo quando una tale rappresentazione sia irriducibile. Una condizione è che, per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si abbia

$$Bq_k \subset q_k B \qquad \text{e} \qquad Bp_j \subset p_j B$$

cioè

$$BE_{q_k}(\lambda) = E_{q_k}(\lambda)B \qquad \text{e} \qquad BE_{p_j}(\lambda) = E_{p_j}(\lambda)B$$

(famiglie spettrali). Nel caso della rappresentazione di Schrödinger, queste condizioni sono una caratterizzazione dell'irriducibilità:

$$\left.\begin{array}{l} BU(\alpha) = U(\alpha)B \\ BV(\alpha) = V(\alpha)B \end{array}\right\} \Rightarrow B \in \mathbb{C}I$$

Ora definiamo l'*operatore di von Neumann*, se $z = \alpha \oplus \beta \cong \alpha + i\beta$:

$$W(z) := e^{\frac{i}{2}\langle\alpha,\beta\rangle} U(\alpha)V(\beta)$$

La funzione $z \longmapsto W(z)$ è fortemente continua ed è una rappresentazione:

$$\begin{aligned} W(z)W(z') &= e^{\frac{i}{2}(\langle\alpha,\beta\rangle+\langle\alpha',\beta'\rangle)} U(\alpha)U(\beta)U(\alpha')U(\beta') \\ &= e^{\frac{i}{2}(\langle\alpha,\beta>+\langle\alpha',\beta'\rangle+2\langle\alpha',\beta\rangle)} U(\alpha+\alpha')V(\beta+\beta') \\ &= e^{i\langle\alpha',\beta\rangle} W(z+z') = e^{\frac{i}{2}(\langle\alpha',\beta\rangle-\langle\alpha,\beta'\rangle)} W(z+z') \\ &= e^{i\sigma(\alpha,\beta)} W(z+z') \end{aligned}$$

ove abbiamo definito

$$\sigma(z,z') = \frac{1}{2}(\langle\alpha',\beta\rangle - \langle\alpha,\beta'\rangle) = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\langle z',z\rangle = \frac{1}{2}\langle\alpha+i\beta, \alpha'+i\beta'\rangle$$

(prodotto scalare in $\mathbb{C}^n$). Notiamo che σ è una forma bilineare, antisimmetrica e non degenere: infatti è la parte immaginaria di una forma sesquilineare[1]. Si tratta

[1]Una tale forma si dice kähleriana.

cioè di una forma simplettica; sappiamo che ogni tale forma è, in una opportuna base, associata ad una matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ (teorema di Darboux).

Notiamo qui che la $\mathbb{R}$-bilinearità e l'antisimmetricità di σ implicano

$$W(z)^* = W(z)^{-1} = W(-z)$$

e quindi, se $z = \lambda\xi$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), $\lambda \longmapsto W(\lambda z)$ è una rappresentazione unitaria e fortemente continua di $\mathbb{R}$; viceversa, ogni tale rappresentazione tale che

$$W(z)W(z') = e^{i\sigma(z,z')}W(z+z') \tag{$\dagger$}$$

determina una rappresentazione di Schrödinger U, V come

$$U(\alpha) = W(\alpha + i0) \qquad \text{e} \qquad V(\beta) = W(0 + i\beta)$$

Quindi la (†) e le regole di commutazione di Weyl sono equivalenti.

Ora consideriamo l'insieme $H_n = \{(z, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } z \in \mathbb{C}^n\}$ tale che

$$(z, \lambda) \longmapsto e^{i\lambda}W(z)$$

Vogliamo su H_n una moltiplicazione che renda questa mappa una rappresentazione:

$$(z, \lambda) \cdot (z', \lambda') \longmapsto e^{i(\lambda+\lambda')}W(z)W(z') = e^{i(\lambda+\lambda'+\sigma(z,z'))}W(z+z')$$

Ovviamente basta porre

$$(z, \lambda) \cdot (z', \lambda') := (z + z', \lambda + \lambda' + \sigma(z, z'))$$

vale a dire che $H_n = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{C}^n$ è il prodotto semidiretto dei gruppi di Lie additivi $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}^n$.

18.2.6 Definizione *Il gruppo H_n si dice* gruppo di Heisenberg.

Usando la terminologia della teoria delle algebre di Lie, che si applica anche ai gruppi, possiamo dire che H_n è estensione centrale del gruppo additivo C^n per mezzo del cociclo σ:

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H_n \longrightarrow \mathbb{C}^n \longrightarrow 0$$

Ricordiamo che queste estensioni sono parametrizzate, a meno di equivalenze, da $H^2(\mathbb{C}^n)$: in effetti la forma simplettica σ usata per definire l'estensione dà luogo esattamente all'elemento di $H^2(\mathbb{C}^n)$ associato all'estensione stessa.

Notiamo che possiamo realizzare il gruppo H_n come gruppo di matrici nel modo seguente:

$$H_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x^T & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{C}^n \text{ e } t \in \mathbb{R} \right\}$$

Si vede in questo modo che il gruppo di Heisenberg è nilpotente.

Con la costruzione precedente abbiamo quindi determinato una rappresentazione unitaria del gruppo di Heisenberg per mezzo dell'operatore di von Neumann

$$\mathcal{U}_W(\lambda, z) = e^{i\lambda} W(z)$$

Naturalmente, per il teorema di Stone 14.3.6, ogni rappresentazione $\mathcal{U}$ del gruppo di Heisenberg soddisfa alla relazione

$$\mathcal{U}(0, \lambda) = e^{iT\lambda}$$

per un opportuno T; inoltre, dato che $\sigma(z, z) = 0$, di nuovo per il teorema di Stone 14.3.6, abbiamo che

$$\mathcal{U}(\alpha + i0, 0) = e^{i\langle \alpha, q\rangle} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{U}(0, 0 + i\beta) = e^{i\langle \beta, p\rangle}$$

per opportuni p, q; quindi esistono $2n + 1$ generatori per la rappresentazione del gruppo tali che

$$[p_k, q_j] = \frac{1}{i}\delta_{kj} T$$

Dato che a noi interessano operatori che verifichino le relazioni di Heisenberg o, equivalentemente, quelle di Weyl, dobbiamo considerare solo le rappresentazioni tali che $T = I$.

Osserviamo che H_n è connesso e semplicemente connesso: possiamo quindi, per mezzo del teorema di Nelson 16.4.2, determinarne le rappresentazioni a partire da quelle della sua algebra di Lie. L'algebra di Lie $\mathfrak{h}_n$ del gruppo di Heisenberg è ovviamente (come spazio vettoriale) somma diretta di $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}^n$ (algebre di Lie banali); il prodotto è desunto da quello del gruppo:

$$[(z, \lambda), (z', \lambda')] = (0, 2\sigma(z, z'))$$

Notiamo inoltre che la forma simplettica $\sigma : \mathbb{C}^n \wedge \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ determina un 2-cociclo sull'algebra di Lie: questo è ovvio se scriviamo la mappa esponenziale $\exp : \mathfrak{h}_n \longrightarrow H_n$: usiamo la rappresentazione matriciale che abbiamo dato per il gruppo di Heisenberg.

Per prima cosa, osserviamo che le matrici di $\mathcal{H}_n$ sono della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & x^T & t \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con $x, y \in \mathbb{C}^n$ e $t \in \mathbb{R}$; allora

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & x^T & t \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x^T & t + \frac{1}{2}\sigma(x, y) \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In questo caso la mappa esponenziale è quindi un diffeomorfismo fra il gruppo H_n e la sua algebra di Lie $\mathfrak{h}_n$.

Consideriamo una rappresentazione dell'algebra di Lie $\mathfrak{h}_n$, i cui generatori siano $p_1, ..., p_n$,$q_1, ..., q_n$ e I; per applicare il teorema di Nelson 16.4.2 necessita che l'operatore

$$\frac{1}{2}\sum_j (p_j^1 + q_j^2)$$

sia essenzialmente autoaggiunto (si tratta dell'hamiltoniano dell'oscillatore armonico ($\hbar = m = m\omega = 1$)): lo dimostreremo alla fine di questo capitolo.

18.3 Teorema di Stone–von Neumann

Affronteremo ora la dimostrazione del seguente e fondamentale teorema che stabilisce la canonicità della rappresentazione di Schrödinger (e quindi, ad esempio, implica la sua equivalenza alla rappresentazione di Heisenberg).

18.3.1 Teorema di unicità (Stone–von Neumann) *Ogni rappresentazione unitaria irriducibile delle relazioni di Weyl su $\mathbb{C}^n$ è isomorfa alla rappresentazione di Schrödinger.*
che implicherà il *teorema di unicità di Dirac–Dixmier* per la rappresentazione di Schrödinger: combinando infatti questo risultato col teorema di Nelson 16.4.2 otteniamo il

18.3.2 Corollario *Ogni rappresentazione delle relazioni di Weyl in $\mathbb{C}^n$ è somma diretta di copie della rappresentazione di Schrödinger.*

Procediamo ora nella dimostrazione del teorema di Stone–von Neumann: si tratta di dimostrare in sostanza che il gruppo di Heisenberg possiede, a meno di equivalenze unitarie, la sola rappresentazione di Schrödinger come rappresentazione irriducibile unitaria.

L'algebra di gruppo $L^1(H_n, d\mu)$ del gruppo di Heisenberg: è un'algebra di Banach non commutativa (non lo è il gruppo): sia $J \lhd L^1(H_n)$ un suo ideale chiuso, tale che le rappresentazioni che verificano la

$$\mathcal{U}(0, \lambda) = e^{i\lambda}$$

siano zero su J, e sia

$$\pi : L^1(H_n) \longrightarrow L^1(H_n)/J \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

la rappresentazione associata a $\mathcal{U}$; per questo possiamo ad esempio considerare l'ideale delle funzioni tali che

$$\int e^{i\lambda} f(z, \lambda) d\lambda = 0$$

(si tratta ovviamente di uno *-ideale bilatero chiuso). Descriviamo ora il quoziente $L^1(H_n)/J$: un elemento dell'algebra $L^1(H_n)$ possiamo immaginarlo come una funzione

$$\lambda \longmapsto f(z, \lambda)$$

la cui trasformata di Fourier sia

$$\mu \longmapsto \widehat{f}(z, \mu)$$

Quozientare per J significa allora valutare la trasformata di Fourier in $\lambda = 1$: $\widehat{f}(z, 1)$. Quindi, dato che, per ogni $f, g \in L^1(H_n)$,

$$\begin{aligned}(f *_\sigma g)(z, \lambda) &:= \int_{H_n} f(z', \lambda') g((z', \lambda')^{-1}(z, \lambda)) d(z', \lambda') \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{C}^n} f(z', \lambda') g(z - z', \lambda - \lambda' + \sigma(-z', z)) dz' d\lambda'\end{aligned}$$

si trova che

$$\widehat{f *_\sigma g}(z, s) = \int_{\mathbb{C}^n} \widehat{f}(z', s') g(z - z', s) e^{-i\sigma(z', z)s} dz'$$

e quindi, in $L^1(H_n)/J$ la convoluzione è

$$\widehat{f *_\sigma g}(z, 1)$$

sicché, come *-algebra di Banach, è isomorfa a $L^1(\mathbb{C}^n)$ con l'involuzione $f^*(z) = \overline{f(-z)}$ e il prodotto:

$$\begin{aligned}(f *_\sigma g)(z) &:= \int_{\mathbb{C}^n} f(z') g(z - z') e^{i\sigma(z', z)} dz' = \int_{\mathbb{C}^n} f(z - \zeta) g(\zeta) e^{i\sigma(z - \zeta, z)} d\zeta \\ &= \int_{\mathbb{C}^n} f(z - \zeta) g(\zeta) e^{-i\sigma(\zeta, z)} d\zeta\end{aligned}$$

Quindi le rappresentazioni non degeneri di $L^1(\mathbb{C}^n)$ col prodotto $*_\sigma$ sono in corrispondenza biunivoca con le rappresentazioni delle relazioni di Weyl per mezzo della

$$\pi(f) = \int_{\mathbb{C}^n} f(z)W(z)dz$$

Infatti

$$W(z)\pi(f) = \pi(f_{(z)})$$

ove $f_{(z)}(z') = e^{i\sigma(z,z')}f(z'-z)$, pertanto

$$\begin{aligned}\pi(f)\pi(g) &= \int f(z)g(z')W(z)W(z')dzdz' \\ &= \int f(z)g(z')e^{i\sigma(z,z')}W(z+z')dzdz' \\ &= \int f(z)g(\zeta-z)e^{i\sigma(z,\zeta)}W(\zeta)d\zeta = \pi(f *_\sigma g)\end{aligned}$$

Inoltre

$$(f *_\sigma g)(\zeta) = \int f(z)g(\zeta-z)e^{i\sigma(z,\zeta)}dz = \int f(\zeta-z')g(z')e^{-i\sigma(z',\zeta)}dz'$$

Per dimostrare il teorema di Stone–von Neumann ci basterà quindi dimostrare che l'algebra $L^1(\mathbb{C}^n, *_\sigma)$ possiede un'unica rappresentazione irriducibile.

18.3.3 Lemma *Per ogni rappresentazione $\pi \neq 0$ di $L^1(\mathbb{C}^n, *_\sigma)$ e ogni funzione f tale che $\pi(f) = 0$ si ha $f = 0$.*

DIMOSTRAZIONE: Abbiamo $W(z)\pi(f)W(z)^{-1} = 0$, dato che

$$\begin{aligned}W(z)\int f(\zeta)W(\zeta)d\zeta W(-z) &= \int f(\zeta)W(z+\zeta)e^{i\sigma(z,\zeta)}d\zeta W(-z) \\ &= \int f(\zeta)W(\zeta)e^{i(\sigma(z+\zeta,-z)+\sigma(z,\zeta))}d\zeta \\ &= \pi(f^{(z)})\end{aligned}$$

ove $f^{(z)}(\zeta) = e^{2i\sigma(z,\zeta)}f(\zeta)$, cioè

$$\forall x, y \in \mathcal{H} \qquad \int e^{2i\sigma(z,\zeta)}f(\zeta)(x, W(\zeta)y)d\zeta = 0$$

ovvero

$$f \cdot (\widehat{x, W(-})y) = 0$$

sicché $f \cdot (x, W(-)y) = 0$ q.o. da cui $f = 0$ q.o. il che vuol dire che $f = 0$ come elemento di $L^1(\mathbb{C}^n)$.

QED

Ora introduciamo la funzione

$$f_0(z) := \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-\frac{1}{4}||z||^2}$$

(con $||z|| = \sum |z_j|^2$); f_0 è tale che

$$f_0^* * f_0 = f_0 \Rightarrow f_0 = f_0^*$$

ed inoltre

18.3.4 Lemma $\forall f \in L^1(\mathbb{C}^n) \quad f_0 * f * f_0 = \omega(f) f_0$

Dimostrazione: Basta far vedere che

$$(*) \qquad f_0 * f_0(\zeta) = \omega_0(\zeta) f_0$$

con $\omega_0(0) = 1$. Infatti[2], se è vera la (*):

$$g * f = \int g(\zeta) f_{(\zeta)} d\zeta = \int g(\zeta) f(z-\zeta) e^{i\sigma(\zeta,z)} dz$$

e quindi, dato che

$$\omega_0(f) = \int \omega_0(\zeta) f(\zeta) d\zeta$$

si ha

$$f^* * f_0(0) = f_0(0)$$

Ma

$$(f_0 * f_{0(w)})(z) = \int f_0(z - z') f_{(w)}(z') e^{i\sigma(z,z')} dz'$$

e $f_0(z' - w) e^{i\sigma(w,z')} = f_{0(w)}$, quindi

$$(f_0 * f_{0(w)})(z) = \int f_0(z - z') f(z' - w) e^{i(\sigma(z,z') + \sigma(w,z'))} dz'$$

[2] Si rammenti che (per antisimmetricità di σ):

$$\int f(z) W(\zeta) W(z) dz = \int f(z) e^{i\sigma(\zeta,z)} W(\zeta - z) dz \int f(z-\zeta) e^{i\sigma(\zeta,z)} W(z) dz = \pi(f_{(\zeta)})$$

ove $f_{(\zeta)}(z) = e^{i\sigma(\zeta,z)} f(z - \zeta)$.

Dunque, per definizione di f_0:

$$\begin{aligned}(f_0 * f_{0(w)})(z) =& \frac{1}{(2\pi)^{2n}}\int e^{-\frac{1}{4}(||z-z'||^2+||z'-w||^2)+i(\sigma(z,z')+\sigma(w,z'))}dz'\\ =& \frac{1}{(2\pi)^{2n}}\int e^{-\frac{1}{2}||z||^2-\frac{1}{4}||z||^2-\frac{1}{4}||w||^2+\frac{1}{2}(\mathrm{Re}(z,z')+\mathrm{Re}(w,z')+i\,\mathrm{Im}(z',w+z))}dz'\\ =& \frac{1}{(2\pi)^{2n}}e^{-\frac{1}{4}||z||^2-\frac{1}{4}||w||^2}\int e^{-\frac{1}{2}||z'||^2+\frac{1}{2}(z',w+z)}dz'\\ =& f_0(z)e^{-\frac{1}{4}||w||^2}\frac{1}{(2\pi)^{2n}}\int e^{-\frac{1}{2}||z'||^2+\frac{1}{2}(z',w+z)}dz'\end{aligned}$$

Per avere la nostra tesi dobbiamo mostrare che

$$\frac{1}{(2\pi)^{2n}}\int e^{-\frac{1}{2}||z'||^2+\frac{1}{2}(z',w+z)}dz' = 1$$

Ma

$$\int e^{-\frac{1}{2}||z'||^2+\frac{1}{2}(z',z+w)}dz' = \int e^{-\frac{1}{2}(z',z'+w+z)}dz'$$

e quindi basta dimostrare l'identità

$$\frac{1}{2\pi}\int e^{-\frac{1}{2}\overline{a}(\overline{a}+b)}da_1da_2 = 1$$

che segue osservando che

$$(a_1-ia_2)(a_1+ia_2+b) = \left(a_1+\frac{b}{2}\right)^2+\left(a_2-i\frac{b}{2}\right)^2$$

da cui

$$\frac{1}{2\pi}\int e^{-\frac{1}{2}\overline{a}(\overline{a}+b)}da_1da_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-\frac{1}{2}\left(a_1+i\frac{b}{2}\right)^2}da_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-\frac{1}{2}a_1^2}da_1 = 1$$

Ne segue che

$$(f_0 * f_{0(w)})(z) = f_0(z)e^{-\frac{1}{4}||w||^2}$$

e

$$\omega_0(f) = \int f_0(z)e^{-\frac{1}{4}||z||^2}dz$$

QED

Ora consideriamo una rappresentazione irriducibile π non degenere (quindi $\pi(f_0)\neq 0$); se $E_0 := \pi(f_0)$ allora abbiamo dimostrato che

$$E_0^*E_0 = E_0 \qquad \text{e} \qquad E_0\pi(f)E_0 = \omega_0(f)E_0$$

Possiamo dunque, analogamente a quanto fatto per la costruzione GNS, considerare l'operatore unitario U tale che, se $\{e_\alpha\}$ è una base:

$$U_{\alpha\beta}\pi(f)e_\beta = \pi(f)e_\alpha$$

cioè $\pi_\alpha \cong \pi_\beta$ e π_α è irriducibile:

$$(e_\alpha, \pi(f)e_\alpha) = \omega_0(f)$$

Ma la rappresentazione di Schrödinger π_S è irriducibile e quindi esiste un vettore Ω tale che

$$(\Omega, \pi_S(f)\Omega) = \omega_0(f)$$

(vedremo in realtà che Ω è il vettore di stato dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico).

Questo implica il teorema di unicità di Stone–von Neumann.

18.4 Regole di commutazione e completa riducibilità

Il teorema di completa decomposizione di una rappresentazione delle regole di commutazione di Weyl in somma diretta di copie della rappresentazione di Schrödinger è stato ottenuto nella sezione precedente come conseguenza del teorema di unicità di Stone–von Neumann e del teorema di Nelson 16.4.2 sull'integrazione di rappresentazioni di algebre di Lie ai gruppi corrispondenti: qui dimostreremo il teorema di completa riducibilità direttamente, senza ricorrere alla teoria di Nelson.

Consideriamo la C*-algebra $\mathcal{A}$ inviluppante della *-algebra di Banach $L^1(\mathbb{C}^n, *_\sigma)$: dato che le rappresentazioni di quest'ultima sono in corrispondenza biunivoca con le rappresentazioni non degeneri delle regole di commutazione di Weyl, queste sono anche in corrispondenza biunivoca con le rappresentazioni non degeneri di $\mathcal{A}$.

Ora dimostriamo un risultato generale

18.4.1 Lemma *Se $\mathcal{B}$ è una *-algebra di Banach e $E_0 \in \mathcal{B}$ è un idempotente autoaggiunto tale che*

- *Se π è una rappresentazione di $\mathcal{B}$ allora $\pi(E_0) = 0$ implica $\pi(\mathcal{B}) = 0$.*
- *$E_0\mathcal{B}E_0 = E_0\mathbb{C}$.*
- *$\mathcal{B}$ ammette rappresentazioni fedeli su spazi di Hilbert separabili.*

allora la C-algebra $\mathcal{A}$ inviluppante di $\mathcal{B}$ è la C*-algebra degli operatori compatti su $\mathcal{H}$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia π una rappresentazione irriducibile di $\mathcal{B}$; $\pi(E_0)$ idempotente autoaggiunto è un proiettore di rango 1, quindi $\pi(E_0)\in\mathbb{K}(\mathcal{H})$ e $\pi(A)\pi(E_0)\pi(B)$ è un operatore di rango 1 ($\pi(E_0)$ è un proiettore) e se

$$|\Omega\rangle\langle\Omega| := \pi(E_0)$$

allora

$$|\pi(A)\Omega\rangle\langle\pi(B^*)\Omega|$$

Dunque una somma finita del tipo $\sum\pi(A)\pi(E_0)\pi(B)$ ha rango finito; ma la chiusura in norma di queste somme è un sottospazio dell'algebra degli operatori compatti.

Alternativamente: si consideri la C*-algebra inviluppante $\mathcal{A}$ e l'intersezione

$$\pi(\mathcal{A}) \cap \mathcal{K}(\mathcal{H})$$

la cui controimmagine in $\pi(\mathcal{B})$ è un ideale bilatero chiuso J che non può essere proprio, altrimenti le rappresentazioni del quoziente indurrebbero delle rappresentazioni di $\mathcal{A}$ nulle su J e quindi nulle su E_0: la (1) implicherebbe allora che $\pi(\mathcal{B}) = 0$, i.e. che J possiede solo la rappresentazione nulla e quindi $J = \mathcal{A}$. Questo dimostra che $\pi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Il viceversa, $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \subset \pi(\mathcal{A})$, si ottiene immediatamente per ciclicità della rappresentazione π.

QED

Se π_0 è una rappresentazione irriducibile allora $\pi_0(\mathcal{A}) = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ e la mappa $A \longmapsto \pi_0(A)$ è una isometria di le C*-algebre, dato che

$$\pi(A) = \begin{pmatrix} \pi_0(A) & 0 & ... & 0 \\ 0 & \pi_0(A) & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \pi_0(A) \end{pmatrix} = \bigoplus \pi_0(A)$$

In particolare $||\pi(A)|| = ||\pi_0(A)|| = ||A||$, quindi $\mathcal{A} \cong \mathcal{K}(\mathcal{H})$ i.e.

$$\mathcal{A}^{**} \cong \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

(algebra di von Neumann inviluppante della C*-algebra $\mathcal{A}$): in effetti $\widehat{\pi}(A) = \oplus_\alpha \pi_0(A)$ è la rappresentazione universale.

In generale, se G è un gruppo topologico localmente compatto commutativo possiamo scrivere su di esso le relazioni di Weyl: consideriamo due rappresentazioni unitarie in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$

$$V : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}) \qquad \text{e} \qquad U : \widehat{G} \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$$

tali che

$$U(\chi)V(g) = \chi(g)V(g)U(\chi)$$

Ad esempio, considerando la rappresentazione regolare di G, $L^2(G)$ abbiamo

$$(U(\chi)f)(g) = \chi(g)f(g) \qquad \text{e} \qquad (V(h)f)(g) = f(gh)$$

Il seguente teorema di Mackey generalizza allora la teoria svolta per il gruppo di Heisenberg:

Teorema. *(U, V) è la sola rappresentazione irriducibile delle relazioni di Weyl su G.*

Anche in questo ambito più generale esiste un teorema di unicità alla Stone–von Neumann. Notiamo comunque che queste generalizzazioni si limitano al caso localmente compatto: ad esempio se X è uno spazio vettoriale topologico non di dimensione finita, non possiamo dire nulla di tutto ciò: possiamo comunque (e questo sarà fatto nel prossimo capitolo) sfruttare la linearità di X per considerare delle forme simplettiche e definire un gruppo di Heisenberg $H_X = X \rtimes \mathbb{R}$ per il quale potremo scrivere delle regole di commutazione di Weyl: tuttavia non avremo più l'unicità, che è propria del caso di dimensione finita, e che giustifica la terminologia "quantizzazione canonica" data a questa teoria.

Riassumiamo la procedura di quantizzazione[3] fin qui considerata: abbiamo definito

$$\pi(f) = \int f(z)W(z)dz$$

ove l'operatore di von Neumann soddisfa alle relazioni di Weyl

$$W(z)W(z') = e^{i\sigma(z,z')}W(z+z')$$

Ciò induce un gruppo a un parametro fortemente continuo che, per il teorema di Stone 14.3.6, possiamo scrivere come

$$\lambda \longmapsto W(\lambda z) = e^{i\lambda A}$$

ove $A = (\alpha, q) + i(\beta, p)$, se $z = \alpha + i\beta$:

$$\frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}W(\lambda z)\right)_{\lambda=0} = \frac{1}{i}\left(\left(\sum \alpha_k \frac{\partial}{\partial\alpha_k} + \sum \beta_k \frac{\partial}{\partial\beta_k}\right)W(z)\right)_{z=0} = (\alpha, q) + i(\beta, p)$$

Quindi, se $\widehat{f} \in \mathfrak{F}(L^1) \subset C_0(\mathbb{R}^{2n})$ è la trasformata di Fourier:

$$\widehat{f}(q,p) := \int f(\alpha,\beta)e^{i((\alpha,q)+(\beta,p))}d\beta d\beta = \pi(f)$$

[3]Dovuta a Wigner, Von Neumann e Moyal.

allora $\pi(f)^* = \pi(f)$ equivale a $f^*(z) = \overline{f(-z)}$, i.e. $\widehat{f^*} = \overline{\widehat{f}}$ e quindi $\widehat{f}$ è autoaggiunto.

Se $\widehat{f}$ è reale allora $\widehat{f}(q,p)$ è compatto; se $\widehat{f}$ è continua, $\widehat{f}(q,p)$ è nucleare (tracciabile).

Dimostriamo ora il teorema di completa riducibilità, che abbiamo già dedotto dal teorema di Nelson 16.4.2 e dal teorema di unicità di Stone–von Neumann.

18.4.2 Teorema *Se $\{q_k, p_k\}$ è una rappresentazione delle regole di commutazione di Heisenberg per mezzo di operatori hermitiani su un dominio comune $\mathcal{D}$, denso e invariante, e se*

$$A_0 = \frac{1}{2}\sum(p_k^2 + q_k^2)$$

è essenzialmente autoaggiunto su $\mathcal{D}$ allora la rappresentazione è somma diretta di copie della rappresentazione di Schrödinger.

DIMOSTRAZIONE: Considereremo per semplicità il caso $n = 1$; per ipotesi abbiamo gli operatori autoaggiunti p, q che soddisfano le regole di Heisenberg e posseggono un dominio comune (denso) $\mathcal{D}$ invariante per essi (basta in realtà che $\mathcal{D}$ sia contenuto nei domini di p, q e $[p,q]$) e sappiamo che l'operatore $A_0 = p^2 + q^2$ è essenzialmente autoaggiunto sul dominio $\mathcal{D}$.

Se $A = \overline{A_0}$ ne è la chiusura, allora A è un operatore autoaggiunto definito positivo (perché A_0 è hermitiano definito positivo) e se

$$\eta := \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{p_0 - iq_0}$$

(ove p_0 e q_0 sono operatori definiti su $\mathcal{D}$) allora η è definito su $\mathcal{D}$, come pure lo è $p_0 + iq_0$, sicché

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(p_0 + iq_0) \subset \eta^*$$

Ma $\eta^*\eta$ e $\eta\eta^*$ sono autoaggiunti definiti positivi (essendo chiusi, teorema di von Neumann 13.1.8) e soddisfano alle

$$\eta^*\eta|_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}(p_0^2 + q_0^2) - \frac{i}{2}[p_0, q_0]$$
$$\eta\eta^*|_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}(p_0^2 + q_0^2) + \frac{i}{2}[p_0, q_0]$$

cioè $\eta^*\eta|_{\mathcal{D}} = A_0 - \frac{1}{2}I$ e $\eta\eta^*|_{\mathcal{D}} = A_0 + \frac{1}{2}I$; ma A_0 è essenzialmente autoaggiunto, e $A_0 \subset \eta^*\eta + \frac{1}{2}I$ implicano

$$A = \eta^*\eta + \frac{1}{2}I \qquad \text{e} \qquad A_0 = \eta\eta^* - \frac{1}{2}I$$

Dato che $\mathcal{D}_{\eta^*\eta} = \mathcal{D}_{\eta\eta^*}$, se $\eta = |\eta|V$ è la decomposizione polare di η allora

$$\mathcal{D}_{|\eta|} = \mathcal{D}_{\eta^*} = \mathcal{D}_\eta$$

e quindi $\ker\eta \neq 0$ mentre $\ker\eta^* = 0$; infatti[4] $A \geq 0$ e, se $x \in \ker\eta^*$ allora

$$(x, Ax) = \eta^*x, \eta^*x) - \frac{1}{2}(x, x)$$

dunque $x = 0$ (per positività di A); se fosse $\ker\eta = 0$ allora, per unitarietà di V ($VV^* = I$), avremmo

$$A + \frac{1}{2}I = \eta\eta^* = V|\eta|^2V^* \Rightarrow A = |\eta|^2 + \frac{1}{2}I = V\left(|\eta|^2 - \frac{1}{2}I\right)V^*$$

e quindi $AV^* = V^*A + I$. A sarebbe dunque unitariamente equivalente a $|\eta|^2 - \frac{1}{2}I$=$A - I$, i.e. per ogni $n \in \mathbb{Z}$: $A \cong A + nI$, col che lo spettro di A sarebbe $\mathbb{Z}$-invariante e A e quindi illimitato sia inferiormente che superiormente, il che è assurdo, dato che A è definito positivo. Ne segue che V non è un operatore unitario, ma solo una isometria parziale, e $\ker\eta \neq 0$.

Sia ora $x_0 \in \ker\eta$ con $||x_0|| = 1$ e completiamo $\{x_0\}$ a un sistema ortonormale, definendo

$$x_n := V^{*n}x_0$$

Questi sono tutti vettori di norma 1. Si rammenti che se V^* è una isometria parziale, allora

$$AV^* = V^*(A + I) \tag{†}$$

e quindi $A|_{\operatorname{im}V^*}$ è unitariamente equivalente a $(A + I)|_{|imV^*}$; allora, se $n < m$:

$$(x_n, x_m) = (V^{*n}x_0, V^{*n}V^{*m-n}x_0) = (x_0, V^{*m-n}x_0) = (Vx_0, V^{*m-n}x_0) = 0$$

(dato che $Vx_0 = 0$: $x_0 \in \ker\eta$). Quindi $\{x_n\}$ è un sistema ortonormale; inoltre ogni x_n appartiene al dominio di definizione di A, dato che, per induzione dalla (†):

$$AV^{*n} = V^{*n}(A + In)$$

e quindi, dato che $\eta^*\eta = A - \frac{1}{2}I$ e $x_0 \in \ker\eta$:

$$Ax_n = \left(A + \frac{n}{2}I\right)x_0 = \left(n + \frac{1}{2}\right)x_n$$

Dunque $|\eta|^2x_n = nx_n$, cioè $|\eta|x_n = \sqrt{n}x_n$, per il calcolo funzionale.

[4] $(x, A_0x) = \frac{1}{2}(||px||^2 + ||qx||^2) \geq 0$

Si noti che $V^*x_n = x_{n+1}$ e che V è lo shift unilaterale:

$$Vx_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ x_{n-1} & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Da questo segue che

$$\eta x_n = |\eta| V x_n = \sqrt{n} V x_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ \sqrt{n} x_{n-1} & \text{se } n > 0 \end{cases}$$
$$\eta^* x_n = |\eta| V^* x_n = \sqrt{n+1} x_{n+1}$$

cioè che

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \eta^{*n} x_0$$

Ora:

$$p|_{\mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_q} \subset \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta^* + \eta) \qquad \text{e} \qquad q|_{\mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_q} \subset \frac{1}{i\sqrt{2}}(\eta^* - \eta)$$

sicché

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{(\eta^* + \eta)} \qquad \text{e} \qquad q = \frac{1}{i\sqrt{2}} \overline{(\eta^* - \eta)}$$

ovvero

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta^* + \eta) \subset p \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{i\sqrt{2}}(\eta^* - \eta) \subset q$$

Dunque, per ogni $x_n \in \mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_q$:

$$px_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{n} x_{n-1} + \sqrt{n+1} x_{n+1} \right) , \quad qx_n = \frac{1}{i\sqrt{2}} \left(\sqrt{n+1} x_{n+1} - \sqrt{n} x_{n-1} \right)$$

Assumiamo momentaneamente il

18.4.3 Lemma *Per ogni n, x_n è un vettore analitico intero per p e q.*
e dimostriamo il teorema con questo assunto: per prima cosa, se (p, q) è una rappresentazione irriducibile allora ogni operatore lineare e continuo che commuti con p e q è multiplo dell'identità I; vogliamo ora dimostrare che il sistema ortonormale $\{x_0, x_1, ...\}$ costruito è una base hilbertiana, cioè che il sottospazio $\mathfrak{M}_0$ da esso generato è denso; ma questo equivale a dimostrare che il proiettore ortogonale su questo sottospazio è I, e, come abbiamo osservato, per questo basta far vedere che commuta con p e q. Per assicurarcene, mostreremo che $\mathfrak{M}_0$ è un sottospazio stabile per i gruppi unitari generati da p e q.

In virtù del lemma, le serie

$$e^{i\lambda p} x_n = \sum_{k \geq 0} \frac{(i\lambda)^k}{k!} p^k x_n \qquad \text{e} \qquad e^{i\mu q} x_n = \sum_{k \geq 0} \frac{(i\mu)^k}{k!} q^k x_n$$

convergono per ogni λ; quindi, dato che $p^k x_n$ e $q^k x_n$ sono combinazioni lineari di vettori del sistema $\{x_0, x_1, ...\}$, le ridotte n-esime di questa serie esponenziale (le somme parziali che la approssimano) appartengono al sottospazio $\mathfrak{M}_0$ generato dal sistema $\{x_0, x_1, ...\}$, quindi, se $\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{M}_0}$ è la chiusura di questo sottospazio:

$$e^{i\lambda p}\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M} \qquad \text{e} \qquad e^{i\mu q}\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$$

Dunque l'irriducibilità della rappresentazione (p, q) implica che $\mathfrak{M}$ coincide con tutto lo spazio di Hilbert del sistema, e A si diagonalizza con spettro $\left\{n + \frac{1}{2}\right\}$.

Se supponiamo (p', q') essere un'altra rappresentazione irriducibile, possiamo iterare la costruzione precedente ed esibire un sistema ortonormale $\{x'_n\}$; allora, l'operatore

$$Ux_n := x'_n$$

è unitario; facciamo vedere che realizza una equivalenza unitaria fra le due rappresentazioni. Infatti (se $\mathfrak{M}_0$ è il sottospazio generato dal sistema ortonormale $\{x'_n\}$)

$$p'|_{\mathfrak{M}'_0}U = p'U|_{\mathfrak{M}_0} = Up|_{\mathfrak{M}_0}$$

dato che $U\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}'_0$. Analogamente per q e q', quindi abbiamo le

$$Uq_0 = q'_0 U \qquad \text{e} \qquad Up_0 = p'_0 U$$

e quindi U è un operatore di allacciamento fra le rappresentazioni: essendo unitario, le rappresentazioni sono unitariamente equivalenti, considerando

$$q' = \overline{q'_0} \qquad \text{e} \qquad p' = \overline{p'_0}$$

e ricordando che, per il teorema di Nelson 16.4.2:

$$U(\overline{q_0}) = \overline{q'_0}U \qquad \text{e} \qquad U(\overline{p_0}) = \overline{p'_0}U$$

Abbiamo cioè dimostrato che se la rappresentazione delle relazioni di Heisenberg che soddisfa le ipotesi del teorema è irriducibile allora è unica, e quindi coincide con la rappresentazione di Schrödinger; dimostriamo ora che se non è riducibile è somma diretta di rappresentazioni irriducibili delle relazioni di Weyl, quindi di copie della rappresentazione di Schrödinger.

Se la rappresentazione (p, q) non è irriducibile, allora consideriamo il sottospazio di Hilbert

$$\mathcal{H}_0 = \ker \eta = \ker V \neq 0$$

ed una sua base ortonormale $\{x^{(\alpha)}\}$; per ogni α abbiamo un sistema ortonormale formato dagli elementi

$$x_n^{(\alpha)} := \frac{1}{\sqrt{n1}}\eta^{*n}x_0^{(\alpha)} = V^{*n}x_0^{(\alpha)}$$

Di nuovo questi elementi sono vettori analitici interi per p e q e costituiscono una base ortonormale, dato che, se $n < m$:

$$(x_n^{(\alpha)}, x_m^{(\beta)}) = (x_0^{(\alpha)}, x_{m-n}^{(\beta)}) = 0$$

Allora, per $m = n$:

$$(x_n^{(\alpha)}, x_m^{(\beta)}) = \delta_{nm}(x_0^{(\alpha)}, x_0^{(\beta)}) = \delta_{nm}\delta_{\alpha,\beta}$$

(per ortonormalità del sistema $\{x^{(\alpha)}\}$).

Consideriamo ora i complementi ortogonali di questi vettori analitici: si tratta di sottospazi la cui somma è tutto $\mathcal{H}$ (altrimenti avremmo $\ker\eta = 0$); definendo $\mathcal{H}_\alpha$ come il sottospazio chiuso generato dalla famiglia $\{x_n^{(\alpha)}\}_n$ per α fissato al variare di n, allora

$$\mathcal{H} = \bigoplus_\alpha \mathcal{H}_\alpha$$

e la restrizione della rappresentazione (p, q) al sottospazio $\mathcal{H}_\alpha$ è unica a meno di equivalenze unitarie: questo dà la decomposizione postulata dal teorema.

Non resta che da provare il lemma precedente: l'analiticità intera dei vettori x_n. Scrivendo $\eta^\#$ per η oppure η^*, abbiamo che

$$||q^k x_n|| = ||p^k x_n|| = 2^{-\frac{k}{2}}||(\eta \pm \eta^*)^k x_n|| \leq 2^{-\frac{k}{2}}2^k||(\eta^\#)^k x_n||$$

(sviluppando $(\eta \pm \eta^*)^k$ e maggiorando col massimo dei 2^k termini), e

$$2^{-\frac{k}{2}}2^k||(\eta^\#)^k x_n|| \leq 2^{k-\frac{k}{2}}||\eta^{*k}x_n|| = 2^{k-\frac{k}{2}}\sqrt{\frac{(n+k)!}{n!}}$$

(dato che $\eta^* x_n = \sqrt{n+1}x_{n+1}$). Ma allora la serie

$$\sum_{k\geq 0}\frac{\lambda^k}{k!}||p^k x_n|| \leq \frac{1}{\sqrt{n!}}\sum_{k\geq 0}(\sqrt{2}\lambda)^k\frac{\sqrt{(n+k)!}}{k!}$$

converge per il criterio del rapporto.

QED

Abbiamo quindi dimostrato che ogni rappresentazione delle regole di commutazione di Heisenberg si decompone in somma diretta di rappresentazioni irriducibili, unitariamente equivalenti alla rappresentazione di Schrödinger.

L'applicabilità del teorema è tuttavia condizionata dal supporre l'operatore hamiltoniano dell'oscillatore armonico essenzialmente autoaggiunto. Vediamo che questo accade effettivamente per almeno una rappresentazione.

Consideriamo la rappresentazione di Schrödinger (p_S, q_S) che opera nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}, ds)$; questo spazio contiene le funzioni infinitamente differenziabili rapidamente decrescenti, cioè lo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$; scegliendo il dominio $\mathcal{D}$ come

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{p_S^k q_S^h}$$

per $h + k = 2$, abbiamo che

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}$$

(in realtà vale un risultato più preciso: $\mathcal{S} = \bigcap_{h,k} \mathcal{D}_{p_S^k q_S^h}$).

Ci basta quindi dimostrare, per poter applicare il teorema precedente, che $\frac{1}{2}(p_S^2 + q_S^2)$ è essenzialmente autoaggiunto su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

In effetti, esiste x_0 tale che $\eta x_0 = 0$ e che tutti i vettori

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \eta^{*n} x_0$$

siano in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Per vederlo dobbiamo risolvere l'equazione

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(p - iq)x_0 = 0 \implies -\frac{i}{\sqrt{2}}(x_0'(s) + s x_0(s)) = 0$$

cioè $x_0' + s x_0 = 0$, che effettivamente ammette soluzioni

$$x_0(s) = c e^{-\frac{1}{2}s^2} \in L^2(\mathbb{R})$$

Normalizzando queste soluzioni, ponendo cioè $c = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}$ abbiamo che $x_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, come pure a decrescenza rapida è la funzione

$$\left(\frac{1}{i\sqrt{2}}(p + iq)\right)^n x_0$$

dato che possiamo scrivere

$$\left(\frac{1}{i\sqrt{2}}(p + iq)\right)^n x_0(s) = H_n(s) x_0(s)$$

per opportuni polinomi H_n: incidentalmente questi polinomi sono esattamente i *polinomi di Hermite* che avevamo incontrato nel capitolo **??** (a pagina 270) nella costruzione di un sistema ortonormale per $L^2(\mathbb{R})$ (nel quale, per giunta, la trasformata di Fourier era in forma diagonale).

Abbiamo in questo modo diagonalizzato l'operatore $\frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ che risulta quindi essenzialmente autoaggiunto.

Capitolo 19

SECONDA QUANTIZZAZIONE

In questo capitolo proviamo ad estendere la teoria del precedente al caso di sistemi con infiniti gradi di libertà: come vedremo la teoria non è più canonica, ma potremo comunque stabilire delle notevoli generalizzazioni che ci consentiranno di costruire lo spazio di Fock, dando così un esempio di modello per la teoria dei campi (seppure in un caso semplicissimo: il campo libero).

19.1 Prodotti tensoriali e limiti induttivi.

Introduciamo qui alcune nozioni necessarie per trattare la generalizzazione a sistemi con infiniti gradi di libertà della teoria svolta in precedenza, ed in particolare il concetto di prodotto tensoriale di spazi di Hilbert, che consente di formalizzare la nozione di indipendenza fra sistemi quantistici.

Consideriamo due spazi di Hilbert $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ e costruiamone il *prodotto tensoriale algebrico* $\mathcal{H} \boxtimes \mathcal{K}$ nel modo usuale; possiamo rendere questo prodotto tensoriale uno spazio pre-hilbertiano definendo il prodotto

$$(\sum_i x_i \boxtimes x_i, \sum_i x_i' \boxtimes y_i') := \sum_{i,j} (x_i x_j')_{\mathcal{H}} (y_i, y_j')_{\mathcal{K}}$$

Definiamo ora $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ semplicemente come il completamento di $\mathcal{H} \boxtimes \mathcal{K}$ rispetto a questo prodotto[1].

Consideriamo ora $z \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ e due basi ortonormali $\{e_\alpha\}$ di $\mathcal{H}$ e $\{f_\beta\}$ di $\mathcal{K}$. Per definizione (precisamente per la proprietà universale) $\{e_\alpha \otimes f_\beta\}$ è una base ortonormale di $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ e, per ogni $x \in \mathcal{H}$ e $y \in \mathcal{K}$,

$$f_z(x, y) := (z, x \otimes y)$$

[1] In genere si denota con $V \otimes W$ il prodotto tensoriale algebrico e con $V \widehat{\otimes} W$ quello hilbertiano: per non confonderci, qui usiamo una notazione diversa.

è una forma bilineare tale che

$$\sum_{\alpha,\beta} |f(e_\alpha, f_\beta)|^2 < \infty$$

La f_z si dice *forma di Hilbert–Schmidt* e, come ci si può aspettare:

19.1.1 Proposizione $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \cong \{f_z \mid f_z \text{ forma di HS}\}$

Possiamo dare anche un'altra realizzazione dello spazio $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ considerando la forma sesquilineare

$$g(x, y) := (z, \overline{x} \otimes y)$$

e l'operatore $T : \mathcal{K} \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}$ (lineare e continuo) ad essa associato tale che

$$(z, \overline{x} \otimes y) = (x, Ty)$$

e che

$$\operatorname{tr} T^*T = \sum_\beta (f_\beta, T^*Tf_\beta) = \sum_\beta ||Tf_\beta||^2 = \sum_{\alpha,\beta} |(e_\alpha, Te_\beta)|^2 < \infty$$

(usando la norma degli operatori nucleari).

Possiamo quindi identificare $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ con lo spazio degli operatori di Hilbert–Schmidt $T : \mathcal{K} \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}$ con

$$\operatorname{tr} T_z^* T_{z'} = (z, z')$$

Si riduce ad una semplice osservazione la seguente

19.1.2 Proposizione *Se $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ sono spazi di Hilbert e $\mathcal{K} = M \oplus N$ allora*

$$\mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \cong (\mathcal{H} \otimes M) \oplus (\mathcal{H} \otimes N)$$

Naturalmente possiamo generalizzare al caso in cui $\mathcal{K}$ sia somma di una famiglia di sottospazi di Hilbert: $\mathcal{K} = \bigoplus_\alpha N_\alpha$; in questo caso otteniamo

$$\mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \cong \bigoplus_\alpha \mathcal{H} \otimes N_\alpha$$

Ad esempio, se $\{e_\alpha\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{K}$ e $N_\alpha = \mathbb{C}$ allora

$$\mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \cong \bigoplus_{\alpha \in A} \mathcal{H}$$

(dato che i prodotti tensoriali sono presi sui complessi $V \otimes \mathbb{C} \cong V$), ove $\operatorname{Card} A = \dim \mathcal{K}$.

Ora rammentiamo che $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ è un'algebra di von Neumann il cui preduale $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})_*$ è lo spazio delle funzioni lineari ultra-debolmente continue su $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e tale che

$$\forall f \in \mathcal{M} \quad (f, A) = \sum_i (x_i, Ay_i)$$

con $\sum_i ||x_i||^2 < \infty$ e $\sum_i ||y_i||^2 < \infty$; cioè $x, y \in \bigoplus \mathcal{H}$ e

$$(f, A) = (x, \pi(A)y)$$

ove $\pi(A)(\oplus x_i) = \oplus A x_i$. Possiamo quindi osservare che

$$\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \cdots \cong \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$$

ove $\mathcal{K}$ è uno spazio di Hilbert separabile ($l^2(\mathbb{N})$ ad esempio) e $\pi(A)$ si ottiene come prodotto tensoriale di operatori, che viene definito nel modo seguente: se $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ sono spazi di Hilbert con $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ allora possiamo definire l'operatore $A \otimes B \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ come

$$A \otimes B(x \otimes y) = Ax \otimes By$$

per ogni $x \in Ch$ e $y \in \mathcal{K}$ (questa definizione è ben posta per la proprietà universale del prodotto tensoriale), in modo che

$$||A \otimes B|| = ||A|| \cdot ||B||$$

Ovviamente esistono due immersioni isometriche

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}(\mathcal{H}) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \\ A & \longmapsto & A \otimes I \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \mathcal{B}(\mathcal{K}) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \\ B & \longmapsto & I \otimes B \end{array}$$

Effettivamente sussiste il seguente teorema di von Neumann e Murray:

$$(\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes I)' = I \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}) \qquad (I \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K}))' = \mathcal{B}(\mathcal{K}) \otimes I$$

Torniamo ora al caso precedente: avevamo $\dim \mathcal{K} = \aleph_0$, ed una base ortonormale (e_n) di $\mathcal{K}$ in modo che

$$\mathcal{H} \otimes \mathcal{K} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H} \otimes e_n \mathbb{C} \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}$$

il che induce la decomposizione $A \otimes I \cong \bigoplus_n A$ e quindi

$$\pi(A) \cong A \otimes I$$

sicché

$$(f, A) = (z, A \otimes I z')$$

Si osservi che in generale, se π_1 e π_2 sono rappresentazioni di una C*-algebra allora $\pi_1 \approx \pi_2$ se e solo se $\pi_1 \otimes I \cong \pi_2 \otimes I$.

Richiamiamo ora brevemente la nozione di *limite induttivo* di spazi vettoriali (si tratta in realtà di una nozione che si estende a categorie più generali di oggetti: anelli, gruppi, &c.): consideriamo una successione $\{X_n\}$ di spazi vettoriali ed una successione

$$f_{mn} : X_m \longrightarrow X_n$$

di applicazioni lineari definite per $m \leq n$ in modo che

- $f_{nn} : X_n \longrightarrow X_n$ sia l'applicazione identica;
- se $m \leq n$ e $l \leq m$ allora $f_{ln} = f_{mn} \circ f_{lm}$.

Si dice che le successioni $\{X_n\}$ e $\{f_{mn}\}$ formano un *sistema induttivo* (o sistema diretto); partendo da un sistema induttivo, possiamo costruire un nuovo spazio vettoriale X nel modo seguente: consideriamo la somma diretta

$$S = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

Ovviamente ciascun X_n si identifica ad un sottospazio di S, e possiamo considerare il sottospazio T di S generato dagli elementi della forma

$$x_m - f_{mn}(x_m)$$

Allora si pone $X := S/T$; in questo modo, X è una somma diretta degli spazi $\{X_n\}$ nei quali però gli elementi di indice abbastanza grande sono identificati fra loro. Evidentemente, le inclusioni $X_n \subset S$ e la proiezione $S \longrightarrow X = S/T$ si compongono a fornire le applicazioni lineari

$$f_n : X_n \longrightarrow X$$

Per la (2) si ha ovviamente che, se $m \leq n$:

$$f_m = f_n \circ f_{mn} \tag{3}$$

Si scrive

$$X = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

e si dice che X è il *limite induttivo* del sistema induttivo dato.

Il tratto fondamentale dei limiti induttivi è la seguente proprietà universale, che li caratterizza:

19.1.3 Lemma *Ogni elemento $x \in X$ si esprime nella forma $f_n(x_n)$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ e $x_n \in X_n$.*

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo che $x \in X$; allora, per costruzione, x è della forma

$$s = x_{i_1} + \cdots + x_{i_k}$$

ove $x_{i_j} \in X_{i_j}$ tenendo conto che $x_{i_j} = f_{i_j n}(x_{i_j})$ se $i_j \leq n$. Allora, per $n = \max(i_1, ..., i_k)$ otteniamo che

$$x_{i_1} + \cdots + x_{i_k} = f_{i_1 n}(x_{i_1}) + \cdots + f_{i_k n}(x_{i_k}$$

che è un elemento di X_n, chiamiamolo y_n; quindi, per la (3):

$$\begin{aligned} f_n(y_n) &= f_n(f_{i_1 n}(x_{i_1}) + \cdots + f_{i_k n}(x_{i_k})) = f_n \circ f_{i_1 n}(x_{i_1}) + \cdots + f_n \circ f_{i_k n}(x_{i_k}) \\ &= f_{i_1}(x_{i_1}) + \cdots + f_{i_1}(x_{i_k}) = x_{i_1} + \cdots + x_{i_k} = x \end{aligned}$$

cioè $x = f_n(y_n)$ con $y_n \in X_n$, come volevamo.

QED

19.1.4 Teorema *Se $(\{X_n\}, \{f_{mn}\})$ è un sistema induttivo e se Y è uno spazio vettoriale tale che esista una successione di applicazioni lineari $\{g_n : X_i \longrightarrow Y\}$ tali che*

$$\forall m \leq n \quad g_m = g_n \circ f_{mn}$$

allora esiste un'unica applicazione lineare $g : X \longrightarrow Y$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad g_n = g \circ f_n$$

Viceversa un insieme X che soddisfa questa proprietà è isomorfo a $\varinjlim_n X_n$.

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo che $X = \varinjlim_n X_n$: dimostriamo che vale la proprietà universale; per il lemma, possiamo immediatamente esibire la funzione g:

$$g(x) = g_n(x_n)$$

ove $x = f_n(x_n)$ per il lemma. Allora $g_n = g \circ f_n$ per definizione.

Il viceversa è ovvio: se un insieme soddisfa alla proprietà universale del limite induttivo, per $Y = \varinjlim_n X_n$ otteniamo una mappa $h : X \longrightarrow \varinjlim_n X_n$ che inverte la $g : \varinjlim_n X_n \longrightarrow X$, che viene quindi ad essere un isomorfismo.

QED

19.1.5 Esempio *Se consideriamo una successione di sottospazi $\{X_n\}$ di uno spazio vettoriale X fissato tali che se $m \leq n$ allora $X_m \subset X_n$, il limite induttivo di questa successione (rispetto alle inclusioni $f_{mn} : X_m \hookrightarrow X_n$) è la somma di tutti i sottospazi $\{X_n\}$, vale a dire lo spazio da essi generato.*

Una interessante proprietà dei limiti induttivi è il loro comportamento rispetto ai prodotti tensoriali: consideriamo un sistema diretto $(\{X_n\}, \{f_{mn}\})$ di spazi vettoriali ed uno spazio vettoriale Y: è immediato che $(\{X_n \otimes Y\}, \{f_{mn} \otimes I\})$ è un sistema diretto.

19.1.6 Teorema *Ha luogo l'isomorfismo di spazi vettoriali*

$$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}}(X_n \otimes Y) = \left(\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) \otimes Y$$

DIMOSTRAZIONE: Siano

$$X = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} X_n \qquad W = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}}(X_n \otimes Y)$$

Per la proprietà universale otteniamo un unico operatore lineare

$$g : W \longrightarrow X \otimes Y$$

ove le mappe g_n sono le $f_n \otimes I$; si tratta di dimostrare che g è un isomorfismo. Per farlo usiamo la proprietà universale dei prodotti tensoriali, dimostrando cioè W la soddisfa ed è quindi isomorfo a $X \otimes Y$: consideriamo quindi le funzioni bilineari

$$h_n : X_n \times Y \longrightarrow X_n \otimes Y$$

date dalla definizione di prodotto tensoriale ($g_n(x_n, y) = x_n \otimes y$). Possiamo, per mezzo di esse, definire la funzione lineare

$$h : X \times Y \longrightarrow W$$

come

$$h(x \otimes y) = h_n(x_n \otimes y)$$

ove $x = f_n(x_n)$ per il lemma precedente. La funzione h è bilineare perché lo sono le h_n e dato che le f_n sono lineari; quindi la proprietà universale del prodotto tensoriale implica l'esistenza di una mappa lineare

$$k : X \otimes Y \longrightarrow W$$

Di nuovo usando il lemma si ottiene che g e k sono l'una l'inversa dell'altra.

QED

Vogliamo ora approfondire il significato fisico del prodotto tensoriale.

Consideriamo una successione $\{\mathcal{H}_n\}$ di spazi di Hilbert ed una successione $\{\Omega_n\}$ di vettori in essi ($\Omega_n \in X_n$) con $||\Omega_n|| = 1$; possiamo definire, per $x \in \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_m$

$$f_{mn} := x \otimes \Omega_{m+1} \otimes \cdots \otimes \Omega_n$$

Si verifica immediatamente che queste mappe e la successione $\{H_n\}$ definiscono un sistema diretto del quale possiamo considerare il limite induttivo

$$\mathcal{H} = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$$

che è uno spazio prehilbertiano rispetto al prodotto scalare

$$(x, y) = (x \otimes \Omega_{n+1} \otimes \cdots , y \otimes \Omega_{m+1} \otimes \cdots)$$

e del quale possiamo considerare il completamento

$$\bigotimes_{n\in\mathbb{N}}^{\{\Omega_n\}} \mathcal{H}_n$$

19.1.7 Proposizione *Se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathcal{H}_n$ e se la successione*

$$\Phi_n := x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes \Omega_{n+1} \otimes \cdots$$

è di Cauchy allora il suo limite è l'elemento $x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \in \bigotimes_{n\in\mathbb{N}}^{\{\Omega_n\}} \mathcal{H}_n$.

DIMOSTRAZIONE: Sia Φ il limite della Φ_n e poniamo

$$\Omega := \Omega_1 \otimes \Omega_2 \otimes \cdots$$

Allora

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} (\Phi_n, \Omega) = (\Phi, \Omega)$$

cioè il prodotto $\prod_n (x_n, \Omega_n)$ tende a (Φ, Ω). Ora usiamo il seguente lemma (che non dimostreremo) di von Neumann: se z_α sono vettori non nulli negli spazi di Hilbert $\mathcal{H}_\alpha$ allora

$$\prod_\alpha z_\alpha = z \neq 0 \iff \sum_\alpha |1 - z_\alpha| < \infty$$

Nel nostro caso troviamo che $\sum_n |1-(x_i,\Omega_i)| < \infty$ e, viceversa, che se vale questa condizione allora la successione $\{\Phi_n\}$ è di Cauchy. Infatti

$$\begin{aligned}
||\Phi_n - \Phi_m||^2 &= ||x_{m+1}\otimes\cdots\otimes x_n - \Omega_{m+1}\otimes\cdots\otimes\Omega_n||^2\\
&= \Big|\Big| \sum_{i=m+1}^{n} \Omega_{m+1}\otimes\cdots\otimes\Omega_{m+i}\otimes(x_{m+i+1}-\Omega_{m+i+1})\otimes x_{m+i+2}\otimes\\
&\qquad\qquad \otimes\cdots\otimes x_n\Big|\Big|^2\\
&\le \sum_{i=m+1}^{n} ||x_i-\Omega_i||^2 + \sum_{i<j}(1-c_{m+i})(c_{m+j}-1)\prod_{k=m+i+1}^{m+j+1} c_k\\
&\le \sum 2|1-c_i| + \sum_{i<j}|1-c_{m+j}|\cdot|c_{m+j}-1| < \varepsilon+\varepsilon^2
\end{aligned}$$

ove $c_i := (\Omega_i, x_i)$, e tenendo conto che $(x_k-\Omega_k, x_k) = 1-(\Omega_k, x_k)$, $|c_i|\le 1$ (per l'ipotesi $||x_i||=1$) e che

$$(\sum_j z_j, \sum_i z_i) = \sum_i ||z_i||^2 + \mathrm{Re}\sum_{i<j}(z_i,z_j)$$

e

$$||y_i-\Omega_i||^2 = 2-2\,\mathrm{Re}(c_i) \le 2|1-c_i|$$

QED

Spieghiamo ora la rilevanza fisica di questi concetti: consideriamo due sistemi quantistici S e S' totalmente indipendenti, Q e Q' delle questioni (cfr. 17.1) relative a questi sistemi e ω, ω' stati di S e S'; allora $\omega(Q)$ esprime la probabilità di trovare la proprietà Q nello stato ω, e quindi la probabilità che nel sistema congiunto formato da S e S' le Q e Q' siano simultaneamente verificate nei rispettivi stati è

$$\omega(Q)\omega'(Q')$$

Ad esempio, se gli stati sono puri, avremo che

$$\omega(Q) = (\xi, Q\xi)\,, \qquad \omega'(Q') = (\xi', Q'\xi')$$

Se consideriamo $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}'$, gli stati puri corrispondono agli elementi $\xi\otimes\xi'$ e

$$(\xi\otimes\xi', Q\otimes Q'(\xi\otimes\xi')) = \omega(Q)\omega'(Q')$$

Se il sistema si evolve nel tempo come

$$U(t) = e^{iHt}\,, \qquad U'(t) = e^{itH'}$$

allora, sempre nell'ipotesi dell'indipendenza dei due sistemi, nel sistema congiunto abbiamo

$$\widetilde{U}(t)(\xi \otimes \xi') = U(t)\xi \otimes U'(t)\xi'$$

cioè

$$\widetilde{(}t) = U(t) \otimes U'(t)$$

Il generatore di questo gruppo è

$$\widetilde{H} = \frac{1}{i}\left(\frac{d}{dt}\widetilde{U}(t)\right)_{t=0} = H \otimes I + I \otimes H'$$

(formula di Leibniz).

Più in generale, se esiste un'interazione fra i sistemi S e S', il sistema congiunto è ancora descritto da $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ ma l'evoluzione temporale subisce una perturbazione

$$K = H \otimes I + I \otimes H' + V$$

Ricordiamo che nel nostro approccio ai fenomeni quantistici abbiamo modellizzato il sistema microscopico S scindendo il processo di misura (concretamente: lo strumento stesso di misura) in una parte microscopica A ed una macroscopica M: dobbiamo allora immaginare S e A come sistemi da comporre per tenere conto dell'influenza del processo di misura stesso sul fenomeno da misurare. Se prima della misura lo stato del sistema è ω, dopo la misura di una questione $E = E^*E$ lo stato è ancora ω se $\omega(E) = 1$ o $\omega(I - E) = 1$; se lo stato ω, dopo il processo di misurazione, è tale che $\omega(E) \neq 1, 0$ allora si ha un *miscuglio statistico*

$$\omega(E)\omega_1 + \omega(I - E)\omega_0$$

Gli stati ω_0, ω_1 sono determinati come segue: diagonalizziamo per mezzo di un autoaggiunto A dell'algebra degli osservabili

$$P_E : A \longmapsto ESE + (I - E)A(I - E)$$

e consideriamo

$$\omega'(A) = \omega(EAE) + \omega((I - E)A(I - E))$$

Allora

$$\omega_1(A) = \frac{\omega(EAE)}{\omega(E)} \qquad \omega_0(A) = \frac{\omega((I - E)A(I - E))}{\omega(I - E)}$$

Una evoluzione temporale

$$\omega \longmapsto \omega \circ \alpha_t$$

manda stati puri in stati puri e la misura

$$\omega \longmapsto \omega(E)\omega_1 + \omega(I - E)\omega_0$$

manda stati puri in miscugli statistici: si presentano in questo modo diversi fenomeni (riduzione del pacchetto d'onda, paradosso di Podolskij–Einstein–Rosen, gatto di Schrödinger...).

Una spiegazione di questa situazione, seguendo von Neumann, procede come segue: supponiamo che, prima della misura, S sia nello stato x_0 e A in ψ_0, sicché il sistema composto sia nello stato $x_0 \otimes \psi_0$; dopo una interazione di lunghezza T abbiamo

$$U(T) = U$$

operatore unitario che trasforma $x_0 \otimes \psi_0$ in un nuovo stato

$$U(x_0 \otimes \psi_0) = Ex_0 \otimes \psi_1 + (I - E)x_0 \otimes \psi_2$$

ove le ψ_i sono tali che

$$(\psi_1, \psi_2) = 0 \qquad ||\psi_i|| = 1$$

L'osservazione di von Neumann è che ciò descrive il processo di misura, dato che ogni stato di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ si scrive

$$\omega(A) = \mathrm{tr}(TA) = (z, A \otimes Iz)$$

per un opportuno vettore z di norma 1. Dunque lo stato è restrizione a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ di uno stato puro di $\mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, e

$$(Ux_0 \otimes \xi_0, A \otimes I(Ux_0 \otimes \xi_0)) = (Ex_0, AEx_0) + \omega((I - E)A(I - E)) + 0$$

dove 0 sono i termini non diagonali: $(\psi_1, \psi_2) = 0)$, il che spiega perché $\omega \longmapsto \omega\alpha_g$ porti stati puri in stati puri mentre $\omega \longmapsto \omega(E)\omega_1 + \omega(I - E)\omega_2$ porti stati puri in miscugli statistici.

19.2 Rappresentazione di Fock

Consideriamo qui sistemi con infiniti gradi di libertà: vogliamo per prima cosa scrivere in questo caso le relazioni di Weyl:

$$W(z)W(z') = e^{i\sigma(z,z')}W(z + z')$$

ove $\sigma(z, z') = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(z, z')$. Nel caso di infiniti gradi di libertà, le variabili z non varieranno più in uno spazio di dimensione finita $\mathbb{C}^n$, ma in uno spazio vettoriale topologico X qualsiasi; possiamo in ogni caso considerare una forma simplettica fortemente non degenere σ su X ed il gruppo di Heisenberg

$$H_X = X \rtimes \mathbb{R}$$

degli elementi $(z, \lambda) \in X \times \mathbb{R}$ col prodotto

$$(z, \lambda)(z', \lambda') = (z + z', \lambda + \lambda' + \sigma(z, z'))$$

Naturalmente H_X è localmente compatto se e solo se $\dim X < \infty$, nel qual caso si tratta del gruppo di Heisenberg $H_{\dim X}$.

Non possiamo quindi applicare a H_X gran che della teoria dei gruppi topologici, che dipendeva in massima parte dall'integrale di Haar (che esiste solo nel caso localmente compatto): ad esempio la teoria delle rappresentazioni non si può dare come nel caso dei gruppi localmente compatti, per i quali l'abbiamo in larga misura desunta dalla teoria delle rappresentazioni delle C*-algebre associate; un ponte fra le due teorie è il teorema di Bochner, la cui validità è del tutto generale, e che ricordiamo qui di seguito:

Definizione. *Una funzione $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ si dice* di tipo positivo *se $\varphi(e) = 1$ e, per ogni $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ a supporto finito:*

$$\sum_{g,h \in G} \overline{f(g)} f(h) \varphi(g^{-1}h) \geq 0$$

Se G è un gruppo topologico qualsiasi e U una rappresentazione (fortemente continua) di G che possieda un vettore ciclico ξ, allora la funzione

$$\varphi(g) = (\xi, U(g)\xi)$$

è una funzione (continua) di tipo positivo: sappiamo che vale anche il viceversa:

Teorema. *φ è una funzione di tipo positivo su G se e solo se esiste una rappresentazione unitaria $U : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ tale che*

$$\varphi(g) = (\xi, U(g)\xi)$$

ove $\xi \in \mathcal{H}$ è un vettore ciclico per U con $||\xi|| = 1$. Inoltre φ è continua se e solo se U è fortemente continua.

Ricordiamo come possiamo associare ad una funzione di tipo positivo una rappresentazione: data φ consideriamo lo spazio vettoriale delle funzioni a supporto finito con la forma sesquilineare

$$\langle p, q \rangle := \sum_{g,h \in G} \overline{p(g)} q(h) \varphi(g^{-1}h)$$

Ovviamente $\langle p, p \rangle \geq 0$ e, quozientando per il sottospazio delle funzioni p tali che $\langle p, p \rangle = 0$ e completando si ottiene uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ sul quale gli operatori

$$U(g)[p] := [p_g]$$

(con $[p]$ si indica la classe in $\mathcal{H}$ della funzione a supporto finito p) definiscono la rappresentazione unitaria richiesta.

Se φ è continua allora U è fortemente continua:

$$||U(g)U(h)\xi - U(h)\xi||^2 \xrightarrow{g\longrightarrow e} 0$$

Infatti, se $\varphi \longrightarrow 1$ per $g \longrightarrow e$:

$$\begin{aligned}||U(g)U(h)\xi - U(h)\xi|| =& 2 - 2\,\mathrm{Re}(U(h)\xi, U(gh)\xi) = 2 - 2\,\mathrm{Re}(\xi, U(h^{-1}gh)\xi)\\ =& 2 - 2\,\mathrm{Re}\,\varphi(h^{-1}gh) \xrightarrow{g\longrightarrow e} 0\end{aligned}$$

(dato che $h^{-1}gh \xrightarrow{g\longrightarrow e} e$).

QED

Ispirati da questo risultato, proviamo a cercare delle funzioni di tipo positivo nel caso del gruppo di Heisenberg H_X.

Supponiamo ad esempio che, come nel caso di un numero finito di gradi di libertà, X sia uno spazio pre-hilbertiano, con prodotto scalare $(.)$ e quindi definiamo

$$\sigma(z, z') = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(z, z')$$

Evidentemente la funzione $\varphi : H_X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(\dagger) \qquad \varphi(z, \lambda) := e^{i\lambda} e^{-\frac{1}{4}||z||^2}$$

è di tipo positivo, oltre che continua nella topologia di H_X prodotto della topologia di $\mathbb{R}$ con la topologia su X indotta dalla seminorma $||.||$.

19.2.1 Definizione *La rappresentazione unitaria fortemente continua U associata alla funzione di tipo positivo ($\dagger$) si dice* rappresentazione di Fock.

Notiamo che se X è uno spazio vettoriale e σ una forma simplettica su X e

$$\mathcal{U}(z, \lambda) = e^{i\lambda}\mathcal{U}(z, 0) = e^{i\lambda}W(z)$$

vogliamo che questa rappresentazione unitaria possegga almeno la proprietà di continuità seguente: per ogni fissato $z \in X$, la funzione

$$\lambda \longmapsto W(\lambda z)$$

è fortemente continua. In questo caso infatti, possiamo usare il teorema di Stone 14.3.6 per dedurre che $W(\lambda z) = e^{i\lambda\Phi(z)}$.

19.2.2 Teorema *La rappresentazione di Fock esiste, è fortemente continua ed irriducibile.*

Dimostrazione: Dimostriamo che la φ definita in (†) è una funzione continua di tipo positivo, il che ci darà la prima parte del teorema.

Se $g_1, ..., g_n \in H_X$ sono elementi della forma $g_i = (z_i, \lambda_i)$ allora z_k sta in un sottospazio X_k di dimensione finita di X e, dato che X è pre-hilbertiano, X_k è isomorfo ad uno spazio di Hilbert $\mathbb{C}^{n_k}$; in questi spazi la

$$\sum_{j,h} \overline{c_j} c_h \varphi(g_j^{-1} g_h) \geq 0$$

è soddisfatta, dato che la φ è di tipo positivo in $\mathbb{C}^{n_k}$.

Dimostriamo ora che la rappresentazione di Fock associata alla funzione φ è irriducibile. Sia (W_F, Ω_F) la rappresentazione ciclica delle relazioni di Weyl associata a $\sigma(z, z') = \frac{1}{2}\operatorname{Im}(z, z')$ e determinata dalla φ; possiamo allora considerare la C*-algebra $\mathcal{A}$ ottenuta chiudendo in norma la *-algebra generata dagli operatori della rappresentazione W_F, cioè la chiusura in norma del sottospazio vettoriale generato da $W_F(z)$ per $z \in X$: vogliamo dimostrare che $\mathcal{A}$ è irriducibile, nel senso che lo stato definito da Ω_F è uno stato puro.

Possiamo approssimare $\mathcal{A}$ come la chiusura $\mathcal{A}_n$ dei sottospazi $\mathcal{A}_n^{(0)}$ generati da $W_F(z)$ $(z \in X_n)$:

$$\mathcal{A} = \overline{\bigcup_n \mathcal{A}_n} = \overline{\bigcup_n \overline{\mathcal{A}_n^{(0)}}} (*)$$

ove la corrispondenza $n \longmapsto \mathcal{A}_n$ conserva l'ordine ($n < m$ implica $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_m$). Se $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ è uno stato tale che $\omega|_{\mathcal{A}_n}$ è puro allora ω è puro in $\mathcal{A}$, dato che, scrivendo $\omega = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2$ si trova

$$\omega|_{\mathcal{A}_n} = \alpha\omega_1|_{\mathcal{A}_n} + \beta\omega_2|_{\mathcal{A}_n}$$

e quindi, per purezza si $\omega|_{\mathcal{A}_n}$, $\omega_1 - \omega_2$ è nullo su $\mathcal{A}_n$ per ogni n, sicché ω è puro, per la (*). Quindi

$$\omega\left(\sum_j c_j W_F(z_j)\right) = \sum_j c_j e^{-\frac{1}{4}||z_j||^2}$$

Se prendiamo $z_j \in X_n$ allora, se Ω_S è la rappresentazione di Schrödinger, e X_n è identificato a $\mathbb{C}^n$ per mezzo dell'isomorfismo unitario V, si ha (per la (*)):

$$\omega_n := \omega|_{\mathcal{A}_n} = (\Omega_S^{\dim X_n}, W_S(V_Z)\Omega_S^{\dim X_n}) = e^{-\frac{1}{4}||Vz||^2} = e^{-\frac{1}{4}||z||^2}$$

L'irriducibilità della rappresentazione di Schrödinger implica allora la purezza dello stato ω.

QED

Abbiamo quindi determinato, con la rappresentazione di Fock, una rappresentazione irriducibile fortemente continua delle relazioni di Weyl:

$$W_F(x)W_F(x') = e^{i\sigma(x,x')}W_F(x+x')$$

Osserviamo che se $\mathcal{H} = \widetilde{X}$ è il completamento di X la forte continuità di W_F ci dice che per ogni $x \in \mathcal{H}$, per ogni successione (x_n) in X convergente a x si ha

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} W_F(x_n) = W_F(x)$$

Ma $\{W_F(x)\}_{x\in X} \cdot \Omega_F$ è un sottospazio la cui chiusura è una rappresentazione ciclica delle relazioni di Weyl: questa chiusura è

$$\overline{\{W_F(x)\}_{x\in X} \cdot \Omega_F} = \overline{\{\text{Sottosp. vett. generato da } W_F(x)\}_{x\in\mathcal{H}} \cdot \Omega_F}$$

(per la forte continuità); in altri termini possiamo tranquillamente considerare $\mathcal{H}$ in luogo di X. Ci riferiremo quindi anche a $\Gamma(\mathcal{H}) = \Gamma(X)$ come allo spazio di Fock.

Vogliamo ora discutere la *covarianza della rappresentazione di Fock*, ovvero la sua funtorialità.

Consideriamo quindi un operatore unitario $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$: allora[2]

$$e^{-\frac{1}{4}||x||^2} = e^{-\frac{1}{4}||Ux||^2}$$

e definiamo

$$(*) \qquad \Gamma(U)W_F(x)\Omega_F = W_F(U_x)\Omega_F$$

Intanto mostriamo che la posizione (*) ha senso: basta evidentemente ragionare sul sottospazio denso di $\mathcal{H}$: l'operatore

$$\Gamma(U)\left(\sum_i a_i W_F(x_i)\Omega_F\right) = \sum_i a_i W_F(x_i)\Omega_F$$

esiste ed è isometrico. La funzione

$$U \longmapsto \Gamma(U)$$

[2]Si rammenti che se $\mathcal{A}$ è una C*-algebra e $G \xrightarrow{\alpha} Aut(\mathcal{A})$ e $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ allora per ogni $g \in G$ tale che $\omega \circ \alpha_g = \omega$, se π_ω è la GNS, la rappresentazione (π_ω, U_ω) è covariante:

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad U_\omega(g)\pi_\omega(A)\xi_\omega = \pi_\omega(\alpha_g(A))\xi_\omega$$

è una rappresentazione del gruppo unitario $\mathcal{U}(\mathcal{H})$:

$$\Gamma(U)\Gamma(U') = \Gamma(UU')$$

precisamente una rappresentazione unitaria fortemente continua da $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ munito della topologia forte a $\mathcal{U}(\Gamma(\mathcal{H}))$ pure topologizzato con la topologia forte. Nuovamente ragionando sul sottoinsieme denso troviamo che, se $U_\alpha \xrightarrow{\text{fortemente}} U$ allora

$$\Gamma(U_\alpha)W_F(x)\Omega_F \xrightarrow{\text{fortemente}} \Gamma(U)W_F(x)\Omega_F$$

Questo, ed il fatto che

$$W_F(U_\alpha x)\Omega_F \longrightarrow W_F(Ux)\Omega_F$$

ci permettono di concludere che

19.2.3 Teorema Γ *è un funtore, la rappresentazione di Fock è irriducibile, fortemente continua e* $\Gamma(\mathbb{C}) = L^2(\mathbb{R}, ds)$*.*

Vale inoltre la seguente "proprietà esponenziale" del funtore Γ:

$$\Gamma(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) = \Gamma(\mathcal{H}_1) \otimes \Gamma(\mathcal{H}_2)$$

Si tratta di chiedersi se esista un operatore unitario V tale che

$$VW_F(x \oplus y)\Omega_F := W_F^{(1)}(x)\Omega_F^{(1)} \otimes W_F^{(2)}(y)\Omega_F^{(2)}$$

Intanto osserviamo che, se un tale V esiste, allora

$$(\dagger) \qquad (W_F(x \oplus y)\Omega_F, W_F(x' \oplus y')\Omega_F) = e^{-i\sigma(x\oplus y, x'\oplus y')}e^{-\frac{1}{4}||x'\oplus y' - x\oplus y||^2}$$

Infatti:

$$\begin{aligned}(W_F^{(1)}(x')\Omega_F^{(1)} \otimes W_F^{(2)}(y')\Omega_F^{(2)}, W_F^{(1)}(x)\Omega_F^{(1)} \otimes W_F^{(2)}(y)\Omega_F^{(2)}) =\\ = e^{-i\sigma(x,x')}e^{-\frac{1}{4}||x'-x||^2}e^{-i\sigma(y,y')}e^{-\frac{1}{4}||y'-y||^2}\ddagger)\end{aligned} \qquad (()$$

(la forma simplettica σ è la parte immaginaria del prodotto hilbertiano, quindi i secondi membri della ($\dagger$) e ($\ddagger$) sono uguali).

Quindi l'operatore V effettivamente esiste ed è tale che

$$V : \Gamma(\mathcal{H}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{H}_1) \otimes \Gamma(\mathcal{H}_2)$$

con

$$VW_F(x \oplus y) = W_F(x) \oplus W_F(y)V$$

il che dimostra la prima parte del seguente

19.2.4 Teorema

$$\Gamma(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}) = \Gamma(\mathcal{H}) \otimes \Gamma(\mathcal{K})$$

e, più in generale:

$$\Gamma\left(\bigoplus_\alpha \mathcal{H}_\alpha\right) = \bigotimes_\alpha^{\{\Omega_F^{(n)}\}} \Gamma(\mathcal{H}_\alpha))$$

DIMOSTRAZIONE: Per definizione $x \in \mathcal{H} \iff x = \sum_{n=1}^\infty x_n$ con

$$||x||^2 = \sum_n ||x_n||^2$$

La definizione di V si legge allora come

$$VW_F\left(\sum_{n=1}^\infty x_n\right)\Omega_F = \bigotimes_{n=1}^\infty W_F^{(n)}(x_n)\Omega_F^{(n)}$$

Ora ricordiamo che

$$(W_F^{(n)}(x_n)\Omega_F^{(n)}, \Omega_F^{(n)}) = e^{-\frac{1}{4}||x_n||^2}$$

e quindi che, se

$$(*) \qquad \sum_n \left|1 - e^{-\frac{1}{4}||x_n||^2}\right| < \infty$$

(si tratta della condizione affinché il prodotto tensoriale di infiniti termini sia definito) allora possiamo definire V come nel caso di $n = 2$: in effetti la (*) è verificata, dato che

$$\forall\lambda \geq 0 \quad 1 - e^{-\lambda} \leq \lambda$$

e quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
(W_F(\sum_n x_n)\Omega_F, W_F(\sum_n x_n)\Omega_F) &= e^{-i\sigma(\sum_n x_n, \sum_n x'_n)} e^{-\frac{1}{4}||\sum_n x_n - \sum_n x'_n||^2} \\
&= e^{-i\sum_n \sigma(x_n, x'_n)} e^{-\frac{1}{4}\sum_n ||x_n - x'_n||^2} \\
&= \prod_n e^{i\sigma(x_n, x'_n)} e^{-\frac{1}{4}||x_n - x'_n||^2} \\
&= \prod_n (W_F^{(n)}(x_n)\Omega_F^{(n)}, W_F^{(n)}(x'_n)\Omega_F^{(n)})
\end{aligned}$$

Possiamo cioè definire V come

$$VW_F(x) = \bigotimes_{n=1}^\infty {}^{\{\Omega_F^{(n)}\}} W_F^{(n)}(x_n)V$$

QED

19.2.5 Esempio

- *Nel caso* $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ *si ha* $\Gamma(\mathbb{C}) = L^2(\mathbb{R}, ds)$ *e* $W(z) = e^{i(\alpha q+\beta p)}$, *ove* $z = \alpha + i\beta$ *e* q, p *sono gli operatori della rappresentazione di Schrödinger.*

- *Se* $\mathcal{H}$ *è uno spazio di Hilbert separabile con base ortonormale* $\{e_n\}$ *allora*
$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} e_n\mathbb{C}$$
e quindi
$$\Gamma(\mathcal{H}) = \bigotimes_{n=1}^{\infty} {}^{\{\Omega_F\}} L^2(\mathbb{R}, ds)$$
ove $\Omega_F = \Omega_0$ *è lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico e*
$$W(x) = \prod_{n=1}^{\infty} e^{i(\alpha_n q+\beta_n p)}$$
ove $\alpha_n + i\beta_n = (e_n, x)$: *in altri termini* $\Gamma(\mathcal{H})$ *descrive nel caso separabile* assemblee di oscillatori armonici.

19.3 Caratterizzazioni della rappresentazione di Fock

Cominciamo con l'osservare che, se $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ allora $\Gamma(U) \in \mathcal{U}(\Gamma(\mathcal{H}))$ e
$$\Gamma(U)W_F(x)\Gamma(U)^{-1} = W_F(Ux) \qquad \text{e} \qquad \Gamma(U)\Omega_F = \Omega_F$$
Quindi, se $U\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_i$ allora $U = \bigoplus_{i=1}^{\infty} U_i$ e
$$V\Gamma(U) = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \Gamma(U_i)V$$
Vogliamo ora considerare una "versione infinitesimale" del funtore Γ: consideriamo
$$U(t) = e^{iAt}$$
U è fortemente continuo in t e quindi anche $\Gamma(U(t))$ lo è (rispetto alla topologia forte degli operatori), sicché
$$\Gamma(U(t)) = \Gamma(e^{iAt}) = e^{id\Gamma(A)t}$$
ove, per il teorema di Stone 14.3.6, $d\Gamma(A)$ esiste ed è unico: si tratta di una rappresentazione di algebre di Lie.

Se consideriamo $U(t) = e^{it}I$ allora $d\Gamma(I)$ è autoaggiunto ma non limitato, ed è il *numero delle particelle* N; si noti che
$$e^{iNt}W_F(x)e^{-iNt} = W_F(e^{it}x)$$
e che

19.3.1 Lemma $N\Omega_F = 0$

Si noti in generale che, se $\mathcal{H} = \bigoplus_i \mathcal{H}_i$ allora

$$\Gamma(e^{i\lambda}) = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \Gamma^{(n)}(e^{i\lambda})$$

Ora, sia $A = \bigoplus_n A_n$, quindi $e^{iAt} = \bigoplus_n e^{iA_n t}$ sicché

$$\Gamma(e^{iAt}) = \bigoplus_{n}^{\{\Omega_F^{(n)}\}} \Gamma^{(n)}(e^{iA_n t})$$

e

$$d\Gamma(A) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$$

ove

$$B_n = I \otimes I \otimes \cdots \otimes I \otimes d\Gamma(A_n) \otimes I \otimes \cdots$$

ed il fattore che non è l'identità si trova al posto n-simo; osserviamo inoltre che $d\Gamma(I) = N = \sum_i N_i$ ove N_i è $d\Gamma(1)$ (l'elemento $1 \in \mathbb{C}$) nel fattore n-simo e 1 altrove e dove, tenendo conto che

$$d\Gamma(1)\Omega_n = n\Omega_n$$

si ha

$$d\Gamma(1) = \eta^*\eta = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 - I)$$

Ricordiamo ora che, se $z = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ e

$$e^{i\Phi(z)} := e^{i((\alpha,q)+(\beta,p))} = W(z)$$

le relazioni di Weyl

$$W(z)W(z') = e^{i\sigma(z,z')}W(z + z')$$

implicano la regola di commutazione

$$[\Phi(z), \Phi(z')] \subset 2i\sigma(z, z')I$$

(dato che $z \longmapsto \Phi(z)$ è $\mathbb{R}$-lineare scriviamo $z = \alpha + i\beta$ e $z' = \alpha' + i\beta'$ ed usiamo la relazione di Heisenberg).

Questo vale anche in infiniti gradi di libertà, considerando $z \in X$ (spazio prehilbertiano) e, per ogni $z \in X$, la mappa

$$\lambda \longmapsto W(\lambda z)$$

fortemente continua. Per il teorema di Stone 14.3.6:

$$W(\lambda z) = e^{i\lambda\Phi(z)}$$

ove $\Phi(z)$ è autoaggiunto e quindi

$$W(z) = e^{i\Phi(z)}$$

Se X' è un sottospazio di X di dimensione finita, $W_{X'}$ è fortemente continua e quindi, pensando $z, z' \in X' \subset X$ abbiamo che

$$[\Phi(z), \Phi(z')] \subset 2i\sigma(z, z')I$$

Rammentiamo che, nel caso di un grado di libertà:

$$\Phi(z) = \alpha q + \beta p$$

e si avevano gli operatori di creazione e distruzione

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(p - iq)$$

Vogliamo imitare questa costruzione nel caso di infiniti gradi di libertà.

Cominciamo con l'osservare che $p = \Phi(i)$ e $q = \Phi(1)$, sicché la relazione precedente diviene

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi(i) - \Phi(1))$$

Scriviamo

$$a(z) := \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi(iz) - i\Phi(z))$$

ed osserviamo che (antilinearità di $z \longmapsto a(z)$).

$$a(iz) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\Phi(z) - i\Phi(iz)) = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\Phi(iz) - i\Phi(z)) = -ia(z)$$

Ma allora

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi(iz) + i\Phi(z)) \subset a(z)^*$$

sicché

$$[a(z), a(z')] \subset 0 \qquad \text{e} \qquad [a(z), a(z')^*] \subset (z, z')I$$

(ove (z, z') è il prodotto scalare in X) rammentando $z, z' \in X'$ sottospazio finito-dimensionale di X e la relazione per Φ.

La rappresentazione di Fock possiede il vettore ciclico Ω_F, il livello fondamentale dell'oscillatore armonico: $\eta\Omega_F = 0$, e si ha in questo caso

$$\forall z \in \mathcal{H} \quad a(z)\Omega_F = 0$$

Si noti che Ω_F è nell'intersezione dei domini di a e a^*, e che

$$a(z_1)^* \cdots a(z_n)^*\Omega_F$$

è un vettore analitico intero per $\Phi(z)$ (si ricordi che $\eta^{*n}\Omega_F$ sono i vettori di stato per i livelli eccitati dell'oscillatore armonico). La dimostrazione di questo fatto procede come nel caso di un grado di libertà.

Sia $\mathcal{A}$ l'algebra generata dai polinomi negli operatori $\{\Phi(z)\}_{z\in\mathcal{H}}$ che applicati a Ω_F diano vettori analitici; dato che

$$\{W_F(z)\Omega_F\}_{z\in\mathcal{H}}$$

è totale e che (teorema di Stone 14.3.6 ed analiticità di Ω_F)

$$W_F(z)\Omega_F = e^{i\Phi(z)}\Omega_F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}\Phi(z)^n\Omega_F$$

gli elementi di $\mathcal{A}$ applicati a Ω_F sono uno spazio denso, cioè $\mathcal{A}$ possiede Ω_F come vettore ciclico, dato che la chiusura di tale algebra applicata a Ω_F contiene un sottoinsieme totale.

Osserviamo inoltre che

$$\left\{\prod_i a^{\#}(z_i)\Omega_F\right\}_{\{z_i\}\in\{\text{Sottoinsiemi finiti di } \mathcal{H}\}}$$

è totale, ove $a^{\#}$ rappresenta a oppure a^*; infatti nella stringa

$$a^{\#}a^{\#}\cdots$$

possiamo eliminare gli a, dato che

$$\begin{aligned} a^{\#}(z_1)\cdots a^{\#}(z_{n-2})a(z_{n-1})a(z_n)^*\Omega_F =& a^{\#}(z_1)\cdots a^{\#}(z_{n-2})[a(z_{n-1}), a(z_n)^*]\Omega_F + \\ &+ a^{\#}(z_1)\cdots a^{\#}(z_{n-2})a(z_n)^*a(z_{n-1})\Omega_F \end{aligned}$$

Ora consideriamo il vettore

$$v_n^{(z)} := a(z_1)^* \cdots a(z_n)^*\Omega_F$$

Allora

19.3.2 Lemma

$$(v_n(z), v_m(z')) = \delta_{nm} \sum_{p \in S_n} (z_1 \otimes z_2 \otimes \cdots \otimes z_m, U(p) z'_1 \otimes \cdots \otimes z'_n)$$

ove S_n è il gruppo simmetrico su n elementi e

$$U(p)(z_1 \otimes \cdots \otimes x_n) := x_{p^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{p^{-1}(n)}$$

è la rappresentazione unitaria di $\mathcal{H}^{\otimes n}$ data dall'azione di S_n.

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}(v_m(z), v_n(z')) =&(a(z_2)^* \cdots a(z_m)^* \Omega_F, a(z_1) a(z'_1)^* a(z'_2)^* \cdots a(z'_n) \Omega_F) \\ =&(a(z_2)^* \cdots a(z_m)^* \Omega_F, [a(z_1), a(z'_1)^*] a(z'_2)^* \cdots a(z'_n) \Omega_F) + \\ &+ (a(z_2)^* \cdots a(z_m)^* \Omega_F, a(z'_1)^* a(z_1) a(z'_2)^* \cdots a(z'_n) \Omega_F) \\ =&(z_1, z'_1)(a(z_2)^* \cdots a(z_m)^* \Omega_F, a(z'_2)^* \cdots a(z'_n) \Omega_F)\end{aligned}$$

Iterando il procedimento otteniamo

$$\begin{aligned}(v_m(z), v_n(z')) =&(z_1, z'_1)(a(z_2)^* \cdots a(z_m)^* \Omega_F, a(z'_2)^* \cdots a(z'_n) \Omega_F) + \\ &+ (z_1, z'_2)(a(z_2)^* \cdots a(z_m)^* \Omega_F, a(z'_1)^* a(z'_3)^* \cdots a(z'_n) \Omega_F) \\ &\cdots + (z_1, z'_n)(a(z_2)^* \cdots a(z_m)^* \Omega_F, a(z'_1)^* \cdots a(z'_{n-1}) \Omega_F)\end{aligned}$$

che è zero se $n \neq m$, dato che

$$(\Omega_F, a(x)^* \cdots a(y)^* \Omega_F) = 0$$

Altrimenti, se $n = m$, abbiamo che

$$(v_m(z), v_n(z')) = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} ((z_1, z_{i_1})(z_2, z'_{i_2}) \cdots) = \sum_{p \in S_n} \prod_{i=1}^{n} (z_i, z'_{p^{-1}(i)})$$

ove $i_2 \neq i_1$ e $i_3 \neq i_1, i_2$ e... e $i_n \neq i_1, ..., i_{n-1}$.

QED

In generale, se G è un gruppo finito e $U : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ una rappresentazione unitaria allora vige il *teorema ergodico elementare*:

$$E_0 = E_{\{x \mid \forall g \in G \quad U(g)x = x\}} = \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g \in G} U(g)$$

Nel caso del gruppo simmetrico S_n il secondo membro è il *simmetrizzatore*

$$S := \frac{1}{n!} \sum_{p \in S_n} U(p)$$

Lo spazio di Hilbert

$$S^n\mathcal{H} := S(\mathcal{H}^{\otimes n})$$

è la n-sima potenza simmetrica.

Consideriamo $(z_1, ..., z_n) \in \mathcal{H}^n$ ed associamogli

$$\frac{1}{n!}a(z_1)^* \cdots a(z_n)^*\Omega_F$$

Possiamo inoltre associargli il simmetrizzatore $S(z_1 \otimes \cdots \otimes z_n)$: per il lemma esiste un operatore V_n tale che

$$V_n\left(\frac{1}{\sqrt{n!}}a(z_1)^* \cdots a(z_n)^*\Omega_F\right) = S(z_1 \otimes \cdots \otimes z_n)$$

e

$$\frac{1}{n!}(v_n(z), v_m(z')) = \delta_{nm}(S(z_1 \otimes \cdots \otimes z_m), S(z_1' \otimes \cdots \otimes z_m'))$$

L'operatore V_n è unitario, sempre per il lemma, quindi

$$\Gamma(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma_n(\mathcal{H})$$

ove $\Gamma_n(\mathcal{H}) \cong S^n\mathcal{H}$ cioè lo spazio di Fock coincide con l'algebra dei tensori simmetrici sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$.

Partendo da $V_0(\lambda\Omega_F) := \lambda \in \mathbb{C}$ possiamo combinare i $V_1, V_2, ...$ per ottenere l'isomorfismo $V : \Gamma_n(\mathcal{H}) \longrightarrow S^n\mathcal{H}$.

Possiamo ora capire come agiscono gli operatori di creazione e distruzione:

$$a(z)^*\left(\frac{1}{\sqrt{n!}}a(z_1)^* \cdots a(z_n)^*\Omega_F\right) = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}}a(z)^*a(z_1)^* \cdots a(z_n)^*\Omega_F$$

L'aggiunto (si rammenti: $z \longmapsto a(z)$ è antilineare) è

$$\begin{aligned} & a(z)\Big(\frac{1}{\sqrt{n!}}a(z_1)^* \cdots a(z_n)^*\Omega_F\Big) \\ & \quad = \frac{1}{\sqrt{n!}}\sum_{i=1}^{n}(z_1, z_i)a(z_1)^* \cdots a(z_{i-1})^*a(z_{i+1})^* \cdots a(z_n)^*\Omega_F \\ & \quad = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(z, z_i)\frac{1}{\sqrt{(n-1)!}}a(z_1)^* \cdots a(z_{i-1})^*a(z_{i+1})^* \cdots a(z_n)a^*\Omega_F \end{aligned}$$

Questo suggerisce la seguente caratterizzazione dello spazio di Fock:

$$\Gamma(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n\mathcal{H}$$

con

$$\begin{aligned}
a(z)^*(S(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)) &:= \sqrt{n+1}S(z \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \\
a(z)(S(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)) &:= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_i (z, x_i) S(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_n) \\
\Omega_F &:= 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \cdots
\end{aligned}$$

Quindi

$$a(z)\Omega_F = 0$$

ed i campi di Segal si definiscono come

$$\Phi(z) := \frac{1}{i\sqrt{2}}(a(z)^* - a(z))$$

Abbiamo quindi tre presentazioni equivalenti dello spazio di Fock:

- Come rappresentazione del gruppo di Heisenberg generata dalla rappresentazione
$$(z, \lambda) \longmapsto e^{i\lambda} e^{-\frac{1}{4}||z||^2}$$
- Come prodotto tensoriale hilbertiano
$$\Gamma(\mathcal{H}) = \bigotimes_{n=1}^{\infty} {}^{\{\Omega_n\}} \Gamma(\mathbb{C})$$
- Come spazio dei tensori simmetrici:
$$\Gamma(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n \mathcal{H}$$

Vogliamo dare una ulteriore caratterizzazione: consideriamo la terza interpretazione di $\Gamma(\mathcal{H})$ e le formule per gli operatori di creazione e distruzione:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

Allora

$$\frac{1}{n!} a(x)^{*n} \Omega_F = \frac{1}{\sqrt{n!}} x^{\otimes n}$$

Ma Ω_F è un vettore analitico, quindi possiamo definire

$$e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a(x)^{*n} \Omega_F = e^{a(z)^*} \Omega_F$$

e constatare che
$$(e^x, e^y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x,y)^n}{n!} = e^{(x,y)}$$
Inoltre $\{e^x\}_{x\in\mathcal{H}}$ è un insieme totale in $\mathcal{H}$, dato che, per
$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i$$
abbiamo
$$\left(\frac{\partial^n e^x}{\partial\lambda_1 \cdots \partial\lambda_n}\right)_{\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0} = a(z_1)^* \cdots a(z_n)^* \Omega_F$$
ed i vettori al secondo membro formano un insieme totale. Possiamo allora considerare lo spazio $\mathcal{E}$ generato dagli elementi della forma e^x con le relazioni $(e^x, e^y) = e^{(x,y)}$, considerare in esso il sottospazio $\mathcal{N}$ dei vettori di lunghezza zero e definire
$$\Gamma(\mathcal{H}) = \overline{\mathcal{E}/\mathcal{H}}$$
Notiamo che, avendosi
$$\Gamma(U) W_F(x) \Gamma(U)^{-1} = W_F(Ux)$$
e
$$W(x) = e^{i\Phi(x)}$$
ne segue
$$\Gamma(U)\Phi(x)\Gamma(U)^{-1} = \Phi(Ux)$$
cioè
$$\Gamma(U) a(x_1)^* \cdots a(x_n)^* \Omega_F = a(Ux_1)^* \cdots a(x_n)^* \Omega_F$$
Quindi, se
$$\Gamma_n(U) S(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) := S(Ux_1 \otimes \cdots \otimes Ux_n)$$
si ha pure
$$\Gamma(U) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma_n(U)$$
e
$$d\Gamma(A) = \bigoplus_n d\Gamma_n(A)$$
ove
$$d\Gamma_n(A) = \sum_{i=1}^{n} I \otimes \cdots \otimes I \otimes A \otimes I \otimes \cdots \otimes I$$

(nel prodotto tensoriale i termini sono n e A figura all'i-simo.) Ad esempio $d\Gamma_n(I) = nI$ e $d\Gamma(I) = N$, autoaggiunto non limitato.

Si noti inoltre che se $W(z)$ è ad esempio una rappresentazione irriducibile delle relazioni di Weyl in un grado di libertà, allora

$$z \longmapsto \alpha_z(A) := W(z)AW(z)^{-1}$$

(con $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$) definisce un morfismo fortemente continuo di gruppi:

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \operatorname{Aut}\mathcal{B}(\mathcal{H})$$

Non si tratta tuttavia di una rappresentazione unitaria, perché se lo fosse avremmo

$$\alpha_z(A) = V_z A V_z^{-1}$$

e la C*-algebra (commutativa!) generata dai V_z sarebbe quella dei $W(z)$, che è irriducibile: essendo commutativa ciò è impossibile.

In questo caso i teoremi di Wigner e Bargmann non sono soddisfatti, il che dà conto dei fenomeni non relativistici della teoria.

19.4 Teorema di Gårding–Wightman

Consideriamo

$$\Gamma(\mathcal{H}) \cong \bigotimes_{n=1}^{\infty}{}^{\{\Omega_0\}}\Gamma(\mathbb{C})$$

ove $\{e_n\}$ è una base ortonormale; abbiamo che

$$N \cong \sum_{i=1}^{\infty} I \otimes I \otimes \cdots \otimes \eta^*\eta \otimes \cdots \otimes I$$
$$W(\sum_i \lambda_i e_i) \cong \bigotimes_{n=1}^{\infty} W(\lambda_n)$$
$$\Phi(\sum_i \lambda_i e_i) \cong \sum_{n=1}^{\infty} I \otimes \cdots \otimes (\alpha_n q + \beta_n p) \otimes \cdots \otimes I$$

sicché

$$a(e_n) = I \otimes \cdots \otimes I \otimes \eta \otimes I \otimes \cdots$$

(il fattore non I si trova al posto n-simo) e

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} a(e_n)^* a(e_n)$$

Cioè, nella rappresentazione di Fock:

$$d\Gamma(I) = N = \sum_{n=1}^{\infty} a(e_n)^* a(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(p_n^2 + q_n^2 - I)$$

Ora sia X lo spazio vettoriale dei vettori della forma

$$\sum_i \lambda_i e_i$$

ove λ_i hanno supporto finito; si tratta di uno spazio prehilbertiano denso in $\mathcal{H}$ ed ha senso porre, per ogni $x \in X$:

$$W(x) = W(\sum_i \lambda_i e_i) = \prod_{i=1}^{\infty} W(\lambda_i e_i)$$

Un risultato chiave è il

19.4.1 Teorema (Gårding–Wightman) *La rappresentazione W è quasi equivalente alla rappresentazione di Fock se e solo se l'operatore*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(e_n)^* a(e_n)$$

è densamente definito.

Piuttosto che dimostrare questo teorema ci limitiamo a darne un esempio di applicazione.

Si consideri una funzione

$$\begin{aligned} n : \mathbb{N} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ i &\longmapsto n_i \end{aligned}$$

(cioè un elemento di $(\mathbb{N} \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$) e

$$\sum \frac{1}{2}(p_i^2 + q_i^2 - n_i I)$$

Esiste una rappresentazione nella quale questo operatore è essenzialmente autoaggiunto; ma il teorema di Gårding–Wightman ci dice inoltre che per ogni funzione $n \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$ esiste una rappresentazione irriducibile W_n delle relazioni di Weyl tale che questo operatore sia essenzialmente autoaggiunto e

$$W_n \cong W_{n'} \iff [n] = [n']$$

(le parentesi quadre denotano le classi di equivalenza modulo $\mathcal{N}_0$, che è lo spazio delle funzioni $n\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^{\mathbb{N}}$ a supporto finito). Abbiamo cioè una infinità continua di rappresentazioni irriducibili.

Stabiliamo ora una notazione: Ω_0 è lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico in $\Gamma(\mathbb{C})$, e Ω_n lo stato eccitato n-simo:

$$\Omega_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}\eta^{*n}\Omega_0$$

($\eta\Omega_0 = 0$). Consideriamo

$$\mathcal{H}_n := \bigotimes_{i=1}^{\infty}{}^{\{\Omega_{n_i}\}}\Gamma(\mathbb{C})$$

e

$$W_n(\sum \lambda_i e_i) = \bigotimes_{i=1}^{\infty} W(\lambda_i)$$

che possiede solo un numero finito di fattori diversi da 1 (dato che le λ_i hanno supporto finito; la W_n è irriducibile, il che si vede come nel caso della rappresentazione di Fock.

Definiamo ora un operatore N per W_n. Sia

$$e^{i\widehat{N}\lambda}W_n(x)\Omega_n = W_n(e^{i\lambda}x)\Omega_n$$

Questa posizione determina un operatore unitario se i prodotti scalari sono conservati, e se questo è vero la forte continuità implica che siamo in presenza di un gruppo di unitari fortemente continuo e quindi, per il teorema di Stone 14.3.6, $\widehat{N}$ è autoaggiunto.

Ma si ha

$$\begin{aligned}
(W_n(e^{i\lambda}x)\Omega_n, W_m(e^{i\lambda}x)\Omega_m) &= \prod_{i=1}^{\infty}(W(e^{i\lambda}\lambda_i)\Omega_{n_i}, W(e^{i\lambda},\mu_i)\Omega_{n_i}) \\
&= \prod_{i=1}^{\infty}(e^{i\lambda N}W(\lambda_i)e^{-i\lambda n_i}\Omega_{n_i}, W(e^{i\lambda},\mu_i)\Omega_{n_i}) \\
&= \prod_{i=1}^{\infty}(e^{i\lambda(N-n_i)I}W(\lambda_i)\Omega_{n_i}, W(e^{i\lambda},\mu_i)\Omega_{n_i}) \\
&= \prod_{i=1}^{\infty}(W(\lambda_i)\Omega_{n_i}, W(e^{i\lambda},\mu_i)\Omega_{n_i})
\end{aligned}$$

ove abbiamo usato

- al secondo passaggio il fatto che in un grado di libertà si ha $N = \eta^*\eta$ e $W(e^{i\lambda}z) = e^{iN\lambda}W(z)e^{-iN\lambda}$ $(z \in \mathbb{C})$;
- nel terzo membro l'implicazione $\eta^*\eta\Omega_n = n\Omega_n \Rightarrow e^{i\lambda\eta^*\eta}\Omega_n = e^{i\lambda n}\Omega_n$;
- nell'ultimo passaggio l'unitarietà di $e^{i\lambda(N-ni)I}$.

Ne segue che

$$\begin{aligned} W_n(e^{i\lambda}x)\Omega_n =& \bigotimes_{j=1}^{\infty} W(e^{i\lambda}\lambda_j)\Omega_{n_j} = \bigotimes_{j=1}^{\infty} e^{i\lambda(N-n_jI)}W(\lambda_j)\Omega_{n_j} \\ =& \prod_{j=1}^{\infty} e^{i\lambda(N_j-n_jI)} \bigotimes_{j=1}^{\infty} W(\lambda_j)\Omega_{n_j} \\ =& e^{i\lambda\sum_{j=1}^{\infty}(N_j-n_jI)}W_n(x)\Omega_n \end{aligned}$$

ove

$$N_j = I \otimes \cdots \otimes I \otimes \eta^*\eta \otimes I \otimes \cdots = a(e_j)^*a(e_j)$$

(il fattore non identico figura al posto j-simo), sicché

$$\widehat{N} = \sum_{j=1}^{\infty}(N_j - n_jI)$$

Infine mostriamo che

$$W_n \cong W_{n'} \iff n - n' \in \mathcal{N}_0$$

Che la condizione sia sufficiente è ovvio: se $n - n' \in \mathcal{N}_0$ allora possiamo passare da Ω_n a $\Omega_{n'}$ senza cambiare la rappresentazione $\mathcal{H}_n$ (a meno di isomorfismi).

Per dimostrare che la condizione è necessaria, supponiamo $\overline{n} \neq \overline{n'}$; se fosse $W_n \cong W_{n'}$ allora esisterebbe U unitario tale che

$$\forall x \in X \quad UW_n(x)U^{-1} = W_{n'}(x)$$

e, preso

$$\Omega_n = \bigotimes_{j=1}^{\infty} \Omega_{n_j} \in \mathcal{H}_n$$

avremmo

$$\Phi := U(\Omega_n) \in \bigotimes_{j=1}^{\infty}{}^{\{\Omega_{n'_j}\}}\Gamma(\mathbb{C})$$

Il vettore Φ verificherebbe cioè la

$$(\Phi, W_{n'}(x)\Phi) = (U\Omega_n, UW_n(x)U^{-1}U\Omega_n) = (\Omega_n, W_n(x)\Omega_n)$$

Ma se $x \in \sum_{j=1}^m e_j\mathbb{C}$ per un certo m, allora gli elementi

$$W(x) = \bigoplus W_s^{(k)}(x)$$

(somma di copie della rappresentazione di Schrödinger) generano un'algebra di von Neumann che è della forma $\mathcal{B}(\mathcal{H}_l) \otimes I$, e dove $\mathcal{H}_m = \oplus_{j=1}^m e_k j\mathbb{C}$.

Dunque, per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_l)$

$$(\Phi, B \otimes I\Phi) = (\Omega_n, B \otimes I\Omega_n)$$

Notiamo inoltre che, in questo caso, esisterebbe $T_m \in (\mathcal{B}(\mathcal{H}_m) \otimes I)'$ tale che

$$T_m\Omega_m = \Phi$$

Infatti

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes I \cong \left\{ \bigoplus_{i=1}^{\infty} A \mid A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \right\}$$

(dato che $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K} = \oplus_{i \in \mathrm{Card}\,\mathcal{K}} \mathcal{H}$ e quindi

$$(\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes I)' \cong \{\oplus A\}'$$

che è un'algebra di matrici a blocchi negli elementi di $\mathbb{C}(\mathcal{H})$ (si confronti la discussione sui teoremi di densità). Gli operatori di quest'algebra che hanno la forma $(a_{ij}I) \in \oplus\mathcal{H}$ hanno come immagini in $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ gli elementi $B \otimes I$ e quindi

$$(\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes I)' = I \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K})$$

Ora

$$\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{H}'_m = \mathcal{H}_n$$

ed abbiamo un vettore Φ tale che

$$(\Phi, B \otimes I\Phi) = (\Omega^{(m)} \otimes \Omega', B \otimes I\Omega^{(m)} \otimes \Omega')$$

cioè

$$\Phi = T_m\Omega^{(m)} \otimes \Omega' = \Omega^{(m)} \otimes \Omega''$$

Dunque

$$\Phi = \Omega_{n_1} \otimes \Omega_{n_2} \otimes \cdots \in \bigotimes_{j=1}^{\infty}{}^{\{\Omega_{n'_j}\}} \Gamma(\mathbb{C})$$

il che è possibile solo se $\overline{n} = \overline{n'}$, dato che la successione

$$\Psi_m := \Omega_{n_1} \otimes \cdots \otimes \Omega_{n_m} \otimes \Omega_{n'_{m+1}} \otimes \cdots$$

è di Cauchy: se $m \gg 0$ e $l > m$:

$$||\Psi_m - \Psi_l||^2 < \varepsilon$$

Ma abbiamo anche

$$\begin{aligned} ||\Psi_m - \Psi_l||^2 =& ||\Omega_{n_{m+1}} \otimes \cdots \otimes \Omega_{n_l} - \Omega_{n'_{l+1}} \otimes \cdots \otimes \Omega_{n'_l}|| \\ =& 2(1 - \operatorname{Re} \prod_{k=m+1}^{l} (\Omega_{n_k}, \Omega_{n'_k}) \end{aligned}$$

che è 2 se $\overline{n} \neq \overline{n'}$.

19.5 Sul concetto di campo

In Meccanica Quantistica[3] un *campo* è una distribuzione a valori in un'algebra di operatori, cioè una funzione lineare

$$A : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}$$

ove $\mathcal{S}$ è lo spazio delle funzioni di Schwartz su $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{A}$ un'algebra di operatori autoaggiunti su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Il caso al quale questa definizione si ispira è

$$A(f) = \int f(x)A(x)dx$$

Supponiamo che esista un $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{H}$ denso tale che per ogni $f \in \mathcal{S}$ si abbia $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_{A(f)}$ (contenuto nel dominio dell'operatore $A(f)$) e tale che, per ogni $\psi, \psi' \in \mathcal{D}_0$, la funzione

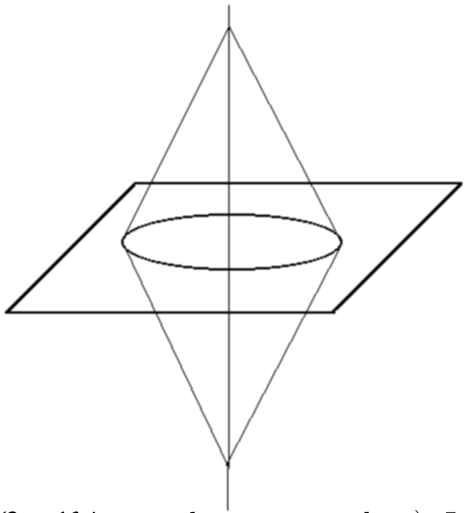
$$f \longmapsto (\psi A(f), \psi')$$

sia una distribuzione (cioè un elemento di $\mathcal{S}'$).

Una teoria dei campi consiste in una serie di assiomi per i campi stessi che rispondano alle esigenze fisiche e siano matematicamente coerenti; ne introdurremo alcuni.

Osserviamo intanto che se $\mathcal{A}$ è la C*-algebra degli osservabili di un sistema quantistico (in $\mathbb{R}^4$ visto come spazio-tempo) abbiamo in $\mathcal{A}$ delle sottoalgebre $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ associate ad aperti $\mathcal{O}$ di $\mathbb{R}^4$, che immaginiamo come regioni limitate dello spazio-tempo: tipicamente una tale regione sarà intersezioni di coni di luce, che sono aperti stabili rispetto alle trasformazioni di Lorentz (la richiesta minima se si vuole una compatibilità con la Relatività Ristretta).

[3] Seguendo Wightman, *Ph. Rev.* 1956.



Consideriamo dunque la famiglia $\mathcal{K}$ dei coni "doppi", cioè di coni la cui intersezione sia un bordo spaziale: si tratta di una famiglia di insiemi stabile per l'azione del gruppo di Poincaré. Possiamo inoltre definire, per $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$:

$$\mathcal{O}' := \{y \in \mathbb{R}^4 \,|\, \forall x \in \mathcal{O} \; ||y - x||_M^2 < 0\}$$

(ove $||.||_M$ è la norma di Minkowski).

Si noti che, in generale, $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}''$ ma che

$$\mathcal{O} \in \mathcal{K} \Rightarrow \mathcal{O}'' = \mathcal{O}$$

($\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ è causalmente completo). La funzione

$$\mathcal{O} \longmapsto \mathcal{A}(\mathcal{O})$$

si dice *corrispondenza di Haag–Kastler*, e soddisfa alla seguente proprietà di monotonia:

$$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$$

Con ciò ($\{\mathcal{A}(\mathcal{O})\}$ è un insieme parzialmente ordinato dall'inclusione) la corrispondenza di Haag-Kastler è un morfismo di insiemi ordinati.

Inoltre l'insieme

$$\bigcup_{\mathcal{O} \in \mathcal{K}} \mathcal{A}(\mathcal{O})$$

è una sotto-*-algebra di $\mathcal{A}$ e vogliamo imporre la condizione

$$\mathcal{A} = \overline{\bigcup_{\mathcal{O} \in \mathcal{K}} \mathcal{A}(\mathcal{O})}^{||-||}$$

Veniamo ora ad un assioma fondamentale di ogni teoria dei campi:

19.5.1 Postulato di Località *Siano $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$ tali che non possano esservi segnali temporali (timelike) fra essi: in altri termini che siano* causalmente disgiunti*, vale a dire*

$$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2'$$

Allora

$$\forall A_1 \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \; \forall A_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_2) \quad [A_1, A_2] = 0$$

Il significato di questo assioma è che eventi osservati in regioni dello spazio che non possono comunicare fra loro debbono essere indipendenti.

Perché una teoria assiomatica soddisfi il requisito base della coerenza basta far vedere che possiede un modello, vale a dire che ne esistono esempi: nel caso delle teorie dei campi questo avviene costruendo i campi liberi.

Consideriamo lo spazio di Fock $\Gamma(\mathcal{H})$ e la funzione $\Phi(x)$: vogliamo costruire un campo libero, cioè una distribuzione a valori in $\Gamma(\mathcal{H})$. Consideriamo $\mathcal{H} = L^2(\Omega_m^+, d\Omega_m)$ (particella di massa m e spin 0) e ricordiamo che

$$d\Omega_m(p) = \frac{dp}{2p_0}$$

e

$$\int f(p)d\Omega_m^+ = \int f\left(\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \vec{p}\right) \frac{dp}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} =: \int f(p)\delta(p^2 - m^2)\varepsilon(p_0)dp$$

e che esiste la rappresentazione indotta

$$(\mathcal{U}(a, \Lambda)f)(p) = e^{ipa} f(\Lambda^{-1}p)$$

Per f reale definiamo la distribuzione

$$Tf := \left(\widehat{f}\right)_{\Omega_m^+}$$

e quindi

$$\varphi(f) := \Phi\left(\widehat{f}\Big|_{\Omega_m^+}\right)$$

(Φ è lineare sulle funzioni reali) estendendola a funzioni complesse come

$$\varphi(f) := \varphi(\operatorname{Re} f) + i\varphi(\operatorname{Im} f)$$

Su $\mathcal{S}$ agisce il gruppo di Poincaré come

$$g \cdot f := f_g$$

essendo $g = (a, \Lambda)$ e

$$f_g(x) = f(g^{-1}x)$$

Allora

$$Tf_g = \mathcal{U}(g)Tf$$

sicché, estendendo la rappresentazione allo spazio di Fock come

$$\Upsilon(a, \Lambda) = \Gamma(\mathcal{U}(a, \Lambda))$$

per funtorialità otteniamo

$$\Upsilon(g)\Phi(x)\Upsilon(g)^{-1} = \Phi(\mathcal{U}(g)x)$$

ovvero

$$\varphi(f_g) = \Phi(Tf_g) = \Phi(\mathcal{U}(g)Tf) = \Upsilon(g)\Phi(f)\Upsilon(g)^{-1} = \Upsilon(g)T_f\Upsilon(g)^{-1}$$

In altri termini il campo $f \longmapsto \varphi(f)$ possiede una rappresentazione unitaria fortemente continua del gruppo di Poincaré $g \longmapsto \Upsilon(g)$ in modo che

$$\Upsilon(g)Tf\Upsilon(g)^{-1} = \varphi(f_g)$$

Notiamo che $\Upsilon(g)\Omega = \Omega$.

Estendiamo ora la funzione $\mathbb{R}$-lineare $f \longmapsto \varphi(f)$ ai complessi nel modo ovvio:

$$\varphi(f) := \varphi(f-1) + i\varphi(f_2)$$

e rammentiamo che

$$e^{i\varphi(f)} = e^{i\Phi(Tf)} = W(Tf)$$

da cui, per $f, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$

$$[\varphi(f), \varphi(h)] = i\,\mathrm{Im}(Tf, Th)$$

ovvero

$$e^{i\varphi(f)}e^{i\varphi(h)} = e^{i\,\mathrm{Im}(Tf,Th)}e^{i\varphi(h)}e^{i\varphi(f)}$$

Si noti che T è un operatore di allacciamento:

$$Tf_g = \Upsilon(g)Tf$$

e quindi

$$\Upsilon(g)W(x)\Upsilon(g)^{-1} = W(\mathcal{U}(g)x)$$

e

$$\Upsilon(g)\varphi(f)\Upsilon(g)^{-1} = \varphi(f_g)$$

Per cui, se $\varphi(f)$ è una distribuzione regolare, della forma

$$\varphi(f) = \int f(x)\varphi(x)dx$$

allora

$$\Upsilon(a,\Lambda)\varphi(x)\Upsilon(a,\Lambda)^{-1} = \varphi(\Lambda x + a)$$

Vogliamo ora presentare φ come soluzione di un'equazione differenziale (nel senso delle distribuzioni): precisamente consideriamo l'equazione[4]

$$((\Box + m^2)\varphi)(f) = \varphi((\Box + m^2)f)$$

Ma (usando le trasformate di Fourier)

$$(\widehat{\Box + m^2})f(p) = (m^2 - p^2)\widehat{f}(p)$$

e quindi ($p^2 = m^2$)

$$(\widehat{\Box + m^2})f\Big|_{\Omega_m^+} = 0$$

Dunque otteniamo, per la distribuzione $Tf = \widehat{f}|_{\Omega_m^+}$:

$$\varphi((\Box + m^2)f) = \Phi(T(\Box + m^2)f) = 0$$

(dato che $T(\Box + m^2)f = (\widehat{\Box + m^2})f$, il che ci permette di caratterizzare le φ come soluzioni dell'equazione differenziale

$$(\Box + m^2)\varphi = 0$$

Ora consideriamo la questione dell'irriducibilità della nostra rappresentazione: intanto ricordiamo che la funzione

$$x \longmapsto W(x)$$

($x \in \mathcal{H}$) è fortemente continua, quindi lo sono le

$$f \longmapsto e^{i\varphi(f)} \qquad \text{e} \qquad f \longmapsto \varphi(f)\Phi$$

($f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ e la topologia su $\mathcal{S}$ è data da $||Tf||^2 = ||f||^2$): per avere l'irriducibilità basta quindi dimostrare il

19.5.2 Teorema *L'immagine $T\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ è densa in $\mathcal{H}_{[m,0]}$.*

DIMOSTRAZIONE: Intanto osserviamo che

$$\begin{aligned} ||f||^2 &= \int_{\Omega_m^+} |\widehat{f}(p)|^2 \frac{dp}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \\ &= \int_{\Omega_m^+} |\widehat{f}(p)|^2 (1 + \vec{p}^2)^{2r} (1 + \vec{p}^2)^{-2r} \frac{dp}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \le c||(1 + \vec{p}^2)rf||_\infty^2 \end{aligned}$$

[4] Si rammenti come si derivano le distribuzioni: $T'(f) = -T(f')$, sicché $(\nabla T)f = T(\nabla f)$ e $(\Box T)f = T(\Box f)$

con r opportuno, in modo che $(1+\vec{p}^2)^{-2r}/\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$ sia in L^1 e quindi abbia luogo la maggiorazione, dove c è una costante. Ma

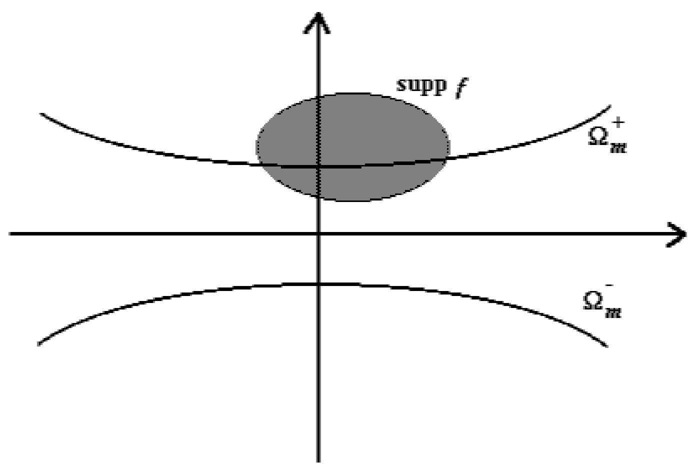
$$q(f) := \sup_p |(1+\vec{p}^2)^r f(p)|$$

è una seminorma per la topologia di $\mathcal{S}$ ed ovviamente $||f|| \leq q(f)$, sicché la norma $||.||$ è continua per la topologia di $\mathcal{S}$.

Dunque T manda insiemi densi in insiemi densi, sicché basta dimostrare il teorema su

$$\mathcal{D}_{\mathbb{R}} = \{f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}} \mid \operatorname{supp} f \text{ compatto}\}$$

(che è denso in $\mathcal{S}$).



Per farlo, consideriamo $f : \Omega_m^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ appartenente a $L^2(\mathbb{R}^3, d\Omega_m)$, vale a dire tale che

$$\int |f(\vec{p})|^2 \frac{dp}{2\sqrt{\vec{p}^2+m^2}} < \infty$$

e definiamo

$$\widehat{g}(p) := f(\vec{p}) h\left(\frac{p_0 - \sqrt{\vec{p}^2+m^2}}{m}\right)$$

ove $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ è una funzione a supporto compatto tale che $h(0) = 1$ e $\operatorname{supp} h \subset (-1, 1)$; allora la $\widehat{g}$ ha supporto compatto e, se

$$\widehat{g_1}(p) := \widehat{g}(p) + \overline{\widehat{g}(-p)}$$

allora $g_1 \in \mathcal{S}$ e

$$(Tg_1)(\sqrt{\vec{p}^2+m^2}, p) = f(\vec{p})$$

(si rammenti che se $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ allora $\widehat{f}(p) = \overline{\widehat{f}(-p)}$).

QED

Le distribuzioni che qui ha interesse considerare sono, rispetto alle variabili spaziali, delle funzioni (infinitamente differenziabili) vere e proprie.

Ricordiamo ora che per le distribuzioni può definirsi un prodotto tensoriale nel modo seguente: consideriamo $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ e $G \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)'$; allora possiamo definire una distribuzione $F \otimes G$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})'$ come

$$\langle F \otimes G, f \otimes g\rangle = \langle F, f\rangle\langle G, g\rangle$$

ove abbiamo usato l'isomorfismo

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \cong \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$$

che dà luogo al *teorema del nucleo di L. Schwartz*:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)' \cong \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})'$$

(i prodotti tensoriali sono definiti in modo unico perché questi spazi vettoriali topologici sono nucleari: cfr. [31], p.531).

Il prodotto tensoriale di distribuzioni è una generalizzazione del prodotto di misure, ed il teorema del nucleo può vedersi come una versione più generale del teorema di Fubini.

19.5.3 Esempio *Consideriamo una funzione $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ e la misura di Dirac $\delta_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})'$ concentrata in un punto x_0: possiamo considerare i prodotti tensoriali*

$$f_1 = \delta_0 \otimes g \qquad e \qquad f_2 = \delta_0' \otimes g$$

(che sono distribuzioni in $\mathbb{R}^4$, ove δ_0' è la derivata nel senso delle distribuzioni, cfr. capitolo **??** *§4); allora*

$$\widehat{f}_1(p) = \widehat{g}(\vec{p}) \qquad e \qquad \widehat{f}_2(p) = ip_0\widehat{g}(\vec{p})$$

Formalmente:

$$\langle f_1, \varphi\rangle = \int \varphi(0, \vec{x})g(\vec{x})d\vec{x} \qquad e \qquad \langle f_2, \varphi\rangle = \int \varphi'(0, \vec{x})g(\vec{x})d\vec{x}$$

Data la distribuzione T, consideriamo ora la funzione $I_T : \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)\otimes\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$I_T(f, g) = -\operatorname{Im}(Tf, Tg)$$

Si tratta di una funzione bilineare e continua nelle due variabili rispetto alla topologia di $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$. Per $(a, \Lambda) \in \mathcal{P}$ si ha

$$(Tf_{(a,\Lambda)}, Tg_{(a,\Lambda)}) = (\mathcal{U}(a,\Lambda)Tf, \mathcal{U}(a,\Lambda)Tg) = (Tf, Tg)$$

e, formalmente, possiamo scrivere

$$I_T(f,g) = \int F(x,y)f(x)g(y)dxdy$$

cioè esprimere la funzione bilineare I_T come un operatore integrale con nucleo F tale che $F(x,y) = F(x+a, y+a)$. Inoltre, per invarianza rispetto alle trasformazioni di Lorentz si ha

$$F(x,y) = \Delta(x-y)$$

ove $\Delta(\lambda z) = \Delta(z)$ e Δ è una distribuzione in $\mathbb{R}^4$.

Naturalmente la distribuzione Δ si comporta solo formalmente come un nucleo, ma possiamo comunque scrivere delle regole di commutazione[5] almeno a livello formale, usando il seguente ragionamento:

$$\begin{aligned}
I_T(f,g) &= -\operatorname{Im}\int \overline{Tf(p)}Tg(p)d\Omega_m = -\operatorname{Im}\int \overline{\widehat{f}(p)}\widehat{g}(p)d\Omega_m^+ \\
&= \frac{1}{2}\int_{\{p_0=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}\}} \left(\widehat{f}(p)\overline{\widehat{g}(p)} - \overline{\widehat{f}(p)}\widehat{g}(p)\right) d^3\frac{p}{2\sqrt{\vec{p}^2+m^2}}
\end{aligned}$$

f e g sono a valori reali, quindi $\overline{\widehat{f}(p)} = \widehat{f}(-p)$ e $\overline{\widehat{g}(p)} = \widehat{g}(-p)$, sicché

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_{\{p_0=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}\}} \widehat{f}(p)\overline{\widehat{g}(p)}\frac{d\Omega_m^+(p) - d\Omega_m^-(p)}{\sqrt{\vec{p}^2+m^2}} \\
&= (\widehat{g}, \widehat{\Delta}_m(p)\widehat{f}) = (g, \Delta_m * f)
\end{aligned}$$

(nell'ultima formula integrale abbiamo integrato rispetto alla differenza delle misure). Abbiamo cioè, a meno di scambiare l'ordine di g e f, la formula per il nucleo:

$$\Delta_m(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int e^{ipx}\left(d\Omega_m^+(p) - d\Omega_m^-(p)\right)$$

[5]La principale motivazione che von Neumann fornisce, nel suo trattato *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* [24], all'introduzione della teoria degli operatori negli spazi di Hilbert come metodo matematico fondamentale per le questioni quantistiche, è proprio la mancanza di rigore che la formulazione di Dirac [6] aveva all'epoca: il principale ostacolo era l'impossibilità di scrivere gli usuali operatori, come la funzione hamiltoniana, in forma di operatori integrali: per questo Dirac faceva uso delle sue "funzioni improprie" la cui natura non contraddittoria fu chiarita solo in seguito da Schwartz ed altri con l'introduzione del concetto di "distribuzione"; si confronti specialmente i §I–3 e §III–6 del libro di Von Neumann.

Intuitivamente, abbiamo la seguente formula, anche se priva di senso:

$$[f(\varphi), g(\varphi)] = I_T(f, g) = i(f, \Delta * g) = i\Delta_m(x-y)I$$

Si noti che, se Δ_m ha supporto nel doppio cono di luce futuro/passato V, vale a dire se per ogni $f, g \in \mathcal{S}$ i cui supporti siano spazialmente separati, l'integrale di Δ_m sulle f e g dà ovviamente zero, dato che

$$[f(\varphi), g(\varphi)] = -[\varphi(x), \varphi(y)]$$

e quindi $\Delta(-z) = -\Delta(z)$; inoltre la $\Delta(\lambda z) = \Delta(z)$ (che è come dire $\langle \Delta, f_\Lambda \rangle = \langle \Delta, f \rangle$) implica $\Delta = 0$ sui vettori *spacelike*, perché possiamo scrivere

$$\Delta_m(x) = \Delta_m^{(+)}(x) - \Delta_m^{(-)}(-x)$$

Quindi

$$\int \varphi(x)f(x)dx = \varphi(x)$$

è tale che, se $\mathrm{Im}(Tf, Tg) = 0$, allora $e^{i\lambda f(\varphi)} = W(\lambda Tf)$ e $e^{i\mu g(\varphi)}$ commutano in senso forte: questo è il caso, ad esempio, se i supporti di f e g sono spazialmente separati.

Naturalmente questo si ricollega al postulato di località: se

$$\mathcal{A}(\mathcal{O}) := \{W(Tf) \mid f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4), \mathrm{supp}\, f \subset \mathcal{O}\}''$$

e $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ sono aperti spazialmente separati, i.e. $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2'$ allora $W(Tf)$ e $W(Tg)$ commutano (per ogni $f \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_1)$ e $g \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$):

$$\mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)'$$

e viceversa.

In realtà si potrebbe dimostrare il seguente risultato

19.5.4 Teorema *Se $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ è un cono doppio e se consideriamo la C^*-algebra $\mathcal{A}(\mathcal{O}')$ generata dalle sottoalgebre $\{\mathcal{A}(\mathcal{O}_\lambda)\}_{\mathcal{O}_\lambda \subset \mathcal{O}'}$ allora*

$$\mathcal{A}(\mathcal{O}) = \mathcal{A}(\mathcal{O}')'$$

*(*dualità di Araki*).*

dove l'inclusione $\mathcal{A}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}')'$ è ovvia.

Bibliografia

[1] V.I. Arnol'd, *Metodi matematici della meccanica classica*, Ed. Riuniti, Roma, 1979.

[2] R. Abraham, J. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Benjamin, 1978.

[3] C. Chevalley, *Theory of Lie groups, I,* Princeton Unversity Press, 1946.

[4] P.J. Cohen, *Set Theory and Continuum Hypotesis,* Benjamin, 1963.

[5] P.M. Cohn, *Universal Algebra,*, 1965.

[6] P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics,* Oxford,.

[7] J. Dixmier, *Les C*-algebres et leurs representations*, Gauthier–Villairs.

[8] Dunford, Schwartz, *Linear Operators. Spectral Theory.* Vol II, Wiley.

[9] Haag, *Local Quantum Physics*, Springer.

[10] N. Jacobson *Lie Algebras*, Wiley, 1962.

[11] Kadison, Ringrose, *Fundamentals of the Theory of operator Algebras* Vol. I, Addison–Wesley.

[12] Kadison, Ringrose, *Fundamentals of the Theory of operator Algebras* Vol. II, Addison–Wesley.

[13] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis,* Wiley.

[14] J. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand.

[15] A.A. Kirillov, *Elements of Representation Theory*, Springer, 1976.

[16] Kirillov, Gvisiani, *Teoremi e problemi dell'Analisi funzionale*, MIR.

[17] S. Kobayashi, K. Nomizu *Foundations of Differential Geometry*, Vol.I, Wiley, New York, 1963.

[18] A.I. Markuševič, *Elementi di teoria delle funzioni analitiche,* Editori Riuniti, Roma, 1988.

[19] Montgomery, Zippin, *Topological Transformation Groups,*.

[20] F. Murray, *An Introduction to Linear Transformations in Hilbert space* Princeton University Press, Princeton, 1941.

[21] M.A. Najmark, *Normed Algebras,* Van Nostrand.

[22] M.A. Najmark, A.I. Štern, *Teoria delle rappresentazioni dei gruppi,* Editori Riuniti.

[23] E. Nelson, *Topics in Dynamics, I: Flows,* Princeton University Press, Princeton.

[24] J. Von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics,* Princeton.

[25] J. von Neumann, *Functional Operators,* Vol.II, Princeton.

[26] L.S. Pontriagin, *Topological Groups,* Princeton, 1937.

[27] M.M. Postnikov, *Lie Groups and Lie Algebras,* MIR.

[28] Reed–Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics,* Vol. I, Academic Press.

[29] Reed–Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics,* Vol. II, Academic Press.

[30] H. Royden, *Real Analysis,* Addison–Wesley.

[31] F. Treves, *Topological vector spaces: distributions and kernels,* Academic Press.

[32] A. Weil *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications,* Hermann, Paris, 1940.

[33] H. Weyl, *The theory of groups and quantum mechanics,* Dover.

Indice analitico