Osservazioni sul formalismo hamiltoniano

Paolo Caressa

Perugia, Aprile 2000

Una assiomatizzazione del concetto di "osservazione" in un sistema fisico è stata pensata solo con l'avvento della fisica quantistica: questa assiomatizzazione ha comunque sollevato la questione anche per la fisica classica, e si inquadra quindi nello schema più generale nel quale comprendere i fenomeni soggetti a mutamento (la dinamica) si tratti di fenomeni fisici, economici, biologici: il formalismo hamiltoniano.

1 Stati ed osservabili

Consideriamo la seguente assiomatizzazione di un "sistema fisico" secondo le linee tracciate da von Neumann [11, §III][1]: un tale sistema è determinato da un insieme $\mathcal{O}$ di *osservabili*, un insieme $\mathcal{S}$ di *stati* ed una mappa

$$\mu\colon \mathcal{O} \times \mathcal{S} \to P(\mathbb{R})$$

ove con $P(\mathbb{R})$ denotiamo lo spazio delle misure di probabilità sulla retta reale.

La mappa μ si chiama *processo di misura*: la misurazione dell'osservabile A nello stato s ha valore x se e solo se $\mu(A, s) = \delta_x$ (misura concentrata in $\{x\}$); più realisticamente, poiché l'esperienza mostra che una successione di misurazioni di uno stesso osservabile in un medesimo stato (no puro) non dà mai gli stessi esatti risultati numerici, immaginiamo che il numero $\mu(A, s)(E)$

[1] Per la verità von Neumann si riferisce alle misurazioni dal punto di vista statistico, considerando cioè *ensemble* piuttosto che singoli osservabili: comunque lo schema qui presentato mi pare si possa facilmente dedurre dalla discussione di von Neumann.

rappresenti la probabilità che la misura corretta dell'osservabile A nello stato s appartenga all'insieme (boreliano) $E \subset \mathbb{R}$.

Sugli insiemi $\mathcal{O}$ e $\mathcal{S}$ formuliamo alcune ipotesi suggerite dalla fisica sperimentale:

Assioma 1.1 *L'insieme degli stati $\mathcal{S}$ è un sottoinsieme convesso in spazio vettoriale complesso $\mathcal{F}$, che si dice* spazio delle fasi*; i punti estremi di $\mathcal{S}$ si dicono* stati puri *del sistema, e l'insieme da essi formato si denota $\mathcal{P}$.*

Questa assunzione incarna il cosiddetto *principio di sovrapposizione degli stati*, la cui formulazione comunque differisce secondo che lo si consideri in veste classica o quantistica (cfr. [4]).

Assioma 1.2 *L'insieme degli osservabili è un'algebra sui numeri reali (rispetto ad un certo prodotto $\circ$) e lo spazio delle fasi $\mathcal{F}$ è una rappresentazione di quest'algebra (ove l'azione dell'algebra sul modulo è continua se le strutture vettoriali sono topologiche).*

L'operazione di prodotto nell'algebra $\mathcal{O}$ ha il significato di *simultanea osservabilità* dei suoi operandi: cioè se $A, B \in \mathcal{O}$ allora $a \circ b$ è un osservabile la cui misurazione equivale alla simultanea misurazione di a e b; se ciò non è possibile il significato di $a \circ b$ si attenua e va confrontato con l'altro osservabile $b \circ a$.

Esempio 1.3 *Il più semplice sistema meccanico classico, il punto materiale libero, si può descrivere come segue: l'insieme degli stati puri $\mathcal{P}$ è $\mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3$ (spazio delle variabili di posizione e di velocità), l'algebra degli osservabili è $\mathcal{O} = C^\infty(\mathcal{P})$ (funzioni reali), lo spazio degli stati è lo spazio delle misure di probabilità su $\mathcal{P}$; si noti che $\mathcal{P}$ si immerge in $\mathcal{S}$ dato che ad ogni punto $(q,p) \in \mathcal{P}$ corrisponde una misura concentrata in quel punto, cioè la delta di Dirac $\delta_{(q,p)}$; la misurazione μ è la distribuzione che, sul boreliano $E \subset \mathbb{R}$, si valuta come*

$$\mu(A,s)(E) = s(A^{-1}(E))$$

ove $s \in \mathcal{S} = P(\mathcal{P})'$ e $A \in C^\infty(\mathcal{P})$. Notiamo che in uno stato puro la misurazione μ è concentrata in un punto, e quindi non c'è dispersione.

Nell'esempio precedente la struttura di algebra su $\mathcal{O}$ è quella *commutativa* data dal prodotto punto per punto, e la struttura di modulo su $\mathcal{S}$ è semplicemente la moltiplicazione:

$$A \cdot s(E) = \int_E A ds$$

dato che in questo caso $A \in C^\infty(\mathbb{R}^6)$ e s è una misura su $\mathbb{R}^6$.

Esempio 1.4 *Il punto materiale quantistico è descritto da uno spazio degli stati $\mathcal{S}$ formato dai vettori di norma 1 nello spazio di Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ e da un'algebra di osservabili data dagli operatori autoaggiunti*[2] *sullo spazio di Hilbert (complesso) $\mathcal{H}$. Il prodotto che usiamo è la composizione di operatori $A \circ B$ che* non è commutativa*; la misurazione μ è*

$$\mu(A, s)(E) = \chi_E(A)(s)$$

Questo ha senso per il teorema spettrale: se E_λ è la misura spettrale indotta dall'operatore A (a valori nello spazio delle proiezioni di $\mathcal{H}$) e

$$A = \int \lambda dE_\lambda$$

è la decomposizione spettrale di A allora

$$\mu(A, s)(E) = \int_E \lambda d\langle E_\lambda s, s\rangle$$

(con $\langle , \rangle$ denotiamo il prodotto scalare di Hilbert); in altri termini la misura μ è determinata dalla misura spettrale associata ad A.

Questi esempi mostrano che un approccio unitario al concetto di sistema fisico è possibile, attraverso il concetto di algebra, sebbene una tale trattazione debba includere allo stesso tempo la teoria delle algebre commutative e non; qui ci limitiamo a costruire, nei soliti due modi, la meccanica classica, cioè quella "commutativa".

2 Assiomatica del formalismo hamiltoniano

Consideriamo uno spazio vettoriale complesso[3] $\mathcal{A}$ con due strutture algebriche: una struttura commutativa $a \circ b$ e una struttura anticommutativa $[a, b]$; la

[2] Questa nozione, così espressa, è assai vaga: se ci limitiamo ad operatori continui non sorgono problemi di sorta, se non che molti interessanti operatori, come quelli differenziali, sono esclusi dalla discussione; se ammettiamo operatori qualsiasi, dobbiamo lavorare sui loro grafici: se $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, sia $G_A = \{(v, Av)\}$ il suo grafico; scriviamo $A \subset B$ se $G_A \subset G_B$, e denotiamo $\overline{A}$ (chiusura) l'operatore (se esiste) associato al grafico $\overline{G_A}$ (non è detto che la chiusura del grafico sia ancora un grafico): allora un operatore si dice *essenzialmente autoaggiunto* se $\overline{A} = A^*$; questi sono quelli che ci interessano, ed in genere non saranno definiti su tutto $\mathcal{H}$, ma solo su un suo sottoinsieme che supporremo sempre denso: ad esempio sulle funzioni differenziabili.

[3] Visto il livello di generalità nel quale ci poniamo potremmo considerare spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$ qualsiasi (di caratteristica diversa da due); ma per noi il campo $\mathbb{K}$ sarà essere l'insieme dei valori che una misura dell'osservabile può assumere, quindi almeno

prima sarà interpretata come una genuina "composizione" di elementi di $\mathcal{A}$, la seconda come una sorta di "misura della impossibilità di effettuare il prodotto $a \circ b$" (e quindi deve essere anticommutativa perché almeno si suppone che un elemento non interferisca con se stesso); inoltre la struttura anticommutativa è in qualche modo una "funzione differenziale" su $\mathcal{A}$: in altre parole richiediamo che la seguente regola di Leibniz

$$[a \circ b, c] = a \circ [b, c] + [a, c] \circ b$$

sia verificata (il motivo sarà chiaro quando scriveremo le equazioni del moto).

Supporremo inoltre che $[,]$ sia effettivamente una parentesi di Lie su $\mathcal{A}$, cioè che verifichi l'identità di Jacobi.

Infine, poiché stiamo lavorando sui numeri complessi, farà comodo supporre che $\mathcal{A}$ possegga una *involuzione* $a \mapsto a^*$ lineare tale che $(a \circ b)^* = a^* \circ b^*$ e $[a, b]^* = [b^*, a^*]$ (nel caso di un'algebra reale questa sarà l'identità).

È facile produrre esempi "banali" di tali algebre: ad esempio, data una qualsiasi algebra associativa $(\mathcal{A}, \cdot)$ potremmo porre $a \circ b = 0$ e $[a, b] = ab - ba$, oppure $a \circ b = ab + ba$ e $[a, b] = ab - ba$ (decomposizione di un tensore doppio nella sua parte simmetrica ed antisimmetrica); data un'algebra di Lie $\mathcal{A}, [\,])$ potremmo invece porre $a \circ b = 0$.

Due condizioni aggiuntive che si possono richiedere sono: la *compattezza*, cioè l'esistenza di una unità per il prodotto $\circ$, vale a dire di un elemento $e \in \mathcal{A}$ tale che $a \circ e = e \circ a = a$ per ogni $a \in \mathcal{A}$, e quindi tale che si possa immergere $\mathbb{C}$ in $\mathcal{A}$ come $x \mapsto x \circ e$ (tant'è che di solito si scrive 1 al posto di e); la *simpletticità*, cioè il fatto che il centro dell'algebra di Lie $(\mathcal{A}, [\,])$ sia ridotto al solo ideale $\mathbb{C} \subset \mathcal{A}$.

La compattezza verrà sistematicamente assunta, dato che se $\mathcal{A}$ non la verifica basterà considerare lo spazio vettoriale $\widehat{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ e su di esso le strutture $(a \oplus x) \circ (b \oplus y) = (a \circ b, xy)$ e $[a \oplus x, b \oplus y] = [a, b]$ per ottenere un'algebra di osservabili compatta nella quale $\mathcal{A}$ si immerga in modo canonico.

Possiamo associare tre algebre di Lie ad $\mathcal{A}$: l'algebra $\mathrm{Der}(\mathcal{A}, \circ)$ delle derivazioni dell'algebra commutativa $(\mathcal{A}, \circ)$ e l'algebra $\mathrm{Der}(\mathcal{A}, [\,])$ delle derivazioni dell'algebra di Lie $(\mathcal{A}, [\,])$, e la loro intersezione $\mathrm{Can}\,\mathcal{A}$, i cui elementi saranno qui chiamati *derivazioni canoniche*.

Definiamo allora una *mappa hamiltoniana* $X : \mathcal{A} \to \mathrm{Can}\,\mathcal{A}$ come

$$X_a(b) = X(a)(b) = [a, b]$$

l'insieme dei numeri razionali (nessun indicatore analogico o digitale potrà mai misurare π, $2i$ o $\sqrt{2}$), purtuttavia la razionalizzazione matematica del mondo impone l'uso di grandezze continue e quindi di completare lo spazio metrico $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$: per comodità consideriamo la sua chiusura algebrica, anche se alla fine, le misure, saranno elementi autoconiugati di $\mathbb{C}$, cioè valori reali.

Notiamo che effettivamente $X_a \in \operatorname{Can}\mathcal{A} = \operatorname{Der}(\mathcal{A},\circ) \cap \operatorname{Der}(A,[\,])$: infatti $X_a \in \operatorname{Der}(\mathcal{A},\circ)$ in virtù dell'identità di Leibniz

$$X_a(b\circ c) = [a,bc] = b\circ[a,c] + c\circ[a,b] = b\circ X_a(c) + c\circ X_a(b)$$

e $X_a \in \operatorname{Der}(\mathcal{A},[\,])$ in virtù dell'identità di Jacobi

$$X_a[b,c] = [a,[b,c]] = -[b,[c,a]] - [c,[a,b]] = [X_a(b),c] + [b,X_a c]$$

Le derivazioni canoniche della forma X_a per qualche $a \in \mathcal{A}$ formano un ideale di Lie $\operatorname{Ham}\mathcal{A} \lhd \operatorname{Can}\mathcal{A}$, e si dicono *derivazioni hamiltoniane*: infatti, se $C \in \operatorname{Can}\mathcal{A}$ e $a \in \mathcal{A}$ allora

$$[C,X_a] = CX_a - X_aC = X_{Ca} + X_aC - X_aC = X_{Ca}$$

Il nucleo della mappa X è un ideale di Lie in $\mathcal{A}$ ed una sottoalgebra rispetto alla struttura commutativa $\circ$: i suoi elementi si dicono *elementi di Casimir*.

L'algebra $\mathcal{A}$ è ovviamente una rappresentazione sia di $\operatorname{Can}\mathcal{A}$ che di $\operatorname{Ham}\mathcal{A}$: possiamo quindi considerare la coomologia dell'algebra di Lie $\operatorname{Can}\mathcal{A}$ a coefficienti nella rappresentazione $\mathcal{A}$, che è calcolata dal complesso di Chevalley–Eilenberg, i cui addendi diretti graduati sono gli spazi $\Omega^n(\mathcal{A})$ delle funzioni

$$\varphi\colon\ \operatorname{Can}\mathcal{A} \times ... \times \operatorname{Can}\mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

multilineari antisimmetriche, che chiameremo *forme canoniche* di grado n, e il differenziale è dato dalla solita formula

$$\begin{aligned} d\varphi(C_0,C_1,...,C_n) = &\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_i\Big(\varphi(C_0,...,\widehat{C}_i,...,C_n)\Big) + \\ &+\sum_{i<j}^{0...n}(-1)^{i+j}\varphi([C_i,C_j],C_0,...,\widehat{C}_i,...,\widehat{C_j},...,C_n) \end{aligned}$$

Ad esempio se φ è una forma canonica di grado n e $a_0,...,a_n \in \mathcal{A}$ possiamo valutare

$$\begin{aligned} d\varphi(X_{a_0},X_{a_1},...,X_{a_n}) = &\sum_{i=0}^{n}(-1)^i[a_i,\varphi(X_{a_0},...,\widehat{X_{a_i}},...,X_{a_n})] + \\ &+\sum_{i<j}^{0...n}(-1)^{i+j}\varphi(X_{[a_i,a_j]},X_{a_0},...,\widehat{X_{a_i}},...,\widehat{X_{a_j}},...,X_{a_n}) \end{aligned}$$

Chiaramente ritroviamo il differenziale del complesso di Chevalley–Eilenberg relativo all'algebra di Lie $(\mathcal{A}, [\,])$ a coefficienti nella rappresentazione aggiunta $\mathcal{A}$.

Possiamo anche definire una derivazione di grado -1 sul complesso di Chevalley–Eilenberg $\Omega^n(\operatorname{Can}\mathcal{A}, \mathcal{A})$: la contrazione di una forma secondo una derivazione; se $C \in \operatorname{Can}\mathcal{A}$ e $\varphi \in \Omega^n(\operatorname{Can}\mathcal{A}, \mathcal{A})$ allora definiamo una forma canonica $\mathbf{i}_C\varphi \in \Omega^{n-1}(\operatorname{Can}\mathcal{A}, \mathcal{A})$ come

$$\mathbf{i}_C\varphi(C_1, ..., C_n) = \varphi(C, C_1, ..., C_n)$$

(ovviamente $\mathbf{i}_C\varphi = 0$ se φ è una forma di grado zero).

La rappresentazione di algebre di Lie $X : \mathcal{A} \to \operatorname{Can}\mathcal{A}$ si estende allo spazio delle forme canoniche come

$$\mathcal{L}_C = d\mathbf{i}_C + \mathbf{i}_C d$$

Questo definisce una rappresentazione dell'algebra di Lie $\operatorname{Can}\mathcal{A}$ su ciascuno spazio $\Omega^n(\operatorname{Can}\mathcal{A}, \mathcal{A})$ nel senso che

$$\mathcal{L}_{[C_1,C_2]} = \mathcal{L}_{C_1}\mathcal{L}_{C_2} - \mathcal{L}_{C_2}\mathcal{L}_{C_1}$$

Naturalmente possiamo considerare la coomologia del complesso delle forme canoniche: ad esempio $H^0(\operatorname{Can}\mathcal{A}, \mathcal{A})$ è il nucleo della mappa $d : \mathcal{A} \to \Omega^1(\mathcal{A})$ dallo spazio delle 0-forme (che si identifica con la rappresentazione $\mathcal{A}$ di $\operatorname{Can}\mathcal{A}$) allo spazio delle 1-forme; in altri termini gli elementi in grado zero della coomologia canonica sono gli elementi a dell'algebra tali che $C(a) = 0$ per ogni campo canonico C: si tratta dunque degli elementi di Casimir dell'algebra.

Possiamo anche identificare $H^1(\operatorname{Can}\mathcal{A}, \mathcal{A})$, ma per farlo introduciamo prima un altro operatore hamiltoniano.

Consideriamo ancora la mappa $d : \mathcal{A} \to \Omega^1(\mathcal{A})$; componendo questo differenziale con la mappa hamiltoniana X otteniamo un morfismo di rappresentazioni

$$\mathcal{H} : \Omega^1(\mathcal{A}) \to \operatorname{Der}(\mathcal{A}, \circ)$$

Ovviamente dobbiamo definire $\mathcal{H}$ sulle forme qualsiasi, mentre per ora sappiamo calcolarlo solo sulle forme esatte: $\mathcal{H}da = X_a$; dobbiamo dunque dire quale sia la derivazione $\mathcal{H}\varphi$ per ciascuna $\varphi \in \Omega^1(\operatorname{Can}\mathcal{A}, \mathcal{A})$ e per farlo la valutiamo su un generico elemento $a \in \mathcal{A}$:

$$\mathcal{H}\varphi(a) = -\varphi(X_a)$$

Mostriamo per prima cosa che effettivamente $\mathcal{H}\varphi$ è una derivazione dell'algebra commutativa $(\mathcal{A},\circ)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\varphi(a\circ b) &= -\,\varphi(X_{a\circ b}) = -\varphi(a\circ X_b + b\circ X_a)\\ &= -\,a\circ\varphi(X_b) - b\circ\varphi(X_a) = a\circ\mathcal{H}\varphi(b) + b\circ\mathcal{H}\varphi(a)\end{aligned}$$

Ora notiamo che $\mathcal{H}da(b) = -da(X_b) = -X_b a = [a,b] = X_a b$, cioè troviamo la definizione precedente nel caso delle forme esatte.

In generale, se φ è una forma qualsiasi:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\varphi[a,b] &= -\varphi(X_{[a,b]}) = -\varphi([X_a,X_b])\\ &= d\varphi(X_a,X_b) - X_a\varphi(X_b) + X_b\varphi(X_a)\\ &= d\varphi(X_a,X_b) - [\varphi(X_a),b] - [a,\varphi(X_b)]\\ &= d\varphi(X_a,X_b) + [\mathcal{H}\varphi(a),b] + [a,\mathcal{H}\varphi(b)]\end{aligned}$$

Dunque:

(1) $\mathcal{H}$ porta forme esatte in derivazioni hamiltoniane.

(2) $\mathcal{H}$ porta forme chiuse in derivazioni canoniche.

(3) $\mathcal{H}$ porta forme qualsiasi in derivazioni di $(\mathcal{A},\circ)$.

A questo punto è facile osservare che $H^1(\operatorname{Can}\mathcal{A},\mathcal{A}) = \operatorname{Can}\mathcal{A}/\operatorname{Ham}\mathcal{A}$ si identifica con lo spazio delle derivazioni canoniche non hamiltoniane.

Teorema 2.1 *$\Omega^1(\mathcal{A})$ possiede una unica struttura di algebra di Lie tale che il differenziale $d:\mathcal{A}\to\Omega^1(\mathcal{A})$ e la mappa $\mathcal{H}:\Omega^1(\mathcal{A})\to\operatorname{Can}\mathcal{A}$ siano ambedue morfismi di algebre di Lie.*

La definizione è semplice: se φ e ψ sono 1-forme qualsiasi

$$[\varphi,\psi] = \mathcal{L}_{\mathcal{H}\varphi}\psi - \mathcal{L}_{\mathcal{H}\psi}\varphi - d(\psi(\mathcal{H}\varphi))$$

Utilizzando questo operatore $\mathcal{H}$ possiamo caratterizzare l'algebra di Lie $(\mathcal{A},[\,])$: in effetti questo è l'approccio di Gel'fand–Dikij–Dorfman al formalismo hamiltoniano (che però non fa intervenire il prodotto $\circ$, solitamente nullo nelle teorie dei campi)

Teorema 2.2 *Se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie, $\mathfrak{M}$ una sua rappresentazione allora un operatore lineare $\mathcal{H}\colon\Omega^1(\mathfrak{g},\mathfrak{M})\to\mathfrak{g}$ induce una struttura di algebra di Lie su $\mathfrak{M}$ in modo che $\mathcal{H}\circ d$ sia un morfismo di algebre di Lie se e solo se verifica la seguente condizione di compatibilità*

$$\varphi_1(\mathcal{H}\mathcal{L}_{\mathcal{H}\varphi_2}\varphi_3) + \varphi_2(\mathcal{H}\mathcal{L}_{\mathcal{H}\varphi_3}\varphi_1) + \varphi_3(\mathcal{H}\mathcal{L}_{\mathcal{H}\varphi_1}\varphi_2) = 0$$

per ogni $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\in\Omega^1(\mathfrak{g},\mathfrak{M})$.

(cfr. [2]). In effetti basta definire la parentesi di Lie su $\mathfrak{M}$ come

$$[m_1, m_2] = dm_2(\mathcal{H}dm_1)$$

e verificare che la condizione dell'enunciato equivale all'identità di Jacobi.

L'equazione di integrabilità del teorema precedente può interpretarsi come una condizione di cociclo per la coomologia di Poisson ([10]) o come l'equazione di Yang–Baxter classica ([3]).

Ora vogliamo, fissata la nostra algebra $\mathcal{A}$, definire gli osservabili dei "sistemi fisici" descrivibili da $\mathcal{A}$.

Se $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ è un sottoinsieme non vuoto, definiamo il suo *commutante* come

$$\mathcal{S}' = \{a \in \mathcal{A} \,|\, \forall s \in \mathcal{S} \quad [a, s] = 0\}$$

Ad esempio $\mathcal{A}' = \operatorname{Cas}\mathcal{A}$: si noti che in questo caso $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$.

Per qualsiasi sottoinsieme $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ non vuoto il commutante è un'algebra che contiene gli elementi di Casimir: infatti se $s', t' \in \mathcal{S}'$ allora $[s, s'] = 0$ e $[s, t'] = 0$ per ogni $s \in \mathcal{S}$, e quindi

$$[s, s' \circ t'] = s' \circ [s, t'] + t' \circ [s, s'] = 0 \quad \text{e} \quad [s, [s', t']] = -[s', [t', s]] - [t', [s, s']] = 0$$

Se $c \in \operatorname{Cas}\mathcal{A}$ allora per ogni $s \in \mathcal{S}$ abbiamo $[s, c] = 0$ (perché c commuta con ogni elemento di $\mathcal{A}$).

In effetti un altro modo di vederlo è osservare che se $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ sono sottoinsiemi non vuoti allora $\mathcal{T}' \subset \mathcal{S}'$, dato che se $t' \in \mathcal{T}'$ allora per ogni $s \in \mathcal{S}$ abbiamo anche $s \in \mathcal{T}$ e quindi $[t', s] = 0$ da cui $t' \in \mathcal{S}'$. In particolare $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}''$.

Definizione 2.3 *Una* algebra di osservabili *è una sottoinsieme $\mathcal{B}$ di $\mathcal{A}$ che soddisfi la proprietà del doppio commutante: $\mathcal{B}'' = \mathcal{B}$ e che sia autoaggiunto*[4]*, cioè $\forall b \in \mathcal{B}$ anche $b^* \in \mathcal{B}$.*

Si noti che $\mathcal{A}$ stessa è un'algebra di osservabili: usualmente ci riferiamo a questa, mentre se abbiamo necessità di considerare $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ scriveremo sempre l'inclusione.

Il *centro* di un'algebra di osservabili $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ è la sottoalgebra $\operatorname{Cas}\mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{B}'$ ed è quindi una sottoalgebra di Lie abeliana; evidentemente, se $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ è un'algebra di osservabili allora $\operatorname{Ham}\mathcal{B} = \mathcal{B}/\operatorname{Cas}\mathcal{B}$.

I concetti di sottoalgebra, ideale e quoziente, e quelli associati di morfismo, monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo sono ovvi; in altri termini possiamo parlare senza imbarazzo della categoria delle algebre di osservabili

[4]Se $\mathcal{A}$ è considerata un'algebra reale ovviamente questa condizione è sempre verificata.

di una fissata algebra $(\mathcal{A}, \circ, [\,])$ e della categoria delle algebre di osservabili *tout-court*.

L'operazione più interessante dal punto di vista dell'interpretazione fisica è comunque il prodotto tensoriale, che corrisponde alla composizione di sistemi fisici (indipendenti fra loro).

Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono algebre di osservabili, sullo spazio vettoriale $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ definiamo due operazioni

$$(a\otimes b')\circ(a'\otimes b') = (a\circ a')\otimes(b\circ b') \qquad \text{e} \qquad [a\otimes b, a'\otimes b'] = (a\circ a')\otimes[b, b']+[a, a']\otimes(b\circ b')$$

Un calcolo tedioso rivela che

Proposizione 2.4 *Il prodotto tensoriale di algebre di osservabili è un'algebra di osservabili.*

Questa costruzione si combina al solito modo con i limiti induttivi per fornire un modello *à la Fock* dei campi liberi.

Definizione 2.5 *Se $\mathcal{O}$ è un'algebra di osservabili, un elemento $\omega \in \mathcal{O}^*$ del suo spazio vettoriale duale è uno* stato *se $\omega(a^* \circ a) \geq 0$ per ogni $a \in \mathcal{O}$ e, se $\mathcal{O}$ possiede un elemento unità e: $\omega(e) = 1$.*

Ovviamente questo vuol dire $\omega(a^2) \geq 0$: altrettanto ovviamente l'insieme $\mathcal{O}^*_+$ degli stati è un convesso nel duale dell'algebra degli osservabili: $(t\omega_1 + (1 - t)\omega_2)(a^* \circ a) = t\omega_1(a^* \circ a) + (1 - t)\omega_2(a^* \circ a) \geq 0$ se $t \in (0, 1)$.

Definizione 2.6 *Uno* stato puro *è uno stato che sia un punto estremo dell'insieme convesso $\mathcal{O}^*_+$.*

Naturalmente per rendere operativa questa definizione abbiamo bisogno di una quantità sufficiente di stati, in particolare di stati puri: supporremo sempre di averne a disposizione tanti da poter "separare" gli elementi dell'algebra, cioè se $a \in \mathcal{O}$ è tale che per ogni $\omega \in \mathcal{O}^*_+$ si abbia $\omega(a) = 0$ allora $a = 0$; di solito questo segue dal teorema di Hahn–Banach o da qualche risultato di densità (nel caso di algebre topologiche).

3 Dinamica hamiltoniana

Introdurre la "dinamica" nel formalismo fin qui sviluppato vuol dire considerare un gruppo a un parametro G_t di automorfismi dell'algebra $(\mathcal{O}, \circ, [\,])$; cioè $G\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{O})$ in modo che

$$G_{t+s}a = G_t a + G_s a \qquad \text{e} \qquad G_t(a \circ b) = G_t a \circ G_t b \qquad \text{e} \qquad G_t[a, b] = [G_t a, G_t b]$$

Guardando alla terza equazione è naturale scrivere formalmente

$$G_t a = \exp ta = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} (X_a)^i$$

Allora l'equazione

$$G_t(a \circ b) = G_t a \circ G_t b$$

equivale all'identità di Leibniz che abbiamo imposto alla nostra algebra.

Abbiamo esordito affermando che introdurre il gruppo G_t vuol dire introdurre una dinamica: proviamo a giustificare questa affermazione svolgendo una breve digressione.

Definizione 3.1 *Un* sistema dinamico *è una coppia* $(\Omega, \mathcal{R})$ *ove* Ω *è un insieme e* $\mathcal{R}$ *una relazione riflessiva su* Ω*.*

Un'orbita di un sistema dinamico è semplicemente una classe

$$\Omega_x = \{y \in \Omega \,|\, x\mathcal{R}y\}$$

ed un punto $x \in \Omega$ è di equilibrio se $\Omega_x = \{x\}$ (più in generale ha senso considerare gli insiemi $\Xi \subset \Omega$ *invarianti*, cioè tali che $\bigcup_{x\in\Xi} \Omega_x = \Xi$).

Nel nostro caso $\Omega = \mathcal{O}^*$ sarà lo spazio degli stati; se è uno spazio topologico possiamo anche considerare il concetto di stabilità: precisamente un insieme invariante $\Xi \subset \mathcal{O}^*_+$ si dice *stabile* se per ogni intorno Υ di Ξ ne esiste un altro Ψ in modo che

$$\bigcup_{x\in\Upsilon} \Omega_x \subset \Psi$$

Definizione 3.2 *Un* sistema hamiltoniano *è la scelta di un elemento* $h \in \mathcal{O}$ *in un'algebra di osservabili.*

Ora torniamo al nostro gruppo G_t: la descrizione che da della dinamica di un sistema hamiltoniano è semplicemente la scelta effettuata dal gruppo degli elementi dell'algebra sul quale il gruppo agisce come se fosse il campo hamiltoniano X_h; in altri termini siamo interessati alle soluzioni delle *equazioni canoniche*

$$G_t a = [h, a]$$

che si chiamano anche *equazioni di Heisenberg*: il loro significato, come si è detto, è che queste equazioni scelgono gli elementi dell'algebra di osservabili per i quali la dinamica è implementata dalla derivazione hamiltoniana associata a h.

Esiste comunque un punto di vista duale, ovviamente dato che la natura dei sistemi fisici gioca intorno alla dualità osservabili/stati, che consiste nel considerare un gruppo ad un parametro non sull'algebra degli osservabili ma sullo spazio degli stati:

$$G_t^* \colon \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{O}^*)$$

Se abbiamo il gruppo G_t, vogliamo che viga una regola di compatibilità (*aggiunzione*):

$$\omega(G_t a) = (G_t^* \omega)(a)$$

Ora abbiamo che

$$\omega(G_t a) = \omega[h, a] = X_h \omega(a)$$

cioè

$$G_t^* \omega = X_h \omega$$

ove l'azione di $\mathcal{O}$ su $\mathcal{S}$ è quella aggiunta: quest'ultima si chiama *equazione di Schrödinger* e l'approccio alla dinamica basato sugli stati si dice *raffigurazione di Liouville, o di Schrödinger*.

Questi approcci sono duali e, se esiste una precisa dualità fra lo spazio degli osservabili e quello degli stati (qui ci siamo tenuti necessariamente sulle generali: gli spazi potrebbero avere ad esempio delle topologie), equivalenti.

Il *problema diretto della dinamica hamiltoniana* consiste nella soluzione delle equazioni canoniche in una fissata algebra di osservabili; il *problema inverso della dinamica hamiltoniana* consiste, data un'algebra commutativa $(\mathcal{A}, \circ)$ ed una derivazione $X \in \mathrm{Der}(\mathcal{A}, \circ)$ nel determinare una struttura di algebra di Lie $[\,]$ che renda $(\mathcal{A}, \circ, [\,])$ un'algebra di osservabili in modo che $X = X_h$ per qualche $h \in \mathcal{A}$.

Per affrontare il problema inverso è utile la caratterizzazione di Gel'fand e Dorfman della struttura di Lie come indotta da un operatore $\mathcal{H}$: in questo caso l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ sarà $\mathrm{Der}(\mathcal{A}, \circ)$.

Il problema diretto può essere semplificato sfruttando una eventuale azione di altre algebre di Lie sull'algebra degli osservabili, come sarà accennato più sotto.

Preliminarmente riformuliamo suggestivamente le equazioni canoniche notando che le loro soluzioni corrispondono agli osservabili che "evolvono" secondo traiettorie hamiltoniane; nel nostro caso queste traiettorie sono le orbite dell'azione del gruppo a un parametro; esiste inoltre una nozione di "stabilità" di un sistema dinamico: precisamente si considera, dato un elemento $\omega \in \mathcal{O}_+^*$ dello spazio degli stati, la sua classe di stabilità come

$$\mathcal{O}_\omega^* = \{\omega' \in \mathcal{O}_+^* \mid \forall c \in \mathrm{Cas}\,\mathcal{O} \quad \omega(c) = \omega'(c)\}$$

Consideriamo ora un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ che agisca sull'algebra $\mathcal{O}$: questo vuol dire che è dato un morfismo di algebre di Lie

$$\tilde{} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathcal{O}, \circ)$$

Definizione 3.3 *Una rappresentazione di* $\mathfrak{g}$ *su* $\mathcal{O}$ *si dice* canonica *se per ogni* $X \in \mathfrak{g}$*:* $\tilde{X} \in \mathrm{Can}\,\mathcal{O}$*, e si dice* hamiltoniana *se per ogni* $X \in \mathfrak{g}$*:* $\tilde{X} \in \mathrm{Ham}\,\mathcal{O}$*.*

Un tipico esempio è l'azione indotta da un gruppo di Lie G la cui algebra sia $\mathfrak{g}$: se G agisce sullo spazio degli stati di $\mathcal{O}$, resta allora indotta una azione di G su $\mathcal{O}$ come

$$\omega(ga) = (g^{-1}\omega)(a)$$

dato che $\omega(g(ha)) = g^{-1}\omega(ha) = h^{-1}g^{-1}\omega(a) = (gh)^{-1}\omega(a)$; chiamiamo *canonica* questa azione se

$$g[a, b] = [ga, gb]$$

Ora consideriamo il generatore infinitesimale dell'azione di G: supponiamolo un gruppo di Lie, con algebra di Lie $\mathfrak{g}$, e, dato un elemento $X \in \mathfrak{g}$, consideriamo l'operatore lineare $\tilde{X} : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ definito come

$$\tilde{X} = (G_t(\exp tX)a)\,\Big|_{t=0}$$

L'operatore così definito è una derivazione di $\mathcal{O}$, e la corrispondenza $X \mapsto \tilde{X}$ definisce un morfismo di algebre di Lie:

Teorema 3.4 *La rappresentazione* $X \mapsto \tilde{X}$ *è canonica.*

Come principio meccanico assumeremo l'esistenza della mappa del momento[5]

Definizione 3.5 *Se un'algebra di Lie* $\mathfrak{g}$ *agisce canonicamente su un'algebra di osservabili* $\mathcal{O}$ *e se esiste una funzione* $J : \mathfrak{g} \to \mathcal{O}$ *tale che, se* $X \in \mathfrak{g}$*:*

$$X_{J(X)} = \tilde{X} \tag{†}$$

allora la mappa duale $\mu : \mathcal{O}^* \to \mathfrak{g}^*$ *definita come*

$$\mu(\varphi)(X) = \varphi(J(X)) \tag{‡}$$

si dice momento *o* mappa del momento *dell'azione canonica.*

[5] Traduciamo *momento* e non *impulso* il termine inglese (ma è ovviamente un imprestito latino) *momentum*: questo perché la *momentum map* generalizza effettivamente il concetto di momento della meccanica analitica.

Osserviamo che la (†) si può riscrivere come

$$[J(X), a] = \tilde{X}(a)$$

In presenza di un momento μ, possiamo tracciare il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O} \arrow[rr] & & \operatorname{Can}\mathcal{O} \\
& \mathfrak{g} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Notiamo inoltre che

$$X_{J([X,Y])} = \widetilde{[X, Y]} = [\tilde{X}, \tilde{Y}] = [X_{J(X)}, X_{J(Y)}] = X_{[J(X),J(Y)]}$$

Ovviamente, dato che possiamo considerare la successione esatta di algebre di Lie

$$0 \to \mathcal{O} \cap \mathcal{O}' \to \mathcal{O} \xrightarrow{X} \operatorname{Can}\mathcal{O} \xrightarrow{p} \operatorname{Can}\mathcal{O}/\operatorname{Ham}\mathcal{O} \to 0$$

l'esistenza di J equivale alla possibilità di sollevare un morfismo $\mathfrak{g} \to \operatorname{Can}\mathcal{O}$ ad un morfismo $\mathfrak{g} \to \mathcal{O}$ per tramite di X. Ad esempio se $\operatorname{Can}\mathcal{O} = \operatorname{Ham}\mathcal{O}$, l'esistenza del momento è sempre garantita.

In generale, se $J \colon \mathfrak{g} \to \mathcal{O}$ esiste allora possiamo considerare $X \circ J = K$, e $p \circ K = p \circ X \circ J = 0$; se viceversa $p \circ K = 0$ allora $\operatorname{Im} K \subset \operatorname{Ham}\mathcal{O}$, cioè, per ogni $X \in \mathfrak{g}$ esiste $a_X \in \mathcal{O}$ in modo che $K(X) = X_{a_X}$ e dunque $K = X \circ J$ (ove $J(X) = a$). In altri termini: $p \circ K = 0$ se e solo se la mappa J esiste. Notiamo che $p \circ K$ induce una mappa

$$\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \to \operatorname{Can}\mathcal{O}/\operatorname{Ham}\mathcal{O} = H^1(\operatorname{Can}\mathcal{O}, \mathcal{O})$$

e dunque

Teorema 3.6 *Se* $\operatorname{Can}\mathcal{O} = \operatorname{Ham}\mathcal{O}$ *oppure se* $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *allora* J *esiste per l'azione di* $\mathfrak{g}$ *su* $\mathcal{O}$*.*

Ad esempio la semisemplicità di $\mathfrak{g}$ garantisce l'esistenza del momento per un'azione canonica di $\mathfrak{g}$ su $\mathcal{O}$.

Se $\mathfrak{g}$ agisce canonicamente su $\mathcal{O}$ con momento μ indotto da una mappa $J : \mathfrak{g} \to \mathcal{O}$, diremo la tripla $(\mathcal{O}, \mathfrak{g}, J)$ essere un *sistema di Noether*; dato che, se $X \in \mathfrak{g}$, per la (†) della definizione di momento abbiamo:

$$X_{J(X)} h = \tilde{X}(h)$$

ne segue il classico

Teorema di Noether 3.7 *Se* $(\mathcal{O}, \mathfrak{g}, J)$ *è un sistema di Noether e se* $h \in \mathcal{O}$ *è* $\mathfrak{g}$*-invariante, cioè se* $\tilde{X}(h) = 0$ *per ogni* $X \in \mathfrak{g}$*, allora* $J(X)$ *definisce un* integrale primo *del sistema di hamiltoniana* h*, cioè*

$$[J(X), h] = 0$$

Questa è la famosa legge di conservazione del momento, nella sua versione infinitesimale: se $\mathfrak{g}$ è l'algebra di Lie di un gruppo allora possiamo riformularla "globalmente" come, per ogni $\varphi \in \mathcal{O}^*$:

$$\mu(\exp tX_h \cdot \varphi) = \mu(\varphi)$$

ove $\mu\colon \mathcal{O}^* \to \mathfrak{g}^*$ è il momento dell'azione canonica.

Notiamo che l'elemento

$$C(X, Y) = [J(X), J(Y)] - J([X, Y])$$

è nel centro dell'algebra $\mathcal{O}$, dato che la derivazione hamiltoniana da esso indotta è nulla; inoltre definisce una mappa $C\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \operatorname{Cas}\mathcal{O}$ antisimmetrica e bilineare tale che

$$C(X, [Y, Z]) + C(Y, [Z, X]) + C(Z, [X, Y]) = 0$$

In altri termini un 2-cociclo per la coomologia dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ a coefficienti nella rappresentazione $\operatorname{Cas}\mathcal{O} = \mathcal{O} \cap \mathcal{O}'$.

Notiamo che questo cociclo è l'ostruzione all'essere J un morfismo di algebre di Lie: se $C(X, Y) \equiv 0$ diciamo che il momento è *equivariante*.

La classe di coomologia $[C]$ dipende solo dall'azione canonica e non dal momento: infatti se $J : \mathfrak{g} \to \mathcal{O}$ determina un momento, allora anche $J + \gamma$, ove $\gamma : \mathfrak{g} \to \operatorname{Cas}\mathcal{O}$ è lineare, determina il medesimo momento, dato che

$$[(J + \gamma)(X), a] = [J(X), a]$$

Dunque il cociclo D associato a $J + \gamma$ è tale che

$$D(X, Y) = [J(X), J(Y)] - J[X, Y] - \gamma[X, Y] = -J[X, Y] - \gamma[X, Y]$$

Ma due cocicli sono coomologhi se differiscono per un cobordo, cioè per una mappa lineare $B\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{Cas}\mathcal{O}$; nel nostro caso per $B = \gamma$ troviamo che $[C] = [D]$.

Inoltre $[C] = 0$ se e solo se il momento è equivariante: infatti se $[C] = 0$ allora esiste un cobordo $B\colon \mathfrak{g} \to \mathcal{O}$ tale che

$$B[X, Y] = C(X, Y) = [J(X), J(Y)] - J[X, Y]$$

Dunque la mappa $J + B$ (che determina lo stesso momento di J) determina un momento equivariante.

Riassumendo, dato che l'annullarsi della classe di coomologia C equivale all'essere J un morfismo di algebre di Lie:

Teorema 3.8 *Una azione canonica di $\mathfrak{g}$ su un'algebra di osservabili $\mathcal{O}$ è hamiltoniana se e solo se esiste un morfismo di algebre di Lie $f : \mathfrak{g} \to \mathcal{O}$ tale che $X_{f(X)} = \tilde{X}$ se e solo se esiste un momento equivariante per l'azione di $\mathfrak{g}$ su $\mathcal{O}$.*

Di nuovo, se $\mathfrak{g}$ è l'algebra di Lie di un gruppo G possiamo globalizzare questo risultato, ed in questo caso la relazione di equivarianza diviene

$$g \cdot J(\mathrm{Ad}_g X) = J(X)$$

con $g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$ e $\cdot$ denota l'azione di G su $\mathcal{O}^*$.

Vogliamo ora mostrare che i momenti sono essi stessi mappe canoniche: per farlo rammentiamo che un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ determina una struttura di algebra di Poisson sul suo spazio dei tensori simmetrici $\mathrm{Sym}\,\mathfrak{g}$ semplicemente estendendo il prodotto di Lie; allora se J induce un momento equivariante:

$$[J(X), J(Y)] = J[X, Y]$$

questa equazione è verificata su un tensore simmetrico di grado qualsiasi:

Teorema 3.9 *Un momento equivariante $\mu\colon \mathcal{O}^* \to \mathfrak{g}^*$ è una mappa canonica.*

L'esistenza di un momento J consente di ridurre il problema diretto della dinamica hamiltoniana ad uno generalmente più semplice: l'idea è di sostituire $\mathcal{O}$ con un suo quoziente e proiettare l'hamiltoniana nella sua classe modulo il quoziente stesso.

Ad esempio se lo spazio $\mathcal{O}/\mathcal{O}_X$ quoziente per lo stabilizzatore di un elemento $X \in \mathfrak{g}$ (cioè $\mathfrak{g}_X = \{Y \mid [X, Y] = 0\}$) possiede un'unica struttura di algebra di osservabili indotta da quella di $\mathcal{O}$ per mezzo della proiezione canonica, una hamiltoniana $h \in \mathcal{O}$ tale che $\tilde{X}h = 0$ induce una hamiltoniana ridotta sullo spazio quoziente e le equazioni canoniche si riducono a quelle su questo quoziente: se esiste la mappa momento, le quantità conservate durante questo passaggio al quoziente sono esattamente i momenti dell'azione di $\mathfrak{g}$ su $\mathcal{O}$ (questa è una descrizione vaga e sommaria: può essere resa precisa formulando opportune condizioni per l'esistenza del quoziente).

4 Esempio: formalismo simplettico

Consideriamo una variatà simplettica (S, ω): abbiamo immediatamente a disposizione un'algebra che, in una certa misura[6], determina S, vale a dire le

[6]Infatti le misure di Dirac su S sono certi funzionali lineari su $C^\infty(S)$ (distribuzioni di ordine zero a supporto in un punto); equivalentemente i caratteri dell'algebra $C^\infty(S)$ ovvero i suoi ideali massimali restituiscono lo spazio topologico S.

funzioni infinitamente differenziabili complesse definite su S: $C^\infty_{\mathbb{C}}(S)$, che formano un'algebra rispetto al prodotto di funzioni "punto per punto", cioè il più ovvio possibile.

Poniamo dunque $\mathcal{A} = C^\infty(S)$ e $\circ$ uguale a questo prodotto: si noti che è associativo; mostriamo ora che la presenza della struttura simplettica induce in modo naturale anche un prodotto di Lie: dato che ω è non degenere, induce un isomorfismo $\omega^\flat : \mathfrak{X}(S) \to \Omega^1(S)$ fra lo spazio dei campi di vettori e lo spazio delle 1-forme differenziali, che ammette un inverso $\omega^\# : \Omega^1(S) \to \mathfrak{X}(S)$. Possiamo comporre questo inverso con la differenziazione di una funzione ed ottenere una mappa $X : C^\infty(S) \to \mathfrak{X}(S)$; allora definiamo le *parentesi di Poisson* di due funzioni $f, g \in C^\infty(S)$ come

$$[f, g] = \omega(X_f, X_g)$$

Ad esempio, come ben noto, le parentesi di Poisson localmente si scrivono *à la* Darboux come

$$[f, g](q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

Questa è una struttura bilineare anticommutativa (perché ω è una forma), che soddisfa la regola di Leibniz (perché X_f è un campo vettoriale) e l'identità di Jacobi (perché ω è chiusa); secondo la nostra notazione precedente, $\mathcal{H} = \omega^\#$ e X_f è esattamente la derivazione hamiltoniana associata a f, dato che il modulo delle derivazioni di $C^\infty(S)$ si identifica in modo naturale con lo spazio dei campi vettoriali[7].

Abbiamo dunque l'algebra $\mathcal{A}$ che possiamo considerare reale, limitandoci alle funzioni autoconiugate.

Le derivazioni canoniche di quest'algebra corrispondono ai campi di vettori C tali che

$$C[f, g] = [Cf, g] + [f, Cg]$$

Per tramite dell'isomorfismo $\omega^\#$ questi sono immagine delle forme chiuse, cioè localmente esatte: si tratta quindi dei campi vettoriali localmente hamiltoniani.

Notiamo inoltre che gli elementi di Casimir (cioè il commutante dell'algebra $\mathcal{A}$) si riducono alle sole funzioni localmente costanti.

L'insieme degli stati, si afferma di solito, è la varietà S stessa; questo è in accordo con le nostre definizioni precedenti, dato che possiamo immergere S nello spazio delle misure di probabilità su S facendo corrispondere ad ogni punto $s \in S$ la misura di Dirac in esso concentrata; questo spazio di misure

[7] Le varietà sono supposte di dimensione finita.

è un convesso nello spazio delle distribuzioni a supporto compatto, cioè nello spazio vettoriale topologico duale di $C^\infty(S)$ (rispetto alla sua topologia di Fréchet indotta dalle seminorme associate alle derivazioni parziali di ordine arbitrariamente grande nei compatti di S); gli stati puri sono esattamente le misure di Dirac, cioè i punti di S.

La dinamica è usualmente definita proprio su S: le trasformazioni G_t debbono essere gruppi a un parametro di diffeomorfismi: ad esempio il flusso di un campo vettoriale determina un tale gruppo, e le equazioni canoniche si scrivono quindi

$$\frac{df}{dt} = [h, f]$$

(supponiamo f indipendente dal tempo $t \in \mathbb{R}$ ma solo dalle variabili canoniche che invece dipendono da t.)

Le equazioni di Schrödinger si prestano ad essere scritte in forma integrale, dato che coinvolgono misure (immaginiamo stavolta gli stati dipendere dal tempo)

$$\frac{d}{dt}\int f(q,p)ds(q,p) = \int [h, f]ds(q,p)$$

ed essenzialmente equivalgono all'invarianza della misura di Liouville per trasformazioni canoniche ed all'equazione di Hamilton–Jacobi.

Il problema diretto della dinamica hamiltoniana consiste nell'integrazione delle equazioni precedenti sulla varietà S; il problema inverso consiste, dato $X \in \mathfrak{X}(M)$, con M varietà differenziabile, ed il sistema

$$\frac{df}{dt} = X(f)$$

nella determinazione di una struttura simplettica ω su M che renda canoniche queste equazioni; ad esempio in uno spazio affine $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ il sistema precedente si scrive come

$$\frac{df}{dt} = X(t, f)$$

ove $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $X : A \times \mathbb{R} \to A$ (con opportune ipotesi di regolarità): allora cerchiamo una soluzione per mezzo di un fattore integrante, cioè di un tensore doppio $c(t)$ dipendente dal tempo le cui componenti rendano il sistema (equivalente al precedente)

$$\sum_j c_{ij}(t)\left(\frac{df_j}{dt} - X_j(t, f)\right) = 0$$

simmetrico: questo equivale alle

$$\begin{cases} c_{ij} + c_{ji} = 0 \\ \dfrac{\partial c_{ij}}{\partial x_k} + \dfrac{\partial c_{ki}}{\partial x_j} + \dfrac{\partial c_{jk}}{\partial x_i} = 0 \\ \dfrac{\partial c_{ij}}{\partial dt} = \displaystyle\sum_k \left(\dfrac{\partial c_{jk} f_k}{\partial x_i} - \dfrac{\partial c_{ik} f_k}{\partial x_j} \right) \end{cases}$$

cioè al fatto che la forma di Lagrange (come la chiama Souriau, [12])

$$\Omega_X = \sum_{i<j} c_{ij} dx_i \wedge dx_j - \sum_i \sum_k c_{ik} f_k dx_i \wedge dt$$

è chiusa: se la scriviamo come $\Omega_X = \omega + i_X \omega \wedge dt$ allora il problema inverso è risolto con soluzione ω se e solo se ω è chiusa e non degenere; la chiusura è equivalente all'essere il fattore integrante indipendente dal tempo.

Questo classico ragionamento (che infatti si deve a Lagrange) è usualmente condensato nella frase: *i sistemi autonomi ammettono il problema inverso della dinamica hamiltoniana*.

Il problema diretto della dinamica conduce alla teoria di Hamilton–Jacobi: per prima cosa si cercano gli integrali primi del sistema canonico, cioè le funzioni che commutano con l'hamiltoniana, e si osserva che la parentesi di Poisson di due integrali primi è ancora un integrale primo (teorema di Poisson, che si riduce all'identità di Jacobi); quindi si nota che la conoscenza degli integrali primi consente di ridurre l'ordine del sistema, cioè la dimensione della varietà.

L'esempio più elementare è il seguente: consideriamo N particelle nello spazio macroscopico $\mathbb{R}^3$; dunque le configurazioni del sistema sono i punti della varietà simplettica $(\mathbb{R}^{6N}, \omega)$ (la forma simplettica è quella canonica); consideriamo l'azione del gruppo additivo $\mathbb{R}^3$ per traslazioni

$$x \cdot (q, p) = (q + x, p)$$

L'algebra di Lie del gruppo è abeliana, ed il generatore infinitesimale di un suo elemento X è il campo vettoriale

$$\tilde{X}(q, p) = (\underbrace{X, ..., X} nvolte, 0, ..., 0)$$

($X \in \mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}^3$). Se ora cerchiamo un momento per questa azione (poiché l'algebra di Lie è abeliana questo certamente esiste per motivi coomologici), per definizione dobbiamo avere $X_{J(X)} = \tilde{X}$ cioè

$$X_{J(X)}(q, p) = \left(\frac{\partial J(X)}{\partial q}, -\frac{\partial J(X)}{\partial p} \right)$$

(perché le parentesi di Poisson sono $[f,g] = \sum_i(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}))$ e quindi dobbiamo imporre le condizioni

$$\frac{\partial J(X)}{\partial q_i} = X \quad \text{e} \quad \frac{\partial J(X)}{\partial p_i} = 0$$

che permettono di concludere

$$J(X)(q,p) = \langle \sum_i p_i, X\rangle$$

cioè il momento $\mu = J^*$ è esattamente il classico momento lineare totale $\mu = \sum_i p_i$; in questo modo riduciamo di due l'ordine del sistema canonico perché abbiamo una relazione che lega una delle variabili p_i alle altre.

5 Esempio: varietà presimplettiche e di Poisson

Sia P una varietà presimplettica, cioè differenziabile ed equipaggiata di una 2-forma chiusa ω *ma non necessariamente non degenere*, e $\mathcal{A}$ la sua algebra di funzioni differenziabili reali.

Possiamo ancora considerare una mappa

$$\omega^\flat\colon \mathfrak{X}(P) \to \Omega^1(P)$$

semplicemente usando la contrazione $\omega^\flat(X) = \mathbf{i}_X\omega$; chiaramente questa non sarà più invertibile, ma comunque possiamo definire una algebra di osservabili anche in questo caso: basti considerare lo spazio vettoriale $C^\infty_\omega(P)$ delle funzioni $f \in C^\infty(P)$ tali che

$$\forall X \quad \mathbf{i}_X\omega = 0 \implies X(f) = 0$$

cioè invarianti lungo le "superficie caratteristiche"[8] della forma ω.

Questo spazio $C^\infty_\omega(P)$ è un'algebra di osservabili rispetto alle seguenti strutture: il prodotto $\circ$ è l'usuale prodotto di funzioni, e la struttura di Lie $[\,]$ è data da

$$[f,g] = X_f g$$

ove X_f è definito come il campo vettoriale tale che

$$\mathbf{i}_{X_f}\omega = df$$

[8] Se la forma ω (vista come tensore) ha rango costante, il suo nucleo è una distribuzione nel senso di Frobenius, cui possiamo associare una fogliazione: sotto opportune condizioni lo spazio quoziente modulo la fogliazione possiede una struttura di varietà, ed allora la proiezione della forma dà luogo ad una forma simplettica su questo quoziente (cfr. [12, §9]): questo è un caso particolare del fenomeno di riduzione spiegato al §3.

Proposizione 5.1 $(C^\infty_\omega(P), \circ, [\,])$ *è un'algebra di osservabili.*

In effetti se $f, g \in C^\infty_\omega(P)$ allora anche $f \circ g, f[g] \in C^\infty_\omega(P)$: se $\mathbf{i}_X\omega = 0$ infatti si ha

$$X(fg) = fX(g) + gX(f) = 0, \quad X[f,g] = XX_f g = \mathbf{i}_X \mathbf{i}_{X_f} dg = \mathbf{i}_X \mathbf{i}_{X_f} \mathbf{i}_{X_g}\omega = 0$$

Inoltre

$$[f,g] = \mathbf{i}_{X_f} dg = \mathbf{i}_{X_f}\mathbf{i}_{X_g}\omega = -\mathbf{i}_{X_g}\mathbf{i}_{X_f}\omega - \mathbf{i}_{X_f} dg = -[f,g]$$

e

$$[f,gh] = X_f(gh) = \mathbf{i}_{X_f} d(gh) = g\mathbf{i}_{X_f} dh + h\mathbf{i}_{X_f} dg = g[f,h] + h[f,g]$$

ed infine

$$[[f,g],h] = \mathbf{i}_{X_{[f,g]}} dh = \mathbf{i}_{X_{[f,g]}}\mathbf{i}_{X_h}\omega = \omega(X_h, X_{[f,g]})$$

Notiamo che in questo caso gli elementi di Casimir sono le funzioni costanti sulle superfici caratteristiche della forma differenziale ω; questo rende conto del fatto che i sistemi descritti da queste algebre di osservabili possiedono delle costanti del moto che infatti non sono costanti se non sulle superfici caratteristiche: ad esempio certi sistemi vincolati si possono descrivere in questo modo.

Inoltre il campo hamiltoniano associato a f è esattamente X_f; notiamo che il modulo sull'algebra delle funzioni $C^\infty(P)$ generato da questi campi può essere utilizzato per definire le *connessioni parziali* nel senso di Bott: vale a dire le classi caratteristiche secondarie forniscono gli invarianti integrali in questo caso.

Usando questa algebra di osservabili è possibile dare una formulazione hamiltoniana della meccanica "presimplettica" (cfr. [12]) che faccia intervenire le parentesi [ ] piuttosto che il formalismo differenziale e variazionale classico: queste parentesi non sembrano essere definite in [12], ma sono presenti in [8] che afferma di ispirarsi direttamente ai lavori di E. Cartan.

Una diversa generalizzazione del formalismo simplettico consiste non nell'indebolire le condizioni su ω, ma nel sostituirla con un altro tensore: la principale motivazione per questa estensione è lo studio delle strutture di Lie–Poisson, cioè degli spazi vettoriali duali delle algebre di Lie visti come varietà con delle parentesi di Poisson naturali associate alle parentesi di Lie dell'algebra (cfr. [12]) che non sono esprimibili, se non sulle singole orbite coaggiunte, come varietà simplettiche.

In generale, se P è una varietà di Poisson, questa si presenterà assieme ad un tensore doppio controvariante π che soddisfi la relazione di integrabilità di Lie

$$[\pi, \pi] = 0$$

ove [ ] denotano le parentesi di Schouten–Nijenhuis (cfr. [10], [13]).

Allora le parentesi di Poisson sono definite come

$$[f, g] = \pi(df, dg)$$

L'algebra $C^\infty(P)$ è quindi un'algebra di Poisson (commutativa) ed in particolare un'algebra di osservabili.

Notiamo inoltre che il tensore π induce la mappa hamiltoniana

$$\pi^\# : \Omega^1(P) \to \mathfrak{X}(P)$$

dallo spazio delle 1-forme a quello dei campi vettoriali, come

$$\pi^\#(\varphi) = \mathbf{i}_p i\varphi$$

Questa è l'analoga dell'isomorfismo $\omega^\#$ per le varietà simplettiche: per mezzo di essa possiamo ripetere l'intera teoria hamiltoniana formulando sia il problema diretto che l'inverso; in realtà, ancora una volta, tutto si basa sull'algebra $C^\infty(P)$ e sulle sue due operazioni commutativa e di Lie.

6 Esempio: formalismo quantistico elementare

Consideriamo uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ separabile, ad esempio $L^2(\mathbb{R}^N)$, e lo spazio $\mathcal{A}$ di tutti gli operatori autoaggiunti (o essenzialmente autoaggiunti ma definiti almeno su un insieme denso) $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$: $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$.

Si tratta di un'algebra di osservabili rispetto ai prodotti di Jordan e di Heisenberg:

$$A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA) \qquad \text{e} \qquad [A, B] = \frac{i}{\hbar}(AB - BA)$$

(per capire il motivo della normalizzazione si veda [7, §3.2] ove è anche data la prima assiomatizzazione delle algebre di Poisson).

Poiché il prodotto di operatori è associativo la parentesi [ ] è di Lie, ed inoltre

$$\begin{aligned}
[A \circ B, C] &= \frac{i}{2\hbar}\left((AB + BA)C - C(AB + BA)\right) \\
&= \frac{i}{2\hbar}\left(ABC + BAC - CAB - CBA\right) \\
&= \frac{i}{2\hbar}\left(ABC + BAC - CAB - CBA - ACB + ACB + BCA - BCA\right) \\
&= \frac{i}{2\hbar}\left(A(BC - CB) + (BC - CB)A\right) + \frac{i}{2\hbar}\left(B(AC - CA) + (AC - CA)B\right) \\
&= A \circ [B, C] + B \circ [A, C]
\end{aligned}$$

Il prodotto di Jordan $\circ$ possiede una notevole interpretazione fisica: è essenzialmente legato alla simultanea misurabilità degli osservabili sui quali agisce (cfr. [11, §III-3]), mentre il prodotto di Heisenberg non solo è nullo quando (e solo quando) questa misurabilità ha luogo (*principio di indeterminazione di Heisenberg*) ma pure costituisce l'analogo quantistico delle parentesi di Poisson su una varietà simplettica o di Poisson (*principio di corrispondenza di Dirac*): una deduzione della parentesi di Heisenberg la si trova in [4] o [7], mentre uno studio pioneristico (le cui linee guida furono poi abbandonate) del prodotto di Jordan è quello di Jordan, von Neumann e Wigner [9].

Naturalmente non abbiamo affrontato qui il nodo essenziale se si vuole applicare a problemi concreti questo schema: la topologia dello spazio degli osservabili.

Comunque la nostra definizione di algebra di osservabili $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ ingloba la topologia in questo caso, grazie al ben noto teorema di densità di von Neumann

Teorema 6.1 *Le algebre degli osservabili $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ sono esattamente le algebre di von Neumann sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, quindi le sottoalgebre associative ed involutive chiuse rispetto alla topologia debole.*

Naturalmente in presenza di *settori di superselezione* questo formalismo non basta e l'algebra degli osservabili è un'algebra C*.

Gli stati del sistema sono i vettori di norma 1 nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ stesso: possiamo identificare un tale stato ψ con un funzionale lineare positivo su $\mathcal{A}$ come

$$\psi(A) = \langle A\psi, \psi \rangle$$

Questo numero è il *valore atteso* dell'osservabile A nello stato ψ.

Una dinamica è un gruppo a un parametro U_t di trasformazioni unitarie dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$: la condizione di unitarietà è una richiesta della fisica sperimentale, dato che un tale gruppo deve preservare le probabilità di transizione $|\langle \psi, \varphi \rangle|^2$ da uno stato all'altro.

Le equazioni canoniche si scrivono come

$$\frac{dA}{dt} = [H, A]$$

e si dicono *equazioni di Heisenberg*: si noti che l'hamiltoniana del sistema non dipende dal tempo; questa è la *raffigurazione di Heisenberg* delle equazioni del moto.

Se il gruppo unitario ad un parametro è fortemente continuo allora il classico teorema di Stone afferma che possiede un generatore infinitesimale

H che altri non è se non un operatore autoaggiunto:

$$U_t = \exp itH$$

In questo modo uno stato si trasforma come $\psi \mapsto (\exp itH)\psi$: calcolando il valore atteso di un osservabile A in uno stato ψ otteniamo anche la legge di trasformazione di un osservabile

$$\langle A\psi, \psi\rangle = \langle (\exp itH)A\psi, (\exp itH)\psi\rangle = \langle (\exp itH)A(\exp -itH)\psi, \psi\rangle$$

da cui

$$\frac{d}{dt}A = \frac{d}{dt}(\exp itH)A(\exp -itH) = \frac{i}{\hbar}[H, \frac{d}{dt}(\exp itH)A(\exp -itH)]$$

che applicato a ψ fornisce

$$\frac{d}{dt}(\exp itH)\psi = -\frac{i}{\hbar}H(\exp itH)\psi$$

vale a dire l'equazione di Schrödinger

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{i}{\hbar}H\psi$$

definita sullo spazio degli stati.

7 Esempio: calcolo formale delle variazioni

I principi della meccanica vengono generalmente dati in forma variazionale, cioè utilizzando il formalismo lagrangiano; da questa forma variazionale, se la lagrangiana soddisfa le opportune ipotesi di regolarità, si passa alla versione hamiltoniana introducendo le variabili di momento e scrivendo le equazioni di hamilton.

I pregi e difetti dei due approcci, così come le loro interazioni, sono ben noti: ad esempio, nelle teorie di campo, il formalismo lagrangiano si combina più facilmente con la descrizione relativistica (basta imporre l'invarianza lorentziana delle lagrangiane utilizzate) e questo spiega perché l'approccio lagrangiano di Dirac alla quantizzazione ha potuto produrre una teoria dell'elettrone e, alle lunghe, una elettrodinamica quantistica; invece l'approccio hamiltoniano è più consono ad una teoria geometrica dello spazio degli stati, come nel caso della quantizzazione di Schrödinger.

Seguiamo qui l'approccio di Gel'fand e Dikij nella descrizione di un formalismo variazionale sufficientemente semplice e generale: per i dettagli, che certo meritano una lettura alla fonte, segnaliamo ad esempio [1].

Consideriamo un'algebra $\mathcal{P}$ di polinomi su un insieme di simboli $\{q_\alpha^i\}$ ove $i \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in A$, un certo insieme di indici.

Dunque l'algebra $\mathcal{P}$ è formata dagli elementi della forma

$$A = \sum_{i,\alpha} a_{i,\alpha} q_\alpha^i$$

ove gli indici i e α variano in insiemi finiti; sugli elementi di quest'algebra possiamo agire con gli operatori differenziali al prim'ordine, che hanno la forma

$$D = \sum_{i,\alpha} D_{i,\alpha} \frac{\partial}{\partial q_\alpha^i}$$

ove $D_{i,\alpha} \in \mathcal{P}$; un esempio notevole di un tale operatore è l'*operatore di spostamento*

$$\mathcal{S} = \sum_{i,\alpha} q_\alpha^{i+1} \frac{\partial}{\partial q_\alpha^i}$$

Abbiamo così battezzato questo operatore in quanto

$$\mathcal{S} q_\alpha^i = q_\alpha^{i+1}$$

I generatori dell'algebra $\mathcal{P}$ sono quindi ottenuti applicando $\mathcal{S}$ alle variabili di "grado" zero q_α^0.

Lo spazio degli operatori differenziali al prim'ordine così definiti è un'algebra di Lie rispetto al commutatore

$$[X, Y] = \sum_{i,\alpha} \sum_{j,\beta} \left(X_{i,\alpha} \frac{\partial}{\partial q_\alpha^i} Y_{j,\beta} - Y_{j,\beta} \frac{\partial}{\partial q_\alpha^i} Y_{i,\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial q_\beta^j}$$

Ad esempio, per ogni operatore X si ha

$$[X, \mathcal{S}] = \sum_{i,\alpha} (X_{i+1,\alpha} - \mathcal{S} X_{i,\alpha}) \frac{\partial}{\partial q_\alpha^i}$$

Teorema 7.1 *L'algebra di Lie degli operatori differenziali al prim'ordine su $\mathcal{P}$ è un $\mathcal{P}$-modulo.*

La rappresentazione di $\mathcal{P}$ sull'algebra degli operatori è ovviamente data dalla moltiplicazione: $(A \cdot X)(B) = A(XB)$ ove $A, B \in \mathcal{P}$ e X è un operatore differenziale.

Lemma 7.2 *La relazione $A \sim B$ definita fra elementi $A, B \in \mathcal{P}$ come*

$$A \sim B \iff \exists C \in \mathcal{P} \quad A = B + \mathcal{S}C$$

è di equivalenza.

Quindi la classe di equivalenza $[0]$ contiene tutti gli elementi di $\mathcal{P}$ della forma $\mathcal{S}B$ per qualche B; dunque le uniche classi di equivalenza non nulle di variabili q^i_α sono quelle indotte dalle q^0_α.

L'insieme quoziente $\mathcal{A} = \mathcal{P}/\sim$ si chiama *spazio dei funzionali*, ed una classe di equivalenza $[A]$ si dice *funzionale*; suggestivamente scriveremo

$$[A] = \int A$$

Il motivo di questa notazione è che se come variabili q^0_α consideriamo opportune funzioni reali di variabile reale (ad esempio periodiche o a decrescenza rapida) e come q^i_α le loro derivate di ordine qualsiasi, $\mathcal{S}$ diviene semplicemente la derivazione per la variabile reale e $\int$ l'integrazione rispetto a questa.

Ora vogliamo considerare un ulteriore spazio che si può associare ad $\mathcal{P}$: si tratta dello spazio delle classi $\{A_\alpha\}$ ove $\alpha \in A$; questo è ovviamente uno spazio vettoriale $\mathfrak{g}$, da non confondere con $\mathcal{A}$; spiegheremo fra breve il motivo per il quale l'abbiamo denotato con $\mathfrak{g}$. Poiché un operatore differenziale al prim'ordine

$$X = \sum_{i,\alpha} X_{i,\alpha} pdq^i_\alpha$$

commuta con $\mathcal{S}$ se e solo se $X_{i,\alpha} = \mathcal{S}^i A_\alpha$ con $A_\alpha \in \mathcal{P}$, gli operatori differenziali che commutano con $\mathcal{S}$ sono in corrispondenza biunivoca con le classi $\{A_\alpha\} \in \mathfrak{g}$ (basterà considerare l'operatore differenziale i cui coefficienti sono $\mathcal{S}^i A_\alpha$):

Teorema 7.3 *La sottoalgebra degli operatori differenziali al prim'ordine che commutano con $\mathcal{S}$ è un $\mathcal{P}$-sottomodulo isomorfo a $\mathfrak{g}$.*

Poiché possiamo identificare $\mathfrak{g}$ con una sottoalgebra dell'algebra degli operatori differenziali, possiamo "trasferire" le parentesi di Lie di questa sottoalgebra su $\mathfrak{g}$, rendendola a sua volta un'algebra di Lie; esplicitamente possiamo scrivere il commutatore: se $F, G \in \mathfrak{g}$, con $F = \{A_\alpha\}$ e $G = \{B_\alpha\}$ allora gli elementi del commutatore $[F, G]$ sono definiti come

$$[F, G]_\alpha = \sum_{i,\beta} \left(\mathcal{S}^i F_\beta \frac{\partial}{\partial q^i_\beta} G_\alpha - \mathcal{S}^i G_\beta \frac{\partial}{\partial q^i_\beta} F_\alpha \right)$$

Questa definizione è stata introdotta da Gel'fand e Dickij [1].

Ora costruiamo una rappresentazione di $\mathfrak{g}$, in modo da poter definire gli operatori hamiltoniani: utilizzeremo la *derivata variazionale*.

Una derivata variazionale è un operatore $\delta/\delta q_\alpha \colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ definito come

$$\frac{\delta}{\delta q_\alpha} = \sum_{i=0}^{\infty} (-\mathcal{S})^i \frac{\partial}{\partial q_\alpha^i}$$

Le derivate variazionali danno luogo ad una unica derivata variazionale sui funzionali $\delta \colon \mathcal{P} \to \mathfrak{g}$ definita come

$$\frac{\delta A}{\delta q} = \left\{ \frac{\delta A}{\delta q_\alpha} \right\}$$

Per il seguente risultato, che potremmo chiamare *lemma di Poincaré variazionale*, rimandiamo a [1, §1].

Teorema 7.4 $\delta \circ \mathcal{S} = 0$.

Questo implica che δ è ben definita anche sullo spazio $\mathcal{A}$ dei funzionali, cioè che possiamo considerarla come una mappa

$$\delta \colon \mathcal{A} \to \mathfrak{g}$$

Sveliamo infine che $\mathcal{A}$ è una rappresentazione di rispetto all'azione

$$\{A_\alpha\} \cdot [B] = \int \sum_\alpha \frac{\delta B}{\delta q_\alpha} A_\alpha$$

Ora vogliamo risolvere il problema inverso della dinamica hamiltoniana sull'algebra di Lie $\mathfrak{g}$: consideriamo cioè gli operatori hamiltoniani $\mathcal{H} \colon \Omega^1(\mathfrak{g}, \mathcal{A}) \to \mathfrak{g}$; lo spazio delle 1-cocatene per la coomologia di $\mathfrak{g}$ a coefficienti in $\mathcal{A}$ ha come elementi le mappe lineari $c \colon \mathfrak{g} \to \mathcal{A}$ tali che

$$c(\{A_\alpha\}) = \int \sum_\alpha c_\alpha A_\alpha$$

ove $c_\alpha \in \mathcal{P}$ e, dato che questa è un'algebra di polinomi, solo un numero finito di essi è diverso da zero.

Allora un operatore $\mathcal{H} \colon \Omega^1(\mathfrak{g}, \mathcal{A}) \to \mathfrak{g}$ potrà considerarsi come

$$\mathcal{H}(c)_\alpha = \sum_\beta H_{\alpha\beta} c_\beta$$

ove $H_{\alpha\beta}\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ sono operatori. Se $\mathcal{H}$ è hamiltoniano, le parentesi di Poisson su $\mathcal{A}$ sono date da

$$\{[A],[B]\} = d[A](\mathcal{H}d[B]) = \int \left(\sum_{\alpha,\beta} H_{\alpha\beta}\frac{\delta A}{\delta q_\beta}\right)\frac{\delta B}{\delta q_\alpha}$$

Queste sono le usuali parentesi della teoria classica dei campi.

Si noti che questo schema possiamo formularlo nel contesto delle algebre di osservabili solo con la forzatura di imporre il prodotto $\circ$ identicamente nullo: allora le derivazioni sono tutti gli operatori lineari e $\mathfrak{g} = \mathrm{Can}\,\mathcal{A}$.

L'assenza del prodotto commutativo è il dato caratteristico delle teorie dei campi, e va ascritto al carattere "integrale" dei funzionali: infatti il motivo essenziale per il quale non esiste un naturale prodotto sullo spazio dei funzionali è che l'integrale del prodotto di funzioni non è il prodotto degli integrali: per capirlo meglio concludiamo questa sezione notando che anziché da un'algebra di polinomi $\mathcal{P}$, potevamo partire da una qualsiasi algebra $\mathcal{P}$ su un campo $\mathbb{K}$ e da una sua derivazione $\mathfrak{d}$ tale che $\ker\mathfrak{d} = \mathbb{K}$; il quoziente $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{P}}$ di $\mathcal{P}$ modulo l'immagine delle derivazione $\mathfrak{d}$ è lo spazio dei funzionali: la proiezione canonica

$$\mathcal{P} \to \mathcal{A}$$

si denota con $\int a$; allora

$$\int (\mathfrak{d}a)b + \int a\mathfrak{d}(b) = \int \delta(ab) = 0$$

Quindi il prodotto non è possibile definirlo sui funzionali, ma al massimo fra un funzionale ed un elemento dell'algebra.

Bibliografia

[1] I.M. Gel'fand, L.A. Dikii, *Asymptotics of the resolvent of Sturm–Liouville equations and the algebra of Kortoweg–de Vries equations*, Russ. Math. Surv. **30** (1975), 77-113.

[2] I.M. Gel'fand, I. Ya. Dorfman, *Hamiltonian operators and algebraic structures related to them*, Funct. Anal. Appl. **13** (1980), 248–262.

[3] I.M. Gel'fand, I. Ya. Dorfman, *Hamiltonian operators and the classical Yang–Baxter equation*, Funct. Anal. Appl. **16** (1982), 241–248.

[4] P.A.M. Dirac, *The principles of quantum mechanics*, Oxford 1930.

[5] P.A.M. Dirac, *Generalized Hamiltonian Dynamics*, Canad. J. Math. **2** (1950), 129–148.

[6] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University, New York, 1964.

[7] V.A. Fock, *Fundamentals of Quantum Mechanics*, MIR, 1978 (I ed. 1932).

[8] R. Hermann, *Differential Geometry and the Calculus of Variations*, Academic Press, New York, 1968.

[9] P. Jordan, J. von Neumann, E. Wigner, *On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism*, Ann. MAth. II serie, **35** (1934), 29–64.

[10] A. Lichnerowicz, *Les Variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*, J. Diff. Geom. **12** (1977), 253–300.

[11] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton, 1932.

[12] J.-M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, Paris, Dunod, 1970.

[13] A. Weinstein, *The local structure of Poisson manifolds*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 523–557.

[14] A. Weinstein, *Poisson structures and Lie algebras*, in *Élie Cartan et les Mathématiques d'aujourd'hui*, Astérisque (hors série), 1975, 421–434.