Omologia di Poisson di Hochschild (e ciclica?)

Paolo Caressa

Workshop *Gruppi Quantici e Dintorni*, Tor Vergata 2001

1 Glossario

Fissiamo le seguenti notazioni e nozioni:

Algebra: per noi sarà sempre uno spazio vettoriale A su un campo $\mathbb{K}$ fissato, dotato di una operazione bilineare $\alpha : A \times A \longrightarrow A$ (il *prodotto*) non necessariamente dotata di unità; se l'algebra è associativa sara sempre supposta dotata di unità e, ed il prodotto denotato con $a \cdot b$ o ab; un'algebra commutativa sarà un'algebra associativa e commutativa.

Morfismo: per noi sarà sempre una funzione $f : A \longrightarrow B$ fra $\mathbb{K}$-algebre tale che $f(\alpha(a,b)) = \beta(f(a), f(b))$ ove α e β sono i prodotti in A e B; se le algebre sono associative un morfismo deve preservare le unità.

Modulo: per noi un modulo è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale M che si presenta assieme ad una mappa bilineare $\mu : A \times M \longrightarrow M$, ove A è un'algebra associativa, in modo che $\mu(ab, m) = \mu(a, \mu(b, m))$ e $\mu(\mathsf{e}, m) = m$ per ogni $a, b \in A$ e $m \in M$; un *bimodulo* è un modulo che possegga anche una mappa bilineare $\nu : M \times A \longrightarrow M$ tale che $\nu(m, ab) = \nu(\nu(m, a), b)$, $\nu(m, \mathsf{e}) = m$ e $\mu(a, \nu(m, b)) = \nu(\mu(a, m), b)$; scriviamo al solito $am = \mu(a, b)$ e $ma = \nu(m, a)$; un *morfismo* di moduli è una mappa A-lineare.

Derivazione: le derivazioni su un'algebra A sono per noi gli elementi dello spazio vettoriale $\mathrm{Der}(A)$ delle applicazioni $\mathbb{K}$-lineari $X : A \longrightarrow A$ tali che $X(\alpha(a,b)) = \alpha(X(a), b) + \alpha(a, X(b))$; se A è associativa le derivazioni $\mathrm{Der}(A, M)$ a coefficienti in un bimodulo M sono definite come le mappe $\mathbb{K}$-lineari $X : A \longrightarrow M$ tali che $X(ab) = aX(b) + X(a)b$: se A è commutativa la mappa $M \longrightarrow \mathrm{Der}(A, M)$ è un funtore.

Differenziale: per noi sono gli elementi del modulo Ω_A dei differenziali di Kähler sull'algebra commutativa A, determinato a meno di isomorfismi dalla proprietà universale $\mathrm{Der}(A, M) = \hom_A(\Omega_A, M)$ ove M è un A-modulo; si tratta del modulo quoziente E/R ove E è libero su A, i cui elementi denotiamo con $\mathbf{d}a$, e R è generato da elementi della forma

$$\mathbf{d}(ka + hb) - k\mathbf{d}a - h\mathbf{d}b \qquad \text{e} \qquad \mathbf{d}(ab) - a\mathbf{d}b - b\mathbf{d}a$$

al variare di $h, k \in \mathbb{K}$ e $a, b \in A$; la mappa $A \longrightarrow \Omega_A$ che ad $a \in A$ associa l'immagine in E/F di $\mathbf{d}a$ è una derivazione, e, in virtù della proprietà universale, esiste anche una mappa $\mathbf{i} : \mathrm{Der}(A) \times \Omega_A \longrightarrow A$ di contrazione di un differenziale su una derivazione; sia $\mathbf{d}$ che $\mathbf{i}$ si estendono alle potenze esterne (su A) di Ω_A e $\mathrm{Der}(A)$ in modo da soddisfare le usuali proprietà del calcolo di Cartan.

Rappresentazione: È un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale R che si presenta assieme ad una mappa $\rho : L \times R \longrightarrow R$ ove L è un'algebra di Lie, in modo che $\rho([a, b], m) = \rho(a, \rho(b, m)) - \rho(b, \rho(a, m))$.

2 Algebre associative, di Lie e di Poisson

Diamo ovviamente per scontata la nozione di algebra associativa, algebra associativa commutativa e di algebra di Lie: richiamiamo qui appresso qualche altra nozione classica ma meno popolare.

Definizione 2.1 *Un*'algebra di Poisson *è una terna* $(A, \cdot, \{\})$ *ove* $(A, \cdot)$ *è una* $\mathbb{K}$*-algebra associativa,* $(A, \{\})$ *è una* $\mathbb{K}$*-algebra di Lie e vale, per ogni* $a, b, c \in A$*, la seguente* identità di Leibniz:

$$\{ab, c\} = a\{b, c\} + \{a, c\}b$$

Rammentiamo gli esempi fondamentali di algebre di Poisson:

Esempio 2.2 *Se* V *è uno spazio vettoriale su* $\mathbb{K}$ *e* V^* *è il suo duale, consideriamo l'algebra commutativa* A *generata dai funzionali lineari su* $V \oplus V^*$*: possiamo interpretare* A *come l'algebra simmetrica* $Sym(V^* \oplus V)$ *(se* V *è uno spazio vettoriale topologico considereremo tensori continui). Se* $\varphi \oplus v, \psi \oplus w \in V^* \oplus V$*, definendo*

$$\{\varphi \oplus v, \psi \oplus w\} = \varphi(w) - \psi(v)$$

(si noti che $\{V^*, V\} = 0$*) otteniamo una mappa* $\mathbb{K}$*-bilineare antisimmetrica su* $V^* \oplus V$*, che possiamo estendere ad* A *come*

$$\{a + b, c\} = \{a, c\} + \{b, c\}\,, \qquad \{ab, c\} = a\{b, c\} + b\{a, c\}\,, \qquad \{\mathbb{K}, A\} = 0$$

Dato che l'algebra A è generata da $V^* \oplus V$, abbiamo in questo modo definito una operazione bilineare antisimmetrica che, per definizione, soddisfa all'identità di Leibniz, mentre l'identità di Jacobi può agevolmente verificarsi ad esempio per induzione (guardando ad A come l'algebra simmetrica, quindi graduata). Quest'algebra di Poisson la chiamiamo algebra simplettica su V.

Esempio 2.3 *Se V è uno spazio vettoriale tale che il suo duale (topologico se necessario) V^* sia un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ rispetto a qualche parentesi di Lie fissata $[\,]$; dato che $\mathfrak{g}$ è lo spazio dei funzionali lineari (e continui se necessario) su V, l'algebra commutativa generata da questi funzionali lineari è l'algebra simmetrica su $\mathfrak{g}$: ma allora il teorema di Poincaré–Birkhoff–Witt afferma che esiste un isomorfismo*

$$\mathrm{Gr}\,\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{Sym}(\mathfrak{g})$$

fra l'algebra graduata associata alla filtrazione dell'algebra inviluppante universale di $\mathfrak{g}$ e l'algebra simmetrica su $\mathfrak{g}$, sicché resta indotta su $\mathrm{Gr}\,\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ *(vale a dire su* $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g})$*) una struttura di algebra di Poisson nel modo seguente: si rammenti che $\mathfrak{g}$ si immerge in $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ e che $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ è filtrata come (cfr. [14, §3])*

$$\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{U}_k \subset \ldots$$

ove $\mathcal{U}_0 = \mathbb{K}$ e $\mathcal{U}_k$ sono generate da $\mathbb{K}$ e dai prodotti $x_1 \ldots x_h$ (con $h \leq k$) di elementi dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ (in guisa che $\mathcal{U}_1 = \mathbb{K} \oplus \mathfrak{g}$). Pertanto

$$\mathrm{Gr}\,\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{k \geq 0} \frac{\mathcal{U}_{k+1}}{\mathcal{U}_k}$$

Cioè un elemento di grado k è una classe di equivalenza $[x]$ di prodotti di al più k elementi di $\mathfrak{g}$, dunque possiamo definire una mappa bilineare antisimmetrica $\{\,\}\ \mathrm{Gr}_k \times \mathrm{Gr}_h \longrightarrow \mathrm{Gr}_{h+k-1}$ *come*

$$\{[x], [y]\} := [xy - yx]$$

(si noti che l'immagine è in $\mathcal{U}_{h+k-1}$ e non in $\mathcal{U}_{h+k}$ per la proprietà universale dell'algebra inviluppante: ad esempio, se x, y hanno grado uno, cioè appartengono a $\mathfrak{g}$, $xy - yx$ ha pure grado uno, ed altri non è che $[x, y]$).

In questo modo rendiamo $\mathrm{Gr}\,\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ un'algebra di Poisson rispetto alle parentesi $\{\,\}$: l'identità di Leibniz è presto verificata, mentre quella di Jacobi segue dalla sua omonima per l'algebra di Lie $(\mathfrak{g}, [,])$ e da una semplice induzione sul grado: quest'algebra la chiamiamo *algebra di Lie–Poisson su $\mathfrak{g}$*.

Consideriamo un'algebra di Poisson $(A, \cdot, \{\})$: mercé l'identità di Leibniz, la *mappa hamiltoniana*

$$X : A \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)$$

definita come $X(a)(b) = \{a, b\}$ ha immagine contenuta nello spazio delle derivazioni $\mathrm{Der}(A)$ (rispetto alla struttura associativa di A).

Definizione 2.4 *Una derivazione del tipo $X(a)$ si dice* derivazione hamiltoniana *e si denota con X_a: lo spazio delle derivazioni hamiltoniane si denota con* $\mathrm{Ham}(A)$.

Evidentemente è una sottoalgebra di Lie di $\mathrm{Der}(A)$: inoltre, in virtù dell'identità di Jacobi, una derivazione hamiltoniana è anche una derivazione dell'algebra di Lie $(A, \{\})$.

Le derivazioni hamiltoniane non formano un modulo, ma solo uno spazio vettoriale: sarà comunque opportuno considerare il *modulo hamiltoniano* $\mathcal{H}_A$, cioè l'A-modulo da esse generato.

Definizione 2.5 *L'algebra di Lie* $\mathrm{Can}(A) = \mathrm{Der}(A) \cap \mathrm{Der}_L(A)$ *intersezione dell'algebra delle derivazioni rispetto alla struttura associativa e delle derivazioni rispetto alla struttura di Lie si dice* algebra delle derivazioni canoniche *dell'algebra di Poisson A.*

Dunque ogni derivazione hamiltoniana è canonica: non vale tuttavia il viceversa (ad esempio basterà considerare l'algebra di Lie–Poisson su un'algebra di Lie risolubile $\mathfrak{g}$); una misura di quante derivazioni hamiltoniane non canoniche esistano in un'algebra di Poisson è inglobata nella seguente successione esatta di algebre di Lie

$$0 \longrightarrow \mathrm{Cas}(A) \longrightarrow A \longrightarrow \mathrm{Ham}(A) \longrightarrow \mathrm{Can}(A)/\mathrm{Ham}(A) \longrightarrow 0$$

ove $\mathrm{Cas}(A)$ è l'algebra degli *elementi di Casimir* di A:

$$\mathrm{Cas}(A) = \{c \in A \,|\, \forall a \in A \;\; \{a, c\} = 0\}$$

L'importanza dell'algebra degli elementi di Casimir è chiarita dal seguente risultato: consideriamo lo spazio topologico $X = \mathrm{Spec}\,\mathrm{Cas}(A)$: l'iniezione $\mathrm{Cas}(A) \longrightarrow A$ induce una suriezione Π :$\mathrm{Spec}\, A \longrightarrow X$, che possiamo interpretare come una fibrazione.

Teorema 2.6 *Le fibre della mappa Π sono spettri di sotto-algebre di Poisson simplettiche rispetto alla struttura di Poisson indotta da A.*

3 Coomologia di Hochschild

Introduciamo in modo elementare (cioè senza usare l'algebra omologica) l'omologia di Hochschild: seguiremo [2]; se A un'algebra associativa e M un bimodulo su A consideriamo la successione di moduli

$$C_n(A, M) = M \otimes A^{\otimes n}$$

e la successione di mappe lineari

$$b_n : C_n(A, M) \longrightarrow C_{n-1}(A, M)$$

definite come

$$\begin{aligned} b_n(m \otimes a_1 \otimes \cdots a_n) = (ma_1) \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes (a_i a_{i+1}) \otimes \cdots \otimes a_n + \\ + (-1)^n (a_n m) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \end{aligned}$$

Lemma 3.1 $b_n \circ b_{n+1} = 0$

Dimostrazione: Anziché un tedioso calcolo diretto cominciamo col notare che, se definiamo per $1 \leq i < n$:

$$\begin{aligned} d_0(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) =& (ma_1) \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \\ d_i(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) =& m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes (a_i a_{i+1}) \otimes \cdots \otimes a_n \\ d_n(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) =& (a_n m) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \end{aligned}$$

abbiamo immediatamente che

$$b_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i$$

Ma, dato che, se $0 \leq i < j \leq n$, allora

$$d_i \circ d_j = d_{j-1} \circ d_i$$

troviamo immediatamente la tesi del lemma.

QED

Definizione 3.2 $(C_n(A,M), b_n)$ *definisce un complesso di catene la cui omologia si dice* omologia di Hochschild di A a coefficienti nel modulo M.

I gruppi di omologia si denotano con $HH_n(A,M)$: più propriamente dovremmo chiamarli moduli di omologia, dato che sono moduli sull'algebra commutativa $Z(A)$ (centro di A).

L'omologia di Hochschild è funtoriale almeno in due sensi: possiamo considerarla come un funtore covariante $HH_n(A,-) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}$ dalla categoria degli A-bimoduli in sé, oppure notare che, se M è un A-bimodulo e $\varphi : B \longrightarrow A$ un morfismo di algebre allora M è anche un B-bimodulo e la mappa φ ne induce una in omologia: $\varphi_* : HH_n(B,M) \longrightarrow HH_n(A,M)$.

Esempio 3.3 $HH_0(A,M)$ *è il modulo dei* coinvarianti di M, *cioè*

$$HH_0(A,M) = M/\{am - ma\}_{a\in A,\, m\in M}$$

Nel caso della rappresentazione aggiunta $M = A$ abbiamo ovviamente $HH_0(A,A) = A/[A,A]$ e quindi, se A è commutativa, $HH_0(A,A) = A$.

Esempio 3.4 *Se A è commutativa e possiede una unità, e se M è un bimodulo simmetrico (vale a dire $am = ma$) allora $HH_1(A,M) = M \otimes_A \Omega_A$ ove Ω_A sono i differenziali di Kähler di A; nel caso $M = A$ otteniamo quindi $HH_1(A,A) = \Omega_A$.*

La coomologia di Hochschild si introduce nel modo ovvio a partire dall'omologia: consideriamo i moduli

$$C^n(A,M) = \hom_{\mathbb{K}}(A^{\otimes n}, M)$$

e le mappe

$$\mathsf{d}_n : C^n(A,M) \longrightarrow C^{n+1}(A,M)$$

definite come

$$\begin{aligned}\mathsf{d}_n\varphi(a_1,...,a_{n+1}) = a_1\varphi(a_2,...,a_{n+1}) + &\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\varphi(a_1,...,a_ia_{i+1},...,a_{n+1})\\ &+ (-1)^{n+1}\varphi(a_1,...,a_n)a_{n+1}\end{aligned}$$

I gruppi di coomologia di Hochschild $HH^n(A,M)$ così ottenuti sono di nuovo $Z(A)$-moduli, e funtoriali: $HH^n(A,-) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}$ è un funtore dalla categoria dei bimoduli in sé, e se $\varphi : B \longrightarrow A$ è un morfismo di algebre e M un A-modulo allora è anche un B-bimodulo ed abbiamo una mappa indotta in coomologia $\varphi^* : HH^n(A,M) \longrightarrow HH^n(B,M)$.

Esempio 3.5 *$HH^0(A,M)$ è il modulo degli* invarianti *di M, cioè*

$$HH^0(A,M) = \{m \in M \mid \forall a \in A \;\; am = ma\}$$

Nel caso della rappresentazione aggiunta $M = A$ abbiamo ovviamente $HH^0(A,A) = Z(A)$ e quindi, se A è commutativa, $HH^0(A,A) = A$.

Esempio 3.6 *$HH^1(A,M)$ è il modulo delle derivazioni di A a valori in M modulo le derivazioni interne (cioè del tipo $D(a) = ma - am$ per un $m \in M$ fissato):*

$$HH^1(A,M) = \mathrm{Der}(A,M)/[M,A]$$

Nel caso $M = A$ otteniamo quindi $HH^1(A,A) = \mathrm{Der}(A)/[A,A]$: si tratta, come noto, di un'algebra di Lie.

Esempio 3.7 *$HH^2(A,M)$ è il modulo delle estensioni abeliane di A per tramite di M*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

modulo l'equivalenza data dalla commutatività del seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[dd] \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[ur] \arrow[dr] & & A \arrow[r] & 0 \\
 & & F \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Consideriamo ora un'algebra associativa $(A,\cdot)$ con unità e: abbiamo allora una mappa $\mathbb{K} \in A$ definita come $k \mapsto k\mathsf{e}$, possiamo quindi considerare lo spazio vettoriale quoziente $\overline{A} = A/\mathbb{K}$, e formare i prodotti tensoriali $\overline{C_n}(A,M) = M \otimes \overline{A}^{\otimes n}$, che formano un complesso rispetto al bordo di Hochschild passato al quoziente $A \longrightarrow A/\mathbb{K}$: questo complesso si dice *complesso di Hochschild normalizzato.*

Teorema 3.8 *La proiezione $C_n(A,M) \longrightarrow \overline{C_n}(A,M)$ è un quasi-isomorfismo di complessi.*

La dimostrazione consiste essenzialmente in un ragionamento di moduli simpliciali, cfr. ad esempio [12, §1.6.4].

Consideriamo ora un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$: possiamo associarle in modo naturale un'algebra associativa $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ inviluppante universale; esiste una corrispondenza fra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-bimoduli e rappresentazioni di $\mathfrak{g}$: se $\cdot : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \times M \longrightarrow M$ è un bimodulo allora definiamo sullo spazio vettoriale M l'azione

$$[g, m] = g \cdot m - m \cdot g$$

($g \in \mathfrak{g}$, $m \in M$) che rende M una rappresentazione, che denotiamo $M^{\mathfrak{g}}$.

Dunque data una rappresentazione di un'algebra di Lie possiamo produrre un bimodulo su un'algebra associativa, e quindi considerare le sue omologia e coomologia di Hochschild.

Definizione 3.9 *L'omologia $H_n(\mathfrak{g}, V)$ di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ a coefficienti in una rappresentazione V è l'algebra graduata $\bigoplus_n HH_n(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), M)$ ove $M^{\mathfrak{g}} = V$; la coomologia $H^n(\mathfrak{g}, V)$ di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ a coefficienti in una rappresentazione V è l'algebra graduata $\bigoplus_n HH^n(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), M)$ ove $M^{\mathfrak{g}} = V$.*

Possiamo esplicitamente calcolare queste omologie e coomologie per mezzo del complesso di Chevalley–Eilenberg [3]: nel caso dell'omologia si tratta del complesso di spazi vettoriali

$$L_n(\mathfrak{g}, V) = V \otimes \bigwedge^n \mathfrak{g}$$

dotati della mappa di bordo $b_n : L_n(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow L_{n-1}(\mathfrak{g}, V)$

$$\begin{aligned} b_n(v \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n) = & \sum_{i=1}^{n} (-1)^i [g_i, v] \otimes g_1 \wedge \cdots g_{i-1} \wedge g_{i+1} \wedge \cdots \wedge g_n \\ & + \sum_{i<j}^{0\cdots n} (-1)^{i+j-1} v \otimes [g_i, g_j] \wedge g_1 \wedge \cdots \wedge g_{i-1} \wedge g_{i+1} \wedge \cdots \\ & \qquad \cdots \wedge g_{j-1} \wedge g_{j+1} \wedge \cdots \wedge g_n \end{aligned}$$

mentre per la coomologia abbiamo il complesso di spazi vettoriali

$$L_n(\mathfrak{g}, V) = \hom_{\mathbb{K}}(\bigwedge{}^n \mathfrak{g}, V)$$

con il differenziale

$$\begin{aligned} \mathsf{d}\varphi(g_0, ..., g_n) = & \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [g_i, \varphi(g_0, ..., g_{i-1}, g_{i+1}, ..., g_n)] \\ & + \sum_{i<j}^{0\cdots n} (-1)^{i+j} \varphi([g_i, g_j], g_0, ..., g_{i-1}, g_{i+1}, ..., g_{j-1}, g_{j+1}, ..., g_n) \end{aligned}$$

La coomologia di Hochschild consente anche di definire l'omologia ciclica, la cui definizione vogliamo richiamare, seguendo [4].

Consideriamo un'algebra associativa A ed il suo bimodulo coaggiunto, vale a dire lo spazio vettoriale A^* duale di A rispetto alle azioni

$$a\varphi b(c) = \varphi(bca)$$

Ora consideriamo il complesso di cocatene di Hochschild in questo caso, vale a dire la somma degli spazi vettoriali

$$C^n(A, A^*) = \hom_{\mathbb{K}}(A^{\otimes n}, A^*) \cong A^{\otimes(n+1)*}$$

ove l'isomorfismo associa a $\widetilde{\varphi}$ un funzionale φ definito come

$$\varphi(a_0, a_1, ..., a_n) = \widetilde{\varphi}(a_1, ..., a_n)(a_0)$$

Allora il cobordo di Hochschild diviene

$$\begin{aligned}\mathsf{d}_n\varphi(a_0, a_1, ..., a_n) =& \varphi(a_0a_1, a_2, ..., a_n) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^n\varphi(a_0, ..., a_ia_{i+1}, ..., a_n)\\ &+ (-a)^{n+1}\varphi(a_{n+1}, a_0, ..., a_n)\end{aligned}$$

Come si vede dalla formula, se consideriamo una permutazione ciclica γ sull'insieme $\{0, 1, ..., n\}$ e denotiamo con $\varepsilon(\gamma)$ il suo segno, e l'operatore lineare $\Gamma : C^n(A, A^*) \longrightarrow C^n(A, A^*)$ definito come

$$\Gamma\varphi = \sum_{\gamma\in C_{n+1}} \varepsilon(\gamma)\gamma^*\varphi$$

(ove con C_{n+1} abbiamo denotato il gruppo delle permutazioni cicliche su $\{0, 1, ..., n\}$ e $\gamma^*\varphi(a_0, ..., a_n) = \varphi(a_{\gamma(0)}, ..., a_{\gamma(n)})$) allora l'immagine

$$C^n_\lambda(A) = \operatorname{Im}\Gamma$$

è esattamente lo spazio delle cocatene tali che $\gamma^*\varphi = \varepsilon(\gamma)\varphi$: per il seguente risultato si veda [4, §III.1.α]:

Teorema 3.10 *$(C^n_\lambda(A), \mathsf{d})$ è un sotto-complesso del complesso di Hochschild.*

La coomologia di questo complesso si dice *coomologia ciclica* di A, e la denotiamo con $HC^\bullet(A)$.

Esempio 3.11 *$HC(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}[x]/(x^2)$: in particolare, per n dispari si ha $HC^n(\mathbb{K}) = 0$ mentre per n pari si ha $HC^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$.*

4 Coomologia indotta da un modulo differenziale

Comunemente si ritiene, non a torto, che la più semplice e maneggevole coomologia sia quella di de Rham: partiremo dunque da una sua disamina nell'àmbito puramente algebrico, che in qualche senso le compete.

Sia dunque A un'algebra associativa su un campo $\mathbb{K}$.

Definizione 4.1 *Un* modulo differenziale *su A è una coppia (D, δ) ove D è un A-bimodulo e $\delta : A \longrightarrow D$ una derivazione.*

Dunque un modulo differenziale è in realtà un bimodulo: comunque possiamo considerarlo un modulo su $A \otimes A^{\mathrm{op}}$ equipaggiato dell'azione $(a \otimes a') \cdot m = a \cdot m \cdot a'$; nel caso commutativo confondiamo i bimoduli con i moduli sinistri.

Ovviamente vogliamo che questi oggetti facciano parte di una categoria, dunque diamo anche la

Definizione 4.2 *Se (D, δ) e (D', δ') sono moduli differenziali, un* morfismo *di moduli differenziali è un morfismo $\varphi : D \longrightarrow D'$ di A-bimoduli tale che $\delta' \circ \varphi = \delta$.*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\varphi"] & & D' \\ & A \arrow[ul, "\delta"] \arrow[ur, "\delta'"'] & \end{tikzcd}$$

Esempio 4.3 *Il modulo dei differenziali di Kähler Ω_A su un'algebra commutativa A è un modulo differenziale, che soddisfa alla ben nota proprietà universale, che possiamo, nel nostro linguaggio, formulare come segue*

Teorema 4.4 *Ω_A è l'oggetto iniziale nella categoria dei moduli differenziali su un'algebra commutativa A.*

Esempio 4.5 *Consideriamo il primo modulo del complesso di Hochschild normalizzato di A a coefficienti in A: $\overline{C_1}(A, A)$; vogliamo mostrare, seguendo Connes [4], che si tratta di un modulo differenziale analogo ai differenziali di Kähler.*

Rammentiamo che $\overline{C_1}(A, A) = A \otimes \overline{A}$: definiamo allora una mappa $\nu : \overline{C_1}(A, A) \longrightarrow A \otimes A$ come

$$\nu(a \otimes \overline{b}) = a \otimes b - ab \otimes \mathsf{e}$$

Si tratta di una mappa di A-bimoduli ben definita, dato che $\nu(a \otimes \overline{b})$ dipende solo dalla classe $\overline{b}$ in $\overline{A}$ e non da b; infatti se $k \in \mathbb{K}$ allora

$$\begin{aligned}\nu(a \otimes \overline{b + k\mathsf{e}}) &= a \otimes (b + k\mathsf{e}) - a(b + k\mathsf{e}) \otimes \mathsf{e} \\ &= a \otimes b + ka \otimes \mathsf{e} - ab \otimes \mathsf{e} - ka \otimes \mathsf{e} \\ &= \nu(a \otimes \overline{b})\end{aligned}$$

Inoltre, dato che $a \otimes b = ab \otimes \mathsf{e}$ se $b \in \mathbb{K}$ si tratta di una mappa iniettiva; infine notiamo che $A \otimes A/\operatorname{Im}\nu$ è un bimodulo isomorfo ad A: infatti basta considerare il prodotto $\mu : A \otimes A/ \longrightarrow A$, cioè $\mu(a \otimes b) = ab$, e notare che

$$\mu(\nu(a \otimes \overline{b})) = \mu(a \otimes b - ab \otimes \mathsf{e}) = 0$$

Dunque $\operatorname{Im}\nu \cong \ker\mu$ da cui

Proposizione 4.6 $\overline{C_1}(A, A) \cong \ker\mu$

Scriviamo esplicitamente la struttura di A-bimodulo su $\overline{C_1}(A, A)$ ereditata dall'essere isomorfo a un sotto-modulo di $A \otimes A$: suggestivamente scriviamo un elemento $a \otimes \overline{b} \in \overline{C_1}(A, A)$ come $a\mathsf{d}b$; inoltre liberiamoci dalla pesante notazione $\overline{C_1}(A, A)$ ed usiamo $\Omega^1 A$ in sua vece.

La struttura di modulo sinistro è ovviamente

$$a \cdot (b\mathsf{d}c) = (ab)\mathsf{d}c$$

mentre quella di modulo destro è

$$(a\mathsf{d}b)c = a\mathsf{d}(bc) - ab\mathsf{d}c \tag{$*$}$$

(In termini di questi moduli è possibile definire una coomologia di de Rham non commutativa [9].) Abbiamo dunque un A-bimodulo $\Omega^1 A$ che è anche un modulo differenziale, rispetto alla mappa suggerita dalla notazione precedente:

$$\mathsf{d}a = \mathsf{e} \otimes a$$

Infatti, per la (*)

$$\mathsf{d}(ab) = \mathsf{e} \otimes (ab) = a\mathsf{d}b + (\mathsf{d}a)b$$

Teorema 4.7 *$\Omega^1 A$ è un oggetto iniziale nella categoria dei moduli differenziali su un'algebra non commutativa.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo un modulo differenziale su A, cioè una coppia (D, δ) ove D è un A-bimodulo e $\delta : A \longrightarrow D$ è una derivazione; definiamo una funzione $\varphi : \Omega^1 A \longrightarrow D$ come (ricordiamo che $a\mathsf{d}b$ vuol dire $a \otimes \overline{b}$ in $\Omega^1 A$):

$$\varphi(\mathsf{d}b) = \delta b$$

ed estesa per A-linearità; abbiamo quindi una fattorizzazione

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "\mathbf{d}"'] & & D \\ & \Omega^1 A \arrow[ur, dotted, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

QED

Si noti che questa costruzione può farsi per un'algebra che non possiede unità: basterà porre in quel caso $\widetilde{A} = A \oplus \mathbb{K}$ (cioè aggiungere l'unità all'algebra) e quindi considerare $\Omega^1 \widetilde{A}$, vale a dire $\widetilde{A} \otimes A$.

Nel caso commutativo l'esempio precedente ci permette di ritrovare la classica nozione di differenziale introdotta da Kähler nella sua *Geometria Aritmetica;* v'è comunque una notevole differenza: quando si estendono i differenziali in grado superiore, si pone, nel caso non commutativo, $\Omega^n A = \Omega^1 A \otimes_A \cdots \otimes_A \Omega^1 A$, mentre nel caso commutativo è necessario considerare i prodotti esterni affinché la medesima estensione del differenziale

$$\mathsf{d}(a_0 \mathsf{d}a_1 \otimes \cdots \otimes \mathsf{d}a_n) = \mathsf{d}a_0 \otimes \mathsf{d}a_1 \otimes \cdots \otimes \mathsf{d}a_n$$

dia luogo ad una DG-algebra.

Diamo un ulteriore esempio di modulo differenziale.

Esempio 4.8 *Se $(A, \cdot, \{\,\})$ è un'algebra di Poisson allora il modulo $\mathcal{H}_A$ generato dalle derivazioni hamiltoniane di A è un modulo differenziale rispetto alla mappa hamiltoniana*

$$X : A \longrightarrow \mathcal{H}_A$$

Consideriamo un modulo differenziale (D, δ) *su un'algebra commutativa A:* possiamo allora prenderne le potenze esterne su A, ed ottenere l'algebra graduata $\bigwedge_A^* D$; vogliamo estendere la derivazione $\mathbf{d}$ ad un differenziale di quest'algebra in sé, e lo facciamo nel modo ovvio: se $a \in A$ e $\alpha_1, ..., \alpha_n \in D$ allora poniamo, per $a \in A$ e $\alpha_1, ..., \alpha_n \in D$:

$$\mathbf{d}(a\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) = \delta a \wedge \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$$

In questo modo definiamo una mappa $\mathbb{K}$-lineare.

Proposizione 4.9 *$\boldsymbol{d}$ è una derivazione graduata di grado $+1$ tale che $\boldsymbol{d}\circ\boldsymbol{d} = 0$.*

Possiamo quindi considerare la *coomologia di de Rham* dell'algebra A a coefficienti nel modulo differenziale (D, δ), definendo gli spazi

$$H^n_{dR}(A, D) = \frac{\ker(\bigwedge^n_A D \xrightarrow{\mathbf{d}} \bigwedge^{n+1}_A D)}{\mathrm{Im}(\bigwedge^{n-1}_A D \xrightarrow{\mathbf{d}} \bigwedge^n_A D)}$$

ove conveniamo che $\bigwedge^{-1}_A D = 0$.

Gli spazi vettoriali $H^n_{dR}(D)$ sono moduli su A: abbiamo anche il modulo graduato

$$H_{dR}(A, D) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n_{dR}(A, D)$$

rispetto al prodotto indotto in coomologia dal prodotto $\wedge$.

Notiamo che la coomologia di de Rham a coefficienti in un modulo differenziale è funtoriale: supponiamo che $f : A \longrightarrow B$ sia un morfismo di algebre associative; allora ogni B-modulo differenziale (D, δ) è anche un A-modulo rispetto al prodotto $a\varphi = f(a)\varphi$ ed alla derivazione $\delta \circ f$, e il morfismo indotto

$$f^* : \bigwedge{}^n_B D \longrightarrow \bigwedge{}^n_A D$$

induce a sua volta un morfismo in coomologia:

$$H_{dR}(B, D) \longrightarrow H_{dR}(A, D)$$

Spieghiamo ora la nostra terminologia.

Esempio 4.10 *Se M è una varietà differenziabile e $A = C^\infty(M)$ allora la categoria dei moduli proiettivi su A è equivalente alla categoria* $\mathbf{Vec}(M)$ *dei fibrati vettoriali su M: comunque la categoria dei moduli differenziali si identifica solo ad una sottocategoria della categoria dei fasci su M, e possiede un oggetto iniziale, che altri non è se non il modulo $\mathcal{E}^1(M)$ delle sezioni differenziabili del fibrato cotangente di M: allora la coomologia da noi definita di A a coefficienti in $\mathcal{E}^1(M)$ coincide con quella di de Rham.*

Osservazione. $\mathcal{E}^1(M)$ non è il modulo dei differenziali di Kähler su $A = C^\infty(M)$; quest'ultimo è infatti il modulo delle sezioni insiemistiche del fibrato cotangente, cioè di tutte le funzioni $\sigma : M \longrightarrow T^*M$ che composte con la proiezione $T^*M \longrightarrow M$ diano l'identità, e quindi contiene anche quelle non differenziabili, ed addirittura non continue!!!

Esempio 4.11 *Se $A = C^\infty(M)$ è l'algebra delle funzioni differenziabili di una varietà di Poisson allora la coomologia di de Rham di A a coefficienti nel modulo differenziale generato dai campi hamiltoniani su M è esattamente la coomologia di Poisson di M definita da Lichnerowicz.*

Torniamo al nostro caso algebrico generale: se (D,δ) è un modulo[1] differenziale su un'algebra associativa A, possiamo considerare lo spazio $\ker\delta$ degli elementi di A il cui differenziale è nullo in D e lo spazio

$$\mathfrak{X}(D) = \{X \in \mathrm{Der}(A) \mid \forall c \in \ker\delta \;\; X(c) = 0\}$$

delle derivazioni di A che sono nulle su gli elementi di questo nucleo: dato che, se $X, Y \in \mathfrak{X}(D)$ e $c \in \ker\delta$ allora

$$[X,Y](c) = X(Y(c)) - Y(X(c)) = 0$$

abbiamo che $\mathfrak{X}(D)$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathrm{Der}(A)$.

Notiamo che quest'algebra di Lie possiede una rappresentazione naturale in A:

$$X \cdot a = X(a)$$

ovviamente mai fedele; inoltre esiste un accoppiamento bilineare e non degenere fra $\mathfrak{X}(D)$ e D:

$$\mathbf{i}_X a\delta b = aX(b)$$

che, al solito, chiamiamo *contrazione*, e che soddisfa alle usuali proprietà

$$\mathbf{i}_{aX}\omega = a\mathbf{i}_X\omega = \mathbf{i}_X(a\omega)$$

Notiamo che possiamo estendere in modo unico questo accoppiamento alle potenze esterne di $\mathfrak{X}(D)$ e D, in modo da soddisfare le identità

- $\mathbf{i}_X\mathbf{i}_X\alpha = 0$
- $\mathbf{i}_{P\wedge Q}\alpha = \mathbf{i}_Q\mathbf{i}_P\alpha$
- $\mathbf{i}_X(\alpha\wedge\beta) = \mathbf{i}_X\alpha\wedge\beta + (-1)^k\alpha\wedge\mathbf{i}_X\beta$

ove $\alpha \in \bigwedge^k D$, $\beta \in \bigwedge^h D$, $X \in \mathfrak{X}(D)$ e $P, Q \in \bigwedge^* \mathfrak{X}(D)$; possiamo anche definire una *derivata di Lie* come un operatore $\mathcal{L} : \mathfrak{X}(D) \longrightarrow \mathrm{End}(\bigoplus_n \bigwedge^n D)$:

$$\mathcal{L}_X\alpha = \mathbf{i}_X\delta\alpha + \delta\mathbf{i}_X\alpha$$

Allora valgono le

[1] D'ora innanzi diremo "modulo" intendendo "bimodulo" se l'algebra non è commutativa.

- $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X\alpha \wedge \beta + \alpha\mathcal{L}_X\beta$
- $\mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$
- $\mathcal{L}_{aX}\alpha = a\mathcal{L}_X\alpha + \delta a \wedge \mathcal{L}_X\alpha$
- $\mathbf{i}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathbf{i}_Y]$
- $[\mathcal{L}_X, \delta] = [\mathcal{L}_X, \mathbf{i}_X] = 0$

La contrazione, in particolare, fornisce una mappa iniettiva

$$b : \bigwedge^n D \longrightarrow \hom_A(\bigwedge^n \mathfrak{X}(D), A)$$

la cui immagine è quindi un sotto-complesso del complesso di Chevalley–Eilenberg dell'algebra di Lie $\mathfrak{X}(D)$ a coefficienti nella rappresentazione A, che chiamiamo complesso di Chevalley–Eilenberg differenziale: la contrazione definisce in effetti una mappa di complessi, dato che (scriviamo $\alpha = a_0\delta a_1 \wedge \cdots \wedge \delta a_n \in D$)

$$\begin{aligned}
(d\gamma(\alpha))(X_0, ..., X_n) = &\sum_{i=0}^{n}(-1)^i X_i \left(\gamma(\alpha)(X_0, ..., \widehat{X_i}, ...X_n)\right) \\
&+ \sum_{i<j}^{0,...,n} (-1)^{i+j} (\gamma(\alpha)) ([X_i, X_j], X_0, ..., \widehat{X_i}, ..., \widehat{X_j}, ..., X_n) \\
=&\sum_{i=0}^{n}(-1)^i X_i \left(a_0 X_0(a_1) \cdots X_{i-1}(a_i) X_{i+1}(a_{i+1}) \cdots X_n(a_n)\right) \\
&+ \sum_{i<j}^{0,...,n} (-1)^{i+j} a_0 [X_i, X_j](a_1) X_0(a_2) \cdots X_{i-1}(a_{i+1}) X_{i+1}(a_{i+2}) \cdots \\
&\qquad \cdots X_{j-1}(a_j) X_{j+1}(a_{j+1}) \cdots X_n(a_n) \\
=&\prod_{i=0}^{n} X_i(a_i) = (\gamma\delta(\alpha)) (X_0, ..., X_n)
\end{aligned}$$

Dunque

Teorema 4.12 *La coomologia di de Rham di A a coefficienti nel modulo differenziale (D, δ) è isomorfa alla coomologia differenziale dell'algebra di Lie $\mathfrak{X}(D)$ a coefficienti nella rappresentazione A.*

5 Esempio: la coomologia di Poisson

Un caso assai interessante è dato dai moduli differenziali che siano sottomoduli del modulo delle derivazioni: infatti in questo caso la mappa fornita dalla proprietà universale di questi ultimi

$$\mu : \Omega_A \longrightarrow D$$

consente di definire su A una struttura di algebra non associativa su A come segue

$$\{a, b\} = \mu(\mathbf{d}a)(b)$$

Il fatto che μ sia una mappa di moduli differenziali implica che

$$\begin{aligned} \{ab, c\} &= \mu(\mathbf{d}(ab))(c) = \mu((\mathbf{d}a)b)(c) + \mu(a\mathbf{d}b)(c) \\ &= \mu(\mathbf{d}a)(c)b + a\mu(\mathbf{d}b)(c) \\ &= \{a, c\}b + a\{b, c\} \end{aligned}$$

È naturale chiedersi quando questa struttura algebrica dia luogo ad un'algebra di Poisson su A: ciò significa dare delle condizioni affinché sia verificata l'identità di Jacobi

$$\{\{a, b\}, c\} = \{a, \{b, c\}\} - \{b, \{a, c\}\}$$

che, riscritta usando la definizione, fornisce

$$\mu\mathbf{d}\{a, b\} = [\mu\mathbf{d}a, \mu\mathbf{d}b]$$

Proposizione 5.1 *Dare una struttura di Poisson su un'algebra associativa* $(A, \cdot)$ *equivale a dare un modulo differenziale di derivazioni su A tale che la mappa* $\mu \circ \boldsymbol{d} : A \longrightarrow D$ *sia un morfismo antisimmetrico dall'algebra* $(A, \{\})$ *all'algebra di Lie* $(\mathrm{Der}(A), [,])$.

Dire antisimmetrico nell'enunciato precedente significa richiedere

$$\mu(\mathbf{d}a)(b) + \mu(\mathbf{d}b)(a) = 0$$

Anche il modulo dei differenziali di Kähler eredita una struttura algebrica che linearizza quella indotta su A che possiamo definire come

$$\{a\mathbf{d}b, c\mathbf{d}d\} = a(\mathbf{d}\{b, d\})c + a\{b, c\}\mathbf{d}d + \{a, d\}(\mathbf{d}b)c$$

ed estendere per linearità a tutto Ω_A: in particolare

$$\{\mathbf{d}a, \mathbf{d}b\} = \mathbf{d}\{a, b\}$$

Proposizione 5.2 $(\Omega_A, \{\})$ *è un'algebra di Lie se e solo se lo è* $(A, \{\})$.

Quindi nel caso di un'algebra di Poisson anche Ω_A è un'algebra di Lie; inoltre, in questo caso, il morfismo di moduli differenziali $\mu : \Omega_A \longrightarrow \mathcal{H}_A$ è anche un morfismo di algebre di Lie:

Proposizione 5.3 $\mu\{\alpha, \beta\} = [\mu\alpha, \mu\beta]$

Dimostrazione: Dato che l'A-modulo Ω_A è generato dai differenziali esatti ci basta mostrare l'identità per $\omega_1 = a\mathbf{d}b$ e $\omega_2 = c\mathbf{d}e$: per questo usiamo le proprietà delle parentesi $\{\,\}$ fra 1-forme e la A-linearità di μ:

$$\begin{aligned}
\mu\{a\mathbf{d}b, c\mathbf{d}e\} =& \mu c\{a\mathbf{d}b, \mathbf{d}e\} + \mu\langle\mu(a\mathbf{d}b), \mathbf{d}c\rangle\mathbf{d}e \\
&= c\mu a\{\mathbf{d}b, \mathbf{d}e\} - c\mu\langle\mu\mathbf{d}e, \mathbf{d}a\rangle\mathbf{d}b + \langle\mu(a\mathbf{d}b), \mathbf{d}c\rangle X_e \\
&= acX_{\{b,e\}} - c\{e, a\}X_b + a\{b, c\}X_e \\
&= ac[X_b, X_e] + a(X_b c)X_e - c(X_e a)X_b \\
&= aX_b(cX_e) - cX_e(aX_b) = [aX_b, cX_e] \\
&= [\mu(a\mathbf{d}b), \mu(c\mathbf{d}e)]
\end{aligned}$$

QED

Consideriamo ora il caso $D = \operatorname{Der} A$: la proprietà universale dei differenziali di Kähler afferma che

$$\operatorname{Der}(A) = \hom_A(\Omega_A, A)$$

col che possiamo identificare $\mathfrak{X}(D)$ con Ω_A rispetto alle parentesi di Lie appena introdotte.

La coomologia del modulo differenziale D, cioè, per il teorema 4.12, la coomologia dell'algebra di Lie Ω_A a coefficienti nella rappresentazione A, è esattamente la *coomologia di Poisson* così come fu introdotta da Lichnerowicz nel 1977; scriviamone esplicitamente il differenziale

$$\begin{aligned}
\langle\delta P, \omega_0 \wedge \ldots \wedge \omega_p\rangle =& \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\mu(\omega_i)\mathbf{d}\mathbf{i}_P(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{i-1} \wedge \omega_{i+1} \wedge \cdots \wedge \omega_p) + \\
&+ \sum_{i<j}^{0\cdots p}(-1)^{i+j}\mathbf{i}_P[\omega_i, \omega_j] \wedge \cdots \wedge \omega_{i-1} \wedge \omega_{i+1} \wedge \cdots \\
&\cdots \wedge \omega_{j-1} \wedge \omega_{j+1} \wedge \cdots \wedge \omega_p
\end{aligned}$$

Possiamo estendere il morfismo di moduli $\mu : \Omega_A \longrightarrow \operatorname{Der} A$ in grado qualsiasi, tenendo conto del segno, come

$$\langle\mu, \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k\rangle = (-1)^k\mu\omega_1 \wedge \ldots \wedge \mu\omega_k$$

(così che $\{f, g\} = \langle\mu\mathbf{d}f, \mathbf{d}g\rangle = -\{g, f\}$). Usando questa definizione si potrebbe, con un calcolo irriferibile, dimostrare il

Lemma 5.4 $\delta \circ \mu + \mu \circ \boldsymbol{d} = 0$

Per il lemma, il morfismo di moduli μ induce un morfismo di complessi di cocatene, e quindi una mappa

$$H_{dR}(A) \longrightarrow H_\pi(A)$$

dall'algebra di coomologia di de Rham all'algebra di coomologia di Poisson di A.

Identifichiamo i primi tre gruppi di coomologia di un'algebra di Poisson:

Teorema 5.5 *Se A è un'algebra di Poisson allora*

(1) $H^0_\pi(A) = \operatorname{Cas} A$.

(2) $H^1_\pi(A) = \operatorname{Can} A / \operatorname{Ham} A$.

DIMOSTRAZIONE: Per la (0) si tratta di osservare che $\operatorname{Der}(A)^0 = A$ e che l'essere $a \in \operatorname{Der}(A)^0$ un cociclo significa significa che $\delta a = 0$ cioè che $X_a = 0$ e quindi, per ogni $b \in A$: $\{a, b\} = 0$. Dunque $H^0_\pi(A) = Z^0_\pi(A) = \operatorname{Cas} A$.

Per la (1) basta notare che un 1-cociclo è un elemento X di $\operatorname{Der} A$ tale che $\delta X = 0$, cioè, per ogni $a \in a$:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \delta X, \mathbf{d}a \wedge \mathbf{d}b \rangle = \mu(\mathbf{d}a, \mathbf{d}X(b)) - \mu(\mathbf{d}b, \mathbf{d}X(a)) - \langle X, \{\mathbf{d}a, \mathbf{d}b\} \rangle \\ &= \{X(a), b\} + \{a, X(b)\} - X\{a, b\} \end{aligned}$$

Quindi gli 1-cocicli sono i campi canonici; gli 1-cobordi sono invece gli elementi di $\operatorname{Der} A$ della forma $\delta a = X_a$ per qualche $a \in A$, cioè i campi hamiltoniani, e quindi $H^1_\pi(A) = \operatorname{Can} A / \operatorname{Ham} A$.

QED

Possiamo dare una interpretazione anche per $H^2_\pi(A)$ che, almeno in questa formulazione algebrica, non sembra essere presente in letteratura[2].

Definizione 5.6 *Una* deformazione *di un'algebra di Poisson A è una sequenza esatta di $\mathbb{K}$-spazi vettoriali*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} \Omega_A \longrightarrow 0$$

ove E è una $\mathbb{K}$-algebra di Poisson, p un morfismo di $\mathbb{K}$-algebre di Lie e i un morfismo di $\mathbb{K}$-algebre associative, tali che

$$i\{p(e), b\} = [e, i(b)]$$

[2] Nel caso $A = C^\infty(M)$ esistono dei calcoli particolari, dovuti a Lu, Ginzburg e Nakhanishi che presentano $H^2_\pi(A)$ in modo concreto come spazio di deformazioni del tensore di Poisson.

Due deformazioni si dicono equivalenti *se esiste un morfismo di* $\mathbb{K}$*-algebre di Lie* $h : E \longrightarrow E'$ *in modo che il diagramma*

$$\begin{tikzcd} & & E \arrow[dd] \arrow[dr] & & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Omega_A \arrow[r] & 0 \\ & & E' \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

sia commutativo

Il motivo della terminologia si può spiegare come segue: consideriamo il tensore di Poisson $\pi : \Omega_A \wedge \Omega_A \longrightarrow A$ (definito come $\pi(\mathbf{d}a \wedge \mathbf{d}b) = \langle \mu(\mathbf{d}a), \mathbf{d}c \rangle$) e supponiamo che

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} \Omega_A \longrightarrow 0$$

sia una deformazione di A: allora possiamo comporre π con p e ottenere il tensore

$$\widetilde{\pi}(e_1, e_2) = \pi(p(e_1), p(e_2))$$

su E: questa struttura di Lie è la deformazione del tensore di Poisson associata a E. Ad esempio, il tensore di Poisson stesso definisce una tale deformazione (banale) su Ω_A con $i = 0$ e p l'identità; la deformazione corrispondente a $p = 0$ e i l'identità (con $E = A$) è quella nulla, che deforma cioè la struttura di Poisson in una identicamente nulla.

Teorema 5.7 *$H^2_\pi(A)$ è il modulo delle deformazioni delle strutture di Poisson su A modulo equivalenza.*

La dimostrazione è classica, e ripete ad esempio quella data in [2, §XIV-5] per le estensioni di algebre di Lie (cfr. pure [5, §1.4]).

Negli esempi principali di algebre di Poisson che abbiamo introdotto (le algebre delle varietà simplettiche e dei duali delle algebre di Lie) la coomologia di Poisson coincide con oggetti ben noti:

Teorema (LICHNEROWICZ) **5.8** *La coomologia di Poisson dell'algebra $A = C^\infty(S)$ ove S è una varietà simplettica coincide con la coomologia di de Rham della varietà.*

Questo segue immediatamente dall'essere l'isomorfismo μ un isomorfismo dei rispettivi complessi di coomologia (cfr. [11] per una dimostrazione diretta).

Teorema (GINZBURG–LU–WEINSTEIN) **5.9** *La coomologia di Poisson dell'algebra $A = C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ della varietà di Poisson lineare duale di un'algebra di Lie coincide con la coomologia dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ a coefficienti nella rappresentazione A.*

Si tratta di un risultato noto che non ridimostreremo qui (cfr. [7]).

A titolo di esempio della difficoltà del calcolo della coomologia di Poisson in generale, anche per la mancanza di reali strumenti computazionali (ad esempio questa coomologia, malgrado il nome, non è funtoriale!), diamo la coomologia di alcune strutture di Poisson quadratiche nel piano, determinate da V. Ginzburg [6] e N. Nakanishi [13]: ad esempio la struttura di Poisson $\mathbb{R}^2_0$

$$\{f,g\}(x,y) = (x^2+y^2)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)$$

ha i seguenti gruppi di coomologia di Poisson:

$$H^0_\pi(\mathbb{R}^2_0) = \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad H^1_\pi(\mathbb{R}^2_0) = \mathbb{R}^2 \qquad \text{e} \qquad H^2_\pi(\mathbb{R}^2_0) = \mathbb{R}^2$$

ove i generatori in grado uno sono

$$x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \qquad \text{e} \qquad x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

e i generatori in grado due sono

$$\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad (x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y}$$

Invece, per la struttura di Poisson $\mathbb{R}^2_y$

$$\{f,g\} = y^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)$$

il primo gruppo di coomologia è di dimensione infinita, come pure il secondo, che è isomorfo a $C^\infty(\mathbb{R})$ (cfr. [13]).

In ambedue i casi la dimostrazione è non banale (ancora mentre Vaisman scriveva il suo libro [15] non era chiaro quali fossero questi gruppi di coomologia).

Concludiamo introducendo un'altra nozione omologica sulle varietà di Poisson, vale a dire l'*omologia di Poisson* (cfr. [10], [1], [8], [15, §5]). Per introdurla consideriamo l'operatore $\Delta : \Omega^n_A \longrightarrow \Omega^{n-1}_A$ definito come

$$\Delta\omega = [\mathbf{i}_\pi, d] = \mathbf{i}_\pi\mathbf{d}\omega - \mathbf{d}\mathbf{i}_\pi\omega$$

Si tratta di un operatore differenziale di ordine minore di due. Inoltre

$$\Delta\mathbf{d} + \mathbf{d}\Delta = \mathbf{i}_\pi\mathbf{d}^2 - \mathbf{d}\mathbf{i}_\pi\mathbf{d} + \mathbf{d}\mathbf{i}_\pi\mathbf{d} - \mathbf{d}^2\mathbf{i}_\pi = 0$$

Possiamo dare anche per questo operatore una espressione differenziale:

$$\begin{aligned}
&\Delta(a_0\mathbf{d}a_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}a_n) = \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\{a_0, a_i\}\mathbf{d}a_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}a_{i-1} \wedge \mathbf{d}a_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}a_n \\
&\qquad + \sum_{i<j}^{1\cdots n} (-1)^{i+j} a_0\mathbf{d}\{a_i, a_j\} \wedge \mathbf{d}a_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}a_{i-1} \wedge \mathbf{d}a_{i+1} \wedge \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots \wedge \mathbf{d}a_{j-1} \wedge \mathbf{d}a_{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}a_n
\end{aligned}$$

per mezzo di un calcolo che di nuovo non vogliamo infliggere al lettore.

Dimostrazione: Applichiamo la definizione e le proprietà del simbolo di sommatoria:

$$\begin{aligned}
&\Delta(a_0\mathbf{d}a_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}a_n) = \\
&\quad = \mathbf{i}_\pi(\mathbf{d}a_0 \wedge \mathbf{d}a_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}a_n) - \mathbf{d}\mathbf{i}_\pi(a_0\mathbf{d}a_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}a_n) \\
&\quad = \sum_{i<j}^{0\cdots n} (-1)^{i+j+1}\pi(\mathbf{d}a_i \wedge \mathbf{d}a_j)\mathbf{d}a_0 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}a_{i-1} \wedge \mathbf{d}a_{i+1} \wedge \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots \wedge \mathbf{d}a_{j-1} \wedge \mathbf{d}a_{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}a_n \\
&\qquad - \mathbf{d}\sum_{i<j}^{1\cdots n} (-1)^{i+j+1} a_0\pi(\mathbf{d}a_i \wedge \mathbf{d}a_j)\mathbf{d}a_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}a_{i-1} \wedge \mathbf{d}a_{i+1} \wedge \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots \wedge \mathbf{d}a_{j-1} \wedge \mathbf{d}a_{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}a_n
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i<j}^{0\cdots n} (-1)^{i+j+1} \pi(\mathbf{d}a_i \wedge \mathbf{d}a_j) \mathbf{d}a_0 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}a_{i-1} \wedge \mathbf{d}a_{i+1} \wedge \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots \wedge \mathbf{d}a_{j-1} \wedge \mathbf{d}a_{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}a_n \\
&\quad - \sum_{i<j}^{1\cdots n} (-1)^{i+j+1} \pi(\mathbf{d}a_i \wedge \mathbf{d}a_j) \mathbf{d}a_0 \wedge \mathbf{d}a_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}a_{i-1} \wedge \mathbf{d}a_{i+1} \wedge \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots \wedge \mathbf{d}a_{j-1} \wedge \mathbf{d}a_{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}a_n \\
&\quad - \sum_{i<j}^{1\cdots n} (-1)^{i+j+1} a_0 \mathbf{d}\pi(\mathbf{d}a_i \wedge \mathbf{d}a_j) \wedge \mathbf{d}a_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}a_{i-1} \wedge \mathbf{d}a_{i+1} \wedge \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots \wedge \mathbf{d}a_{j-1} \wedge \mathbf{d}a_{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}a_n \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \pi(\mathbf{d}a_0 \wedge \mathbf{d}a_j) \mathbf{d}a_0 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}a_{i-1} \wedge \mathbf{d}a_{i+1} \wedge \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots \wedge \mathbf{d}a_{j-1} \wedge \mathbf{d}a_{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}a_n \\
&\quad - \sum_{i<j}^{1\cdots n} (-1)^{i+j+1} a_0 \mathbf{d}\pi(\mathbf{d}a_i \wedge \mathbf{d}a_j) \wedge \mathbf{d}a_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}a_{i-1} \wedge \mathbf{d}a_{i+1} \wedge \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots \wedge \mathbf{d}a_{j-1} \wedge \mathbf{d}a_{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}a_n
\end{aligned}
$$

Tenendo conto del fatto che $\pi(\mathbf{d}a \wedge \mathbf{d}b) = \{a, b\}$ si ha la tesi.

QED

Corollario 5.10 $\Delta(a\boldsymbol{d}b) = \{a, b\}$.

Ora è facile verificare che $\Delta^2 = 0$: si tratta di un calcolo formale del tutto simile a quello per il differenziale esterno (cfr. [15, §4.2]). Abbiamo quindi una mappa di bordo che chiamiamo *differenziale di Koszul*, che dà luogo ad un complesso di catene

$$
\cdots \longrightarrow \Omega_A^{n+1} \longrightarrow \Omega_A^n \longrightarrow \Omega_A^{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega_A^1 \longrightarrow A \longrightarrow 0
$$

la cui omologia è l'*omologia di Poisson* dell'algebra A, e i cui gruppi si denotano con $H_n^\pi(A)$.

In generale questa omologia non è la duale della coomologia di Poisson, anche se esiste un legame: il calcolo è proibitivo quanto per la coomologia; comunque, come ci si aspetta (cfr. [1]):

Teorema (BRYLINSKI) **5.11** *Se S è una varietà simplettica allora l'omologia di Poisson dell'algebra $A = C^\infty(S)$ è isomorfa all'omologia di de Rham.*

Anche nel caso della varietà di Lie–Poisson vale un risultato analogo a quello della coomologia (cfr. [10]):

Teorema (Koszul) **5.12** *Se $\mathfrak{g}^*$ è una varietà di Lie–Poisson allora la sua omologia di Poisson è l'omologia dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ a coefficienti nella rappresentazione $A = C^\infty(\mathfrak{g}^*)$.*

Come esempio diamo qualche calcolo relativo al caso del piano simplettico con una singolarità nell'origine $\mathbb{R}^2_0$: cominciamo con il secondo gruppo di omologia, e consideriamo una 2-forma

$$\omega = f(x,y)\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$$

per la quale si ha

$$\Delta\omega = \mathbf{i}_\pi \mathbf{d}\omega - \mathbf{d}\mathbf{i}_\pi\omega = -\mathbf{d}(f(x,y)(x^2+y^2))$$

Dunque l'essere un ciclo equivale a

$$f(x,y) = \frac{c}{x^2+y^2}$$

con $c \in \mathbb{R}$ (per $x, y) \neq (0,0)$; ovviamente una tale funzione si estende in modo continuo su tutto $\mathbb{R}^2$ solo se $c = 0$, quindi lo spazio dei 2-cicli di Poisson è nullo, col che $H_2^\pi(\mathbb{R}^2_0) = 0$: in particolare non coincide né con $H_0(\mathbb{R}^2)$ (omologia di de Rham).

In grado zero abbiamo

$$H_0^\pi(\mathbb{R}^2_0) = \frac{C^\infty(\mathbb{R}^2)}{\operatorname{Im}\Delta} = \frac{C^\infty(\mathbb{R}^2)}{\{(x^2+y^2)\operatorname{div} f \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)\}}$$

Infatti

$$\Delta(a\mathbf{d}x + b\mathbf{d}y) = \{a, x\} + \{b, y\} = (x^2+y^2)\,(\partial_x b - \partial_y a)$$

Si noti che questo spazio di omologia non è nullo: infatti la funzione

$$f(x,y) = (x-y)\sqrt{x^2+y^2}$$

non può in alcun modo appartenere allo spazio che figura a denominatore: dovremmo infatti, in quel caso, avere

$$(\partial_x b - \partial_y a) = \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

il che, in tutto il piano (compresa l'origine), è impossibile.

Lo spazio H_1^π è, per definizione, il quoziente

$$H_1^\pi(\mathbb{R}_0^2) = \frac{\{\omega \in \Omega \mid d\omega = 0\}}{\{\Delta(f dx \wedge dy)\}}$$

Infatti abbiamo già calcolato $\Delta(a\mathbf{d}x + b\mathbf{d}y)$, e il suo annullarsi equivale all'annullarsi di $\partial_y a - \partial_y b$, cioè di $\mathbf{d}\omega = \mathbf{d}(a\mathbf{d}x + b\mathbf{d}y)$; il denominatore coincide con $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, dato che

$$\Delta(f\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y) = -\mathbf{d}(f\{x, y\}) = -\mathbf{d}(f(x^2 + y^2))$$

e la mappa $\alpha : C^\infty(\mathbb{R}^2) \longrightarrow B_1^\pi(\mathbb{R}_0^2)$ definita come

$$\alpha(f) = -\mathbf{d}(f(x^2 + y^2))$$

è iniettiva, avendosi

$$-\mathbf{d}(f(x^2 + y^2)) = 0 \Rightarrow f = 0$$

(come abbiamo già notato nel calcolo di $H_0^\pi(\mathbb{R}^2)$) ed è suriettiva in modo ovvio.

6 Coomologia differenziale a coefficienti in un modulo

Vogliamo ora estendere la coomologia di un modulo differenziale in modo da tener conto dell'azione dell'algebra su un ulteriore modulo, come avviene nel caso della coomologia di Hochschild.

Consideriamo un'algebra associativa e commutativa A, ed un modulo E su A.

Definizione 6.1 *Se (D, δ) è un A-modulo differenziale, una D-*connessione *in un A-modulo E è un operatore K-lineare $\nabla : E \longrightarrow E \otimes_A D$ che soddisfi alla identità di Leibniz*

$$\nabla(ae) = a\nabla e + e \otimes \delta a$$

per $a \in A$ ed $e \in E$.

Ovviamente la connessione avrà, in generale, valori nel modulo $E \otimes D$ e sarà non solo $\mathbb{K}$-lineare, ma $\ker\delta$-lineare, dato che, se $z \in \ker\delta$ allora

$$\nabla(zs) = z\nabla s + s \otimes \delta z = z\nabla s$$

Si noti inoltre che, nel caso $D = \Omega_A$ del modulo dei differenziali ritroviamo il classico concetto di connessione: chiameremo le Ω_A-connessioni semplicemente *connessioni* nel modulo E; ovviamente in questo caso $A_\delta = A$.

Per la proprietà universale dei differenziali, ogni connessione ∇ dà luogo ad una D-connessione $\widetilde{\nabla}$ per ogni modulo differenziale (D, δ) semplicemente per composizione: se $\nabla : E \longrightarrow E \otimes \Omega^1_A$ allora $\widetilde{\nabla} = (I \otimes \mu)\nabla$ è una D-connessione in E ove $I : E \longrightarrow E$ è la mappa identica.

Proposizione 6.2 *L'insieme delle D-connessioni su un modulo E è uno spazio affine sul campo $\mathbb{K}$.*

Dimostrazione: Se ∇ e ∇' sono D-connessioni in E allora

$$(\nabla - \nabla')(ae) = a\nabla e + e \otimes \delta a - a\nabla' e - e \otimes \delta a = a(\nabla - \nabla')(e)$$

Questo vuol dire che la differenza di connessioni è un endomorfismo del fibrato E e quindi lo spazio delle connessioni è uno spazio affine il cui spazio vettoriale tangente in ciascun punto è $\mathrm{End}(E)$.

QED

Consideriamo l'algebra $A_\delta = A \otimes \ker\delta$ ottenuta da A per cambiamento dell'anello degli scalari da $\mathbb{K}$ a $\ker\delta$: un A-modulo E è ovviamente anche un A_δ-modulo rispetto all'azione $(a \otimes c) \cdot e = (ac) \cdot e$; possiamo allora formulare il seguente

Esempio 6.3 *Un modulo libero finitamente generato $E = A^n_\delta$ possiede sempre una D-connessione: se $(e_1, \cdots, e_n)$ è una A_δ-base di E, allora, per $a \in A_\delta$, definiamo*

$$\nabla(ae_i) = e_i \otimes \delta a$$

Estendendo per additività si ottiene ovviamente una D-connessione.

Possiamo agevolmente generalizzare questo esempio al caso di un modulo proiettivo (finitamente generato) sull'algebra A_δ: un modo semplice è ricordare che un modulo proiettivo è addendo diretto di un modulo libero. Quindi se E è proiettivo abbiamo che $E \oplus F = A^n_\delta$, sicché possiamo costruire una connessione ∇ in A^n_δ. Allora consideriamo la composizione

$$E \xrightarrow{i} A^n_\delta \xrightarrow{\nabla} A^n_\delta \otimes E \xrightarrow{p\otimes I} E \otimes D$$

ove i è l'immersione dell'addendo diretto E in A_δ^n e $I : E \longrightarrow E$ è la mappa identica. Ovviamente si tratta di una connessione, che si dice *connessione di Levi-Civita*, per l'ovvia analogia che esiste con la ben nota costruzione della Geometria Riemanniana.

Dunque ogni modulo proiettivo (finitamente generato) possiede una D-connessione naturalmente definita in termini della derivazione $\delta \in \mathrm{Der}(A, D)$.

Teorema 6.4 *Un modulo E possiede una D-connessione se e solo se E è A_δ-proiettivo.*

DIMOSTRAZIONE: Sappiamo già che un modulo proiettivo ammette una D-connessione. Viceversa, se $\nabla : E \longrightarrow E \otimes D$ è una connessione, dimostriamo che esiste una sezione A_δ-lineare al morfismo $m : E \otimes A_\delta \longrightarrow E$ dato dalla moltiplicazione ($m(a \otimes c, e) = (ac)e$), il che equivale alla proiettività di E: consideriamo la successione

$$0 \longrightarrow E \otimes_{A_\delta} D \xrightarrow{\Delta} A_\delta \otimes_{\ker\delta} E \xrightarrow{m} E \longrightarrow 0$$

ove abbiamo posto

$$\Delta(e \otimes \delta a) = 1 \otimes ae - a \otimes e$$

Questa successione di $\mathbb{K}$-spazi vettoriali non solo è esatta, come è ovvio verificare ma si spezza per tramite della mappa $u : E \longrightarrow A_\delta \otimes E$ di immersione $u(e) = 1 \otimes e$. Ora data ∇ possiamo associarle una sezione $\sigma : E \longrightarrow A \otimes E$ per mezzo della

$$\sigma(e) = 1 \otimes e + \Delta(\nabla e)$$

Si tratta di una mappa ben definita che è A_δ-lineare dato che

$$\begin{aligned}\sigma(ae) &= 1 \otimes ae - \Delta(a\nabla e) - \Delta(e \otimes \delta a)\\ &= 1 \otimes ae - \Delta(a\nabla e) - 1 \otimes ae + a \otimes e\\ &= a \otimes e - a\Delta(\nabla e) = a\sigma(e)\end{aligned}$$

Abbiamo cioè mostrato l'esistenza di una sezione alla moltiplicazione $m : A_\delta \otimes E \longrightarrow E$, il che è possibile solo se E è A_δ-proiettivo.

QED

Ora consideriamo il concetto di curvatura: in primo luogo notiamo che una D-connessione induce una famiglia di operatori

$$\nabla : E \otimes \bigwedge^n D \longrightarrow E \otimes \bigwedge^{n+1} D$$

semplicemente ponendo

$$\nabla(s \otimes P) = \nabla s \otimes P + (-1)^{\deg P} s \otimes \delta P$$

ove conveniamo che $\bigwedge^0 D = A$ e $\bigwedge^n D = \bigwedge_A^n D$ sono le potenze esterne del modulo D.

Definizione 6.5 *Data una D-connessione ∇, la sua* curvatura $R_\nabla : E \longrightarrow E \otimes \bigwedge^2 D$ *è definita come $R_\nabla = \nabla \circ \nabla$. Se $R_\nabla = 0$, la D-connessione si dice* piatta.

Se osserviamo che, per $a \in A$ e $e \in E$:

$$R_\nabla(ae) = \nabla(a\nabla e + e \otimes \delta a) = aR_\nabla e - \nabla e \otimes \delta a + \nabla e \otimes \delta a - e \otimes \delta^2 a = aR_\nabla e$$

possiamo concluderne che

Proposizione 6.6 *La curvatura è A-lineare*

Notiamo che una D-connessione su E induce una D-connessione $\overline{\nabla}$: $\mathrm{End}(E) \longrightarrow \mathrm{End}(E) \otimes D$ su $\mathrm{End}\, E$ nel modo seguente: se $\varphi : E \longrightarrow E$ è A-lineare

$$\overline{\nabla}\varphi = [\nabla, \varphi] = \nabla \circ \varphi - \varphi \circ \nabla$$

In effetti si tratta di un operatore $\mathbb{K}$-lineare tale che

$$\overline{\nabla}(a\varphi) = \nabla(a\varphi) - a\varphi\nabla = a\nabla\varphi + \varphi \otimes \delta a - a\varphi\nabla = a\overline{\nabla}\varphi + \varphi \otimes \delta a$$

Il seguente facile calcolo:

$$\overline{\nabla}R_\nabla = [\nabla, R_\nabla] = \nabla R_\nabla - R_\nabla\nabla = \nabla\nabla^2 - \nabla^2\nabla = 0$$

conduce al

Teorema (IDENTITÀ DI BIANCHI) **6.7** $[\nabla, R_\nabla] = 0$

Dato che una D-connessione ha luogo solo in un modulo proiettivo, e dato che la localizzazione di un modulo proiettivo è un modulo libero, possiamo scrivere, anche in questo contesto algebrico, una connessione in "coordinate, nel modo seguente: se E è un modulo A_δ-libero (e.g. $E = A_\delta^n$) allora una D-connessione $E \longrightarrow E \otimes_A D$ è determinata da una matrice a coefficienti in D, i.e. da un elemento $\nabla \in \mathrm{End}_A(E) \otimes D$. Se

$$E = e_1 A_\delta \oplus \cdots \oplus e_n A_\delta$$

allora

$$\nabla e_i = \sum_j e_j \otimes \Gamma_{ji}$$

La matrice $\Gamma = ((\Gamma_{ij}))$ determina la connessione: se $e \in E$ si scrive rispetto alla base (e_i) come (gli a_i saranno della forma $f_i \otimes c_i$ ove $f_i \in A$ e $c_i \in \ker \delta$)

$$e = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

allora

$$\nabla e = \sum_i a_i \nabla e_i + \sum_i e_i \otimes \delta a_i = \sum_i e_i \otimes \left(\delta a_i + \sum_j a_i \Gamma_{ji} \right)$$

Cioè la matrice Γ non si comporta come un tensore, se non a meno di differenziali esatti.

L'esempio precedente si estende facilmente al caso di un modulo A_δ-proiettivo, utilizzando, ad esempio, il fatto che la localizzazione di ogni tale modulo dà luogo ad un modulo A_δ-libero, o più semplicemente il fatto che un modulo proiettivo è addendo diretto di un modulo libero.

Utilizzando le notazioni precedenti si trova in particolare che

$$\nabla^2 e_i = \sum_j \nabla e_j \wedge \Gamma_{ji} - \sum_j e_j \otimes \delta \Gamma_{ji} = \sum_{j,k} e_k \otimes \Gamma_{kj} \wedge \Gamma_{ji} - \sum_j e_j \otimes \delta \Gamma_{ji}$$

dunque

Teorema (EQUAZIONE DI STRUTTURA) **6.8** *Se E è un A_δ-modulo proiettivo e ∇ una D-connessione in E allora*

$$R_\nabla = \Gamma \wedge \Gamma - \delta \Gamma$$

ove $\Gamma \wedge \Gamma$ è il prodotto di matrici (rispetto al prodotto $\wedge$) nel modulo D e $\delta\Gamma = ((\delta\Gamma_{ij}))$.

Esiste, nel caso $D = \Omega_A$, un algoritmo canonico per produrre connessioni, basato sulla considerazione di derivate covarianti, che ammette una generalizzazione nel nostro caso.

Definizione 6.9 *Se E è un A-modulo, una D-*derivata covariante *in E è un operatore $\mathbb{K}$-lineare $\mathbf{D} : \mathfrak{X}(D) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ tale che, se $X \in \mathfrak{X}(D)$, $a \in A$ e $e \in E$:*

$$\mathbf{D}_X(ae) = a\mathbf{D}_X e + \boldsymbol{i}_X(\delta a)e$$

e A-lineare nella variabile X: $\mathbf{D}_{aX} = a\mathbf{D}_X$.

Nel caso $D = \Omega_A$ ritroviamo ovviamente il concetto usuale di derivata covariante. Se $\mathbf{D}$ è una D-derivata covariante in E allora possiamo associarle una D-connessione ∇ determinata dalla

$$\mathbf{i}_X \nabla e = \mathbf{D}_X e$$

Che ∇ così definita sia una connessione è ovvio:

$$\mathbf{i}_X\nabla(ae) = \mathbf{D}_X(ae) = a\mathbf{D}_Xe + \mathbf{i}_X(\delta a)e = a\mathbf{i}_X\nabla e + X(a)e = a\nabla_Xe + \mathbf{i}_X\delta a \otimes e$$

Questa corrispondenza fra derivate covarianti e connessioni è biunivoca, dato che la contrazione fra $\mathfrak{X}(D)$ e D è non degenere.

Possiamo interpretare $\mathbf{D}$ come un operatore nello spazio $\bigwedge_A(\mathfrak{X}(D), E)$, formato dalle mappe A-multilineari alternanti da $\mathfrak{X}(D)$ in E, tale che, se $\varphi : \mathfrak{X}(D)^k \longrightarrow E$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}\varphi)(X_0, \cdots, X_k) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\mathbf{D}_{X_i}(\varphi(X_0, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_k))+ \\ + \sum_{i<j}^{0\cdots k}(-1)^{i+j}\varphi([X_i, X_j], X_0, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_{j-1}, X_{j+1}, \cdots, X_k)\end{aligned}$$

($\mathfrak{X}(D)$ è un'algebra di Lie.) Osserviamo tuttavia che in generale questa mappa $\mathbf{D}$ non definisce un differenziale nel complesso $\bigwedge_A(\mathfrak{X}(D), E)$: infatti lo è se e solo se la curvatura della connessione associata a $\mathbf{D}$ è nulla.

Teorema 6.10 *La curvatura R_∇ di una connessione ∇ definisce una mappa $\mathbb{K}$-bilineare $R_\mathbf{D} : \mathfrak{X}(D) \times \mathfrak{X}(D) \longrightarrow \mathrm{End}_\mathbb{K}(E)$ come*

$$R_\mathbf{D}(X, Y) = \boldsymbol{i}_X\boldsymbol{i}_YR_\nabla$$

che soddisfa alla

$$R_\mathbf{D}(X, Y) = \mathbf{D}_X\mathbf{D}_Y - \mathbf{D}_Y\mathbf{D}_X - \mathbf{D}_{[X,Y]}$$

Dimostrazione: Ovviamente la $R_\mathbf{D}$ definita come nell'enunciato è $\mathbb{K}$-bilineare; l'identità dell'enunciato equivale all'equazione di struttura.

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_X\mathbf{D}_Ye_i-\mathbf{D}_Y\mathbf{D}_Xe_i - \mathbf{D}_{[X,Y]}e_i &= \mathbf{i}_X\nabla\mathbf{i}_Y\nabla e_i - \mathbf{i}_Y\nabla\mathbf{i}_X\nabla e_i - \mathbf{i}_{[X,Y]}\nabla e_i \\ &= \mathbf{i}_X\nabla\left(e_j \otimes \mathbf{i}_Y\Gamma_{ji}\right) - \mathbf{i}_Y\nabla\left(e_j \otimes \mathbf{i}_X\Gamma_{ji}\right) - e_j \otimes \mathbf{i}_{[X,Y]}\Gamma_{ji} \\ &= e_k \otimes \left(\mathbf{i}_X\Gamma_{kj}\mathbf{i}_Y\Gamma_{ji} - \mathbf{i}_Y\Gamma_{kj}\mathbf{i}_X\Gamma_{ji}\right) \\ &\qquad + e_j \otimes \big(\mathbf{i}_X\mathbf{i}_Y\Gamma_{ji} - \mathbf{i}_Y\mathbf{i}_X\Gamma_{ji} - \mathbf{i}_{[X,Y]}\Gamma_{ji}\big) \\ &= \mathbf{i}_X\mathbf{i}_Ye_k \otimes \Gamma_{kj}\Gamma_{ji} + \mathbf{i}_X\mathbf{i}_Ye_j \otimes d\Gamma_{ji} \\ &= \mathbf{i}_X\mathbf{i}_Y\left(\nabla e_j \otimes \Gamma_{ji} + e_jd\Gamma_{ji}\right) \\ &= \mathbf{i}_X\mathbf{i}_Y\nabla^2e_i \\ &= R_\mathbf{D}(X, Y)e_i\end{aligned}$$

(ove abbiamo usato la convenzione di Einstein sugli indici j e k.)

QED

Una derivata covariante la cui curvatura sia identicamente nulla (cioè corrispondente ad una connessione piatta) consente di identificare il complesso $(\bigwedge_A(\mathfrak{X}(D), E), \mathbf{D})$ col complesso di Chevalley–Eilenberg per l'algebra di Lie $\mathfrak{X}(D)$ a coefficienti nel modulo E: in particolare possiamo dire che un modulo dotato di una D-connessione piatta induce una coomologia $H_\nabla(A, E)$ che coincide con la coomologia dell'algebra di Lie $\mathfrak{X}(D)$ a coefficienti nella rappresentazione E.

7 Coomologia simplettica di un'algebra di Poisson

Consideriamo il modulo differenziale $D = \mathcal{H}_A$ su un'algebra di Poisson: allora $\mathfrak{X}(D) = \mathcal{H}_A$, dato che il nucleo del differenziale è $\ker X = \operatorname{Cas} A$, e se $c \in \operatorname{Cas} A$:

$$X(c) = 0 \iff X \in \operatorname{Ham} A$$

Dunque una $\mathcal{H}_A$-derivata covariante è un operatore $\mathbf{D} : \mathcal{H}_A \times E \longrightarrow E$ tale che

$$\mathbf{D}_{X_a}(be) = b\mathbf{D}_{X_a} e + \{a, b\}e$$

Notiamo che in questo caso la contrazione è un operatore $\mathbf{i} : \mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_A \longrightarrow A$ tale che

$$\mathbf{i}_{aX_h} bX_k = ab\mathbf{i}_{X_h} X_k = ab\{h, k\}$$

Definizione 7.1 *Un* modulo di Poisson *su un'algebra di Poisson A è una coppia (M, λ) ove M è un A-modulo sull'algebra associativa $(A, \cdot)$ e $\lambda : A \times M \longrightarrow M$ è una funzione tale che*

$$\begin{aligned} \lambda(\{a, b\}, m) &= \lambda(a, \lambda(b, m)) - \lambda(b, \lambda(a, m)) \\ \lambda(a, bm) &= b\lambda(a, m) + \{a, b\}m \end{aligned}$$

Esempio 7.2 *A e A' sono moduli di Poisson rispetto alle azioni aggiunta e coaggiunta*

$$\begin{array}{rcl} a \cdot a = ab & e & \lambda(a, b) = \{a, b\} \\ (a \cdot \varphi)(b) = \varphi(ab) & e & \lambda(a, \varphi)(b) = \varphi(\{a, b\}) \end{array}$$

se $a, b \in A$ e $\varphi \in A'$.

Più sinteticamente scriviamo $\{a, m\} = \lambda(a, m)$.

Esempio 7.3 *Lo spazio* $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)$ *delle applicazioni* $\mathbb{K}$*-lineari di* A *in se stesso è un modulo di Poisson rispetto alle due azioni:*

$$\begin{array}{lcl} (aL)(b) = aL(b) & e & \{a, L\}'(b) = \{a, L(b)\} \\ (aL)(b) = L(ab) & e & \{a, L\}''(b) = L\{a, b\} \end{array}$$

ove $a, b \in A$ *e* $L \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)$*. Se consideriamo la differenza*

$$\{a, L\} = \{a, L\}' - \{a, L\}''$$

otteniamo ancora una struttura di modulo di Poisson, rispetto all'azione aggiunta associativa di A *su* M*.*

Esempio 7.4 *Il modulo* $\mathrm{Der}(A)$ *delle derivazioni dell'algebra associativa* $(A, \cdot)$ *è un modulo di Poisson su* A *rispetto alla struttura* $\{\}$ *di modulo di Poisson su* $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)$*; se* $a \in A$ *e* $X \in \mathrm{Der}(A)$ *allora*

$$\{a, X\} = [X_a, X]$$

Esempio 7.5 *Il modulo* $\mathcal{H}_A$ *generato dai campi hamiltoniani è un sottomodulo di Poisson di* $\mathrm{Der}(A)$ *rispetto alla struttura appena descritta.*

Esempio 7.6 *Il modulo* Ω_A *dei differenziali di Kähler dell'algebra associativa* $(A, \cdot)$ *è un modulo di Poisson su* A *rispetto alla struttura*

$$\{a, \omega\} = \boldsymbol{d}\boldsymbol{i}_{X_a}\omega + \boldsymbol{i}_{X_a}\boldsymbol{d}\omega$$

ed all'azione aggiunta di A *su* Ω_A*.*

La struttura di modulo di Poisson su Ω_A induce la struttura di algebra di Lie su Ω_A che abbiamo già incontrato nel §5, ponendo

$$[a\mathbf{d}b, \omega] = a\{b, \omega\} + \mathbf{i}_{X_a}\omega\mathbf{d}b$$

Una notevole classe di moduli di Poisson è indotta da rappresentazioni dell'algebra dei differenziali:

Definizione 7.7 *Una* rappresentazione *di un'algebra di Poisson* A *è una rappresentazione* E *dell'algebra di Lie* Ω_A *che sia anche un modulo sull'algebra associativa* A*, in modo che*

$$[\omega, ae] = a\{\omega, e\} - \boldsymbol{i}_{X_a}\omega e$$

per ogni $\omega \in \Omega_A$*,* $a \in A$ *e* $e \in E$*, ove* $[\omega, e]$ *denota l'azione dell'algebra di Lie* Ω_A *su* E*.*

Se E è una rappresentazione di un'algebra di Poisson A, ponendo

$$\{a,e\} = [da,e]$$

otteniamo un'azione dell'algebra di Lie A on E:

$$\begin{aligned}\{\{a,b\},e\} &= [\mathbf{d}\{a,b\},e] = [\{\mathbf{d}a,\mathbf{d}b\},e] = [\mathbf{d}a,[\mathbf{d}b,e]] - [\mathbf{d}b,[\mathbf{d}a,e]] \\ &= \{a,\{b,e\}\} - \{b,\{a,e\}\}\end{aligned}$$

che rende E un modulo di Poisson:

$$\{a,be\} = [\mathbf{d}a,be] = b[\mathbf{d}a,e] - \{b,a\}e = b\{a,e\} + \{a,b\}e$$

Abbiamo così una mappa

$$\mathbf{d} : \{\text{Rappresentazioni}\} \longrightarrow \{\text{Moduli di Poisson}\}$$

che, in generale, non è suriettiva.

Esempio 7.8 *Lo spazio vettoriale A^* duale di A non è una rappresentazione rispetto all'azione coaggiunta, che è invece di Poisson:*

$$[\omega,\varphi] = \varphi \circ \mu\omega$$

Le rappresentazioni di un'algebra di Poisson formano, ovviamente, una categoria, i cui morfismo sono gli operatori lineari

$$f : E \longrightarrow F$$

fra rappresentazioni che siano tanto A-lineari quanto morfismo di rappresentazioni dell'algebra di Lie Ω_A:

$$f(ae) = af(e) \qquad \text{e} \qquad f[\omega,e] = [\omega,f(e)]$$

Con questa definizione, la mappa $\mathbf{d}$ diviene un funtore covariante: infatti se $f : E \longrightarrow F$ è un morfismo di rappresentazioni, allora induce un morfismo di moduli, dato che

$$f\{a,e\} = f[\mathbf{d}a,e] = [\mathbf{d}a,f(e)] = \{a,f(e)\}$$

Se E è una rappresentazione dell'algebra di Poisson A, allora possiamo definire una coomologia $H_\pi^\bullet(A,E)$ ed una omologia $H_\bullet^\pi(A,E)$ di A a coefficienti in E, come la coomologia ed omologia dell'algebra di Lie Ω_A a coefficienti nella rappresentazione E. Ovviamente, se $E = A$ rispetto all'azione aggiunta

$$[\omega,a] = \mu\omega(a)$$

otteniamo le usuali coomologie ed omologie di Lichnerowicz and Koszul (cf. [15, §5]).

Le proprietà funtoriali di questa coomologia ed omologia sono quelle solite: se $f : A \longrightarrow B$ è un morfismo di algebre di Poisson allora induce un morfismo $\Omega f : \Omega_A \longrightarrow \Omega_B$ definito come

$$\Omega f(a\mathbf{d}b) = f(a)\mathbf{d}f(b)$$

e tale che

$$\begin{aligned}
\Omega f\{a\mathbf{d}b, c\mathbf{d}e\} &= \Omega f(ac\mathbf{d}\{b,e\} + a\{b,c\}\mathbf{d}e - c\{e,a\}\mathbf{d}b) \\
&= f(ac)\mathbf{d}f\{b,e\} + f(a\{b,c\})\mathbf{d}f(e) - f(c\{e,a\})\mathbf{d}f(b) \\
&= f(a)f(c)\{\mathbf{d}f(b), \mathbf{d}f(e)\} + f(a)\{f(b), f(c)\}\mathbf{d}f(e) \\
&\qquad - f(c)\{f(e), f(a)\}\mathbf{d}f(b) \\
&= f(c)\{f(a)\mathbf{d}f(b), \mathbf{d}f(e)\} + f(a)\{f(b), f(c)\}\mathbf{d}f(e) \\
&= \{f(a)\mathbf{d}f(b), f(c)\mathbf{d}f(e)\} \\
&= \{\Omega f(a\mathbf{d}b), \Omega f(c\mathbf{d}e)\}
\end{aligned}$$

Dunque, se E è una rappresentazione di B allora il morfismo di algebre di Poisson $f : A \longrightarrow B$ induce una rappresentazione f^*E di A che come spazio vettoriale è lo stesso, solo dotato dell'azione

$$a \cdot e = f(a) \cdot e \qquad \text{e} \qquad [\omega, e] = [\Omega f(\omega), e]$$

Questo morfismo a sua volta ne induce uno di algebre

$$H^\pi_\bullet(A, f^*E) \longrightarrow H^\pi_\bullet(B, E) \qquad \text{e} \qquad H^\bullet_\pi(B, E) \longrightarrow H^\bullet_\pi(A, f^*E)$$

Comunque, nel caso geometrico, questa non è la funtorialità "giusta": infatti se $A = C^\infty(M)$ e $B = C^\infty(N)$ sono le algebre di Poisson di due varietà di Poisson M and N, una mappa di Poisson $F : M \longrightarrow N$ *non definisce un morfismo di rappresentazioni di Poisson*: infatti A è una rappresentazione di $\Omega^1(M)$ e B è una rappresentazione di $\Omega^1(N)$, ma non è vero che $F^*B = A$; questo spiega la non funtorialità della coomologia di Poisson definita sulle varietà.

Esempio 7.9 Der A è *una rappresentazione di Poisson come*

$$[\omega, X] = [\mu\omega, X]$$

Infatti

$$\begin{aligned}
[\{\omega_1, \omega_2\}, X] &= [\mu\{\omega_1, \omega_2\}, X] = [[\mu\omega_1, \mu\omega_2], X] \\
&= [\mu\omega_1, [\mu\omega_2, X]] - [\mu\omega_2, [\mu\omega_1, X]] \\
&= [\omega_1, [\omega_2, X]] - [\omega_2, [\omega_1, X]]
\end{aligned}$$

L'identità di Leibniz è ovvia (rammentiamo che π è il tensore di Poisson definito come $\pi(\boldsymbol{d}a \wedge \boldsymbol{d}b) = \langle \mu \boldsymbol{d}a, \boldsymbol{d}d\rangle$):

$$[\omega, aX] = [\mu\omega, aX] = a[\mu\omega, X] + \pi(\omega \wedge \mathbf{d}a)X = a[\omega, X] - \boldsymbol{i}_{X_a}\omega X$$

Esempio 7.10 *Ω_A è pure una rappresentazione di Poisson espressa mediante la derivata di Lie (che avevamo definito in generale sui moduli differenziali)*

$$a \cdot \omega = a\omega \qquad \text{e} \qquad [\omega_1, \omega_2]' = \{\omega_1, \omega_2\}$$

Infatti $[\,]'$ sono parentesi di Lie, e

$$[\omega_1, a\omega_2]' = \{\omega_1, a\omega_2\} = a\{\omega_1, \omega_2\} + \pi(\omega_1 \wedge \mathbf{d}a)\omega_2 = a\{\omega_1, \omega_2\} - X_a\omega_1\omega_2$$

Esempio 7.11 *C'è un'altra rappresentazione di Poisson interessante su Ω_A:*

$$[\omega_1, \omega_2]'' = \mathcal{L}_{\mu\omega_1}\omega_2$$

Dato che $\mathcal{L}_{[\mu\omega_1, \mu\omega_2]} = [\mathcal{L}_{\mu\omega_1}, \mathcal{L}_{\mu\omega_2}]$ questa è una azione di Lie, che è anche di Poisson avendosi

$$[\omega_1, a\omega_2]'' = \mathcal{L}_{\mu\omega_1}a\omega_2 = \pi(\omega_1 \wedge da)\omega_2 + a[\omega_1, \omega_2]'' = a[\omega_1, \omega_2]'' - X_a\omega_1\omega_2$$

Tutti questi esempi soddisfano alla seguente

Definizione 7.12 *Una* rappresentazione regolare *E di un'algebra di Poisson è una rappresentazione tale che, per ogni $c \in \operatorname{Cas} A$ e per ogni $e \in E$ si abbia $[\boldsymbol{d}c, e] = 0$.*

Ovviamente $\operatorname{Der} A$ è regolare, dato che $\mu\mathbf{d}c = X_c = 0$, e Ω_A è regolare (sia rispetto a $[\,]'$ che a $[\,]''$) dato che

$$\{\mathbf{d}c, \omega\} = \mathcal{L}_{X_c}\omega - \mathbf{d}\mu\omega(c) - \mathbf{d}\pi(\mathbf{d}c \wedge \omega) = -\mathbf{d}\pi(\omega \wedge \mathbf{d}c) + \mathbf{d}\pi(\omega \wedge \mathbf{d}c) = 0$$

Ovviamente questi esempi corrispondono alle strutture di Poisson già note su $\operatorname{Der} A$ e su Ω_A:

$$[da, X] = [X_a, X] = \{a, X\}$$

mentre sia $[\,]'$ che $[\,]''$ danno luogo alla medesima struttura:

$$[\mathbf{d}a, \omega]' = \{\mathbf{d}a, \omega\} = \mathcal{L}_{X_a}\omega - \mathcal{L}_{\mu\omega}\mathbf{d}a - \mathbf{d}\pi(\mathbf{d}a \wedge \omega) = \{a, \omega\} = [\mathbf{d}a, \omega]'' = \mathcal{L}_{X_a}\omega$$

Se E è una rappresentazione di A allora possiamo definire

$$[X, e] = [\omega, e]$$

ove $\mu\omega = X$, usando l'azione di Ω_A su E.

Se E è una rappresentazione regolare allora questa definizione ha senso: infatti dalla $\mu\omega_1 = \mu\omega_2 = X$ segue che $\omega_2 = \omega_1 + \varphi$, ove $\varphi \in \ker\mu$, sicché

$$[\omega_2, e] = [\omega_1, e] + [\varphi, e] = [\omega_1, e]$$

dato che, per una rappresentazione regolare, $[\mathbf{d}c, e] = 0$ (poiché $c \in \operatorname{Cas} A$, e questa sottoalgebra genera il modulo $\ker\mu$).

Quindi una rappresentazione regolare induce una rappresentazione dell'algebra di Lie $\mathcal{H}_A$ su E:

$$\begin{aligned}[][X_1, X_2], e] &= [[\mu\omega_1, \mu\omega_2], e] = [\mu\{\omega_1, \omega_2\}, e] = [\{\omega_1, \omega_2\}, e] \\ &= [\omega_1, [\omega_2, e]] - [\omega_2, [\omega_1, e]] = [X_1, [X_2, e]] - [X_2, [X_1, e]]\end{aligned}$$

L'identità di Leibniz pure è verificata

$$\begin{aligned}[X, ae] &= [\mu\omega, ae] = [\omega, ae] = a[\omega, e] - \mathbf{i}_{X_a}\omega e = a[X, e] + \pi(\omega \wedge a)e \\ &= a[X, e] + \mathbf{i}_{\mu\omega}\mathbf{d}ae = a[X, e] + (Xa)e\end{aligned}$$

Proposizione 7.13 *Se E è una rappresentazione dell'algebra di Lie $\mathcal{H}_A$ che soddisfa l'identità di Leibniz*

$$[X, ae] = a[X, e] + (Xa)e$$

ed è anche un A-modulo, allora E è indotta da una rappresentazione regolare di A.

Dimostrazione: Nulla di più naturale che definire, per $\omega \in \Omega_A$ ed $e \in E$

$$[\omega, e] = [\mu\omega, e]$$

col che otteniamo, a conti fatti, una rappresentazione dell'algebra di Lie Ω_A, che soddisfa l'identità di Leibniz; la sua regolarità segue dalla

$$[\mathbf{d}c, e] = [\mu\mathbf{d}c, e] = [X_c, e] = 0$$

QED

In altri termini: *le rappresentazioni regolari possono pensarsi come oggetti definiti su $\mathcal{H}_A$.*

Esempio 7.14 *La rappresentazione* $\operatorname{Der} A$, *che è regolare, dà luogo alla rappresentazione aggiunta dell'algebra di Lie $\mathcal{H}_A$, cioè l'azione di Lie è esattamente il commutatore di una derivazione in $\mathcal{H}_A$ con una arbitraria.*

Esempio 7.15 *Se* $E = \Omega_A$ *e la rappresentazione è definita come* $[\omega_1, \omega_2] = \{\omega_1, \omega_2\}$ *otteniamo*

$$\begin{aligned}[X, \omega] &= \mathcal{L}_X\omega - \mathcal{L}_{\mu\omega}\mu^{-1}X - \boldsymbol{di}_X\omega = \mathcal{L}_X\omega - \mathcal{L}_{\mu\omega}\mu^{-1}X - \boldsymbol{di}_X\omega \\ &= \boldsymbol{i}_X\boldsymbol{d}\omega - \boldsymbol{di}_{\mu\omega}\mu^{-1}X - \boldsymbol{i}_{\mu\omega}\boldsymbol{d}\mu^{-1}X\end{aligned}$$

mentre, se la rappresentazione è definita come $[\omega_1, \omega_2] = \mathcal{L}_{\mu\omega_1}\omega_2$ *troviamo che*

$$[X, \omega] = \mathcal{L}_X\omega$$

Sia ora E una rappresentazione regolare di A e consideriamo il complesso $C^n(\mathcal{H}_A, E) = \hom_{\mathbb{K}}(\mathcal{H}_A^n, E)$ equipaggiato della mappa di cobordo

$$\begin{aligned}dP(X_0, \cdots, X_k) = &\sum_{i=0}^{k}(-1)^i[X_i, P(X_0, \cdots, \widehat{X_i}, \cdots, X_k)] + \\ &+ \sum_{i<j}^{0\cdots k}(-1)^{i+j}P([X_i, X_j], X_0, \cdots, \widehat{X_i}, \cdots, \widehat{X_j}, \cdots, X_k)\end{aligned}$$

La coomologia $H(\mathcal{H}_A, E)$ di questo complesso, che chiameremo *coomologia simplettica,* è legata alle parentesi di Poisson su A; ovviamente la mappa $\Omega_A \longrightarrow \mathcal{H}_A$ induce una mappa in coomologia

$$\mu^* : H(\mathcal{H}_A, E) \longrightarrow H_\nabla(A, E)$$

Se la struttura di Poisson è simplettica allora μ è un isomorfismo e quindi, *a fortiori*, anche μ^* lo è; se la struttura di Poisson è nulla allora $H_\pi(A, E)$ coincide con lo spazio delle cocatene, mentre $H^n(\mathcal{H}_A, E) = 0$ se $n > 0$; cioè la coomologia simplettica è meno precisa della coomologia di Poisson, ma più semplice da calcolare.

Ovviamente per ogni A-modulo differenziale (D, δ) che sia anche un'algebra di Lie e per ogni A-modulo di Poisson E possiamo effettuare una simile costruzione: in particolare possiamo considerare il caso $D = \mathcal{H}_A$, nel quale il differenziale è $X : A \longrightarrow \mathrm{Ham}(A)$ esteso come

$$X(aX(b)) = X(a) \wedge X(b)$$

e la contrazione è una mappa $\mathbf{i} : \mathrm{Ham}\, A \times \mathcal{H}_A \longrightarrow A$ che consente di definire un cobordo

$$b_{X_0\wedge\cdots\wedge X_n}X(P) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\mathbf{i}_{X_i}b_{X_0\wedge\cdots\widehat{X_i}\cdots\wedge X_n}P + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\mathbf{i}_{[X_i,X_j]\wedge X_0\wedge\cdots\widehat{X_i}\cdots\widehat{X_j}\cdots\wedge X_n}P$$

per $P \in \bigwedge^n \operatorname{Ham} A$ e $X_i = X_{a_i} \in \operatorname{Ham} A$.

Ad esempio

$$\mathbf{i}_{X_a \wedge X_b} X(P) = \mathbf{i}_{X_a}\mathbf{i}_{X_b} P - \mathbf{i}_{X_b}\mathbf{i}_{X_a} P - \mathbf{i}_{X_{\{a,b\}}} P$$

($\mathbf{i}_{X_a} X_b = \{a, b\}$.)

Riassiumiamo la situazione nel diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} H_{dR}(A, \Omega_A) \arrow[r] \arrow[d] & H_\pi(A) \arrow[d] \\ H_{dR}(A, \mathcal{H}_A) \arrow[r] & H_\pi(\mathcal{H}_A, A) \end{tikzcd}$$

ove $H_{dR}(A, D)$ denota la coomologia differenziale a coefficienti nel modulo D e le frecce verticali sono indotte da $\mu : \Omega_A \longrightarrow \mathcal{H}_A$.

Più in generale, se E è un A-modulo e $\nabla : E \longrightarrow E \otimes \mathcal{H}_A$ una $\mathcal{H}_A$-connessione piatta, gli spazi $E \otimes \bigwedge \mathcal{H}_A$ definiscono un complesso la cui coomologia denotiamo con $H_\nabla(\mathcal{H}_A, E)$, ed abbiamo un analogo diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} H_\nabla(\Omega_A, E) \arrow[r] \arrow[d] & H_\pi(E) \arrow[d] \\ H_\nabla(\mathcal{H}_A, E) \arrow[r] & H_\pi(\mathcal{H}_A, E) \end{tikzcd}$$

Per concludere notiamo che una $\mathcal{H}_A$-connessione piatta induce una struttura di Poisson sul modulo sopra il quale è definita, nel modo seguente.

Una $\mathcal{H}_A$-connessione determina una derivata covariante $\mathbf{D} : \mathcal{H}_A \longrightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(E)$ tale che

$$\mathbf{D}_X(ae) = a\mathbf{D}_X e + X(a)e$$

Supponiamo che l'A-module E sia equipaggiato di una tale connessione: allora se poniamo

$$\{a, e\} := \mathbf{D}_{X_a} e$$

abbiamo una mappa $\mathbb{K}$-bilineare $\{\,\} : A \times E \longrightarrow E$ tale che

$$\{a, be\} = \mathbf{D}_{X_a}(be) = b\mathbf{D}_{X_a} e + X_a(b)e = b\{a, e\} + \{a, b\}e$$

Se mostriamo che la struttura $\{\,\}$ rende E una rappresentazione dell'algebra di Lie A abbiamo quindi costruito una struttura di Poisson: ma l'ostruzione a che ciò si verifichi à esattamente rappresentata dalla curvatura della connessione:

$$\begin{aligned} R(a,b)(e) &= \{a, \{b, e\}\} - \{b, \{a, e\}\} - \{\{a, b\}, e\} \\ &= \mathbf{D}_{X_a}\mathbf{D}_{X_b} e - \mathbf{D}_{X_b}\mathbf{D}_{X_a} e - \mathbf{D}_{X_{\{a,b\}}} e \\ &= [\mathbf{D}_{X_a}, \mathbf{D}_{X_b}] - \mathbf{D}_{[X_a, X_b]} = R_{\mathbf{D}}(X_a, X_b) \end{aligned}$$

cioè abbiamo una struttura di modulo di Poisson se e solo se la connessione ∇ è piatta.

Se due $\mathcal{H}_A$-connessioni ∇ e ∇' determinano la stessa struttura di Poisson $\{\,\}$ su E allora la mappa A-lineare $\nabla - \nabla' \in \mathrm{End}(E)$ è tale che, per ogni $a \in A$:

$$b_{X_a}(\nabla e - \nabla' e) = 0$$

sicché, dato che la contrazione $\mathbf{i} : \mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_A \longrightarrow A$ è non degenere, $\nabla = \nabla'$.

Abbiamo cioè una mappa iniettiva

$$\{\mathcal{H}_A\text{-connessioni piatte}\} \longrightarrow \{\text{strutture di Poisson su } E\}$$

che non è in generale suriettiva (basti considerare moduli non proiettivi dotati di strutture di Poisson, come A^*).

La mappa

$$\{\mathcal{H}_A\text{-connessioni piatte}\} \longrightarrow \{\text{strutture di Poisson su } E\}$$

si fattorizza come

$$\{\mathcal{H}_A\text{-connessioni piatte}\} \longrightarrow \{\text{rappresentazioni}\} \longrightarrow \{\text{moduli di Poisson}\}$$

Infatti una $\mathcal{H}_A$-connessione $\nabla : E \longrightarrow E \otimes \mathcal{H}_A$ determina una rappresentazione di Poisson su E come

$$[\omega, e] = \mathbf{D}_{\mu\omega} e$$

dato che

$$[\omega, ae] = \mathbf{D}_{\mu\omega} ae = a[\omega, e] + \mathbf{i}_{\mu\omega}\mathbf{d}a \otimes e = a[\omega, e] - \mathbf{i}_{X_a}\omega \otimes e$$

Di nuovo la mappa che porta una $\mathcal{H}_A$-connessione in una rappresentazione di Poisson è iniettiva ma non suriettiva.

Bibliografia

[1] J.-L. Brylinski *A differential complex for Poisson manifolds,* J. Differential Geometry **28** (1988), 93–114.

[2] H. Cartan, S. Eilenberg *Homological algebra,* Princeton, 1956.

[3] C. Chevalley, S. Eilenberg *Homology theory of Lie algebras and Lie groups,* Trans. Am. Math. Soc. **63** (1948), pp.85–124.

[4] A. Connes, *Non commutative geometry,* Addison–Wesley, 1994.

[5] D.B. Fuks *Cohomology of infinite dimensional Lie algebras*, Consultants Bureau, New York, 1986 (trad. dal russo).

[6] V. Ginzburg *Momentum mappings and Poisson cohomology,* Intern. Journal of Math. **7** (1996), 329–358.

[7] V. Ginzburg, A. Weinsten *Lie–Poisson structure on some Poisson–Lie groups,* Journal A.M.S. **5** (1992), 445–453.

[8] J. Huebschmann *Poisson cohomology and quantization,* J. Reine Angew. Math. **408** (1990), 57–113.

[9] M. Karoubi, *Homologie cyclique et K-théorie,* Asterisque **149**, Soc. Math. de France, 1987.

[10] J.L. Koszul *Crochet de Schouten–Nijenhuis et cohomologie,* Astérisque (hors série), Soc. Math. de France, 1985, 257–271.

[11] A. Lichnerowicz *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées,* J. Differential Geometry **12** (1977), 253–300.

[12] J.-L. Loday *Cyclic Homology*, Springer, New York–Berlin, 1992

[13] N. Nakanishi *Poisson cohomology of Poisson quadratic structures,* Publ. RIMS **33** (1997), 73–89.

[14] J.-P. Serre *Lie Algebras and Lie Groups,* Lect. Notes in Math. **1500**, Springer, New York–Berlin, 1992.

[15] I. Vaisman *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds,* Progr. Math. **118**, Birkhäuser, Basel, 1994.