Capitolo 13

OPERATORI NON LIMITATI

La teoria degli operatori limitati negli spazi di Hilbert è soddisfacente per molti versi, ma non cattura diversi esempi che sono pervasivi nella Fisica Matematica: gli operatori differenziali. Per studiare questa classe di operatori si possono introdurre degli spazi di Hilbert opportuni nei quali questi sono definiti o si debbono considerare gli operatori non limitati e densamente definiti in uno spazio di Hilbert qualsiasi. Privilegiamo il secondo approccio, basato sulla teoria delle estensioni degli operatori hermitiani, dovuta a von Neumann.

13.1 Chiusura di operatori

Consideriamo due spazi vettoriali X e Y ed un operatore lineare $T : X \longrightarrow Y$ definito su un sottoinsieme $\mathcal{D}(T) = \operatorname{Dom} T \subset X$ (il suo *dominio*); ricordiamo che abbiamo anche gli insiemi nucleo

$$\ker T = \{x \in \mathcal{D}(T) \,|\, Tx = 0\} = T^{-1}(0)$$

(che si denota tradizionalmente anche con $\mathcal{N}(T)$) e immagine

$$\operatorname{im} T = \{Tx \,|\, x \in \mathcal{D}(T)\}$$

(che si denota tradizionalmente con $\mathcal{R}(T)$ perché talvolta è chiamato *rango dell'operatore* T). Infine abbiamo il *grafico dell'operatore* T:

$$G_T := \{x \oplus Tx \,|\, x \in \mathcal{D}(T)\} \subset X \oplus Y$$

Osserviamo che non ogni sottoinsieme di $X \oplus Y$ è il grafico di un operatore.

13.1.1 Definizione *Se $T_1, T_2 : X \longrightarrow Y$ sono operatori tali che $\mathcal{D}(T_1) \subset \mathcal{D}(T_2)$ e se $T_2|_{\mathcal{D}(T_1)} = T_1$ si dice che T_2* estende *T_1, e si scrive $T_1 \subset T_2$.*

Evidentemente

$$T_1 \subset T_2 \iff G_{T_1} \subset G_{T_2}$$

Osserviamo inoltre che G_T determina completamente T: infatti se G è un grafico di un operatore, possiamo intanto ricostruire il dominio dell'operatore, come

$$\mathcal{D} = P_X G$$

(ove $P_X : X \oplus Y \longrightarrow X$ e $P_Y : X \oplus Y \longrightarrow Y$ sono le proiezioni sui due fattori). Osserviamo che G è il grafico di un operatore se e solo se

$$\forall x \in G \quad P_X z = 0 \iff z = 0$$

Questo implica che $P_X|_G$ è lineare e biunivoca, quindi possiamo porre

$$T := P_Y \circ (P_X|_G)^{-1}$$

Per definizione $G_T = G$. Ovviamente T è invertibile (i.e. esiste T^{-1}) se e solo se $\mathcal{N}(T) = 0$ e $\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T)$.

Siano ora X e Y spazi di Banach.

13.1.2 Definizione *Un operatore $T : X \longrightarrow Y$ è* chiuso *se lo è il suo grafico come sottospazio di Banach in $X \oplus Y$.*

Un operatore è chiuso se e solo se per ogni $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(T)$ convergente a $x \in X$ tale che $\{T_n x\}$ converga a $y \in Y$ si ha $x \in \mathcal{D}(T)$ e $y = Tx$.

13.1.3 Definizione *Se $\overline{G_T}$ è ancora il grafico di un operatore, si dice che T è* chiudibile*; inoltre, se $\overline{G_T} = G_{\overline{T}}$ si dice che $\overline{T}$ è la* chiusura *di T.*

Ovviamente T è chiudibile se e solo se esiste un $\overline{T}$ chiuso che lo estenda: in effetti $\overline{T}$ si può definire come il più piccolo (rispetto alla relazione di estendibilità) operatore chiuso che estenda T.

Possiamo riformulare il teorema del grafo chiuso 6.5.12 come

Teorema (DEL GRAFICO CHIUSO). *Se $T : X \longrightarrow Y$ è un opeatore chiuso fra spazi di Banach allora*

$$\mathcal{D}(T) \text{ è chiuso} \iff T \text{ è continuo}$$

In effetti la condizione di convergenza enunciata nel teorema del grafo chiuso 6.5.12[1] si riduce alla chiusura di $\mathcal{D}(T)$.

Dunque T è chiudibile se e solo se la chiusura $\overline{G_T}$ è il grafico di un operatore se e solo se $\forall\, 0 \oplus y \in \overline{G_T} \;\; y = 0$.

In altri termini, T è chiudibile se e solo se

$$\exists \{x_n\} \subset \mathcal{D}(T) \; x_n \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad Tx_n \longrightarrow y \implies y = 0$$

Tuttavia si noti che l'essere T chiuso *non implica* che sia necessariamente continuo. Quello che possiamo dire è che

$$T \text{ lineare e chiuso } \Rightarrow \mathcal{N}(T) \text{ chiuso}$$

Infatti $\mathcal{N}(T) = \{x \oplus 0 \,|\, x \in \mathcal{N}(T)\} = G_T \cap (X \oplus 0)$. Inoltre

$$T \text{ lineare, chiuso e invertibile } \Rightarrow T^{-1} \text{ chiuso}$$

dato che $G_{T^{-1}} = \{Tx \oplus x \,|\, x \in \mathcal{D}(T)\} = UG_T$, con $U(x \oplus y) := y \oplus x$ (si tratta di un isomorfismo).

Consideriamo ora operatori lineari $A; \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ in uno spazio di Hilbert, tali che $\mathcal{D}(A)$ sia denso in $\mathcal{H}$. Possiamo definire l'aggiunto di A come

$$\forall y \in \mathcal{D}(A) \quad \mathcal{D}(A^*) := \{x \in \mathcal{H} \,|\, y \longmapsto (x, Ay) \text{ è continua}\}$$

Quindi, per ogni $y \in \mathcal{D}(A)$, esiste un unico $A^*x \in \mathcal{H}$ tale che

$$(A^*x, t) = (x, Ay)$$

Osserviamo che

$$G_{A^*} = \{x \oplus x^* \,|\, \forall y \in \mathcal{D}(A) \; (x^*, y - (x, Ay) = 0\}$$

[1] Richiamiamone la dimostrazione, che poggia sul teorema della mappa aperta (cfr. 6.5.10). Sia $\mathcal{D}(T)$ chiuso; allora $P_X|_{G_T}$ è biunivoco, lineare e continuo da G_T in $\mathcal{D}(T)$ e, per il teorema della mappa aperta, $P_X|_{G_T}^{-1}$ pure è continuo, quindi anche $P_Y \circ P_X|_{G_T}^{-1}$ lo è, e, per quanto visto, è esattamente T.

Viceversa, se T è continuo, allora definiamo su $\mathcal{D}(T)$ una norma come

$$|||x||| := ||x \oplus Tx||$$

che lo rende uno spazio di Banach (questo è sempre vero). Ma

$$||x|| \leq |||x||| = ||x \oplus Tx|| \leq ||x|| + ||Tx|| \leq ||x|| + ||T|| \; ||x||$$

(per continuità di T). Ne segue che $\mathcal{D}(T)$ è completo in X, quindi è un sottospazio chiuso.

e che, se

$$(x \oplus x^*, (-Ay) \oplus y) := (x^*, y) - (x, Ay)$$

allora

$$G_{A^*} = (VG_A)^\perp$$

ove è l'isomorfismo unitario $V(x \oplus y) := (-y) \oplus x$ $(V^2 = -I)$.

Evidentemente, dato che $\mathcal{D}(A)$ è denso, A^* è chiuso.

13.1.4 Teorema (VON NEUMANN) *Se $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ è un operatore lineare densamente definito allora $\mathcal{D}_{A^*}$ è denso se e solo se A è chiudibile. In questo caso $\overline{A} = A^{**}$.*

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo che A sia chiudibile: allora $\overline{G_A} \cap (0 \oplus \mathcal{H}) = 0$. Ma

$$\overline{G_A} = G_A^{\perp\perp} = -G_A^{\perp\perp} = V(VG_A^{\perp\perp}) = V(VG_A\perp)^\perp$$

dato che $V^2 = -I$ e $VM^\perp = UM^\perp$ (essendo V unitario). Dunque A è chiudibile se e solo se $V(VG_A^\perp)^\perp \cap (0 \oplus \mathcal{H}) = 0$ cioè

$$(VG_A^\perp)^\perp \cap (\mathcal{H} \oplus 0) = 0$$

Ma $VG_A^\perp = G_{A^*}$, quindi

$$x \oplus 0 \perp G_{A^*} \Rightarrow x = 0$$

e dunque $\mathcal{D}(A^*)$ è denso.

Viceversa se $\mathcal{D}(A^*)$ è denso allora $G_{A^{**}} = G_A^{\perp\perp} = \overline{G_A}$.

QED

13.1.5 Lemma *Se $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ è un operatore lineare, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- $\forall x \in \mathcal{D}(A)$ $(x, Ax) \in \mathbb{R}$.
- $\forall x, y \in \mathcal{D}(A)$ $(x, Ay) = (Ax, y)$.
- $A \subset A^*$.

DIMOSTRAZIONE: La (2) implica la (3) per definizione; la (3) implica la (1) dato che

$$(x, Ax) = (Ax, x) = \overline{(x, Ax)}$$

La (1) implica la (2) perché, se $(x, Ax) \in \mathbb{R}$ allora $(Ax, x) = (x, Ax)$ e quindi, per polarizzazione

$$(x, Ay) = (Ax, y)$$

QED

Notiamo che la (2) *non implica* che $A = A^*$ se A non è limitato.

13.1.6 Definizione *Un operatore lineare* $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ *è* hermitiano *se è densamente definito e se vale una delle condizioni equivalenti del lemma.*

Notiamo che se A è hermitiano allora è chiudibile (in quanto estendibile dall'operatore chiuso A^*) e quindi $A^{**} = \overline{A}$.

Notiamo inoltre che $T \subset R$ implica $R^* \subset T^*$; quindi $A \subset A^*$ implica $A^{**} \subset A^*$, dunque $\overline{A} \subset A^*$, cioè
$$A^{***} = A^*$$
Quindi la chiusura di un operatore hermitiano è hermitiano.

13.1.7 Definizione $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ *è autoaggiunto se* $A = A^*$.

Per quanto detto è chiaro che se A autoaggiunto allora è hermitiano, mentre non vale il viceversa.

Se $A \subset B$ sono hermitiani allora $B^* \subset A^*$ e quindi $A \subset B \subset B^* \subset A^*$: "estendere" A vuol dire quindi "ridurre la distanza fra A e A^*", per cui se $A = A^*$ allora A è hermitiano massimale (cioè non ha altre estensioni se non se stesso). Ovviamente non vale il viceversa.

13.1.8 Teorema (VON NEUMANN) *Se T è un operatore lineare chiuso densamente definito allora T^*T è autoaggiunto*

DIMOSTRAZIONE: Basta dimostrare che $I+T^*T$ è autoaggiunto: per questo basta dimostrare che $I + TT^*$ è densamente definito e che $\mathcal{R}(I + T^*T) = \mathcal{H}$. Infatti, per ogni $x \in \mathcal{D}(I + T^*T)$:
$$(x, (I + T^*T)x) = (x, x) + (Tx, Tx) \geq (x, x) \geq 0$$
(essendo T chiuso). Quindi $I + T^*T$ è hermitiano.

Ma, se $\mathcal{R}(I+T^*T) = \mathcal{H}$ allora vi è definito $(I+T^*T)^{-1}$, che è una contrazione: infatti abbiamo appena visto come $(x, (I + T^*T)x) \geq 0$ e quindi
$$||x||^2 = (x, x) \leq (x, (I + T^*T)x) \leq ||x||\ ||(I + T^*T)x||$$
cioè $||x|| \leq ||I + T^*T||$. Per questo basta dimostrare che
$$\mathcal{R}(I + T^*T) = \mathcal{H}$$
per avere la tesi[2].

[2] Un argomento alternativo è il seguente: se $A \subset A^*$ è biunivoco e $\mathcal{R}(A) = \mathcal{H}$ allora $A = A^*$.

Dunque dimostriamo questa identità. Per ipotesi G_T è chiuso, quindi

$$G_T + VG_{T^*} = G_T + (G_T)^\perp = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$$

da cui

$$x \oplus 0 = (x_1 + \oplus Tx_1) + V(x_2 \oplus T^* x_2) = (x_1 - T^* x_2) \oplus (Tx_1 + x_2)$$

pertanto

$$x_2 = -Tx_1 \qquad \text{e} \qquad x = x_1 - T^* x_2 = (I + T^*T)(x_2)$$

(si noti che $x_1 \in \mathcal{D}(T)$ e quindi $x_2 \in \mathcal{D}(T^*T)$).

Non resta allora che da mostrare che $\mathcal{D}(T^*T)$ è denso: ma se esistesse un $x_0 \perp \mathcal{D}(T^*T)$ allora

$$\exists x_1 \in \mathcal{D}(T^*T) \quad x_0 = (I + T^*T)(x_1)$$

quindi $(x_0, x_1) = 0$ il che è assurdo (infatti $(x_1, x_1) \leq ((I + T^*T)x_1, x_1) = 0$).

QED

Si noti il

13.1.9 Corollario *T^*T è densamente definito.*

Possiamo ora discutere il teorema di decomposizione polare per operatori non limitati: come nel caso limitato proviamo prima a definire la radice quadrata di un operatore autoaggiunto positivo.

13.1.10 Lemma *$B = B^*$ (non necessariamente limitato) è positivo se e solo se*

$$B = \int \lambda dE(\lambda) \Rightarrow \forall \lambda < 0 \ E(\lambda) = 0$$

DIMOSTRAZIONE: Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^-$, se $x \in \mathcal{D}_B$ allora $E(\lambda)x \in \mathcal{D}_B$ quindi, definendo $y = E(\lambda)x$:

$$(y, By) = \int \lambda' d(y, E(\lambda')y) = \int_{-\infty}^{\lambda} \lambda' d(y, E(\lambda')y) \leq \lambda(y, y)$$

(osservando che, se $\lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda$ allora $(E(\lambda_1) - E(\lambda_2))y = E(\lambda_1)E(\lambda) = E(\lambda_2)E(\lambda) > 0$).

Quindi, per $\lambda < 0$, $(y, By) \leq \lambda(y, y)$ se e solo se $y = 0$.

QED

Quindi, per ogni operatore B autoaggiunto positivo esiste un unico operatore

$$\sqrt{B} := \int_0^\infty \lambda^{\frac{1}{2}} dE(\lambda)$$

la cui famiglia spettrale è $G(\lambda) = E(\lambda^2)$ (l'unicità di $\sqrt{B}$ segue da quella della famiglia spettrale).

Osserviamo inoltre che $\mathcal{D}_B \subset \mathcal{D}_{\sqrt{B}}$: infatti

$$x \in \mathcal{D}_{\sqrt{B}} \iff \int_0^\infty \lambda^2 d(x, G(\lambda)x) < \infty$$

e

$$x \in \mathcal{D}_B \iff \int_0^\infty \lambda^2 d(x, E(\lambda)x) < \infty \Rightarrow \int_0^\infty \lambda d(x, G(\sqrt{\lambda})x) < \infty$$

13.1.11 Teorema (DECOMPOSIZIONE POLARE) *Se A è un operatore lineare chiuso e densamente definito su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ allora esistono unici H e V operatori tali che $H = H^*$ è positivo e V è una isometria parziale e che*

$$A = VH$$

ove $\mathcal{N}(AH) = \mathcal{N}(V) = \mathcal{N}(A)$.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo un operatore lineare A densamente definito su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, chiuso ($A = \overline{A}$); per il teorema di Von Neumann 13.1.8 A^*A è un operatore positivo autoaggiunto, quindi possiamo definire

$$H = \sqrt{A^*A}$$

(quindi $\mathcal{D}_{A^*A} \subset \mathcal{D}_H$).

Ora, se $x \in \mathcal{D}_{A^*A}$ allora $||Ax|| = ||Hx||$, dato che

$$(Ax, Ax) = (x, A^*Ax) = (x, H^2x) = (Hx, Hx) = ||Hx||$$

Ora utilizziamo il seguente lemma

Lemma. *L'insieme $\{x \oplus Ax \,|\, x \in \mathcal{D}_{A^*A}\}$ è denso nel grafico di A.*

Possiamo quindi affermare che

$$\forall x \in \mathcal{D}_A = \mathcal{D}_H \quad ||Ax|| = ||Hx||$$

e definire una isometria su $H\mathcal{D}_A = H\mathcal{D}_H$:

$$V(Hx) := Ax$$

(si tratta di una isometria perché $||Ax|| = ||Hx||$), la cui chiusura è una isometria parziale:

$$\mathcal{N}(V)^\perp = \mathcal{R}(V^*V) = \overline{\mathcal{R}(H)} = \mathcal{N}(H)^\perp$$

(essendo $H = H^*$). Ne segue che H è chiuso e V è una isometria parziale:

$$\mathcal{N}(V) = \mathcal{N}(H)$$

Ma $\mathcal{N}(H) = \mathcal{N}(A)$ (sempre perché $||Hx|| = ||Ax||$) e quindi, per definizione di V:

$$VHx = Ax$$

i.e. $A = VH$.

Che la decomposizione VH sia unica si dimostra come al solito: se $A = H'V'$ con $\mathcal{N}(H') = \mathcal{N}(V') = \mathcal{N}(A)$, $H' = H'^*$, $H' \geq 0$ e V è una isometria parziale, allora[3]

$$(V'H')A'^* = H'V'^*$$

e

$$A^*A = H'(V'^*V')H' = H'^2$$

sicché $H' = \sqrt{A^*A} = H$ e, dato che $A = V'H = VH$ allora $V' = V$ (perché questa identità è valida su un sottospazio denso e sul nucleo $\mathcal{N}$).

Per concludere non resta che dimostrare il lemma. Ovviamente

$$\{x \oplus Ax \,|\, x \in \mathcal{D}_{A^*A}\} \subset G_A$$

(G_A è il grafico di A). Ma $A = \overline{A}$, quindi G_A è uno spazio di Hilbert; per avere la tesi basta dimostrare che, come sottospazio di Hilbert di G_A:

$$\{x \oplus Az\}^\perp = 0$$

vale a dire che se $z \in G_A$ e, per ogni $x \in \mathcal{D}_{A^*A}$: $(z, x + Ax) = 0$ allora $z = 0$.

Infatti $z = y + Ay$ (con $y \in \mathcal{D}_A$) e quindi

$$(y + Ay, x + Ax) = (y, x) + (Ay, Ax) = (y, x) + (y, A^*Ax) = (y, (I + A^*A)x)$$

Ma, $(I + A^*A)x$ descrive, al variare di $x \in \mathcal{D}_{A^*A}$ l'intero $\mathcal{H}$.

QED

[3] Se $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e T è un operatore qualsiasi in $\mathcal{H}$ allora $(BT)^* = T^*B^*$. Infatti $\mathcal{D}_{(BT)^*} = \{x \in \mathcal{H} \,|\, y \longmapsto (x, BTy)$ è continua su $\mathcal{D}_T\}$ (si noti che $\mathcal{D}_T = \mathcal{D}_B$ perché B è limitato). Ma $(x, BTy) = (B^*x, Ty)$ (sempre perché B è limitato) i.e. $B^*x \in \mathcal{D}_{T^*}$ e quindi $\mathcal{D}_{(BT)^*} = \{x \in \mathcal{H} \,|\, B^*x \in \mathcal{D}_{T^*}\}$.

13.2 Estendibilità di operatori

Consideriamo un operatore hermitiano densamente definito $A.\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$: si ha $\overline{A} \subset \overline{A}^*$ e

$$||(A + \lambda I)x||^2 = (Ax, Ax) + \lambda^2(x, x) + 2\,\mathrm{Re}(\overline{\lambda}(x, Ax))$$

Quindi, per $\lambda = \pm i$ ($(x, Ax) \in \mathbb{R}$):

$$||(A \pm iI)x||^2 = ||Ax||^2 + ||x||^2 = ||x \oplus Ax||^2$$

e le mappe

$$\begin{tikzcd}
(A+iI)x \arrow[d, "S_0(A)"'] \arrow[dr] & \\
& x \oplus Ax \\
(A-iI)x \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

sono isometrie.

Quindi $\mathcal{D}_\pm(A) := \mathcal{R}(A \pm iI)$ è immagine isometrica di G_A, sicché

$$\mathcal{D}_\pm(\overline{A}) = \overline{\mathcal{D}_\pm(A)}$$

La $S_0(A)$ si dice *trasformata di Cayley*[4], ed è una isometria tale che

$$\mathcal{D}(S_0) = \mathcal{D}_+ \qquad \text{e} \qquad \mathcal{R}(\S_0) = \mathcal{D}_-$$

e quindi tale che $\overline{S_0(A)} = S_0(\overline{A})$. Si noti che

$$\mathcal{H}_\pm := \mathcal{D}_\pm^\perp = \mathcal{R}(A \pm iI)$$

cioè che

$$\mathcal{H}_\pm = \mathcal{N}((A \pm iI)^*) = \mathcal{N}(A^* \mp iI)$$

Ma $\mathcal{H}_\pm, \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^*)$ ($z \in \mathcal{H}_\pm \iff z \in \mathcal{D}(A^*)$ e $A^*z = \pm iz$): gli interi

$$n_\pm := \dim \mathcal{H}_\pm$$

si dicono *indici di difetto* di A.

Abbiamo dunque $\mathcal{D}(S_0) = \mathcal{R}(A + iI)$ e quindi

$$S_0 := (A - iI)(A + iI)^{-1}$$

[4] Si tratta di una generalizzazione della funzione $z \longmapsto \frac{z+i}{z-i} = e^{i\alpha} \longmapsto \cot\frac{\alpha}{2} = z$.

cioè $S_0(A+iI)x = (A-iI)x = (A+iI)x - 2ix$, da cui

$$(I-S_0)(A+iI)x = 2ix \Rightarrow (A+iI)x = 2i(I-S_0)^{-1}x$$

col che $\mathcal{R}(I-S_0) = \mathcal{D}(A)$ (che è denso) e $\mathcal{N}(I-S_0) = 0$ (in quanto $(I-S_0)z = 0$ implica $2ix = 0$, vale a dire $z := (A+iI)x = 0$).

In definitiva, esiste un $(I-S_0)^{-1}$ densamente definito tale che

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{D}(A) \quad Ax &= -ix + 2i(I-S_0)^{-1}x \\ &= -i(I-S_0)(I-S_0)^{-1}x + 2i(I-S_0)^{-1}x \\ &= i(I+S_0)(I-S_0)^{-1}x \end{aligned}$$

(dato che $(I-S_0)(I-S_0)^{-1}x = x$ in $\mathcal{D}(A)$), per cui

$$\forall x \in \mathcal{D}(A) \quad Ax = i(I+S_0)(I-S_0)^{-1}x$$

13.2.1 Lemma *Se $A = \overline{A} \subset A^*$ allora $S_0(A) = \overline{S_0(A)}$ e $\mathcal{D}(S_0) = \mathcal{D}_+$; ponendo $E := E_{\mathcal{D}_+}$ si ha quindi che $S := S_0E$ è una isometria parziale.*

13.2.2 Teorema *Se $A = \overline{A} \subset A^*$ allora $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ come somma diretta di spazi vettoriali (non di Hilbert).*

DIMOSTRAZIONE: Se $x \in \mathcal{D}(A)$ e $z_\pm \in \mathcal{H}_\pm$ allora

$$x + z_+ + z_- = 0 \Rightarrow x = z_+ = z_- = 0$$

Infatti $\mathcal{H}_\pm, \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^*)$ e quindi ($A^*z = \pm iz$)

$$0 = (A^* + iI)(x + z_+ + z_-) = (A^* + iI)x + 2iz_+ = 0 \in \mathcal{D}_+ + \mathcal{H}_+$$

Ma $\mathcal{H}_+ = \mathcal{D}_+^\perp$, dunque abbiamo una somma di due vettori ortogonali che fa zero, pertanto i due vettori sono nulli e questo dimostra che $z_\pm$ e x sono linearmente indipendenti.

Ora per avere il teorema basta dimostrare che

$$\mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{D}(A) + \mathcal{H}_+ + \mathcal{H}_-$$

Ricordando che $z = (A+iI)x \in \mathcal{D}(S_0)$ e

$$(I-S_0)(A+iI)x = 2ix \qquad \text{e} \qquad (A+iI)(I-S_0)x = 2iz$$

abbiamo che $(I - S - 0)$ è inverso (bilatero) di $(A + iI)$; ma

$$\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}((A + iI)^*)$$

(in quanto, se B è continuo: $\mathcal{D}((A + B)^*) = \mathcal{D}(A^*)$) e quindi

$$y \in \mathcal{D}((A + iI)^*) \iff \exists y^* \ (y, (A + iI)(I - S_0)z) = (y^*, (I - S_0)z)$$

Dato che $(y, (A + iI)(I - S_0)z) = (y, 2iz)$, e che (usando il lemma)

$$\begin{aligned}(y, z) =& (-(2i)^{-1}y^*, (I - S_0)z) =: (y_1, (I - S_0)z)\\ =& (y_1, (I - S)z)\end{aligned}$$

troviamo $y - (I - S)^*y_1 \in \mathcal{H}_+$ e $\mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{H}_+ + \mathcal{R}(I - S^*)$. Ma

$$(I - S)^* = (I - SS^*) + SS^* - S^* = (I - SS^*) + (S - I)S^*$$

e dunque (tenendo conto che $\mathcal{R}(A + B) \subset \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B)$):

$$\mathcal{R}(I - S)^* \subset \mathcal{R}(I - SS^*) + \mathcal{R}((I - S)S^*) = \mathcal{H}_- + \mathcal{R}(I - S_0) = \mathcal{H}_- + \mathcal{D}(A)$$

QED

13.2.3 Corollario *Se $A = \overline{A} \subset A^*$ allora $A = A^*$ se e solo se $n_+ = n_- = 0$.*

Il che equivale a dire $A^*z = \pm iz \Rightarrow z = 0$; inoltre

$$n_\pm(\overline{A}) = n_\pm(A)$$

(dato che $(\mathcal{D}_\pm(\overline{A}) = \overline{\mathcal{D}_\pm(A)})$, e quindi

13.2.4 Corollario *Se $A \subset A^*$ allora $\overline{A} = \overline{A}^*$ se e solo se $n_+ = n_- = 0$.*

13.2.5 Teorema *La trasformata di Cayley è un isomorfismo suriettivo che preserva l'ordine (cioè $A_1 \subset A_2 \iff S_0(A_1) \subset S_0(A_2)$) fra*

$$\{A \,|\, A = \overline{A} \subset A^*\}$$

e lo spazio delle isometrie chiuse S tali che $\mathcal{R}(I - S)$ è denso, e fra lo spazio degli autoaggiunti ($A = A^*$) e l'insieme degli operatori unitari U tali che $\mathcal{R}(I - U)$ è denso (cioè $\mathcal{N}(I - U) = 0$).

DIMOSTRAZIONE: Che $A_1 \subset A - 2 \iff S_0(A_1) \subset S_0(A_2)$ è ovvio dalla definizione.

Sia ora S una isometria tale che $\mathcal{R}(I - S)$ è denso: allora basta provare le

- $\mathcal{N}(I - S_0) = 0$
- $A := i(I + S_0)(I - S_0)^{-1}$ è densamente definito e $A \subset A^*$.

Per quel che riguarda (1), sappiamo che esiste $S_0 \subset S$ isometria parziale tale che

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(I - S) \subset \mathcal{N}(I - S) = \mathcal{R}((I - S)^*)^\perp \subset \mathcal{R}((I - S)^*|_S)^\perp \\ = \mathcal{R}((I - S^*)S)^\perp = \mathcal{R}(I - S_0)^\perp = 0\end{aligned}$$

(per densità di $\mathcal{R}(I - S_0)$). Il penultimo passaggio si giustifica osservando che (S è una isometria parziale)

$$(I - S^*)S = S - S^*S = S(S^*S) - S^*S = (S - I)S^*S$$

e quindi $\mathcal{R}((S - I)S^*S) = \mathcal{R}(I - S_0)$ (per chiusura di S_0). Ne segue che $\mathcal{N}(I - S_0) = 0$.

Per avere la (2) basta dimostrare che per ogni $x \in \mathcal{D}(A)$ $(x, Ax) \in \mathbb{R}$, cioè che

$$\forall x \in \mathcal{D}(A) \quad (x, i(I + S_0)(I - S_0)^{-1}x) \in \mathbb{R}$$

e dunque $x = (I - S_0)z$ ($z \in \mathcal{D}(S_0)$ per le ipotesi). Allora

$$(x, Ax) = ((I - S_0)z, i(I + S_0)z)$$

quindi

$$\begin{aligned}((I - S_0)z, i(I + S_0)z) = i((z, z) - (S_0z, S_0z) + (z, S_0z) - (S_0z, z)) \\ = i((z, S_0z) - \overline{(z, S_0z)}) \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

($(z, z) = 0$ perché S_0 è isometrico).

QED

Osserviamo che $\mathcal{R}(I - S_0)$ è denso perché coincide con $\mathcal{D}(A)$; ma, per ogni $S_0 \subset S$ isometria si ha $I - S_0 \subset I - S$ e quindi $I - S$ ha codominio denso: il teorema implica allora che in questo modo si ottengono tutte le estensioni isometriche di A.

Se $A \subset A^*$, $S_0(A) \subset S_0$ e quindi S_0 è una estensione isometrica, per cui esiste $A' \subset A'^*$ tale che $A \subset A'$. Se ne conclude che *studiare le estensioni di A si riduce a studiare le estensioni isometriche degli operatori di Cayley.*

Se $A = \overline{A}$ allora

$$S_0(A) : \mathcal{D}_+ \longrightarrow \mathcal{D}_-$$

e quindi $\mathcal{D}_+ \subset \mathcal{D}(S_0)$ è determinato da

$$\mathcal{D}(S_0) = \mathcal{D}_+ \oplus (\mathcal{D}_+^\perp \cap \mathcal{D}(S_0))$$

Ma $\mathcal{D}_+^\perp \cap \mathcal{D}(S_0) \subset \mathcal{H}_+$ e $S_0(\mathcal{D}_+^\perp \cap \mathcal{D}(S_0)) \subset \mathcal{H}_-$. In effetti S_0 è una isometria, quindi

$$||S_0x||^2 = ||x||^2 \iff (S_0x, S_0y) = (x, y)$$

(per polarizzazione) e, se $x \in \mathcal{D}_+$, $y \in \mathcal{H}_+ \cap \mathcal{D}(S_0)$ si ha $S_0y \in \mathcal{H}_-$.

Dunque

13.2.6 Corollario *$A \subset A^*$ è hermitiano massimale (cioè inestendibile) se e solo se $A = \overline{A}$ e $n_+(A) = 0$ oppure $n_-(A) = 0$.*

Osserviamo anche che se $V : \mathcal{H}_+ \longrightarrow \mathcal{H}_-$ è una isometria allora

$$S_0(z + z') := S_0(A)z + Vz'$$

pure è una isometria.

13.2.7 Teorema *$A \subset A^*$ ammette una estensione autoaggiunta se e solo se $n_+ = n_-$.*

Dimostrazione: Se A possiede estensioni autoaggiunte allora sia B una di esse:

$$S_0(A) \subset U := S_0(B)$$

ove U è unitario (dato che B è autoaggiunto e $\mathcal{R}(B \pm iI) = \mathcal{H}$) e $U\mathcal{H}_+ = \mathcal{H}_-$, per cui $\dim \mathcal{H}_- = \dim \mathcal{H}_+$.

Viceversa, se $\dim \mathcal{H}_+ = \dim \mathcal{H}_-$ allora deve esistere una isometria $V : \mathcal{H}_+ \longrightarrow \mathcal{H}_-$ per mezzo della quale ottenere l'estensione

$$U(z + z') := S_0(A)z + Vz'$$

e $B \subset B^*$ tale che $n_+(B) = n_-(B) = 0$ e $U = S_0(B)$; ovvero $B = B^*$.

Quindi

$$\mathcal{D}(V) = \mathcal{R}(I - U) = \{x + (I - V)z \,|\, x \in \mathcal{D}(A) \text{ e } z \in \mathcal{H}_+\}$$

Cioè B è tale che $B(x + (I - V)z') = Ax + i(I + V)z'$.

QED

Se $n_+ = n_- = n$ allora le estensioni autoaggiunte sono parametrizzate dal gruppo unitario $U(n)$.

13.2.8 Proposizione *$\mathcal{R}(I-U)$ è denso se e solo se $\mathcal{R}(I-U)^{\perp}=0$ se e solo se $1\in\sigma_p(U)$.*

DIMOSTRAZIONE: $1\notin\sigma_p(U) \iff (I-U)^{-1}$ è limitato $\iff A=i(I+U)(I-U)^{-1}$ è autoaggiunto limitato.

QED

Cioè la trasformata di Cayley non solo pone in corrispondenza gli operatori autoaggiunti A con gli operatori unitari U tali che $\mathcal{R}(I-U)$ è denso, ma anche pone in corrispondenza gli operatori autoaggiunti limitati con gli operatori unitari tali che $1\notin\sigma(U)$; in effetti l'inverso della trasformata di Cayley

$$A=i(I+U)(I-U)^{-1}$$

è ovunque definito, dunque è limitato (dato che è chiuso), se e solo se $\mathcal{R}(I-U)=\mathcal{H}$, che equivale a $1\notin\sigma(U)$, essendo $I-U$ chiuso e iniettivo.

13.2.9 Esempio *Consideriamo l'operatore di shift su uno spazio di Hilbert (separabile):*

$$Se_n=e_{n+1}$$

e $S_0(A)=S$; allora $\mathcal{R}(S)=\{e_1\}^{\perp}$ sicché S non è unitario; tuttavia è una trasformazione di Cayley.

Intanto $\mathcal{R}(I-S)$ è denso, dato che $\mathcal{R}(I-S)^{\perp}=\mathcal{N}(I-S^*)=0$: infatti se $S^*x=x$ allora $x=0$. Ma $S^*E_{n+1}=e_n$ e quindi $\mathcal{N}(S^*)=e_1$:

$$S^{*m}e_n=\begin{cases}e_{n-m} & \text{se } n>m\\ 0 & \text{se } n\le m\end{cases}$$

Dunque per ogni $x=\sum_n c_ne_n$ (ove $\sum_n|c_n|^2=||x||$) si ha

$$S^{*m}x\xrightarrow{m\longrightarrow 0}0 \qquad \text{fortemente}$$

e $S^*x=x$ implica allora $S^{*m}=x$; ma $S^{*m}\longrightarrow 0$ e quindi $x=0$. Gli indici di difetto sono 0 e 1.

Notiamo che in questo caso $A\subset A^*$ e non ci sono sottospazi invarianti chiusi non banali per A: in effetti, se M fosse un tale sottospazio allora $A(\mathcal{D}(A)\cap M)\subset M$ e, se $E=E_M$, avremmo

$$\forall x\in\mathcal{D}(A)\quad Ex\in\mathcal{D}(A)$$

ovvero $AEx=EAx$, i.e. $EA\subset AE$, da cui $S_0(A)E=ES_0(A)$.

Quindi $ES=SE$, $S^*E=ES^*$, perciò $E\in\{0,I\}$, dato che l'algebra generata *da S e S^* è irriducibile e contiene gli operatori compatti. Contiene inoltre $E_{\mathbb{C}e_1} = I - SS^*$. Ma $Se_n = e_{n+1}$ e quindi*

$$S(I - SS^*)S* = E_{\mathbb{C}e_2}$$

Iterando il procedimento ne concludiamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ $E_{\mathbb{C}e_n}$ è generata da S e S^* e quindi $S_0(A) = S$ è hermitiano massimale ed irriducibile (questa situazione è opposta al caso di un operatore autoaggiunto che, per il teorema spettrale, è "completamente riducibile"). Se in luogo di A si considera $-A$ allora $S_0(A) = S$ ha indici $(1, 0)$.

In realtà ogni operatore hermitiano massimale è somma diretta di un autoaggiunto e di un certo numero di operatori hermitiani che agiscono come l'operatore A (o $-A$) nell'esempio precedente.

13.2.10 Teorema (WOLD) *Se $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert e S una isometria di $\mathcal{H}$ allora*

$$S = U \oplus (S_0 \oplus S_0 \oplus ...)$$

ove U è un operatore unitario e S_0 è l'operatore di shift. Lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ si decompone quindi in somma diretta

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_U \oplus (\mathcal{H}_{S_0} \oplus \mathcal{H}_{S_0} \oplus ...)$$

ove $S|_{\mathcal{H}_U}$ è un operatore unitario di $\mathcal{B}(\mathcal{H}_U)$ e gli $\mathcal{H}_{S_0}$ sono isomorfi a $l^2(\mathbb{N})$ con $S_{\mathcal{H}_{S_0}}$ operatori di shift.

DIMOSTRAZIONE: Si ponga

$$\mathcal{H}_U := \bigcap_{n\geq 0} S^n\mathcal{H}$$

Evidentemente $\mathcal{H}_U$ è un sottospazio chiuso S-invariante di $\mathcal{H}$ e $S|_{\mathcal{H}_U} \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_U)$.

Anche il sottospazio $\mathcal{H}_0 := \mathcal{H}_U^\perp$ è S-invariante: se $\mathcal{H}_0 \neq 0$ allora $\mathcal{H}_0 + S\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0 \cap (S\mathcal{H}_0)^\perp$ è non nullo, e

$$\mathcal{H}_0 = \bigcup_{n\geq 0} S^n(\mathcal{H}_0 + S\mathcal{H}_0)$$

Se $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è una base ortonormale in $\mathcal{H}_0 + S\mathcal{H}_0$ e se, per $\alpha \in A$:

$$\mathcal{H}_{S_0} := \langle e_\alpha, Se_\alpha, S^2e_\alpha, ...\rangle$$

è lo spazio di Hilbert (separabile!) generato dalla famiglia $\{S^ne_\alpha\}_{n\geq 0}$ allora possiamo identificarlo con $l^2(\mathbb{N})$, per ogni $\alpha \in A$, e $S|_{\mathcal{H}_{S-0}}$ è un operatore di shift. Ma $\mathcal{H}_0 = \bigoplus_{\alpha\in A} \mathcal{H}_{S_0}$ e quindi

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_U \oplus (\mathcal{H}_{S_0} \oplus \mathcal{H}_{S_0} \oplus ...)$$

QED

13.3 Un esempio: la derivata in $L^2[0,1]$

Sia $\mathcal{H} = L^2[0,1]$ rispetto alla misura di Lebesgue ds e $A = i\frac{d}{ds}$ definito sul dominio $D(0,1)$ delle funzioni f assolutamente continue[5] tali che $f(0) = f(1) = 0$. Allora (indichiamo le derivate con un apice)

$$f \longmapsto if' = Af$$

è un operatore hermitiano, come si vede integrando per parti:

$$(g, if') = (ig', f)$$

e $(A^*x)s = ix'(s)$ con

$$\mathcal{D}(A^*) = \{x \in \mathcal{H} \,|\, x' \in \mathcal{H} \in AC(0,1)\}$$

Quindi A non è chiuso né $\overline{A}$ è autoaggiunto, dato che

$$\mathcal{D}(A^{**}) = \{x \in AC[0,1] \,|\, x' \in \mathcal{H},\, x(0) = x(1) = 0\}$$

e dunque $A^{**} \supsetneq A^*$.

Possiamo usare la teoria delle estensioni in questo caso semplice (che si potrebbe agevolmente trattare "a mano": è un esercizio determinare le estensioni autoaggiunte di A senza ricorrere alla teoria che stiamo delineando).

Determiniamo gli spazi $\mathcal{H}_\pm$ le cui dimensioni danno gli indici di difetto: ad esempio, per identificare $\mathcal{H}_+$ dobbiamo considerare le soluzioni della

$$A^*x = ix$$

Dato che $x \in D(0,1)$ allora $x \in AC(0,1)$ e quindi ($Ax = ix$) $x' \in AC(0,1)$; iterando questo ragionamento troviamo che $x \in C^\infty(0,1)$ e soddisfa l'equazione $x' = x$: quindi $x = ce^s$, con $c \in \mathbb{C}$; abbiamo cioè

$$\mathcal{H}_\pm = \{ce^{\pm s}\}_{c\in\mathbb{C}}$$

e quindi gli indici di difetto sono $(1,1)$. Ora consideriamo le due funzioni

$$\varphi_\pm := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^2-1}} e^{\pm s} \in \mathcal{H}_\pm$$

[5]Ricordiamo che f è assolutamente continua (AC) se

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \quad \sum |s_i - t_i| < \delta \Rightarrow \sum |f(s_i) - f(t_i)| < \varepsilon$$

Dato che le uniche isometrie parziali $V : \mathcal{H}_+ \longrightarrow \mathcal{H}_-$ sono le mappe

$$\varphi_+ \longmapsto \alpha\varphi_-$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$ di modulo 1 (i.e. $|\alpha| = 1$ si può considerare un elemento della circonferenza unitaria $S^1 = \mathbb{T} \subset \mathbb{C}$), per la corrispondenza fra isometrie parziali e estensioni autoaggiunte, ogni tale estensione H di A è della forma

$$H = A_\alpha = i\frac{d}{ds}$$

con dominio di definizione

$$D_\alpha := \{f + z\varphi_+ + z\alpha\varphi_- \,|\, f \in D(0,1)\; z \in \mathbb{C}\}$$

Si noti che questi domini sono:

$$D_\alpha = \{f \in AC(0,1) \,|\, f(1) = \alpha f(0)\}$$

dato che, se $f \in D_\alpha$:

$$f(0) = \frac{z\sqrt{2}(1+\alpha e)}{\sqrt{e^2-1}}$$

e dunque

$$f(1) = \frac{z\sqrt{2}(\alpha+e)}{\sqrt{e^2-1}} = \frac{\alpha+e}{1+\alpha e} f(0) = \beta f(0)$$

con $|\beta| = \left|\frac{\alpha+e}{1+\alpha e}\right| = 1$. Viceversa ogni tale funzione è un elemento di $\mathcal{D}_\alpha$. Dunque le estensioni autoaggiunte di A sono parametrizzate da $\mathbb{T}$.

13.3.1 Esempio

- *Sia $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, ds)$ e*

$$A = i\frac{d}{ds} \qquad \textit{con} \qquad \mathcal{D}_A = \{x \in \mathcal{H} \,|\, x \in AC(\mathbb{R}), x' \in \mathcal{H}\}$$

Quindi $A = A^*$ $eA^* f = \pm if$, sicché $f(s) = ce^{\pm s} \in L^2)(\mathbb{R})$.

- *Se invece ci limitiamo alla semiretta $\mathcal{H} = L^2([0,\infty), ds)$ e*

$$A_0 = i\frac{d}{ds} \qquad \textit{con} \qquad \mathcal{D}_{A_0} = \mathcal{S}(0,\infty)$$

allora

$$A_0^* = i\frac{d}{ds} \qquad \textit{con} \qquad \mathcal{D}_{A_0^*} = \{x \in \mathcal{H} \,|\, x \in AC[0,\infty), x' \in \mathcal{H}\}$$

dunque $A_0^* f = \pm f$ i.e. $f(s) = ce^{\pm s}$ che appartiene a $\mathcal{H}$ se il segno è $-$ ma non vi appartiene se il segno è $+$. Ora:

$$A_0^{**} = i\frac{d}{ds} \qquad \text{con} \qquad \mathcal{D}_{A_0^{**}} = \{x \in \mathcal{H} \mid x \in AC[0,\infty), x' \in \mathcal{H}, x(0) = 0\}$$

è un operatore hermitiano con indici $(0,1)$ ed è l'antitrasformata di Cayley dell'operatore di shift:

$$S_0(A_0^{**}) = S$$

Se $A = A^{**} \subset A^*$ è un operatore hermitiano chiuso densamente definito con indici (m,n) allora $-A$ ha indici (n,m) e quindi

$$A \oplus (-A)$$

ha indici $(n+m, n+m)$, dunque possiede estensioni autoaggiunte. Ne concludiamo che, a meno di estendere lo spazio di Hilbert, possiamo dotare A di estensioni autoaggiunte.

Se $A = A^*$ è densamente definito (e quindi esiste un operatore unitario U tale che $1 \notin \sigma(U)$ allora, scrivendo la decomposizione spettrale di U:

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\vartheta} dF(\vartheta)$$

ove la famiglia spettrale F è tale che

$$\operatorname*{s-lim}_{\vartheta \longrightarrow 0} F(\vartheta) = 0 \qquad \text{e} \qquad \operatorname*{s-lim}_{\vartheta \longrightarrow 2\pi} F(\vartheta) = I$$

con $F(0, 2\pi) = I$.

Notando che

$$\begin{aligned} U &= (A - iI)(A + iI)^{-1} \\ A &= i(I + U)(I - U)^{-1} \end{aligned}$$

e definendo

$$E(\lambda) := F(\vartheta(\lambda))$$

ove $\vartheta(\lambda) := -2 \arctan \lambda = F(-2 \arctan \lambda)$ si ha

$$\operatorname*{s-lim}_{\lambda \longrightarrow -\infty} E(\lambda) = 0 \qquad \text{e} \qquad \operatorname*{s-lim}_{\lambda \longrightarrow \infty} E(\lambda) = I$$

Questa sarà la famiglia spettrale di A:

13.3.2 Teorema *Se $A = A^*$ è densamente definito allora esiste un'unica famiglia spettrale $E(\lambda)$ tale che valgano le*

- $x \in \mathcal{D}_A \iff \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(x, E(\lambda)x) < \infty$
- $x \in \mathcal{D}_A \Rightarrow Ax = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda)x$ *(ove l'integrale è alla Riemann–Stieltjes).*

DIMOSTRAZIONE: (1) $x \in \mathcal{D}_A$ se e solo se $x \in \mathcal{R}(I-U)$ i.e. se esiste $z \in \mathcal{H}$ tale che $x = (I-U)z$; ma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(x, E(\lambda)x) = \int_0^{2\pi} \left(i\frac{1+e^{i\vartheta}}{1-e^{i\vartheta}}\right)^2 d(x, F(\vartheta)x)$$

Dato che

$$\left(i\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = \left(\frac{(1+z)(1-\overline{z})}{(1-z)^2}\right) = \left(\frac{2+(z+\overline{z}-2)+2}{2-(z+\overline{z})}\right) = \frac{4}{|1-z|^2} - 1$$

ci basta far vedere che esiste z tale che $x(I-U)z$ se e solo se

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-e^{i\vartheta}|^2} d(x, F(\vartheta)x) < \infty$$

Ma se $x = (I-U)z$ e se consideriamo, per $0 < \vartheta_1 < \vartheta_2 < \vartheta$:

$$g_{12}(\vartheta) := \chi_{[\vartheta_1,\vartheta_2]}(\vartheta)(1-e^{i\vartheta})^{-1}$$

allora, se $G_{12}(\vartheta) = g_{12}(e^{i\vartheta})$ (g_{12} è una funzione boreliana per definizione) e quindi $\int g_{12}(\vartheta)dF(\vartheta) = G_{12}(U)$, abbiamo

$$\int_0^{2\pi} |g_{12}(\vartheta)|^2 d(x, E(\lambda)x) = ||G_{12}(U)x||^2$$

Infatti, per definizione di g_{12}:

$$G_{12}(U)(I-U) = F(\vartheta_2) - F(\vartheta_1)$$

quindi

$$||(F(\vartheta_2) - F(\vartheta_1))z||^2 = (z, F(\vartheta_2) - F(\vartheta-2)z) \xrightarrow[\substack{\vartheta_2 \longrightarrow 2\pi \\ \vartheta_1 \longrightarrow 0}]{} (z, z)$$

da cui

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-e^{i\vartheta}|^2} d(x, F(\vartheta)x) = (z, z) < \infty$$

Viceversa, se vale questa disuguaglianza allora, se $\vartheta_1^{(n)}$ è una successione convergente a 0 e $\vartheta_2^{(n)}$ è una successione convergente a 2π, con $0 < \vartheta_1^{(n)} < \vartheta_2^{(n)} < \vartheta$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-e^{i\vartheta}|^2} d(x, F(\vartheta)x) = \lim_{\substack{\vartheta_1^{(n)} \longrightarrow 0 \\ \vartheta_2^{(n)} \longrightarrow 2\pi}} \int_{\vartheta_1^{(n)}}^{\vartheta_2^{(n)}} \frac{1}{|1-e^{i\vartheta}|^2} d(x, F(\vartheta)x)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{I_n} \frac{1}{|1-e^{i\vartheta}|^2} d(x, F(\vartheta)x)$$

ove $I_n = [\vartheta_1^{(n)}, \vartheta_1^{(n-1)}] \cup [\vartheta_2^{(n-1)}, \vartheta_2^{(n)}]$ e quindi $I_n \cap I_m = \emptyset$ (abbiamo inoltre tenuto presente che $\lim c_n = \sum_{n=1}^{\infty}(c_n - c_{n-1})$.

Dunque abbiamo che $E_n := F(I_n)$ sono proiettori a due a due ortogonali e, applicando ad essi (per tramite del calcolo funzionale boreliano) le funzioni

$$G_n(e^{i\vartheta}) := \chi_{I_n}(\vartheta)(1-e^{i\vartheta})^{-1}$$

otteniamo

$$n \neq m \Rightarrow G_n(U)G_m(U)^* = 0$$

e quindi

$$\int_{\vartheta_1^{(m)}}^{\vartheta_2^{(m)}} \frac{1}{|1-e^{i\vartheta}|^2} dF(\vartheta)x = \sum_{n=1}^{m} G_m(U)x$$

cioè

$$\left|\left| \sum_m G_m(U)x \right|\right|^2 = \sum_n \int_{I_n} \frac{1}{|1-e^{i\vartheta}|^2} d(x, F(\vartheta)x) < \infty$$

Sicché la serie sotto il segno di norma converge e quindi, poiché si tratta di una serie di vettori a due a due ortogonali, per il criterio di Cauchy, converge anche la serie numerica $\sum_m ||G_m(U)x||$. Allora poniamo

$$z := \lim_n \int_{\vartheta_1^{(n)}}^{\vartheta_2^{(n)}} \frac{1}{|1-e^{i\vartheta}|^2} dF(\vartheta)x < \infty$$

ottenendo $(I-U)z = x$ e quindi $x \in \mathcal{D}_A$.

(2) Se $x \in \mathcal{D}_A$ allora $x = (I-U)z$ e $Ax = i(I+U)z$, sicché

$$z = \lim_{\substack{\vartheta_1^{(n)} \longrightarrow 0^+ \\ \vartheta_2^{(n)} \longrightarrow 2\pi^-}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-e^{i\vartheta}} dF(\vartheta)x$$

Per continuità di $i(I+U)$ e dato che $G_{12}(U)x = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-e^{i\vartheta}} dF(\vartheta)x$ si ha

$$\begin{aligned} Ax &= \lim_{\substack{\vartheta_1^{(n)} \longrightarrow 0^+ \\ \vartheta_2^{(n)} \longrightarrow 2\pi^-}} i(I+U)G_{12}(U)x \\ &= \lim_{\substack{\vartheta_1^{(n)} \longrightarrow 0^+ \\ \vartheta_2^{(n)} \longrightarrow 2\pi^-}} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} i\frac{1+e^{i\vartheta}}{1-e^{i\vartheta}} dF(\vartheta)x = \lim_{\substack{\lambda_1 \longrightarrow -\infty \\ \lambda \longrightarrow \infty}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda dE(\lambda)x \end{aligned}$$

(per definizione di λ).

Non resta quindi che da appurare l'unicità della famiglia spettrale: se G è un'altra famiglia allora

$$Ux = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\lambda - i}{\lambda + i} dG(\lambda)x$$

e, passando dai λ ai ϑ, G diviene una famiglia spettrale su $\mathbb{T}$; ma la decomposizione spettrale di un operatore unitario è unica, dunque lo è E:

$$F'(\vartheta) := G(\lambda(\vartheta)) = F(\vartheta) \Rightarrow G(\lambda) = E(\lambda)$$

QED

13.4 Teoria delle perturbazioni

Ricordiamo che un operatore è estendibile se e solo se ha indici di difetto uguali: cerchiamo ora delle condizioni perché questa uguaglianza sia verificata. Cominciamo con il

13.4.1 Teorema (Criterio di von Neumann) *Se $A \subset A^*$ è densamente definito e se esiste un operatore antiunitario V tale che $VA = AV$ allora $n_+(A) = n_-(A)$.*

Dimostrazione: Se $V(A+I)x = (A-I)Vx$ allora $V : \mathcal{D}_+(A) \longrightarrow \mathcal{D}_-(A)$ è suriettivo e quindi lo è $V : \mathcal{H}_+(A) \longrightarrow \mathcal{H}_-(A)$: ne segue che $\dim \mathcal{H}_+(A) = \dim \mathcal{H}_-(A)$.

QED

Osserviamo che se $A \subset A^*$ allora $BA \subset AB$ e quindi $BS_0(A) \subset S_0(A)B$; se $A = A^*$ e $V = S(A)$ otteniamo $VB = BV$.

Ad esempio, se $A \subset A^*$ e A possiede un vettore ciclico x_0:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_0 \in \mathcal{D}(A^n)$$

(un tale x_0 si dice *vettore differenziabile* per A e si scrive $x_0 \in C^\infty(A)$) e se supponiamo che l'insieme

$$\{x_0, Ax_0, A^2x_0, ...\}$$

sia totale in $\mathcal{H}$ allora

13.4.2 Teorema

- *Se il sottospazio generato da $\{A^n x_0\}$ coincide con $\mathcal{D}_A$ allora A possiede autoaggiunte.*
- *Se $A_{x_0} := A|_{\mathcal{D}_{x_0}}$ (ove $\mathcal{D}_{x_0}$ è il sottospazio generato dall'insieme $\{A^n x_0\}$) ha indici di difetto (n,n) con $n < \infty$ allora A ha estensioni autoaggiunte.*

DIMOSTRAZIONE: (1) Definiamo un operatore antiunitario V; sia

$$v_0(\sum_n a_n A^n x_0) := \sum_n \overline{a_n} A^n x_0$$

Dimostriamo che si tratta di una isometria: dato che $x_0 \in C^\infty(A)$ e A è hermitiano

$$\begin{aligned}\left|\left|\sum_n a_n A^n x_0\right|\right|^2 &= \sum_{n,m} \overline{a_n} a_m (A^n x_0, A^m x_0) = \sum_{n,m} \overline{a_n} a_m (x_0, A^{n+m} x_0)\\ &= \sum_{n,m} \overline{a_n} a_m (x_0, A^{m+n} x_0) = \sum_{n,m} \overline{a_m} a_n (A^m x_0, A^n x_0)\\ &= \left|\left|V_0 \sum_n a_n A^n x_0\right|\right|^2\end{aligned}$$

Dunque, dato che V_0 è definito su un insieme totale, esiste un operatore antiunitario V per cui possiamo applicare il criterio di Von Neumann.

(2) Sia $A_{x_0} := A|_{\mathcal{D}_{x_0}}$ ove $\mathcal{D}_{x_0}$ è il sottospazio generato dall'insieme $\{A^n x_0\}$; allora $A_{x_0} \subset A$ e, dato che gli indici di difetto di A_{x_0} sono uguali, lo sono anche quelli di A.

QED

13.4.3 Definizione *Un vettore differenziabile $x_0 \in C^\infty(A)$ si dice* vettore di unicità *per $A \subset A^*$ se $A_{x_0} := A|_{\mathcal{D}_{x_0}}$ (ove $\mathcal{D}_{x_0}$ è il sottospazio generato dall'insieme $\{A^n x_0\}$) è un operatore (densamente definito in $\mathcal{H}_{x_0} = \overline{\mathcal{D}_{x_0}}$) essenzialmente autoaggiunto in $\mathcal{H}_{x_0}$.*

13.4.4 Teorema (CRITERIO DI NUSSBAUM) *Se $A \subset A^*$ ammette un insieme totale di vettori di unicità allora A è essenzialmente autoaggiunto.*

DIMOSTRAZIONE: Sia x_0 un vettore di unicità; allora i sottospazi chiusi

$$\overline{(A \pm iI)\mathcal{D}(A)}$$

coincidono con $\mathcal{H}$ se contengono un insieme totale. Quindi basta dimostrare che per ogni vettore di unicità x_0, $x_0 \in \overline{(A \pm iI)\mathcal{D}(A)}$. Ed infatti

$$\overline{(A \pm iI)\mathcal{D}(A)} \supset \overline{(A_{x_0} \pm iI)\mathcal{D}(A_{x_0})} = \overline{\mathcal{D}_\pm(A_{x_0})} = \mathcal{D}_\pm(\overline{A_{x_0}})$$

Ma A_{x_0} è essenzialmente autoaggiunto per ipotesi, sicché $\mathcal{D}_\pm(\overline{A_{x_0}}) = \mathcal{H}$.

QED

Ricordiamo che se B è un operatore limitato, vi possiamo valutare le funzioni analitiche, e.g.

$$e^{\lambda B} = \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} B^n$$

Più in generale diamo l'importantissima

13.4.5 Definizione *x è un* vettore analitico *per un operatore T se $x \in C^\infty(T)$ è differenziabile per quell'operatore e se esiste un $\lambda > 0$ tale che*

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} ||T^n x|| < \infty$$

(cioè se la serie ha raggio di convergenza diverso da zero).

In seguito dimostreremo il risultato fondamentale di Nelson secondo il quale, *se $A \subset A^*$ ha un insieme totale di vettori analitici allora è essenzialmente autoaggiunto.*

Vogliamo formulare per il momento un risultato che appartiene alla "teoria delle perturbazioni" degli operatori: il teorema di Kato–Rellich.

Partiamo dall'osservazione che

$$n_\pm = \dim\{z \mid A^* z = \pm iz\} = \dim\{z \mid A^* z = \lambda z\}$$

con $\operatorname{im} \lambda > 0$ ovvero $\operatorname{im} \lambda < 0$.

Inoltre notiamo che, se, se T è un operatore lineare chiuso e

$$\operatorname{nul} T := \dim \mathcal{N}(T) < \infty \qquad \text{o} \qquad \operatorname{def} T := \dim \mathcal{R}(T) < \infty$$

possiamo definire l'*indice dell'operatore* T come

$$\operatorname{ind} T := \operatorname{def} T - \operatorname{nul} T$$

13.4.6 Definizione *Un operatore T si dice* quasi-Fredholm *se* $\operatorname{nul} T < \infty$ *o* $\operatorname{def} T < \infty$ *e si dice di* Fredholm *se* $\operatorname{nul} T, \operatorname{def} T < \infty$.

Sia T un operatore di Fredholm e B un operatore tale che $\mathcal{D}_B \subset \mathcal{D}_T$:

13.4.7 Definizione *Se T è tale che*

$$\forall x \in \mathcal{D}_T \quad ||Bx|| \leq M(||x|| + ||Tx||)$$

si dice che T è relativamente limitato *limitato rispetto a B (ovvero* limitato nel senso di Kato*) se*

$$\exists\, a', b' \; \forall x \in \mathcal{D}_T \quad ||Bx|| \leq a'||x|| + b'||Tx||$$

Se poniamo

$$|||x||| := a||x|| + b||Tx||$$

allora B è relativamente limitato se lo è come operatore fra gli spazi di Hilbert $(\mathcal{D}_T, |||.|||)$ e $\mathcal{H}$.

Notiamo che se $A = \overline{A} \subset A^*$ (densamente definito) allora, se $z = \mu + i\nu \in \mathbb{C}$ e $\lambda \neq 0$:

$$||(A + zI)x||^2 = ||(A - \mu I)x - i\lambda x||^2 = ||(A - \mu I)x||^2 + \lambda^2||x||^2$$

(i termini misti si elidono); quindi, per ogni $\lambda \neq 0$ l'insieme $\mathcal{R}(A - zI)$ è chiuso, dato che è isometrico al grafo di $A - \mu I$ munito della topologia della norma equivalente a $|||.|||$ con $T = A - \mu I$.

13.4.8 Proposizione $\dim \mathcal{R}(A - zI)^\perp = \begin{cases} n_+ & \textit{se} \ \operatorname{im} z > 0 \\ n_- & \textit{se} \ \operatorname{im} z < 0 \end{cases}$

DIMOSTRAZIONE: $A - zI = A - z_0 I - (z - z_0)I$ e quindi, applicandolo a x:

$$(A - zI)(x) = (A - z_0 I)x - (z - z_0)x$$

Ma se $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0 + iy\}_{y\in\mathbb{R}}$ si trova che $(A - z_0 I)^{-1}$ è densamente definito su $\mathcal{D}_{z_0}$ (che è chiuso) ed è ivi continuo, dato che

$$\begin{aligned} ||(A - z_0 I)x||^2 =& ||(A - z \operatorname{Re} z_0 I)x||^2 + |\operatorname{Im} z_0|^2||x||^2 \\ \geq& |\operatorname{Im} z_0|^2||x||^2 \end{aligned}$$

e quindi $x = (A - z_0 I)^{-1}(A - z_0 I)x$ e

$$x = (A - z_0 I)^{-1} E_0 (A - z_0 I)x$$

ove E_0 è la proiezione sul sottospazio $\mathcal{R}(A - z_0 I)$; sia inoltre

$$B := (A - z_0 I)^{-1} E_0$$

Si tratta di un operatore limitato ovunque definito, sicché, per ogni $x \in \mathcal{D}_A$:

$$(A - zI)x = (A - z_0 I)x - (z - z_0)x = I - (z - z_0)B(A - z_0 I)x$$

Ma, se

$$|z - z_0| < ||B|| \leq |\operatorname{Im} z_0|^{-1}$$

allora l'operatore $S := I - (z - z_0)B$ è invertibile, sicch é

$$(A - zI)x = S(A - z_0 I)x$$

e quindi $\mathcal{R}(A - zI) = S\mathcal{R}(A - z_0 I)$ (si noti che ambedue questi ranghi sono chiusi) e S è lineare ed invertibile, dunque

$$\dim \mathcal{R}(A - z_0 I)^\perp = \dim \mathcal{R}(A - z_0 I)$$

dato che, se $x \in \mathcal{R}(A - zI)^\perp$ allora, per ogni $z \in \mathcal{R}(A - z_0 I)$:

$$(x, Sz) = 0 \iff X^* x \in \mathcal{R}(A - z_0 I)^\perp$$

CIOè $S^*\mathcal{R}(A - z_0 I)^\perp = \mathcal{R}(A - zI)^\perp$.

Ma S è invertibile, quindi anche S^* lo è; inoltre, se

$$T := S^*|_{\mathcal{R}(A - zI)^\perp}$$

allora $T = V|T|$ (decomposizione polare) e $\mathcal{N}(T) = 0$ (per invertibilità), sicché V è una isometria il cui codominio è la chiusura del codominio di T, che è già un chiuso: quindi V è l'isometria che realizza l'uguaglianza fra le dimensioni degli spazi.

QED

Osserviamo che, se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall x \in \mathcal{D}_A \quad ||(A - \lambda I)x|| \geq \delta ||x||$$

allora gli indici di difetto dell'operatore coincidono: questo è vero, ad esempio, se

$$\lambda(x, x) \leq (x, Ax)$$

dato che, in questo caso, per la disuguaglianza di Schwartz:

$$(x, Ax) \leq ||x|| \, ||Ax||$$

e quindi

$$\lambda ||x|| \leq ||Ax||$$

Se, per esempio, $A \subset A^*$ è *definito positivo* ($(x, Ax) \geq 0$) allora ha indici di difetto uguali: questa situazione avviene in molte applicazioni, ad esempio nella formulazione di problemi per equazioni differenziali a derivate parziali.

13.4.9 Definizione *Se $A \subset A^*$ e $B \subset B^*$ sono operatori tali che $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}_B$, si dice A-*limite *di B il numero*

$$\inf\{b \mid \exists a_b\ \forall x \in \mathcal{D}_A\ ||Bx|| \le a_b||x|| + b||Ax||\}$$

Ad esempio, se l'A-limite è zero allora B è limitato.

13.4.10 Teorema (KATO–RELLICH) *Se $A \subset A^*$, $B \subset B^*$, $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}_B$ e B è A-relativamente limitato, cioè*

$$\exists a, b\ \forall x \in \mathcal{D}_A\ ||Bx|| \le a_b||x|| + b||Ax||$$

e se l'A-limite di B è minore di 1 *allora*

$$n_\pm(A+B) = n_\pm(A)$$

In particolare, se A è essenzialmente autoaggiunto allora anche B lo è e $\mathcal{D}_{\overline{A+B}} = \mathcal{D}_{\overline{A}}$.

DIMOSTRAZIONE: Sia $b < 1$ (ciò che possiamo supporre in quanto, per ipotesi, l'A-limite di B è minore di 1); vogliamo studiare l'insieme $\mathcal{R}((A+B) \pm iI)$ ovvero sia $\mathcal{R}((A+B) - zI)$.

Si noti intanto che

$$||Bx|| \le a||x|| + b||Ax|| \le \sqrt{a^2+b^2}||x \oplus Ax|| = \sqrt{(a\varepsilon)^2+b^2}\left|\left|\frac{1}{\varepsilon}x \oplus Ax\right|\right|$$

Ma $b < 1$, sicché esiste $\varepsilon > 0$ con $(aEe)^2 + b^2 < 1$ e quindi

$$\sqrt{(a\varepsilon)^2+b^2}\left|\left|\frac{1}{\varepsilon}x \oplus Ax\right|\right| = b_\varepsilon\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}||x||^2 + ||Ax||^2} = b_\varepsilon||(A \pm i\varepsilon^{-1}I)x||$$

(infatti $\varepsilon^{-2}||x||^2 + ||Ax||^2$ è una norma equivalente sul grafico di A). Dunque, come in precedenza:

$$(A + B \pm i\varepsilon^{-1}I)x = (A \pm i\varepsilon^{-1})x + Bx$$

e scriviamo

$$Bx = B(A \pm i\varepsilon^{-1}I)^{-1}(A \pm i\varepsilon^{-1}I)x$$

ove $(A \pm i\varepsilon^{-1}I)^{-1}$ è continuo e e diviene densamente definito componendo con $E_\pm = E_{\overline{\mathcal{R}(A \pm i\varepsilon^{-1}I)}}$. Sicché

$$Bx = B(A \pm i\varepsilon^{-1}I)^{-1}E_\pm(A \pm i\varepsilon^{-1}I)x$$

Ma

$$||B(A \pm i\varepsilon^{-1}I)^{-1}z|| \leq b_\varepsilon ||(A \pm i\varepsilon^{-1}I)B(A \pm i\varepsilon^{-1}I)^{-1}z|| = b_\varepsilon ||z||$$

e

$$||B(A \pm i\varepsilon^{-1}I)^{-1}E_\pm x|| \leq b_\varepsilon ||E_\pm z|| \leq b_\varepsilon ||z||$$

Quindi la chiusura $C_\pm$ di $B(A \pm i\varepsilon^{-1}I)^{-1}E_\pm$ ha norma $\leq b_\varepsilon < 1$; ne segue che

$$(A + B \pm i\varepsilon^{-1}I)x = (I + C_\pm)(A \pm i\varepsilon^{-1}I)$$

ed il complemento ortogonale del codominio di $(A + B \pm i\varepsilon^{-1}I)$ ha la stessa dimensione di quello di $(A \pm i\varepsilon^{-1}I)$.

QED

Si noti che

$$\mathcal{D}_{\overline{a}} = \mathcal{R}(\overline{A} + iI)^{-1}$$

Ovviamente, se $\lambda \notin \sigma(T)$ allora $(T - \lambda I)$ è di Fredholm e quindi abbiamo il suo spettro essenziale

$$\sigma_{ess}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, (T - \lambda I) \text{ non di Fredholm}\}$$

Se T è normale si tratta dello spettro essenziale da noi già definito; ricordiamo in effetti il teorema di Weyl 10.5.19 *se T è normale e limitato e K compatto allora $\sigma_{ess}(T) = \sigma_{ess}(T + K)$.*

Menzioniamo soltanto che esiste una versione di questo teorema per operatori non limitati: i risultati sono i seguenti:

Teorema. *Se B è una perturbazione limitata nel senso di Kato rispetto a T allora $\sigma_{ess}(T + B) = \sigma_{ess}(T)$.*

Teorema. *Se B è relativamente compatto rispetto a T allora $\sigma_{ess}(T + B) = \sigma_{ess}(T)$.*

ove

13.4.11 Definizione *B è relativamente compatto rispetto a T se $\mathcal{D}_T \subset \mathcal{D}_B$ e l'operatore B è compatto fra lo spazio di Hilbert $\mathcal{D}_T$ rispetto alla norma $|||.|||_T$ e $\mathcal{H}$.*

13.4.12 Proposizione *Se T è un operatore autoaggiunto non necessariamente limitato e $B \subset B^*$ è T-compatto allora $\sigma_{ess}(T + B) = \sigma_{ess}(T)$.*

DIMOSTRAZIONE: In effetti

$$\sigma_{ess}(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists\{e_n\} \subset \mathcal{D}_T \text{ b.o. } ||Te_N - \lambda e_n|| \longrightarrow 0\}$$

("b.o." sta per "base ortonormale"). Ma se $\{e_n\}$ è una base ortonormale allora $e_n \longrightarrow 0$ debolmente e quindi

$$Te_n = \lambda e_n + (Te_n - \lambda e_n) \xrightarrow{\text{debolmente}} 0$$

cioè $e_n \oplus Te_n \xrightarrow{\text{debolmente}} 0$ e quindi (per T-compattezza di B):

$$Be_n \xrightarrow{\text{in norma}} 0$$

Dunque $||(T+B)e_n - e_n|| \longrightarrow 0$.

QED

13.5 Un esempio: Il laplaciano in $\mathbb{R}^3$

Consideriamo l'operatore di Laplace (a meno del segno) $A = -\Delta$; in coordinate di $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta = -\left(\frac{\partial^2}{\partial s_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial s_n^2}\right)$$

Il nostro spazio di Hilbert è $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n, ds^n)$, e $\mathcal{D} = C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (funzioni a supporto compatto); consideriamo lo spazio di Schwartz

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in C^\infty \mid \left|\left|(1+s^2)^m \frac{\partial^n}{\partial s^n} f\right|\right|_\infty = p_{mn}(f) \Rightarrow p_{mn}(f) < \infty \right\}$$

Sappiamo che $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ è denso nella topologia di $\mathcal{D}$ e che la trasformata di Fourier è un isomorfismo di $\mathcal{S}$ in sé (teorema 8.5.5). Allora, se

$$A_0 := -\Delta|_{\mathcal{D}} \qquad \text{e} \qquad A_1 := -\Delta|_{\mathcal{S}}$$

si ha $A_0 \subset A_0^*$ e $A_1 \subset A_1^*$ e

$$(f, i\frac{\partial g}{\partial s_h}) = (i\frac{\partial f}{\partial s_h}, g) \qquad \text{e} \qquad (f, i\frac{\partial^2 g}{\partial s_h^2}) = (\frac{\partial^2 f}{\partial s_h^2}, g)$$

(integrazione per parti), sicché Δ e $-\Delta$ sono hermitiani. Ora dimostriamo che

$$A_1 \subset \overline{A_0}$$

In effetti per ogni $f\in\mathcal{S}$ esiste $\{g_n\} \subset \mathcal{S}$ tale che $p(g_n - f) \longrightarrow 0$ pr ogni seminorma p della topologia di $\mathcal{S}$, quindi

$$g_n \xrightarrow{L^2} f \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^\nu g_n}{\partial s^\nu} \xrightarrow{L^2} \frac{\partial^\nu f}{\partial s^\nu}$$

(per ogni multiindice ν) dato che

$$f = (1+s^2)^{-k}(1+s^2)^k f$$

e quindi

$$||f||_{L^2} \leq ||(1+s^2)^k f||_\infty ||(1+s^2)^{-k}||_{L^2}$$

il che vale anche per ogni derivata parziale della f. Pertanto

$$\Delta g_n \longrightarrow \Delta f$$

Ora "coniughiamo" rispetto alla trasformata di Fourier (che indichiamo con $\mathfrak{F}$: $\mathfrak{F}f = \widehat{f}$): se

$$B_1 := \mathfrak{F}A_1\mathfrak{F}^{-1} = \left\{ f \in \mathcal{S} \longmapsto \left(h \longmapsto \sum_j k_j^2 f(n) \right) \right\}$$

allora

$$(B_1 f)(k) = k^2 f(k)$$

Notiamo poi che B_1 è essenzialmente autoaggiunto: infatti

$$\mathcal{R}(B_1 \pm I) = \{k \longmapsto (k^2 \pm i) f(k)\}_{f\in\mathcal{S}} = \mathcal{S}$$

(dato che $g \in \mathcal{S} \Rightarrow k \longmapsto (k^2 \pm i)^{-1} g(k)$) e quindi è un insieme denso.

Ora sia (se $H_0 = -\Delta$):

$$\mathcal{D}_{H_0} = \{ f \in L^2 \mid \widehat{f} \in L^2 \text{ e } (k \longmapsto k^2 \widehat{f}(k)) \in L^2 \}$$

Allora, dato che

$$||f||^2_{B_1} = ||f||^2 + \int |k^2 f(k)|^2 d^n k$$

si ha $\mathcal{D}_{H_0} = L^2(\mathbb{R}^n, (1+k^4) d^n s)$.

Consideriamo il caso $n = 3$ nell'esempio precedente: se $f \in \mathcal{D}_{H_0}$ allora

$$\widehat{f} = (1+k^2)^{-1}(1+k^2)\widehat{f} \Rightarrow f(s) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int e^{-iks}(1+k^2)^{-1}(1+k^2)\widehat{f}(k) d^3 k$$

Ma $\frac{1}{k^4}k^2dk \approx \frac{1}{k^2}dk$ e quindi la funzione integranda è a quadrato sommabile; dato che

$$\widehat{f} = (1+\lambda k^2)^{-1}(1+\lambda k^2)\widehat{f}$$

cioè (ponendo $h = \lambda k$):

$$\int (1+\lambda k^2)^{-2} d^3k = \lambda^{\frac{3}{2}} \int (1+h^2)^{-2} d^3h =: \lambda^{\frac{3}{2}} c \in \mathbb{R}$$

troviamo

$$|f(s)| \leq c\lambda^{-\frac{3}{2}} ||\widehat{f} + \lambda k \widehat{f}(k)||_2 = c\lambda - \frac{3}{2} ||f + \lambda^2 H_0 f||_2$$

Ma $||f||_2 = ||\widehat{f}||_2$ (teorema di Plancherel) e quindi

13.5.1 Lemma (DISUGUAGLIANZA DI SOBOLEV)

$$|f(s)| \leq c\lambda^{-\frac{3}{2}} ||f + \lambda^2 H_0 f||_2$$

Ne segue che

$$|f(s)| \leq c\lambda^{-\frac{3}{2}} ||f|| + c\lambda^{\frac{1}{2}} ||H_0 f||$$

In altri termini, il funzionale $f \longmapsto f(s)$ (per $f \in \mathcal{D}_{H_0}$) è H_0-limitato, cioè, per ogni $x \in \mathcal{H}$ l'operatore di rango 1 $f \longmapsto f(s)x$ è lineare e relativamente limitato: si badi bene che non è un operatore chiudibile (avendo rango 1 e non essendo continuo).

In Meccanica Quantistica si pone

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar}{2m}\Delta$$

e l'hamiltoniana del sistema è $H_0 + V$ con $(Vf)(s) = V(s)f(s)$.

Se $V \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3, d^3s)$, cioè V misurabile e

$$\forall L > 0 \quad \int_{|s|\leq L} |V(s)|^2 ds < \infty$$

le hamiltoniane corrispondenti ammettono estensioni autoaggiunte. Se

$$(f, (H_0 + V)f) \in \mathbb{R}$$

allora V ammette estensioni autoaggiunte ($V(s) \in \mathbb{R}$).

Notiamo che $\mathcal{D}_{H_0+V} = \mathcal{D}$ (che è lo spazio di Schwartz: se $f \in \mathcal{D}$ allora $V(f) \in L^2$). Dunque, per il criterio di von Neumann, se U è un operatore unitario in L^2:

$$[U, H_0 + V] = 0 \Rightarrow H_0 + V \text{ ha estensioni autoaggiunte}$$

(ove $[A, B] = AB - BA$ è il commutatore).

13.5.2 Teorema *Se $V = f + g$ con $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ e $g \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ allora*

- *V è H_0-limitato con H_0-limite pari a 0.*
- *Se $g(s) \xrightarrow{|s|\longrightarrow\infty} 0$ allora V è H_0-compatto.*

DIMOSTRAZIONE: (1) Sia $x \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}||Vx||_2 \leq& ||fx||_2 + ||gx||_2 \leq ||x||_\infty ||f||_2 + ||g||_\infty ||x||_2\\ \leq& ||f||_2 c\lambda^{-\frac{3}{2}} ||x + \lambda H_0 x||_2 + ||g||_\infty ||x||_2\\ \leq& (||f||_2 c\lambda^{-\frac{3}{2}} + ||g||_2)||x||_2 + c||f||_2 \lambda^{\frac{1}{2}} ||H_0 x||_2\end{aligned}$$

(per la disuguaglianza di Sobolev). Quindi l'H_0-limite di V è zero.

(2) Dato che $V : \mathcal{D}_{H_0} \longrightarrow \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$, sappiamo che, per $x \in \mathcal{D}_{H_0}$:

$$||Vx|| \leq a||x|| + b||H_0 x||$$

con $b \propto \lambda^{\frac{1}{2}}$ e $a \propto \lambda^{-\frac{3}{2}}$ (i.e. $a \approx cb^{-3}$). Dunque, ricordando che

$$a = (\lambda^{-\frac{3}{2}} ||f||_2 + ||g||_\infty)c \qquad \text{e} \qquad b = \lambda^{\frac{1}{2}} ||f||_2$$

si trova, per $V_n := f_n + g_n$ (scelte due successioni $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ tali che $f_n \xrightarrow{L^2} f$ e $g_n \xrightarrow{L^\infty} g$):

$$V_n \longrightarrow V$$

nella norma di $\mathcal{B}(\mathcal{D}_{H_0}, \mathcal{H})$ (ove su $\mathcal{D}_{H_0}$ si pone la norma $|||.|||$). Quindi V è compatto se lo sono i V_n, cioè se le f_n sono a supporto compatto in $L^2(\mathbb{R}^3)$ e se le g_n sono a supporto compatto in $L^\infty(\mathbb{R}^3)$ (usando l'ipotesi $g(s) \xrightarrow{|s|\longrightarrow\infty} 0$). Quindi possiamo supporre $\operatorname{supp} f, \operatorname{supp} g \subset K$ (compatto) e, per dimostrare la compattezza di V basta far vedere che porta insiemi limitati in insiemi compatti.

Utilizziamo per questo il teorema di Ascoli–Arzelà 3.5.2. Sia $x \in \mathcal{D}_{H_0}$: allora

$$Vx = VEx = EVx$$

(ove $E = M_{\chi_K}$ è l'operatore di moltiplicazione per la funzione caratteristica di K), cioè $V(x|_K) \in \mathcal{H}$; prendiamo x in un insieme limitato S rispetto alla norma del grafico di H_0 $|||.|||$: allora, $V(x|_K)$ appartiene a un compatto di $\mathcal{H}$. Infatti se $x \in S$:

$$||H_0 x|| \leq M \qquad \text{e} \qquad ||x|| \leq N$$

e quindi ($||\Delta x|| \leq M$):

$$-(x, \Delta x) = -\sum_j \int \overline{x(s)} \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} x(s) ds \leq M$$

quindi la famiglia S è equicontinua e, per il teorema di Ascoli–Arzelà, S è compatto in $C(K)$: esiste cioè una successione uniformemente convergente (su K) e

$$V(x_n) = f(x_n) + g(x_n)$$

QED

Notiamo che dalla (1) segue che, se $V = \overline{V}$ allora $H_0 + V$ è essenzialmente autoaggiunto su ciascun dominio ove lo sia H_0 e $\mathcal{D}_{\overline{H_0+V}} = \mathcal{D}_{H_0}$, per il teorema di Kato–Rellich; dalla (2) possiamo invece inferire che $\sigma_{ess}(H_0 + V) = \sigma_{ess}(H_0) = \sigma(H_0) = [0, \infty)$ (ricordando che $\widehat{H_0}$ è la moltiplicazione per k^2).

13.5.3 Esempio *Se*

$$V = -\frac{e^2}{|s|} = -\frac{e^2}{|s|}\chi_U - \frac{e^2}{|s|}\chi_{\complement U}$$

con U intorno limitato, lo spettro che si ottiene è quello dell'atomo di idrogeno: questo esempio ha sostanzialmente motivato la teoria.

Osserviamo che se $x \in \mathcal{D}_{H_0}$ allora

$$x(s) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int 1 \cdot e^{-isk}\widehat{x}(k)d^3k$$

e $(1 = (1 + k^2)^{-1}(1 + k^2))$:

$$x(s') - x(s'') = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \left(e^{-is'k} - e^{-is''k}\right)(1 + k^2)^{-1}(1 + k^2)\widehat{x}(k)d^3k$$

Ma $(e^{-is'k} - e^{-is''k})(1 + k^2)^{-1} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ e $(1 + k^2)\widehat{x}(k) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, sicché

$$\begin{aligned} |x(s') - x(s'')| \leq& ||(e^{-is'k} - e^{-is''k})(1 + k^2)^{-1}||\ ||x + H_0x|| \\ =& ||G_{s'} - G_{s''}||\ ||x + H_0x|| \\ =& ||G_{s'-s''} - G||\ ||x + H_0x||\dagger) \end{aligned} \qquad (()$$

ove $G = \mathfrak{F}^{-1}((1+k^2)^{-1})$ e G_s è la traslazione per s in $L^2(\mathbb{R}^3)$ $((G_sf)(t) = f(t-s))$; quindi

$$||G_s||^2 = \int |G(h - s)|^2dh = ||G||^2$$

il che giustifica l'ultimo passaggio delle (†).

Inoltre, $||G_s - G|| \xrightarrow{s\longrightarrow 0} 0$ in norma (questo vale in L^p con $p < \infty$: questi spazi sono il completamento di $C_c(\mathbb{R}^n)$ in norma $||.||_p$). Osserviamo pure che se $||f - f'|| < \varepsilon$ allora $||f_h - f'_h|| < \varepsilon$ e

$$||f_h - f|| \leq ||f_h - f'_h|| + ||f'_h - f'|| + ||f' - f|| < 2\varepsilon + ||f'_h - f'||$$

Tornando alle (†):

$$|x(s') - x(s'')| < \varepsilon ||x + H_0 x|| \leq \varepsilon(||x|| + ||H_0 x||) = \varepsilon |||x|||$$

Quindi se $\{x\}$ è equilimitato nella norma del grafico $|||.|||$ è pure equicontinuo.

Per ulteriori sviluppi di questo esempio si può consultare [29], §10.