Strutture di Poisson

Paolo Caressa

1995

Questa opera è distribuita con licenza *Creative Commons Attribuzione-Non commerciale 3.0 Unported.*
This work is licensed under a *Creative Commons Attribution-Non Commercial 3.0* Unported License.

[Testo di un seminario tenuto presso il Dipartimento di Matematica "U. Dini", Firenze, 1995.]

1 Esempi di algebre di Poisson

Classicamente, la teoria geometrica del formalismo hamiltoniano viene sviluppata sulle varietà simplettiche, che forniscono una generalizzazione adeguata del concetto di spazio delle fasi della Meccanica Classica. Ricordiamo che una *varietà simplettica* (S, ω) è una varietà differenziabile S dotata di una 2-forma differenziale chiusa e non degenere $\omega \in Z^1(S)$, che si dice *forma simplettica* della varietà. Il fatto che la forma sia non degenere implica che è indotto un isomorfismo

$$\begin{aligned} \omega^{\#} : Vect(S) &\to \Omega^1(S) \\ X &\mapsto (Y \mapsto \omega(X \wedge Y)) \end{aligned}$$

di fibrati, che S ha dimensione pari ed è orientabile.

Osserviamo che una possibile motivazione geometrica per questa definizione è l'analogia apparente con le varietà riemanniane: infatti la struttura simplettica è definita da un 2-tensore covariante antisimmetrico non degenere laddove una struttura riemanniana è introdotta considerando un 2-tensore covariante simmetrico non degenere; ma questo parallelismo è ingannevole, come è lecito attendersi considerando le differenze fra algebra esterna ed algebra simmetrica: la più notevole diversità è il fatto che le varietà simplettiche sono, dal punto di vista locale, tutte equivalenti, se hanno la stessa dimensione, infatti vige il

Teorema di Darboux 1.1 *Se (S, ω) è una varietà simplettica, allora in ogni suo punto $p \in S$ esiste un intorno con coordinate $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ tali che, in queste coordinate, la forma simplettica è*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$$

Quindi non è ad esempio possibile definire un invariante paragonabile alla curvatura per le varietà simplettiche, e come si vede, la geometria simplettica è notevolmente diversa da quella riemanniana.

Ma il fatto che qui più interessa, è la possibilità di definire sulle varietà simplettiche il formalismo della Meccanica Hamiltoniana. Abbiamo infatti osservato come per ogni varietà simplettica i campi di vettori e le 1-forme differenziali costituiscano fibrati isomorfi, il che consente di associare ad ogni funzione $f \in C^\infty(S)$ un campo definito come:

$$\chi_f := (\omega^\#)^{-1} df$$

che si dice *campo hamiltoniano* associato ad f. In altri termini, i campi hamiltoniani su S sono le controimmagini, via la mappa $\omega^\#$ delle 1-forme esatte. In modo analogo i campi *localmente hamiltoniani* sono le controimmagini delle 1-forme chiuse. Con questa definizione, possiamo definire le *parentesi di Poisson* su S, che agiscono sulle funzioni per produrne altre nel modo seguente:

$$\{f, g\} := \omega(\chi_f \wedge \chi_g)$$

Evidentemente questa definizione è ben posta, ed inoltre è immediato verificare che l'operazione $\{\}$ è bilineare ed antisimmetrica; ma il fatto più interessante, è che questa operazione rende $C^\infty(S)$ un'algebra di Lie. Infatti la condizione $d\omega = 0$ equivale all'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson, come un calcolo immediato permette di verificare: infatti utilizziamo la formula del differenziale esterno

$$\begin{aligned} d\omega(X \wedge Y \wedge Z) = & X \cdot \omega(Y \wedge Z) - Y \cdot \omega(X \wedge Z) + Z \cdot \omega(X \wedge Y) - \\ & - \omega([X, Y] \wedge Z) + \omega([X, Z] \wedge Y) + \omega([Y, Z] \wedge X) \end{aligned}$$

ed il fatto che

$$[\chi_f, \chi_g] = \chi_{\{f,g\}}$$

la cui dimostrazione è un ovvio conto:

$$\begin{aligned} [\chi_f, \chi_g](h) &= \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} \\ &= -\{h, \{f, g\}\} \qquad \text{(identità di Jacobi per } \{\}) \\ &= \chi_{\{f,g\}} \end{aligned}$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} d\omega(\chi_f \wedge \chi_g \wedge \chi_h) &= \chi_f \cdot \omega(\chi_g \wedge \chi_h) - \chi_g \cdot \omega(\chi_f \wedge \chi_h) + \chi_h \cdot \omega(\chi_f \wedge \chi_g) - \\ &\quad - \omega([\chi_f, \chi_g] \wedge \chi_h) + \omega([\chi_f, \chi_h] \wedge \chi_g) - \omega([\chi_g, \chi_h] \wedge \chi_f) \\ &= \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \\ &\quad + \{\{f, g\}, h\} + \{\{f, h\}, g\} + \{f, \{g, h\}\} \\ &= 2(\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}) \end{aligned}$$

e quindi

$$d\omega = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \{\} \text{ verificano l'identità di Jacobi}$$

Una volta definite le parentesi di Poisson, possiamo sviluppare globalmente il formalismo hamiltoniano sulle varietà simplettiche, che localmente corrisponde al classico formalismo della Meccanica Analitica.

In questa costruzione, l'oggetto essenziale non è stata tanto la varietà S quanto l'algebra delle funzioni $C^\infty(S)$, che, pensando ad S come allo spazio delle fasi, possiamo immaginare come algebra degli osservabili. Spostare l'interesse dalle fasi agli osservabili costituisce il punto di vista di Dirac nello sviluppo della meccanica analitica, e la principale motivazione per la costruzione di una teoria puramente algebrica del formalismo hamiltoniano; che molti concetti meccanici siano di natura algebrica è un fatto noto da diverso tempo, eppure non è stata ancora edificata una teoria algebrica generale, e cioè una teoria delle algebre di Poisson. Il primo tentativo risale probabilmente ai caotici lavori di Hermann ed al fondamentale articolo di Krasil'schik e Vinogradov [K-V] del 1975.

L'idea fondamentale di questa teoria algebrica è essenzialmente quella di generalizzare l'algebra degli osservabili di una varietà simplettica, nel senso della seguente

Definizione 1.2 *Dato un campo K un'*algebra di Poisson *A su K è una K-algebra associativa commutativa e con unità $(A, \cdot)$ che sia anche una K-algebra di Lie $(A, \{\})$ in cui la struttura associativa e la struttura di Lie siano legate dalla* regola di Leibniz*:*

$$\forall a, b, c \in A \qquad \{ab, c\} = a\{b, c\} + \{a, c\}b$$

Abbiamo richiesto che l'algebra sia definita su un campo ma visibilmente avrebbe avuto senso richiedere semplicemente che K fosse un anello commutativo con unità. La commutatività della struttura associativa è un requisito che scaturisce dal fatto che gli esempi fondamentali che abbiamo in mente sono algebre di funzioni (e quindi di necessità commutative) e dal fatto che vogliamo trattare generalizzazioni di una teoria fisica classica; lo studio di algebre di Poisson non commutative ci porterebbe piuttosto ad edificare una teoria dal sapore quantistico, ed effettivamente ha senso definire procedure di quantizzazione algebrica che consistono proprio nel perturbare un prodotto associativo commutativo per ottenere prodotti non commutativi su una nuova algebra, che viene interpretata come "quantizzazione" dell'algebra di partenza (questa è l'idea della quantizzazione per deformazione di Lichnerowicz).

Evidentemente l'algebra $C^\infty(S)$ associata ad una varietà simplettica (S,ω) è un'algebra di Poisson rispetto al prodotto di funzioni punto per punto ed alle parentesi di Poisson: l'identità di Leibniz segue dal fatto che i campi hamiltoniani χ_f sono effettivamente campi di vettori, e cioè corrispondono derivazioni nell'algebra delle funzioni $C^\infty(S)$:

$$\chi_{fg} = g\chi_f + f\chi_g$$

Un'altra classe di esempi di algebre di Poisson, che non possono essere ottenute da varietà simplettiche, e che quindi ci mostrano come la nostra definizione algebrica sia realmente una generalizzazione profonda, si ottiene considerando le cosiddette e fondamentali *parentesi di Lie Poisson*.

Questi oggetti furono definiti da Sophus Lie nel secondo volume del suo classico trattato *Theorie der Trasformationgruppen* (1890), e poi riscoperti da Konstant, Kirillov e Souriau in ambito algebrico e fisico matematico: costituiscono un esempio fondamentale che spiega fra l'altro il legame esistente fra geometria simplettica, procedure di quantizzazione e teoria delle rappresentazioni dei gruppi.

Un modo intrinseco di introdurli è il seguente. Si consideri una $\mathbb{R}$-algebra di Lie (di dimensione finita) $\mathfrak{g}$ e si consideri il suo spazio vettoriale duale $V := \mathfrak{g}^*$. Vogliamo mostrare come introdurre parentesi di Poisson sull'algebra di funzioni $C^\infty(V)$ (V essendo uno spazio vettoriale è in particolare una varietà differenziabile). All'uopo consideriamo per ogni funzione $f \in C^\infty(V)$ il suo differenziale

$$(df)_v : V \to \mathbb{R}$$

nel punto $v \in V$. Dato che $(df)_v$ è una forma lineare, è un elemento di $V^* \cong \mathfrak{g}$ (isomorfismo naturale di uno spazio vettoriale di dimensione finita nel suo biduale), e quindi, se partiamo da due funzioni $f, g \in C^\infty(V)$ e da un elemento $v \in V$ otteniamo due elementi di $\mathfrak{g}$, $(df)_v$ e $(dg)_v$ dei quali possiamo evidentemente considerare la parentesi di Lie $[(df)_v, (dg)_v]$, che sta ancora in $\mathfrak{g}$ e quindi può essere valutata su v, che, essendo un elemento di $V = \mathfrak{g}^*$, è una forma lineare su $\mathfrak{g}$: il risultato di queste operazioni è un numero reale, e quindi possiamo dire di aver definito una funzione da V in $\mathbb{R}$ nel modo seguente:

$$\{f, g\}(v) := \langle [(df)_v, (dg)_v] | v \rangle$$

ove $\langle , \rangle$ è l'accoppiamento fra V ed il suo duale $\mathfrak{g}$. Questo definisce evidentemente un elemento $\{f, g\} \in C^\infty(V)$, il che significa che abbiamo un'operazione $\{\}$ su $C^\infty(V)$ (chiameremo le parentesi $\{\}$ *parentesi di Lie–Poisson*) che manifestamente rende questa algebra di funzioni una $\mathbb{R}$-algebra di Lie (basta usare il fatto che le parentesi $[\ ]$ sono parentesi di Lie su $\mathfrak{g}$), e soddisfa la regola di Leibniz rispetto al prodotto di funzioni in $C^\infty(V)$. Un modo semplice per vederlo è provare ad introdurre queste stesse parentesi in maniera non intrinseca, ma utilizzando le coordinate. Infatti dato che $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie e quindi in particolare uno spazio vettoriale, possiamo fissarne una base $(e_1, \ldots, e_n)$ e considerare quindi su V la base duale $(e^1, \ldots, e^n)$ con coordinate $(x_1, ..., x_n)$:

$$\forall v \in V \exists! x_1 \ldots \exists! x_n \qquad v = \sum_i x_i e^i$$

Allora definiamo le parentesi di Lie–Poisson nel modo seguente:

$$\{f, g\}(v) := \sum_{i,j} \pi_{ij}(v) \frac{\partial f(v)}{\partial x_i} \frac{\partial g(v)}{\partial x_j}$$

ove le π_{ij} sono le funzioni definite da:

$$\pi_{ij}(v) := \sum_k c_{ij}^k x_k$$

essendo c_{ij}^k le costanti di struttura dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ rispetto alla base $(e_1, \ldots, e_n)$, cioè le costanti definite dalle:

$$[e_i, e_j] = \sum_k c_{ij}^k e_k$$

Evidentemente in questo modo si definiscono delle parentesi $\{\}$ bilineari antisimmetriche, che coincidono con quelle precedentemente introdotte in modo intrinseco, come una semplice verifica permette di concludere.

$$\begin{aligned}
\{f, g\}(v) &= \langle [(df)_v, (dg)_v] | v \rangle \\
&= \langle [\sum_i \frac{\partial f(v)}{\partial x_i} e_i, \sum_j \frac{\partial g(v)}{\partial x_j} e_j] | \sum x_k, e^k \rangle \\
&= \sum_{i,j,k} \frac{\partial f(v)}{\partial x_i} \frac{\partial g(v)}{\partial x_j} x_k c_{ij}^k = \sum_{i,j} \pi_{ij}(v) \frac{\partial f(v)}{\partial x_i} \frac{\partial g(v)}{\partial x_j}
\end{aligned}$$

Che poi queste parentesi definite in coordinate soddisfino la regola di Leibniz segue facilmente dalla derivazione delle funzioni composte:

$$\begin{aligned}\{fg, h\} &= \sum_{i,j} \pi_{ij} \frac{\partial fg(v)}{\partial x_i} \frac{\partial h(v)}{\partial x_j} \\ &= \sum_{i,j} \pi_{ij} \left(f \frac{\partial g(v)}{\partial x_i} \frac{\partial h(v)}{\partial x_j} + g \frac{\partial f(v)}{\partial x_i} \frac{\partial h(v)}{\partial x_j} \right) \\ &= f\{g, h\} + g\{f, h\}\end{aligned}$$

Così abbiamo un nuovo esempio di parentesi di Poisson. È bene osservare che queste parentesi *non possono in alcun modo* derivare da una struttura simplettica: infatti sono *degeneri*, nel senso che esistono funzioni che stanno nel centro dell'algebra di Lie delle parentesi $\{\}$. Ad esempio, nel punto origine dello spazio V, $\{f, g\}$ è sempre zero, qualunque siano le funzioni $f, g \in C^\infty(V)$, e questa singolarità esclude che la struttura di Poisson definita da queste parentesi possa essere simplettica: osserviamo cioè che la matrice di funzioni

$$\pi = ((\pi_{ij}))$$

non è ovunque invertibile: se lo fosse sarebbe in effetti proprio l'inversa della matrice definita dalla 2-forma simplettica.

L'importanza di questo esempio è notevolissima, anche perchè costituisce un ponte fra la geometria simplettica e la teoria delle rappresentazioni dei gruppi, in un senso cui ora vogliamo accennare.

Un metodo potente e flessibile nello studio delle rappresentazioni dei gruppi topologici localmente compatti (particolarmente dei gruppi di Lie) è il cosiddetto *metodo delle orbite* ideato da Kirillov, la cui idea prende le mosse dalla generalizzazione della teoria dei caratteri dei gruppi abeliani. Infatti, se G è un gruppo topologico localmente compatto abeliano, allora (essendo abeliano) ogni sua rappresentazione è completamente riducibile in somma di rappresentazioni unidimensionale, che si dicono caratteri. In particolare, ogni rappresentazione unitaria è somma di caratteri che possiamo pensare come morfismi di gruppi topologici da G nel gruppo moltiplicativo $\mathbb{C}^*$. Se definiamo

$$\widehat{G} = \frac{\{\text{rappresentazioni irriducibili unitarie di G}\}}{\textit{equivalenza}}$$

questo insieme di morfismi è anch'esso un gruppo topologico abeliano localmente compatto $\widehat{G}$ il cui gruppo dei caratteri è isomorfo a G (*dualità di Pontrjagin*). Questo descrive completamente la struttura delle classi di rappresentazioni irriducibili del gruppo di partenza, e quindi permette di conoscerne in teoria tutte le rappresentazioni.

Kirillov cercò di generalizzare questa situazione al caso non abeliano, ed in termini semplicistici la sua idea è la seguente: se consideriamo ad esempio un gruppo di Lie G con la sua algebra di Lie $\mathfrak{g}$, ha senso considerare la rappresentazione coaggiunta di G su $\mathfrak{g}^*$:

$$\begin{aligned} Ad^* : G &\to GL(\mathfrak{g}^*) \\ x &\mapsto Ad^*_x \end{aligned}$$

ove

$$\langle Ad^*_x \varphi | X \rangle := \langle \varphi | Ad_{x^{-1}} X \rangle$$

Le orbite di questa rappresentazione vanno viste come classi di rappresentazioni irriducibili, parametrizzano cioè le rappresentazioni unitarie del gruppo e meno di equivalenza:

$$\widehat{G} = \mathfrak{g}^*/G$$

Il teorema fondamentale di Kirillov (scoperto indipendentemente da Konstant e Souriau) afferma che queste orbite coaggiunte sono varietà simplettiche, rispetto ad una struttura simplettica che naturalmente vi si può indurre: il collegamento con ciò che abbiamo detto sulla struttura di Lie–Poisson sta nel fatto sorprendente che se restringiamo le nostre parentesi di Lie–Poisson su $\mathfrak{g}$ alle orbite coaggiunte ci accorgiamo che queste restrizioni provengono dalla struttura simplettica di Kirillov: in altri termini, le parentesi di Poisson indotte dalle strutture simplettiche sulle orbite coaggiunte sono esattamente le restrizioni a quelle orbite delle parentesi di Lie–Poisson: ad esempio, l'origine forma da sola una foglia con le parentesi nulle.

Questo legame è alla base di profonde relazioni fra geometria simplettica, quantizzazione geometrica e rappresentazioni dei gruppi di Lie. Infatti se consideriamo l'idea di Dirac di far corrispondere ad oggetti classici oggetti quantistici, abbiamo la necessità di far corrispondere al gruppo dei simplettomorfismi di una varietà simplettica (spazio delle fasi della Meccanica Classica) un gruppo di trasformazioni unitarie di uno spazio di Hilbert (il cui spazio proiettivo associato è lo spazio delle fasi della Meccanica Quantistica) e quindi, mentre i "sistemi elementari" classici sono semplicemente le orbite dell'azione di G su M, quelli quantistici vanno pensati come rappresentazioni unitarie irriducibili di G; ma dato che (si dimostra) ogni G-varietà omogenea simplettica M è localmente isomorfa alle orbite coaggiunte di G (o di una sua estensione centrale) ecco che il legame fra orbite coaggiunte e rappresentazioni trova una sua giustificazione ed una sua motivazione profonda.

Vogliamo dare una terza classe di esempi di algebre di Poisson individuata da Krasilščik e Vinogradov [10]. Consideriamo una K-algebra associativa A

con unità (non necessariamente commutativa) che possegga una *filtrazione* cioè una famiglia di sottoinsiemi

$$A_0 \subset A_1 \subset \quad \dots \quad \subset A_n \subset \quad \dots$$

che ricopra A:

$$A = \bigcup_{n \geq 0} A_n$$

e tale che

$$A_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j}$$

in modo che A_0 sia commutativa e contenga l'unità. Se supponiamo inoltre che

$$[A_i, A_j] \subseteq A_{i+j-1}$$

ovvero che

$$\forall n, m \geq 1 \quad \forall x_n \in A_n \quad \forall x_m \in A_m \qquad [x_n, x_m] := x_n x_m - x_m x_n \in A_{n+m-1}$$

allora l'*algebra graduata associata* ad A

$$S(A) := \bigoplus_{n \geq 0} A_n / A_{n-1} \qquad\qquad (A_{-1} := \{0\})$$

è un'algebra di Poisson rispetto al prodotto ed al commutatore passati al quoziente.

Infatti se definiamo per $n \geq 0$:

$$gr_n : A_n \to A_n / A_{n-1}$$

come le proiezioni canoniche, allora le operazioni di prodotto e commutatore su $S(A)$ sono definite nel modo seguente:

$$\begin{aligned} gr_n(a) \cdot gr_m(b) &:= gr_{n+m}(ab) \\ [gr_n(a), gr_m(b)] &:= gr_{n+m-1}([a, b]) \end{aligned}$$

se $a \in A_n$ e $b \in A_m$. Queste operazioni sono ben definite (cioè non dipendono dai rappresentanti a e b ma solo dalle classi di equivalenza $gr_n(a)$ e $gr_m(b)$ come è ovvio dalla definizione delle proiezioni gr_n. Dimostriamo ora che $S(A)$ è un'algebra associativa e commutativa (l'unità è ovviamente $gr_0(1)$):

$$\begin{aligned} (gr_n(a) gr_m(b)) gr_l(c) &= gr_{n+m}(ab) gr_l(c) = gr_{n+m+l}((ab)c) \\ &= gr_{n+m+l}(a(bc)) = gr_n(a)(gr_m(b) gr_l(c)) \end{aligned}$$

e quindi $S(A)$ è associativa; la commutatività è altrettanto immediata:

$$\begin{aligned} gr_n(a)gr_m(b) - gr_m(b)gr_n(a) &= gr_{n+m}(ab) - gr_{n+m}(ba) \\ &= gr_{n+m}([a,b]) = 0 \end{aligned}$$

dato che $[a,b] \in A_{n+m-1}$ e quindi sta nel nucleo di gr_{n+m}.

Che poi $S(A)$ sia un'algebra di Lie rispetto al commutatore passato al quoziente è pure una semplice verifica:

$$\begin{aligned} &[[gr_n(a), gr_m(b)], gr_l(c)] + [[gr_n(b), gr_m(c)], gr_l(a)] + [[gr_n(c), gr_m(a)], gr_l(b)] = \\ &\qquad = gr_{n+m+l-2}([[a,b],c] + [[b,c],a] + [[c,a],b]) = 0 \end{aligned}$$

Vediamo infine che vale l'identità di Leibniz:

$$\begin{aligned} [gr_n(a)gr_m(b), gr_l(c)] &= gr_{n+m+l-1}([ab,c]) = gr_{n+m+l-1}([a,c]b + a[b,c]) \\ &= [gr_n(a), gr_l(c)]gr_m(b) + gr_n(a)[gr_m(b), gr_l(c)] \end{aligned}$$

Osserviamo infatti, riguardo l'ultimo passaggio, che se B è un'algebra associativa qualsiasi allora le parentesi di Lie

$$[a,b] := ab - ba$$

rendono B un'algebra di Poisson, visto che verificano l'identità di Leibniz. Questo permette di costruire un'algebra di Poisson a partire da una qualsiasi algebra associativa (non commutativa, altrimenti le parentesi di Poisson sono nulle). Tuttavia gli esempi di algebre di Poisson così ottenuti non sono molto significativi, perché la struttura di Poisson è essenzialmente contenuta in quella di Lie; ad esempio ogni algebra di Lie di matrici (quindi ogni algebra di Lie di dimensione finita) è un'algebra di Poisson in questo modo, ma la sua struttura di Poisson non aggiunge molto rispetto alla struttura di Lie.

Le algebre filtrate sorgono naturalmente in diversi campi (ad esempio in Algebra Commutativa ed in Geometria Algebrica) ed un esempio interessante si ha considerando un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ e la sua algebra inviluppante universale $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, che è effettivamente filtrata (è un quoziente dell'algebra tensoriale che è graduata!). Inoltre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ verifica evidentemente la condizione

$$[\mathcal{U}_n, \mathcal{U}_m] \subseteq \mathcal{U}_{n+m-1}$$

dato che, se x e y sono elementi di grado uno vale la relazione

$$x \otimes y - y \otimes x = [x,y]$$

che, iterata per elementi di grado qualsiasi, fornisce la condizione voluta. Evidentemente

$$S(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) = S(\mathfrak{g})$$

cioè è l'algebra simmetrica sull'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, che pensiamo come algebra di funzioni polinomiali nelle coordinate dello spazio vettoriale $\mathfrak{g}$, e sulla quale le parentesi di Poisson sono definite come

$$\{x, y\} := [x, y]$$

sugli elementi di grado 1 (cioè elementi di $\mathfrak{g}$, dato che $\mathcal{U}_0 = K$ e $\mathcal{U}_1 = \mathfrak{g}$) e poi estese per linearità ed imponendo l'identità di Leibniz sugli elementi di grado qualsiasi.

Un ulteriore esempio di algebra di Poisson ottenuta da algebre filtrate si ha considerando gli *operatori differenziali*. Questo può farsi al solito modo sulle varietà, ad esempio, ma ha senso anche nel contesto molto più generale delle algebre associative. Preliminarmente, diamo alcune definizioni: sia A una K-algebra associativa e commutativa con unità, e definiamo, per ogni $a \in A$, la mappa

$$\begin{aligned} \mu_a : A &\to A \\ b &\mapsto ab \end{aligned}$$

che è un K-endomorfismo di A. Se X è un qualsiasi endomorfismo di A, poniamo

$$\delta_a(X) := [X, \mu_a]$$

Questo definisce una mappa lineare sia in a che in X, e che utilizziamo per dare la seguente

Definizione 1.3 *Se scriviamo*

$$\delta_{a_0 a_1 \ldots a_n} := \delta_{a_0} \delta_{a_1} \ldots \delta_{a_n}$$

allora un endomorfismo X di A si dice operatore differenziale di ordine al più *n su A se*

$$\forall a_0 \quad \forall a_1 \quad \ldots \forall a_n \qquad \delta_{a_0 a_1 \ldots a_n}(X) = 0$$

Se non interessa evidenziare la scelta degli a_i scriviamo semplicemente $\delta^n(X)$ in luogo di $\delta_{a_1 \ldots a_n}(X)$ e quindi X è un operatore differenziale di ordine al più n se e solo se $\delta^{n+1}(X) = 0$.

Definizione 1.4 $\mathrm{Diff}_n(A) := \{X \in \mathrm{End}_K(A) | \quad \delta^{n+1}(X) = 0\}$.

Evidentemente $\mathrm{Diff}_n(A)$ è un sottospazio vettoriale dell'algebra $\mathrm{End}_K(A)$, e si ha

$$\mathrm{Diff}_n(A) \subseteq \mathrm{Diff}_{n+1}(A)$$

Poniamo allora

$$\mathrm{Diff}(A) := \bigcup_{n\geq 0} \mathrm{Diff}_n(A)$$

Questa algebra filtrata (lo è per definizione) si dice *algebra degli operatori differenziali* su A.

Dimostriamo adesso che $\mathrm{Diff}(A)$ soddisfa la condizione che rende la sua graduata associata un'algebra di Poisson, vogliamo cioè dimostrare che

$$\forall X \in \mathrm{Diff}_n(A) \quad \forall Y \in \mathrm{Diff}_m(A) \qquad [X, Y] \in \mathrm{Diff}_{n+m-1}(A)$$

Intanto, per induzione, si ha

$$\delta_{a_1 \ldots a_n}(XY) = \sum_{i+j=n} \Big(\delta_{a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(i)}}(X)\Big) \Big(\delta_{a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(j)}}(X)\Big)$$

ove $\sigma \in S_n$, sicché

$$\delta^{n+m-1}(XY) = \sum_{i+j=n+m-1} \big(\delta^i(X)\big) \big(\delta^j(Y)\big)$$

Se $i \geq n+1$ allora $\delta^i X = 0$ e se $i < n+1$ allora $j = (n+m-1) - i > m$ e quindi $\delta^j Y = 0$. In ogni caso i termini della sommatoria svaniscono e quindi

$$\delta^{n+m-1}(XY) = 0$$

Analogamente si trova che

$$\delta^{n+m}[X, Y] = \sum_{i+j=n+m} [\delta^i X, \delta^j Y]$$

e quindi: se $i \geq n+1$ allora $\delta^i X = 0$, se $i \leq n-1$ allora $\delta^j Y = 0$ e se $i = n$ e $j = m$ si ha $\delta(\delta^n X) = 0$ e $\delta(\delta^m Y) = 0$. Ma è una semplice osservazione il fatto che

$$\mathrm{Diff}_0(A) = \{\mu_a\}_{a\in A}$$

cioè che $\exists a, b \in A \quad \delta^n X = \mu_a$, $\delta^m Y = \mu_b$, da cui

$$[\delta^n X, \delta^m Y] = [\mu_a, \mu_b] = 0$$

per cui concludiamo che tutti i termini della somma sono nulli, il che fornisce la condizione voluta.

È interessante notare che vale la seguente caratterizzazione:

$$D \in \mathrm{Der}_K(A) \iff D \in \mathrm{Diff}_1(A) \text{ e } D(1) = 0$$

Infatti, se $D \in \mathrm{Der}_K(A)$ allora:

$$\begin{aligned} \forall a, b \in A \ D(ab) = aDb + bDa &\iff \\ D\mu_a b = \mu_a Db + \mu_{Da} b &\iff \\ [D, \mu_a](b) = \mu_{Da}(b) &\iff \delta_a D = \mu_{Da} \end{aligned}$$

Ma come abbiamo già osservato, $\mathrm{Diff}_0(A) = \{\mu_a\}_{a \in A}$ sicché

$$D \in \mathrm{Der}_K(A) \Rightarrow \delta^2 D = \delta\mu_a = 0 \Rightarrow D \in \mathrm{Diff}_1(A)$$

Infine $D(1) = D(1 \cdot 1) = 2D(1)$ e quindi $D(1) = 0$.

Viceversa, se $D \in \mathrm{Diff}_1(A)$ e $D(1) = 0$ allora

$$\delta^2 D = 0 \qquad \text{e} \qquad D(1) = 0$$

cioè

$$c = \mu_c 1 = \delta_b D1 = [D, \mu_b](1) = Db$$

il che vuol dire $\delta_b D = \mu_{Db}$ e quindi, per le equivalenze precedenti, $D \in \mathrm{Der}_K(A)$.

Da tutto ciò segue che l'algebra graduata commutativa $S(\mathrm{Diff}(A))$ è un'algebra di Poisson.

Un esempio particolare di questa costruzione si ha quando A è l'algebra delle funzioni infinitamente differenziabili di una varietà M. È allora possibile dimostrare (cfr. ad esempio [1]) che la definizione qui data di operatore differenziale coincide con quella che generalmente viene data per le varietà, e che quindi la costruzione che abbiamo effettuato in generale ci permette di ritrovare come algebra di Poisson l'*algebra dei simboli* cioè delle funzioni infinitamente differenziabili sul fibrato cotangente della varietà M.

Questi esempi e la loro diversità rendono conto del livello di generalità che la definizione di algebra di Poisson introduce, e giustificano quindi la definizione di questi oggetti; un altro motivo fondamentale per il quale ha interesse introdurre le algebre di Poisson è che in molti problemi meccanici si conoscono gli osservabili ma non lo spazio delle fasi, e che le procedure di quantizzazione sono incentrate sugli osservabili e sulle parentesi di Poisson più che sulle fasi, e quindi sono suscettibili di descrizione puramente algebrica.

2 Algebre di Poisson

Abbiamo definito un'algebra di Poisson come un'algebra associativa che sia anche un'algebra di Lie in modo che valga l'identità di Leibniz rispetto alle parentesi di Poisson ed al prodotto associativo. Vogliamo ora definire alcuni concetti della Geometria Simplettica in questo contesto più generale.

Intanto possiamo considerare i *campi hamiltoniani* semplicemente definendo la mappa

$$\begin{aligned} \chi : A &\to \mathrm{Der}(A) \\ a &\mapsto (b \mapsto \{a, b\}) \end{aligned}$$

A priori χ ha valori in $\mathrm{Hom}_K(A, A)$, ma l'identità di Leibniz garantisce che l'immagine di χ sta effettivamente nelle derivazioni dell'algebra associativa A. Inoltre χ è evidentemente un morfismo di A-moduli e definisce anche un morfismo di algebre di Lie. Infatti l'A-modulo

$$\mathrm{Der}(A) := \{X \in \mathrm{Hom}_K(A, A) | \quad \forall a, b \in A \quad X(ab) = aX(b) + X(a)b\}$$

è un'algebra di Lie rispetto al commutatore degli operatori: $[X, Y] = XY - YX$. Che poi χ definisca un morfismo di algebre di Lie è ovvio:

$$\begin{aligned} \chi_{\{a,b\}}(c) &= \{\{a, b\}, c\} = \{a, \{b, c\}\} - \{b, \{a, c\}\} \\ &= (\chi_a \chi_b - \chi_b \chi_a)(c) = [\chi_a, \chi_b](c) \end{aligned}$$

Definizione 2.1 *Le derivazioni di S della forma χ_a si dicono* hamiltoniane. *l'A-modulo formato dalle derivazioni hamiltoniane si denota* $\mathrm{Ham}_K(A)$.

Nel caso delle varietà simplettiche questo concetto coincide con quello di campo hamiltoniano. Osserviamo poi che i campi hamiltoniani sono non solo derivazioni rispetto alla struttura associativa di A, ma anche derivazioni rispetto alla struttura di Lie di A, infatti

$$\begin{aligned} \chi_a(\{a, b\}) &= \{a, \{b, c\}\} = \{b, \{a, c\}\} - \{c, \{a, b\}\} \\ &= \{\chi_a(b), c\} + \{b, \chi_a(c)\} \end{aligned}$$

È quindi naturale dare la seguente:

Definizione 2.2 *Un endomorfismo $X \in \mathrm{Hom}_K(A, A)$ che sia una derivazione per l'algebra associativa $(A, \cdot)$ ed anche una derivazione per l'algebra di Lie $(A, \{\})$ si dice* canonico. *L'A-modulo formato dalle derivazioni canoniche si denota* $\mathrm{Can}_K(A)$.

Naturalmente ci sono le inclusioni

$$\mathrm{Ham}_K(A) \subseteq \mathrm{Can}_K(A) := \mathrm{Der}_K(A) \cap \mathrm{Der}_K^{Lie}(A)$$

ed anzi $\mathrm{Can}_K(A)$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathrm{Hom}_K(A, A)$ e $\mathrm{Ham}_K(A)$ è un ideale di Lie in $\mathrm{Can}_K(A)$, dato che

$$\begin{aligned}[\chi_a, X](b) &= \chi_a X(b) - X(\{a, b\}) = \{a, X(b)\} - \{X(a), b\} - \{a, X(b)\} \\ &= -\chi_{X(a)}(b)\end{aligned}$$

Evidentemente possono esistere derivazioni canoniche non hamiltoniane: basti pensare ad esempi di campi localmente hamiltoniani ma non globalmente hamiltoniani su una varietà simplettica.

Per sviluppare in modo soddisfacente una teoria algebrica del formalismo hamiltoniano, servono naturalmente concetti più profondi di quelli fin qui introdotti: in particolare si rivela necessario il calcolo differenziale.

Questo può farsi in modi differenti nel nostro ambito algebrico. Senza entrare in dettagli tecnici possiamo semplicemente considerare le algebre che ispirano la nostra trattazione, le algebre delle funzioni infinitamente differenziabili, e provare a generalizzare i concetti lì definiti. Poichè il calcolo differenziale sulle varietà coinvolge essenzialmente i fibrati tangente e cotangente, vogliamo trovare degli oggetti analoghi per le algebre associative.

Ricordiamo intanto che la categoria dei fibrati vettoriali lisci su una varietà differenziabile M è equivalente alla categoria dei moduli proiettivi sull'anello $C^\infty(M)$: il funtore che effettua questa equivalenza è quello che ad un fibrato associa il modulo delle sue sezioni lisce.

In base a questa osservazione considereremo "fibrati" su un'algebra associativa A semplicemente riferendoci a moduli proiettivi su A: dato che inoltre i fibrati vettoriali che abbiamo in mente sono di dimensione finita, imporremo ai moduli proiettivi la condizione che abbiano rango finito. Ad esempio, il fibrato tangente corrisponde al modulo delle derivazioni dell'algebra associativa A, e quindi una derivazione può vedersi come un "campo di vettori" su A.

Dunque una prima condizione che bisogna imporre su A è che il suo modulo delle derivazioni sia proiettivo e di rango finito. Per quel che riguarda il fibrato cotangente, non esiste un modo altrettanto naturale di definirlo; in Geometria Algebrica si considerano i *differenziali di Kähler* che tuttavia non coincidono in generale, nel caso delle varietà differenziabili, con i differenziali di de Rham. Qui si assumerà semplicemente, senza ulteriori complicazioni tecniche, che esista un A-modulo proiettivo $\Omega_K(A)$ che sia duale al modulo delle derivazioni e viceversa (duale come A-modulo), e quindi una "forma differenziale" sarà semplicemente una forma A-lineare su $\mathrm{Der}_K(A)$. Dobbiamo infine supporre che esista un morfismo di A-moduli

$$d : A \to \Omega_K(A)$$

tale che, se $a, b \in A$ e $k \in K$:

$$\begin{aligned} d(ab) &= adb + bda \\ dk &= 0 \\ d(a+b) &= da + db \end{aligned}$$

In tali ipotesi, considerando l'algebra esterna su $\Omega_K(A)$ ed estendendo per linearità la mappa d si ottiene l'analogo dell'algebra di de Rham.

Definendo poi, per $X \in \mathrm{Der}_K(A)$,

$$i_X : \Omega^n_K(A) \to \Omega^{n-1}_K(A)$$

come

$$(i_X\omega)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_{n-1}) := \omega(X \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge X_{n-1})$$

si ottiene un operatore di contrazione che permette di definire la *derivata di Lie* di una forma rispetto ad un campo come:

$$\mathcal{L}_X\omega := di_X\omega + i_X d\omega$$

Si verifica che queste operazioni soddisfano le stesse proprietà formali che soddisfano nel caso delle varietà differenziabili, ed in particolare osserviamo che vale l'identità seguente:

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X,Y]}$$

A questo punto abbiamo un modo di sviluppare il calcolo differenziale esterno sulle algebre associative. Nel caso delle algebre di Poisson, che è quello che qui interessa, questo formalismo serve a caratterizzare le parentesi di Poisson in termini tensoriali.

Consideriamo infatti un'algebra di Poisson $(A, \cdot, \{\})$ e supponiamo che soddisfi alle ipotesi che abbiamo indicato perché vi si possa sviluppare il calcolo differenziale, e cioè che $\mathrm{Der}(A)$ sia un modulo proiettivo e che esista il modulo $\Omega^1(A) := \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Der}(A), A)$ e la mappa $d : A \to \Omega^1(A)$. Ha evidentemente senso parlare di tensori covarianti antisimmetrici, e cioè degli elementi del modulo

$$\Omega(A) := \bigoplus_n \Omega^n(A) \qquad \text{ove} \qquad \Omega^n(A) := \wedge^n\Omega^1(A)$$

e di tensori controvarianti antisimmetrici e cioè degli elementi

$$\Delta(A) := \bigoplus_n \operatorname{Der}^n(A) \qquad \text{ove} \qquad \operatorname{Der}^n(A) := \wedge^n \operatorname{Der}(A)$$

Osserviamo esplicitamente che se $\omega \in \Omega^n(A)$ e $\pi \in \operatorname{Der}^n(A)$ allora

$$\langle \pi | \omega \rangle = \omega(\pi) = i_\pi \omega$$

avendo esteso l'operatore i alle multiderivazioni nel modo seguente, per $\pi \in \operatorname{Der}^n(A)$ e $\omega \in \Omega^{n+p}(A)$:

$$(i_\pi \omega)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_p) := \omega(\pi \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge X_p)$$

In particolare, se consideriamo le parentesi di Poisson su A vediamo che definiscono una mappa bilineare antisimmetrica che è una derivazione in ogni variabile, cioè una biderivazione: abbiamo quindi, date le parentesi di Poisson su A, una mappa $\pi \in \operatorname{Der}^2(A)$ cioè un 2-tensore controvariante, definito da

$$\langle \pi | da \wedge db \rangle = \{a, b\}$$

Naturalmente non ogni 2-tensore controvariante induce delle parentesi di Poisson su A: infatti, mentre ogni tensore $\pi \in \operatorname{Der}^2(A)$ induce certamente un'operazione bilineare antisimmetrica su A che soddisfa la regola di Leibniz (dato che vale la "derivazione delle funzioni composte": $d(ab) = adb + bda$), non è detto in generale che questa operazione soddisfi l'identità di Jacobi. Una condizione necessaria e sufficiente perché ciò accada, è la caratterizzazione delle algebre di Poisson in termini di 2-tensori controvarianti è data da Lichnerowicz (in un contesto geometrico più ristretto) che si può generalizzare alle algebre: per scriverla bisonga prima introdurre una operazione sull'algebra esterna $\Delta(A)$ dei tensori controvarianti antisimmetrici, e precisamente le cosiddette *parentesi di Schouten*.

Definizione 2.3 *Se $\pi \in \operatorname{Der}^p(A)$ e $\rho \in \operatorname{Der}^r(A)$ sono tensori controvarianti antisimmetrici di gradi rispettivamente p e r, allora la loro* parentesi di Schouten *è il tensore controvariante antisimmetrico $[\pi, \rho]_s$ di grado $p + r - 1$, definito come:*

$$\langle [\pi, \rho]_s | \alpha \rangle := (-1)^{pr+r} i_\pi d i_\rho \alpha + (-1)^p i_\rho d i_\pi \alpha$$

se la forma differenziale α è chiusa.

Questa definizione è parziale, nel senso che definisce $[\pi, \rho]$ solo su forme chiuse, ma si può estendere al caso qualsiasi con qualche sforzo tecnico: noi la utilizzeremo solo in questa forma, mentre una trattazione algebrica generale delle parentesi di Schouten può ad esempio trovarsi in [1].

Possiamo quindi formulare il

Teorema (Lichnerowicz) 2.4 *Un 2-tensore controvariante antisimmetrico π sull'algebra associativa A induce una struttura di Poisson su A se e solo se $[\pi, \pi]_s = 0$.*

Dimostrazione: Basta scrivere quanto vale $[\pi, \pi]_s$ su una forma $da \wedge db \wedge dc$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\langle[\pi, \pi]_s | da \wedge db \wedge dc\rangle &= i_\pi \mathcal{L}_\pi (da \wedge db \wedge dc) \\ &= i_\pi d i_p i(da \wedge db \wedge dc) \\ &= \pi(d(\pi(da \wedge db)dc - \pi(da \wedge dc)db + \\ &\quad + \pi(db \wedge dc)da)) \\ &= \pi(d\{a, b\} \wedge dc) + c.p.(a, b, c) \\ &= \{\{a, b\}, c\} + c.p.(a, b, c)\end{aligned}$$

QED

Chiameremo π un *tensore di Poisson* su A se verifica la condizione $[\pi, \pi]_s = 0$ del teorema precedente.

Abbiamo in questo modo una caratterizzazione delle parentesi di Poisson in termini di calcolo differenziale. Esistono altre due caratterizzazioni delle parentesi di Poisson su un'algebra associativa che hanno una certa importanza, e precisamente in termini di mappe fra moduli e di forme esterne.

Se consideriamo il diagramma di A-moduli

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\chi"] \arrow[dr, "d"'] & & \mathrm{Der}(A) \\ & \Omega^1(A) & \end{tikzcd}$$

per le proprietà del modulo delle derivazioni possiamo chiuderlo in modo da ottenere un diagramma commutativo: esisterà cioè una mappa

$$\mathcal{H} : \Omega^1(A) \longrightarrow \mathrm{Der}(A)$$

tale che

$$\chi = \mathcal{H} \circ d$$

Evidentemente

$$\mathrm{Im}\ \mathcal{H} = \mathrm{Ham}(A)$$

ed inoltre le parentesi di Poisson si esprimeranno come

$$\{a, b\} = \langle \mathcal{H} da | db \rangle$$

Ovviamente questo operatore $\mathcal{H}$ è antisimmetrico, come mappa di A-moduli rispetto all'accoppiamanto bilineare fra $\mathrm{Der}(A)$ e $\Omega^1(A)$, cioè

$$\langle \mathcal{H}\omega_1 | \omega_2 \rangle = -\langle \omega_1 | \mathcal{H}\omega_2 \rangle$$

Naturalmente non ogni operatore siffatto definisce una struttura di Poisson su A; una condizione necessaria e sufficiente perché ciò accada è stata data da Gelfand e Dorfman ed è l'analoga della condizione di Lichnerowicz in questo contesto. Per formularla introduciamo delle parentesi di Schouten per operatori del tipo $\Omega^1(A) \to \mathrm{Der}(A)$:

Definizione 2.5 *Se $\mathcal{H}, \mathcal{K} : \Omega^1(A) \to \mathrm{Der}(A)$ sono operatori antisimmetrici, la loro* parentesi di Schouten *è l'operatore*

$$\langle [\mathcal{H}, \mathcal{K}]_s | \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \rangle := \langle \mathcal{K}\mathcal{L}_{\mathcal{H}\omega_1}\omega_2 | \omega_3 \rangle + \langle \mathcal{H}\mathcal{L}_{\mathcal{K}\omega_1}\omega_2 | \omega_3 \rangle + c.p.(1, 2, 3)$$

Abbiamo allora il

Teorema (Gelfand–Dorfman) 2.6 *Un operatore $\mathcal{H} : \Omega^1(A) \to \mathrm{Der}(A)$ antisimmetrico induce delle parentesi di Poisson sull'algebra associativa A se e solo se $[\mathcal{H}, \mathcal{H}]_s = 0$.*

La dimostrazione può farsi come nel caso del Teorema di Lichnerowicz, semplicemente esprimendo $[\mathcal{H}, \mathcal{H}]_s$ in termini di $\{\{a, b\}, c\} + c.p(a, b, c)$. Un operatore $\mathcal{H}$ che verifichi la condizione $[\mathcal{H}, \mathcal{H}]_s$ del teorema precedente si dice *operatore hamiltoniano* su A.

Osserviamo che, nel caso delle varietà simplettiche, l'operatore $\mathcal{H}$ è l'inverso dell'isomorfismo $\omega^{\#}$ indotta dalla forma simplettica non degenere. Nel caso generale $\mathcal{H}$ non è ovviamente un isomorfismo, ma possiamo provare a definire un analogo della forma simplettica (che ovviamente non potremo pretendere essere non degenere) anche nel caso generale: questo punto di vista (sebbene in un contesto diverso) è quello adottato da Gelfand e Dorfmann nel descrivere il formalismo hamiltoniano.

Poniamo infatti, se $X, Y \in \mathrm{Ham}(A)$:

$$\Omega(X \wedge Y) := \langle X | \mathcal{H}^{-1} Y \rangle$$

Intanto questa definizione ha senso: infatti, benché $\mathcal{H}$ non sia invertibile, abbiamo che $Im\ \mathcal{H} = \mathrm{Ham}(A)$ e quindi esiste un unico $a \in A$ tale che

$$a = \Omega(X \wedge Y)$$

Infatti $\mathcal{H}^{-1} = \omega_0 + \text{Ker } \mathcal{H}$ ove ω_0 è tale che $\mathcal{H}\omega_0 = Y$, e quindi

$$\langle X|\omega_0 + \text{Ker } \mathcal{H}\rangle = \langle X|\omega_0\rangle = a$$

(essenzialmente il fatto che Ω sia ben definita segue dal fatto che $\text{Ham}(A) = Im\ \mathcal{H} \subseteq (\text{Ker } \mathcal{H})^{\perp}$).

Osserviamo che è fondamentale considerare la forma Ω solo sui campi hamiltoniani, ma questo ostacolo può superarsi definendo un nuovo spazio di forme, e precisamente

$$\Omega^1_{\mathcal{H}}(A) := \Omega_1(A)/\equiv$$

ove la relazione di equivalenza identifica due elementi $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^1(A)$ se e solo se

$$\forall X \in \text{Ham}(A) \qquad \langle X|\omega_1\rangle = \langle X|\omega_2\rangle$$

In modo analogo a quello che si fa sulle varietà differenziabili, si verifica che in $\Omega^1_{\mathcal{H}}(A)$ è $d\Omega = 0$ se $[\mathcal{H}, \mathcal{H}]_s = 0$.

Con queste definizioni possiamo enunciare il

Teorema (Gelfand–Dorfman) 2.7 *Una forma Ω associata ad un operatore $\mathcal{H}$ definisce su A una struttura di Poisson se e solo se esiste una sottoalgebra di Lie L di $\text{Der}(A)$ sulla quale la forma sia non degenere e chiusa; ovviamente in questo caso si ha $L = \text{Ham}(A)$.*

Per una dimostrazione si veda [6].

In questo modo abbiamo generalizzato la definizione di forma simplettica; il prezzo che abbiamo dovuto pagare, per rendere la forma non degenere, è stato quello di restringere lo spazio delle forme ad un suo quoziente. Questa operazione equivale, se immaginiamo che l'algebra di Poisson sia un'algebra di funzioni di un certo spazio delle fasi, a considerare orbite in questo spazio delle fasi sulle quali le parentesi di Poisson divengano non degeneri: ad esempio è questo quello che accade nel caso della struttura di Lie–Poisson su un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$: le orbite dell'azione coaggiunta divengono varietà simplettiche, e la forma simplettica ottenuta su ognuna di esse è proprio la nostra forma Ω.

Un'altro concetto che si può generalizzare dalla Geometria Simplettica al nostro contesto algebrico generale è quello di parentesi di Poisson fra 1-forme differenziali.

Definizione 2.8 *Se $\alpha, \beta \in \Omega^1(A)$ allora definiamo*

$$\{\alpha, \beta\} := \mathcal{L}_{\mathcal{H}\alpha}\beta - \mathcal{L}_{\mathcal{H}\beta}\alpha - d\pi(\alpha \wedge \beta)$$

Si dimostra allora (è un conto noioso) la seguente e notevole identità:

$$\mathcal{H}\{\alpha,\beta\} = [\mathcal{H}\alpha, \mathcal{H}\beta]$$

ed inoltre che queste parentesi rendono $\Omega^1(A)$ un'algebra di Lie.

Osserviamo comunque che l'identità precedente può esprimersi dicendo che $\mathcal{H}$ è un morfismo di algebre di Lie, ed in particolare che fornisce una rappresentazione lineare (tramite le derivazioni) di $\Omega^1(A)$ sullo spazio vettoriale A. Possiamo allora utilizzare questo fatto per definire una particolare coomologia associata alla struttura di Poisson, che, in un certo senso, generalizza la coomologia di de Rham. Questa coomologia è stata definita da Lichnerowicz sulle varietà, ma, come si vede, la sua natura è puramente algebrica, secondo la nostra definizione, che è la seguente: se supponiamo che il campo K sul quale è definita l'algebra A abbia caratteristica zero, possiamo considerare la coomologia di Chevalley–Eilenberg associata alla rappresentazione $\mathcal{H}$ dell'algebra di Lie $\Omega^1(A)$. Questo vuol dire (cfr. [3]) che esiste l'operatore

$$\delta : \mathrm{Der}^n(A) \to \mathrm{Der}^{n+1}(A)$$

definito come

$$\begin{aligned}\langle\delta\rho|\alpha_0\wedge\cdots\wedge\alpha_n\rangle := &\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\mathcal{H}\alpha_i\langle\rho|\alpha_0\ldots\overset{\wedge}{\rightarrow}\alpha_i\ldots\alpha_n\rangle + \\ &+\sum_{i<j}^{0\ldots n}(-1)^{i+j}\langle\rho|\{\alpha_i,\alpha_j\}\wedge\cdots\wedge\overset{\wedge}{\rightarrow}\alpha_i\ldots\overset{\wedge}{\rightarrow}\alpha_j\wedge\cdots\wedge\alpha_n\rangle\end{aligned}$$

ove $\rho\in\mathrm{Der}^n(A)$. Come noto ([3]) è

$$\delta^2 = 0$$

e quindi abbiamo un complesso $(\bigoplus_n \mathrm{Der}^n(A),\delta)$ la cui coomologia si dice *coomologia di Poisson*.

In generale è assai arduo il calcolo di questa coomologia, ed è anche difficile stabilire con precisione cosa misuri; possiamo dire che misura il grado di "degenerazione" della struttura di Poisson, e cioè quanto questa struttura si discosti dall'essere simplettica.

È una semplice osservazione il fatto che $H^0_{Pos}(A)$ è il centro dell'algebra di Lie $(A,\{\})$ (con $H^n_{Pos}(A)$ denotiamo l'n-esimo gruppo di coomologia di Poisson di A). Inoltre si verifica, in modo analogo a quanto avviene per la coomologia delle algebre di Lie, rispetto alla quale il primo gruppo è il quoziente delle derivazioni per le derivazioni interne, che

$$H^1_{Pos}(A) = \mathrm{Can}(A)/\,\mathrm{Ham}(A)$$

Questo invariante è stato definito (in un modo differente) da Krasilščik e Vinogradov e consente di formulare alcune estensioni della Meccanica Analitica sulle algebre di Lie (cfr. [10]).

Osserviamo che se π è il tensore di Poisson, allora è una cocatena del complesso di Poisson (precisamente una 2-cocatena: $\pi \in \mathrm{Der}^2(A)$), ma in realtà è un 2-cociclo, cioè dà luogo ad una classe di coomologia $[\pi]$. Infatti

$$\begin{aligned}\langle\delta\pi|da\wedge db\wedge dc\rangle &= \chi_a\langle\pi|db\wedge dc\rangle - \chi_b\langle\pi|da\wedge db\rangle + \chi_c\langle\pi|da\wedge db\rangle + \\ &\quad - \langle\pi|\{da,db\}\wedge dc\rangle + \langle\pi|\{da,dc\}\wedge db\rangle - \langle\pi|\{db,dc\}\wedge da\rangle \\ &= \chi_a\{b,c\} - \chi_b\{a,c\} + \chi_c\{a,b\} + \\ &\quad - \langle\pi|d\{a,b\}\wedge dc\rangle + \langle\pi|d\{a,c\}\wedge db\rangle - \langle\pi|d\{b,c\}\wedge da\rangle \\ &= 2\left(\{a,\{b,c\}\} + \{b,\{c,a\}\} + \{c,\{a,b\}\}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

(si osservi che il calcolo mostra che $\delta\pi = [\pi,\pi]_s$, ed infatti vale in generale per un qualsiasi tensore controvariante ρ che $\delta\rho = [\pi,\rho]_s$).

Abbiamo dunque dimostrato che π è un cociclo e quindi dà luogo ad una classe di coomologia; se questa classe è zero, cioè se π è un cobordo, e quindi esiste una derivazione X tale che $\pi = \delta X$, allora la struttura di Poisson si dice *esatta* o *potenziale*. Menzioniamo che, analogamente a quanto avviene sulle varietà simplettiche, la classe di coomologia del tensore di Poisson è una ostruzione alla quantizzazione geometrica dell'algebra di Poisson A.

È possibile definire anche una omologia per le algebre di Poisson, generalizzando l'*omologia canonica* che Brylinski ha definito sulle varietà di Poisson (cfr. ad esempio [15]). Qui ci limiteremo a menzionarla, ricordando che in una certa misura è duale alla coomologia di Poisson, e può essere utilizzata per definire successioni spettrali e complessi doppi simili a quelli che Connes ha definito in Geometria Non–Commutativa.

Il seguente è una generalizzazione di un teorema di Lichenrowicz nel nostro contesto algebrico generale:

Teorema (Lichnerowicz–Krasilščik) 2.9 *Se A è un'algebra di Poisson non degenere, cioè tale che l'operatore $\mathcal{H}$ è un isomorfismo, allora per ogni $n \geq 0$:*

$$H^n_{dR}(A) \cong H^n_{Pos}(A)$$

Dimostrazione: Dato che $\mathcal{H}\circ d = \chi$ e $\mathcal{H}$ è un isomorfismo, si ha che le rappresentazioni dell'algebra di Lie $\mathrm{Der}(A) \cong \Omega^1(A)$ (isomorfismo di algebre di Lie per ipotesi):

$$\iota : \mathrm{Der}(A) \to \mathfrak{gl}(A) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{H} : \Omega^1(A) \to \mathfrak{gl}(A)$$

sono isomorfe come rappresentazioni. Ma allora anche le coomologie indotte sono isomorfe e, dato che sono calcolate dal complesso di Poisson, si ha:

$$H^n_{Pos}(A) \cong H^n_{Lie}(\mathrm{Der}(A), A) \cong H^n_{Lie}(\Omega^1(A), A) \cong H^n_{dR}(A)$$

QED

Naturalmente si sarebbe potuta introdurre la coomologia di Poisson con l'algebra omologica, e precisamente definendo

$$H_{Pos}(A) = Ext_{\mathcal{U}(\Omega^1(A))}(K, A)$$

considerando l'algebra inviluppante universale dell'algebra di Lie delle 1-forme, ma questo punto di vista più intrinseco ha solo il vantaggio dell'eleganza.

Osserviamo per concludere che, come segue dal teorema precedente, nel caso delle varietà simplettiche, la coomologia di Poisson e la coomologia di de Rham coincidono. Nel caso invece dell'algebra simmetrica S su un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ (cioè nel caso dell'algebra di Poisson ottenuta dall'algebra filtrata $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$) si ha

$$\mathrm{Der}(S) \cong \mathfrak{g}^* \otimes S$$
$$\Omega^1(A) \cong \mathfrak{g} \otimes S$$

il che implica

$$H_{Pos}(S) \cong H_{Lie}(\mathfrak{g}, S)$$

dato che S è un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-modulo e quindi un $\mathfrak{g}$-modulo.

In generale il calcolo della coomologia di Poisson può essere proibitivo anche nel caso di esempi apparentemente semplici (cfr. [15]).

3 Varietà di Poisson

In questo capitolo considereremo una versione geometrica del concetto generale di struttura di Poisson.

Definizione 3.1 *Una* varietà di Poisson *è una varietà differenziabile P tale che $C^\infty(P)$ sia un'algebra di Poisson rispetto al prodotto di funzioni punto per punto.*

Ad esempio le orbite coaggiunte di un'algebra di Lie e le varietà simplettiche forniscono classi di esempi di varietà di Poisson. Evidentemente è desiderabile dare una caratterizzione delle varietà di Poisson che sia più geometrica: un modo per farlo è considerare le parentesi di Poisson come indotte da un 2-tensore controvariante antisimmetrico π. Questo era stato fatto in generale su un'algebra di Poisson considerando π come una biderivazione; vediamo come esprimere questa costruzione in modo più geometrico.

Intanto sappiamo che esiste la mappa

$$\chi : C^\infty(P) \to Vect(P)$$

che ad $f \in C^\infty(P)$ associa il campo hamiltoniano χ_f e sappiamo che si tratta di un morfismo di algebre di Lie. Inoltre si ha

$$\chi_f g = \{f, g\}$$

e quindi

$$\{f, g\} = \chi_f g = -\chi_g f = -\langle \chi_g | df \rangle$$

Questo vuol dire che esiste la mappa

$$\mathcal{H} : \Omega^1(P) \to Vect(P)$$

tale che $\mathcal{H} \circ d = \chi$, cioè

$$\langle \mathcal{H} df | dg \rangle = \{f, g\}$$

Quindi la parentesi di Poisson è determinata da un operatore $\mathcal{H}$ (che abbiamo chiamato *hamiltoniano* sulle algebre associative) che a sua volta determina una mappa bilineare antisimmetrica

$$\pi(df \wedge dg) := \langle \mathcal{H} df | dg \rangle$$

che è proprio il tensore di Poisson.

Se fissiamo intorno ad un punto $p \in P$ le coordinate locali $(x_1, \ldots, x_n)$ possiamo scrivere le componenti di π: intanto sarà

$$\pi = \sum_{i,j} \pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \Rightarrow \quad \{f, g\} = \sum_{i,j}^{1\ldots n} \pi_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

Se poi valutiamo queste parentesi sulle funzioni coordinate x_i otteniamo

$$\{x_i, x_j\} = \pi_{ij}$$

il che determina le componenti del tensore di Poisson in queste coordinate.

Naturalmente non ogni 2-tensore antisimmetrico è un tensore di Poisson: una condizione necessaria e sufficiente affinché lo sia l'abbiamo data sulle algebre in termini di parentesi di Schouten e possiamo farlo anche in questo contesto, scrivendo cioè

$$[\pi, \pi]_{\mathcal{S}} = 0$$

Per esplicitare questa espressione, anziché considerare le parentesi di Schouten, ricordiamoci che quello che vogliamo caratterizzare è l'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson; se la scriviamo localmente per le funzioni coordinate otteniamo:

$$\begin{aligned} 0 = \{\{x_i, x_j\}, x_k\} + c.p.(i, j, k) &= \sum_{r,s} \pi_{rs} \frac{\partial\{x_i, x_j\}}{\partial x_r} \frac{\partial x_k}{\partial x_s} + c.p.(i, j, k) = \\ &= \sum_r \left(\pi_{rk} \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_r} + c.p.(i, j, k) \right) \end{aligned}$$

Questa condizione, che è stata scoperta da Sophus Lie, esprime una caratterizzazione locale del tensore di Poisson, cioè ogni 2-tensore controvariante antisimmetrico che la soddisfi è un tensore di Poisson, e quindi definisce una struttura di varietà di Poisson su P.

Abbiamo quindi una *condizione di integrabilità* per le strutture di Poisson definite sulle varietà differenziabili.

Possiamo pensare di utilizzare questa condizione per classificare le strutture di Poisson su una varietà, che poi era il progetto originario di Lie: osserviamo quanto questo sia complicato formulando dei semplici esempi. Intanto, se consideriamo un tensore antisimmetrico costante, questo soddisfa evidentemente le condizioni di Lie, e quindi definisce sempre un tensore di Poisson, che però non fornisce esempi molto interessanti. Possiamo allora considerare le funzioni non costanti più semplici che possiamo immaginare, ad esempio quelle lineari. Supponiamo cioè di avere un tensore le cui componenti siano

$$\pi_{ij}(x) = \sum_k a_{ij}^k x_k$$

funzioni lineari delle coordinate locali $x = (x_1, \dots, x_n)$. Evidentemente deve aversi

$$a_{ij}^k = -a_{ji}^k$$

perché vogliamo che il nostro tensore sia antisimmetrico. Imponiamo infine le condizioni di Lie sul tensore π, o meglio sulle sue componenti. Evidentemente otteniamo:

$$0 = \sum_r \left(\pi_{rk} \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_r} + c.p.(i, j, k) \right)(x) = \sum_r \left(\sum_s a_{rk}^s a_{ij}^r x_s + c.p.(i, j, k) \right)$$

e cioè le $\{a_{ij}^k\}$ sono costanti di struttura di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$: le parentesi di Poisson così ottenute non sono altro che le parentesi di Lie–Poisson dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ e quindi una varietà di Poisson lineare è sempre lo spazio delle orbite coaggiunte di un'algebra di Lie.

Lo studio della parentesi di Poisson quadratiche è molto più complicato, ed è stato effettuato da Karasev e Maslov con risultati notevoli(cfr. [10]). In generale sembra impensabile classificare le varietà di Poisson basandosi sull'espressione locale del tensore di Poisson, come si è fatto nel caso lineare: sarebbe un po' come voler classificare le algebre di Lie studiando la combinatoria delle costanti di struttura...

Come abbiamo osservato, si può definire una varietà di Poisson come una coppia (P, π) ove π è il tensore di Poisson associato alle $\{\}$; questo sembra in qualche modo analogo al modo in cui sono definite le varietà simplettiche, ed osserviamo che in realtà è l'inverso: infatti se il tensore di Poisson ha rango massimo, cioè nell'intorno di ogni punto si esprime come una matrice antisimmetrica invertibile, allora il suo tensore inverso è un tensore covariante antisimmetrico che definisce una forma simplettica: è infatti non degenere (essendo invertibile) e le condizioni di Sophus Lie si trasformano nella condizione di cociclo $d\omega = 0$ come un semplice calcolo, utilizzando la formula della derivata della matrice inversa, permette di verificare.

Quello che vogliamo ora discutere è quanto questa situazione possa generalizzarsi nel caso di una varietà di Poisson qualsiasi. Intanto osserviamo che un esempio fondamentale è quello delle varietà di Poisson lineari, e cioè delle orbite coaggiunte di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$: in quel caso la varietà si decompone in modo naturale in sottovarietà simplettiche. Infatti abbiamo menzionato il fatto che le orbite coaggiunte nelle quali $P = \mathfrak{g}^*$ si spezza sono varietà simplettiche e le parentesi di Poisson indotte da queste strutture simplettiche sono proprio le restrizioni ad esse delle parentesi di P.

Una generalizzazione di questo fatto al caso di varietà di Poisson qualsiasi è possibile, il che consente, in un certo senso, di vedere la teoria delle varietà di Poisson come una versione "non lineare" del metodo delle orbite.

Osserviamo innanzitutto che è definito il concetto di *rango* di un tensore di Poisson su una varietà: il rango sarà un concetto locale, ed anzi puntuale, nel senso che si tratta di una funzione ρ definita su P ed a valori interi che, nel punto $x \in P$, è definita come il rango della matrice $\pi(x)$. Evidentemente il rango sarà una funzione che in generale non potremo pretendere essere costante: osserviamo ad esempio che una varietà di Poisson di rango costante ed ovunque massimo è simplettica, perché il tensore di Poisson riulta in tale caso globalmente invertibile dando luogo in questo modo ad una forma simplettica.

È abbastanza evidente che, su P, ρ è una funzione semicontinua inferiormente, dato che non può decrescere in un intorno di un punto. Nel caso in cui sia costante deve ovviamente essere una costante pari, dato che il tensore π è antisimmetrico.

Definizione 3.2 *Una varietà di Poisson di rango costante si dice* regolare.

L'importanza di questo caso particolare sta nel fatto che possiamo decomporre ogni varietà di Poisson regolare in foglie simplettiche: infatti, punto per punto, i campi hamiltoniani determinano una scelta di un sottospazio di ogni spazio tangente (questa scelta avviene in modo liscio) e quindi, dato che il rango del tensore di Poisson è costante, tale è la dimensione dello spazio dei vettori hamiltoniani in x al variare di x in P. In altri termini, la mappa liscia

$$x \mapsto \mathrm{Ham}_x(P)$$

determina una distribuzione su P. È poi ovvio che questa distribuzione è involutiva, dato che i vettori hamiltoniani formano un'algebra di Lie, e quindi, per il Teorema di Frobenius, integrabile. Questo significa che per ogni punto della varietà P passa una unica varietà integrale massimale, e che P si decompone in una foliazione le cui foglie sono queste sottovarietà.

Ma non solo: ogni tale foglia S è una varietà simplettica, dato che, essendo massimale, ha dimensione pari al rango di $\pi|_S$ e dato che, essendo i campi hamiltoniani ovunque tangenti ad S, il tensore di Poisson ristretto ad S ha rango massimo. Abbiamo quindi una decomposizione in *foglie simplettiche* di ogni varietà di Poisson regolare.

Osserviamo esplicitamente che questo non è mai il caso dell'esempio fondamentale delle orbite coaggiunte di un'algebra di Lie: infatti in quel caso le orbite, che abbiamo detto essere proprio le foglie simplettiche che andiamo cercando, hanno dimensioni differenti (ad esempio esiste sempre una foglia di dimensione zero formata dalla sola origine). Questo dipende dal fatto che il rango del tensore di Poisson nel caso lineare non è costante.

Tuttavia, la decomposizione in foglie simplettiche può farsi su ogni varietà di Poisson: infatti esiste una generalizzazione del concetto di distribuzione ed anche una generalizzazione del Teorema di Frobenius al caso in cui la distribuzione non abbia rango costante.

Senza addentrarci in dettagli tecnici (cfr. [15]) limitiamoci a descrivere la situazione senza dimostrazioni.

Definizione 3.3 *Un insieme di sottospazi vettoriali $S(P) = \{S_x(P)\}$ degli spazi tangenti T_xP ad una varietà differenziabile P si dice* distribuzione generalizzata. *Una tale distribuzione si dice* differenziabile *se:*

$$\forall x \in P \qquad \exists X_1, \dots, X_r \in S(P) \qquad S_x(P) = \mathrm{span}\langle X_1(x), \dots, X_r(x)\rangle$$

Ovviamente nel caso in cui P è una varietà di Poisson abbiamo la distribuzione generalizzata

$$S_x(P) = \{v \in T_xP \quad | \quad \exists f \in C^\infty(P) \qquad \chi_f(x) = v\}$$

Che il Teorema classico di Frobenius possa non valere in questa situazione più generale lo dimostra il seguente esempio di Stefan:

Esempio 3.4 *Se* $M = \mathbb{R}^2$ *e* $S_{(x,y)} = \mathrm{span}\langle \frac{\partial}{\partial x}, \varphi(x)\frac{\partial}{\partial y}\rangle$ *ove* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ *è nulla per* $x \leq 0$ *e positiva per* $x > 0$, *allora* $[\frac{\partial}{\partial x}, \varphi(x)\frac{\partial}{\partial y}](x)$ *è zero se* $x \leq 0$ *mentre vale* $\frac{\partial \ln \varphi}{\partial x}\varphi(x)\frac{\partial}{\partial y}$ *se* $x > 0$. *Cioè sull'asse* $\{x = 0\}$ *soddisfa la condizione di involutività, eppure non ha foglie che pàssino per i punti di quell'asse.*

Stefan e Sussmann hanno trovato una condizione che generalizza quella di involutività e che è necessaria e sufficiente per l'integrabilità di una distribuzione generalizzata e che è la cosiddetta *condizione di invarianza* (cfr. [15] §2.1). Tuttavia esiste una generalizzazione ancor più immediata del Teorema di Frobenius al caso di distribuzioni generalizzate dovuta a Vifljantsev:

Definizione 3.5 *Una distribuzione generalizzata* $S(P)$ *su una varietà differenziabile* P *si dice* involutiva *se esiste una sottoalgebra di Lie* $\chi(S(P))$ *dell'algebra dei campi di vettori su* P *tale che i campi di questa sottoalgebra valutati in* x *generino tutto* $S_x(P)$.

Evidentemente una distribuzione generalizzata integrabile è involutiva, dato che il commutatore di vettori tangenti ad una sottovarietà è ancora un vettore tangente e quindi può prendersi addirittura $S(P)$ come sottoalgebra di Lie nella definizione di involutività.

Infine enunciamo il Teorema di Vifljantsev–Frobenius, dopo aver ricordato che ovviamente il *rango* di una distribuzione generalizzata sarà definito come nel caso delle varietà di Poisson e cioè come la funzione che ad ogni punto $x \in P$ associa la dimensione dello spazio $S_x(P)$.

Teorema 3.6 *Una distribuzione differenziabile* $S(P)$ *è completamente integrabile se e solo se soddisfa alle due condizioni seguenti:*

(1) $S(M)$ *è involutiva.*

(2) *Per ogni x in P e ogni v in $S_x(P)$ esiste un cammino $x(t)$ che parta da x ($x(0) = x$) e tale che il rango della distribuzione è costante lungo $x(t)$.*

Per una dimostrazione si veda [15].

Nel caso delle varietà di Poisson si verificano senza troppe difficoltà queste condizioni che permettono di concludere l'esistenza di una foliazione simplettica nel caso generale.

Questa decomposizione offre lo spunto per uno studio locale delle varietà di Poisson: infatti, dato che abbiamo sempre delle varietà simplettiche nelle quali si foliano, e dato che la struttura locale delle varietà simplettiche è completamente determinata dal Teorema di Draboux, ci aspettiamo che qualcosa possa dirsi anche nel caso generale delle varietà di Poisson, ed infatti è così.

Weinstein (che già aveva generalizzato il Teorema di Darboux per varietà simplettiche di dimensione infinita!) ha dato una versione di questo teorema per varietà di Poisson, dimostrando il seguente *Splitting Theorem*.

Teorema (Weinstein) 3.7 *Se P è una varietà di Poisson e se $x \in P$ e $\rho(x) = 2n$ allora x ha un intorno aperto U tale che U come varietà di Poisson col tensore $\pi|_U$ è isomorfa, via un isomorfismo di Poisson φ, ad un prodotto $S \times N$, ove S è una varietà simplettica $2n$-dimensionale, e N è una varietà di Poisson che in $\varphi(x)$ ha rango zero. I fattori S e N sono unici a meno di isomorfismi locali di Poisson.*

La dimostrazione dell'esistenza è abbastanza simile a quella del Teorema di Darboux, che procede per induzione su n, mentre l'unicità comporta ragionamenti più delicati e tecnici (cfr. [16] oppure [15]).

La questione più intricata posta dal teorema precedente è senz'altro quella che coinvolge la natura di N: infatti, a meno di equivalenza locale, il teorema fornisce in ogni punto di P una *struttura trasversale*, la cui reale composizione non è stata compresa se non in casi particolari.

La costruzione delle coordinate che si effettua nella dimostrazione del teorema precedente porge alla fine del processo delle coordinate del tipo $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, z_1, \ldots, z_k)$, se la dimensione di P è $2n + k$, tali che le parentesi di Poisson si scrivono localmente come:

$$\begin{aligned}
\{p_i, p_j\} &= \{q_i, q_j\} = 0 \\
\{p_i, z_j\} &= \{q_j, z_j\} = 0 \\
\{p_i, q_j\} &= \delta_{ij}
\end{aligned}$$

Se il punto x è regolare, cioè se il rango è costante in un suo intorno, allora le coordinate del Teorema di Weinstein soddisfano anche alle relazioni

$$\{z_i, z_j\} = 0$$

e quindi il tensore di Poisson si scrive in x come

$$\pi(x) = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una questione interessante ma ugualmente ardua è il cosiddetto *problema della linearizzazione* delle strutture di Poisson: data una varietà di Poisson ed un suo punto x, supponendo che $\rho(x) = 0$, abbiamo delle coordinate locali intorno a x del tipo $(z_1, \ldots, z_m)$ ove $m =$dim P, e tali che

$$z_1(x) = \cdots = z_m(x) = 0$$

Allora il tensore di Poisson π ha un'espansione in serie di Taylor in x del tipo

$$\pi_{ij} = \sum_k a_{ij}^k z_k + o(|z|^2)$$

ove, dato che devono valere le condizioni locali di integrabilità di Lie, le $\{a_{ij}^k\}$ definiscono le costanti dsi struttura di un'algebra di Lie.

L'approssimazione lineare della struttura di Poisson di P in x è quindi la struttura di Lie Poisson definita approssimando nel modo detto il tensore π in x. È naturale chiedersi se e quando una struttura di Poisson su P in un suo punto x di rango nullo possa essere isomorfa alla sua approssimazione lineare, cioè alla struttura di Lie Poisson che definisce l'approssimazione al prim'ordine del suo tensore di Poisson in x.

Questo problema potrebbe essere a priori mal posto, cioè l'approssimazione lineare potrebbe dipendere dalla scelta delle coordinate, ma ciò non è vero, dato che se consideriamo l'insieme $\mathfrak{m}_x$ delle funzioni in $C^\infty(P)$ che si annullano in x e l'insieme $\mathfrak{m}_x^2$ delle funzioni in $C^\infty(P)$ che si annullano in x con le loro derivate prime, allora si verifica facilmente che $\mathfrak{m}_x$ è una sottoalgebra di Lie di $(C^\infty(P), \{\})$, che $\mathfrak{m}_x^2$ è un suo ideale di Lie e che $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ è isomorfa all'algebra di Lie definita dalle costanti di struttura $\{a_{ij}^k\}$. Ne segue che, essendo $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = T_x^*P$ la nostra algebra di Lie la cui struttura di Lie Poisson associata definisce l'approssimazione lineare delle parentesi di Poisson di P in x non dipende dalla scelta delle coordinate, essendo esprimibile in modo intrinseco sul fibrato cotangente.

J. Conn ha dimostrato (cfr. [3]), nel caso di strutture di Poisson analitiche che, nell'intorno di un punto di rango nullo, diano luogo ad algebre di Lie semisemplici che vale la linearizzabilità, cioè che le parentesi di Poisson in quel punto sono effettivamente equivalenti a quelle di Lie Poisson.

Nel caso di strutture differenziabili, la condizione di semisemplicità non è sufficiente ed occorre richiedere che l'algebra di Lie sia compatta.

Oltre a questi risultati fondamentali, per le varietà di Poisson si possono definire concetti e risultati analoghi a quelli della Geometria Simplettica, come la riduzione, la quantizzazione geometrica, l'esistenza di mappe momento e l'azione hamiltoniana di gruppi di Lie, aspetti per i quali si rimanda, ad esempio, a [15].

4 Gruppi di Lie–Poisson

L'esempio fondamentale che abbiamo più volte considerato fin qui è stato quello delle orbite coaggiunte di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, ovvero delle varietà di Poisson lineari. Osserviamo ancora che le parentesi di Lie–Poisson godono di una ulteriore proprietà, e cioè rispettano la struttura additiva dello spazio vettoriale $\mathfrak{g}^*$. Ricordiamo infatti che le parentesi di Lie–Poisson si scrivono su $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ come

$$\{f,g\}(v) = \langle v|[(df)_v,(dg)_v]\rangle$$

il che significa, posto $V := \mathfrak{g}^*$, che la mappa

$$\begin{aligned}\sigma : V\times V &\to V\\ (v,w) &\mapsto v+w\end{aligned}$$

di addizione è una mappa di Poisson, cioè

$$\sigma^*\{f,g\} = \{\sigma^* f, \sigma^* g\}$$

essendo $\sigma^* f(v,w) = f(w+w)$. Questa ovvia proprietà ci dice che il gruppo additivo $(V,+)$ è in qualche modo un gruppo la cui operazione è compatibile con le parentesi di Poisson sulla varietà V.

L'idea che ora vogliamo realizzare è quella di sostituire il gruppo abeliano $(V,+)$ con un qualsiasi gruppo di Lie $(G,\cdot)$. Evidentemente se G è un gruppo di Lie esiste la mappa liscia

$$\begin{aligned}\mu : G\times G &\to G\\ (g,h) &\mapsto g\cdot h\end{aligned}$$

e quindi possiamo scrivere la condizione di compatibilità esattamente come nel caso precedente, e dare quindi la seguente

Definizione 4.1 *Un gruppo di Lie G si dice* gruppo di Lie–Poisson *se G, visto come varietà differenziabile, è una varietà di Poisson con parentesi $\{\}$, e se vale la condizione di compatibilità*

$$\mu^*\{f, g\} = \{\mu^* f, \mu^* g\}$$

Osserviamo che le parentesi di Poisson scritte alla sinistra della condizione di compatibilità sono in effetti parentesi di Poisson sulla varietà di Poisson $G \times G$; non abbiamo definito ancora il concetto di prodotto di strutture di Poisson, ma si rimedia facilmente: infatti le parentesi di Poisson sul prodotto $P \times Q$ di queste varietà di Poisson saranno definite come quelle parentesi che, ristrette a P (risp. Q), coincidono con quelle di P (risp. Q) e che fanno commutare fra loro funzioni definite su fattori diversi, cioè se f dipende solo da elementi di P e g solo da elementi di Q allora $\{f, g\} = 0$. Naturalmente occorre verificare che questa definizione è effettivamente ben posta e completa. Osserviamo inoltre che per algebre di Poisson può definirsi il prodotto utilizzando i prodotti tensoriali. Infatti una verifica noiosa permette di convincersi che il prodotto tensoriale di due algebre $(A, \cdot, \{\}_A)$ e $(B, \cdot, \{\}_B)$ è ancora un'algebra di Poisson rispetto alle parentesi

$$\{a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2\} := \{a_1, a_2\}_A \otimes b_1 b_2 + a_1 a_2 \otimes \{b_1, b_2\}_B$$

Naturalmente su $C^\infty(P \times Q)$ questa definizione algebrica permette di ritrovare quella precedentemente enunciata per le varietà di Poisson.

La nozione di gruppo di Lie–Poisson è stata introdotta da Drinfeld nel 1983 (cfr. [4]), che vi si imbattè nel suo studio delle soluzioni della cosiddetta *equazione di Yang–Baxter*. Drinfeld osservò che queste soluzioni erano legate a parentesi di Poisson che avevano una struttura "gruppale" e definì il concetto generale di gruppo di Lie–Poisson che qui si è dato con altre motivazioni. Drinfeld utilizzò la sua definizione come trampolino di lancio per edificare la teoria dei *quantum groups*, che sono oggetti quantistici dei quali i gruppi di Lie–Poisson sono limiti classici (cfr. [5]]).

Questo campo di ricerca, che ha fruttato a Drinfeld la medaglia Fields, è ora vastissimo e si inquadra nella teoria generale della deformazione delle algebre di Hopf nelle cosiddette "quantum algebras".

Possiamo, nel nostro piccolo, vedere quale legame esista fra la definizione di gruppo di Lie–Poisson che abbiamo dato e le algebre di Hopf: intanto sappiamo che, se G è un gruppo di Lie, $C^\infty(G)$ è un'algebra di Hopf rispetto al coprodotto ed all'antipodo indotti dalla moltiplicazione gruppale e dal passaggio all'inverso. In particolare il coprodotto è così definito:

$$\begin{gathered}\Delta : C^\infty(G) \to C^\infty(G) \otimes C^\infty(G) \hookrightarrow C^\infty(G \times G)\\ f \mapsto ((x_1, x_2) \mapsto f(x_1 \cdot x_2))\end{gathered}$$

Allora possiamo rileggere la definizione di gruppo di Lie–Poisson in questo contesto: la condizione sulla mappa μ si tradurrà nella seguente condizione sul coprodotto Δ dell'algebra di Hopf $C^\infty(G)$:

$$\Delta(\{f,g\}) = \{\Delta(f),\Delta(g)\}$$

Questa definizione ha il vantaggio di poter essere scritta su un'algebra di Hopf qualsiasi che sia anche un'algebra di Poisson. Allora è ovvio come possa definirsi il concetto di *algebra di Hopf–Poisson* che è la versione algebrica del concetto di gruppo di Lie–Poisson. Non tratteremo la teoria generale delle algebre di Hopf–Poisson perché è formalmente più complicata e non aggiunge molto a quella dei gruppi di Lie–Poisson: una sua trattazione generale non è stata ancora data se non parzialmente da Drinfeld, ed una sua possibile motivazione sarebbe piuttosto la teoria dei quantum groups, che è quella effettivamente più studiata dagli algebristi e dai fisici matematici.

Torniamo dunque al concetto di gruppo di Lie–Poisson, e cerchiamo qualche caratterizzazione della definizione generale che, come si vede, non è facilmente trattabile nei casi concreti.

Dato che G è un gruppo di Lie, possiamo considerare la sua algebra di Lie $\mathfrak{g}$: sappiamo che possiamo interpretarla come insieme dei campi di vettori su G invarianti a sinistra oppure a destra, e cioè che ogni elemento $X \in \mathfrak{g}$ dà luogo ad un'unico campo ∂_X invariante a sinistra ed ad un'unico campo ∂'_X invariante a destra su G definiti come

$$(\partial_X f)(x) := \left(\frac{\partial}{\partial t} f(x\cdot \exp\ tX)\right)_{t=0}$$
$$(\partial'_X f)(x) := \left(\frac{\partial}{\partial t} f(\exp\ tX\cdot x)\right)_{t=0}$$

per $f \in C^\infty(G)$ e $x \in G$. È un fatto standard della teoria elementare dei gruppi di Lie che ∂ (risp. ∂') è una rappresentazione (risp. antirappresentazione) dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ nell'algebra degli operatori differenziali del primo ordine invarianti a sinistra (risp. a destra) su G:

$$\partial_X\partial_Y - \partial_Y\partial_X = \partial_{[X,Y]}$$
$$\partial'_X\partial'_Y - \partial'_Y\partial'_X = -\partial'_{[X,Y]}$$

Se consideriamo una base $\{X_1,\dots,X_n\}$ di $\mathfrak{g}$ ed i corrispondenti elementi $\{\partial_1,\dots,\partial_n\}$ abbiamo che questi forniscono una banalizzazione del fibrato tangente di G (sono una base globale per il modulo dei campi di vettori) e, definendo il gradiente invariante a sinistra di una funzione $f \in C^\infty(G)$ come

$$\langle(\nabla f)_x|X\rangle := (\partial_X f)(x)$$

possiamo riscrivere le parentesi di Poisson su G in termini della base $\{\partial_i\}$ come

$$\{f,g\}(x) = \eta_x((\nabla f)_x \wedge (\nabla g)_x)$$

ove η è il pull-back del tensore di Poisson π di G nel punto $e \in G$ identità del gruppo di Lie:

$$\begin{aligned} \eta : G &\to \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \\ x &\mapsto dL_{x^{-1}}\pi_x \end{aligned}$$

avendo esteso la traslazione a sinistra alle potenze tensoriali di $\mathfrak{g}$ con

$$dL_x(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n) := dL_x X_1 \otimes \cdots \otimes dL_x X_n$$

ed identificato T_eG con $\mathfrak{g}$.

Verifichiamo quello che abbiamo scritto:

$$\begin{aligned} \{f,g\}(x) &= \pi_x((df)_x \wedge (dg)_x) = dL_{x^{-1}}\pi_x((\nabla f)_x \wedge (\nabla g)_x) \\ &= \eta_x((\nabla f)_x \wedge (\nabla g)_x) \end{aligned}$$

Osserviamo che avremmo potuto dare una definizione analoga in termini di campi invarianti a destra.

Il tensore η gioca il ruolo di tensore di Poisson invariante a sinistra; dato che sappiamo come i tensori di Poisson sono legati agli operatori hamiltoniani, possiamo definire un operatore hamiltoniano invariante a sinistra $\mathcal{K}$ associato alla struttura di gruppo di Lie–Poisson di G come

$$\langle \mathcal{K}_x \omega_1 | \omega_2 \rangle = \eta_x(\omega_1 \wedge \omega_2)$$

Le seguenti condizioni sono delle caratterizzazioni estremamente utili della definizione di gruppo di Lie–Poisson, e sono dovute a Drinfeld:

Proposizione 4.2 *Se G è un gruppo di Lie ed è una varietà di Poisson rispetto a certe parentesi $\{\}$, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) $(G, \cdot, \{\})$ *è un gruppo di Lie–Poisson.*

(2) $\forall x, y \in G \qquad \pi_{xy} = dL_x \pi_y + dR_y \pi_x.$

(3) $\forall x, y \in G \qquad \mathcal{H}_{xy} = dL_x \mathcal{H}^*_y L_x + dR_y \mathcal{H}_x R^*_y.$

(4) $\forall x, y \in G \qquad \eta_{xy} = Ad_{y^{-1}} \eta_x + \eta_y.$

(5) $\forall x, y \in G \qquad \mathcal{K}_{xy} = Ad_{y^{-1}} \mathcal{K}_x Ad^*_y + \mathcal{K}_y.$

La dimostrazione è una pura verifica tecnica: può trovarsi in [13] e [15].

Osserviamo che la condizione

$$\eta_{xy} = Ad_{y^{-1}}\eta_x + \eta_y$$

esprime il fatto che $\eta : G \to \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ è un 1-cociclo di G a valori nel G-modulo $\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$.

Un corollario immediato ed interessante di queste caratterizzazioni è che l'identità del gruppo $\{e\}$ forma da sola una foglia simplettica, dato che il tensore di Poisson in essa è sempre nullo: $\pi_e = \pi_{ee} = 2\pi_e$.

Questo fatto è notevole, perchè ci dice, ad esempio, che la struttura di Poisson di un gruppo di Lie–Poisson *non può mai essere simplettica*. Non esiste cioè una nozione ben definita di "gruppo simplettico" che sia un caso particolare della nozione di gruppo di Lie–Poisson. Ha senso definire strutture simplettiche su gruppi di Lie che siano invarianti rispetto alla struttura gruppale, ma si ottiene qualcosa che non è imparentato con le nozioni che qui stiamo trattando.

Abbiamo dunque che un 2-tensore controvariante su un gruppo di Lie G, lo rende un gruppo di Lie–Poisson se e solo se soddisfa le due condizioni di integrabilità e di compatibilità:

$$[\pi, \pi]_s = 0$$
$$\pi_{xy} = dL_x\pi_y + dR_y\pi_x$$

La prima condizione è una formulazione dell'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson indotte da π, mentre la seconda è una condizione di 1-cociclo. Vogliamo ora vedere come queste condizioni si possono riformulare in modo infinitesimale, utilizzando cioè l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ del gruppo.

Sappiamo dalla prima condizione che $C^\infty(G)$ è un'algebra di Lie, il che ci dice che lo è anche $C^\infty(e)$, l'algebra dei germi di funzioni intorno al punto unità $e \in G$:

$$\forall \overline{f}, \overline{g} \in C^\infty(e) \qquad \{\overline{f}, \overline{g}\} := \overline{\{f, g\}}$$

Se consideriamo l'ideale

$$\mathfrak{m} := \{\overline{f} \in C^\infty(e) | \overline{f}(e) = 0\}$$

dei germi nulli in e, allora, dato che $\pi_e = 0$:

$$\{C^\infty(e), C^\infty(e)\} \subseteq \mathfrak{m}$$

e quindi $\mathfrak{m}$ è un ideale di Lie, come pure lo è $\mathfrak{m}^2$. Quindi $T_e^*G \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ è un'algebra di Lie e, dato che si identifica con $\mathfrak{g}^*$, abbiamo che anche $\mathfrak{g}^*$ lo è.

La nostra conclusione è quindi che se G è un gruppo di Lie che sia pure una varietà di Poisson (ma *non necessariamente* un gruppo di Lie–Poisson, dato che non abbiamo in alcun modo utilizzato l'identià di cociclo) allora lo spazio duale dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è pure un'algebra di Lie.

Possiamo dire che l'algebra di Lie $\mathfrak{g}^*$ fornisce una descrizione infinitesimale della struttura di Poisson su G intorno ad e.

Una descrizione della struttura di algebra di Lie su $\mathfrak{g}^*$ può darsi in coordinate nel modo seguente: consideriamo $\omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{g}^* \cong T_e^*G$, e siano $f_1, f_2 \in C^\infty(G)$ tali che $(df_i)_e = \omega_i$. Allora poniamo

$$[\omega_1, \omega_2] := (d\{f_1, f_2\})_e$$

Questa definizione dipende dalla struttura di Poisson su G in un intorno dell'identità: precisamente, se fissiamo un carta locale centrata in e nella quale le parentesi di Poisson si scrivano come

$$\{f_1, f_2\}(x) = \sum_{i,j} \pi_{ij}(x) X_i(f_1) X_j(f_2)$$

(ove $\{X_1, \ldots, X_n\}$ è la base dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ relativa alle coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ della carta scelta) allora le componenti del tensore π determinano le costanti di struttura di $\mathfrak{g}$. Se $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ è la base duale di $\{X_1, \ldots, X_n\}$ in $\mathfrak{g}^*$ allora

$$[\omega_1, \omega_2] = \sum_k X_k(\pi_{ij}) \omega_k$$

Questa è effettivamente una struttura di algebra di Lie su $\mathfrak{g}^*$, dato che, se

$$f_k^{ij} := X_k(\pi_{ij})$$

allora queste sono costanti di struttura, come segue dal fatto che π è antisimmetrico e che soddisfa la condizione $[\pi, \pi]_s = 0$ di integrabilità.

Un ulteriore modo di scrivere questa struttura di Poisson consiste nel considerare coordinate canoniche intorno all'identità del gruppo. Scriviamo cioè i punti x intorno ad e nella forma $x = \exp\, tX$ ove $X \in \mathfrak{g}$ e $t \in \mathbb{R}$ serve a "rendere piccolo" X in modo da appartenere ad un intorno nel quale la mappa esponenziale sia un diffeomorfismo. In questo caso, fissata la base $\{\partial_i\}$ introdotta in precedenza, le coordinate del punto $x = \exp \sum_i x_i \partial_i$ sono $(x_1, \ldots, x_n)$. Allora il pull-back η di π (stiamo lavorando con campi invarianti a sinistra intorno a e) si compone con la mappa esponenziale nel modo seguente:

$$\tilde{\eta} = \eta \circ \exp : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$$

in modo che

$$\tilde{\eta}(\partial_k) = \sum_{i,j} \eta_{ij}(\exp\ \partial_k)\partial_i \wedge \partial_j$$

Allora derivando si ottiene

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\eta}(t\partial_k)\right)_{t=0} = \sum_{i,j} f_k^{ij}\partial_i \wedge \partial_j$$

e quindi la mappa

$$\begin{aligned} \delta : \mathfrak{g} &\to \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \\ X &\mapsto \left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\eta}(tX)\right)_{t=0} \end{aligned}$$

è la duale delle parentesi di Lie su $\mathfrak{g}^*$ indotte dalle parentesi di Poisson.

La discussione precedente prescindeva dal fatto che G fosse un gruppo di Lie–Poisson, ma poteva effettuarsi per un qualsiasi gruppo di Lie sul quale fosse anche definita una struttura di varietà di Poisson, a priori indipendente dalla struttura gruppale. Per vedere come queste costruzioni si particolarizzano nel caso di gruppi di Lie–Poisson, dobbiamo in qualche modo far intervenire la condizione di 1-cociclo. Questo può farsi enunciando la seguente definizione dovuta a Drinfeld e Manin:

Definizione 4.3

(1) *Una* bialgebra di Lie *è una coppia* $(\mathfrak{g}, \delta)$ *ove* $\mathfrak{g}$ *è un'algebra di Lie e* δ *una mappa*

$$\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$$

tale che la sua duale δ^* *renda* $\mathfrak{g}^*$ *a sua volta un'algebra di Lie (rispetto alle parentesi* $[\alpha, \beta] := \delta^*(\alpha \wedge \beta)$*) e tale che sia un 1-cociclo rispetto all'azione aggiunta di* $\mathfrak{g}$ *su* $\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$*:*

$$ad_X(Y \wedge Z) = [X, Y] \wedge Z + Y \wedge [X, Z]$$

cioè tale che

$$\delta[X, Y] = ad_X\delta Y - ad_Y\delta X$$

(2) *Una* tripla di Manin *è una tripla* $(\mathfrak{g}, g_+, \mathfrak{g}_-)$ *di algebre di Lie ove* $\mathfrak{g}$ *sia dotata di un prodotto scalare () simmetrico, non degenere ed invariante (rispetto alle parentesi di Lie) tale che*

(a) $\mathfrak{g}_+$ *e* $\mathfrak{g}_-$ *sono sottoalgebre di Lie di* $\mathfrak{g}$.

(b) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ *come spazi vettoriali.*

(c) $\mathfrak{g}_+$ *e* $\mathfrak{g}_-$ *sono isotrope massimali rispetto a ().*

Osserviamo intanto che le due nozioni introdotte in questa definizione sono essenzialmente equivalenti; vale infatti il seguente

Teorema (Drinfeld–Manin) 4.4 *Se lo spazio vettoriale di dimensione finita* $\mathfrak{g}$ *ed il suo duale* $\mathfrak{g}^*$ *sono algebre di Lie e se definiamo la mappa lineare*

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^* &\to \mathfrak{g}^* \\ \omega_1 \wedge \omega_2 &\mapsto [\omega_1, \omega_2] \end{aligned}$$

allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

(1) $(\mathfrak{g}, \Lambda^*)$ *è una bialgebra di Lie.*

(2) *Se* $\{c_{ij}^k\}$ *e* $\{f_k^{ij}\}$ *sono le costanti di struttura di* $\mathfrak{g}$ *e di* $\mathfrak{g}^*$ *rispetto a due basi fra loro duali, si ha*

$$\sum_k c_{ij}^k f_k^{ij} = \sum_k \left(c_{ki}^r f_j^{sk} - c_{ki}^s f_j^{rk} - c_{kj}^r f_i^{sk} + c_{kj}^s f_i^{rk} \right)$$

(3) *Esiste un'unica struttura di algebra di Lie sullo spazio vettoriale* $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ *in modo che* $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ *sia una tripla di Manin rispetto al prodotto scalare*

$$(X_1 \oplus \omega_1, X_2 \oplus \omega_2) := \langle X_1 | \omega_2 \rangle + \langle X_2 | \omega_1 \rangle$$

Per una dimostrazione si veda [15].

L'importanza delle nozioni qui introdotte risiede nel fatto che rappresentano la versione infinitesimale del concetto di gruppo di Lie–Poisson.

Chiariamolo con un esempio. Consideriamo il gruppo

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} | \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = 1 \right\}$$

che ha dimensione reale 3 e che può essere infatti parametrizzato come superficie di $\mathbb{R}^4$ nel modo seguente:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

nelle coordinate reali

$$x_0 = \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{2} \qquad x_1 = \frac{\alpha - \overline{\alpha}}{2}$$
$$x_2 = \frac{\beta + \overline{\beta}}{2} \qquad x_3 = \frac{\beta - \overline{\beta}}{2}$$

Allora lo spazio tangente ad $SU(2)$ nel punto $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (di coordinate reali $(1,0,0,0)$) è l'algebra di Lie

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ia & \beta \\ -\overline{\beta} & -ia \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

Scelta in $\mathfrak{su}(2)$ la base

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{i}{2} \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

cui corrisponde la base di vettori tangenti ad $SU(2)$ in I:

$$X_1 \leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_I \qquad X_2 \leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_I \qquad X_3 \leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)_I$$

scriviamo esplicitamente le costanti di struttura di $\mathfrak{su}(2)$ relative a questa base:

$$c_{12}^k = \delta_{k3} \qquad c_{13}^k = \delta_{k1} \qquad c_{23}^k = \delta_{k2}$$

che determinano il commutatore:

$$[X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}^k X_k$$

e definiamo, per $x \in SU(2)$:

$$\pi_x := dR_x(X_2 \wedge X_3) - dL_x(X_2 \wedge X_3)$$

Dimostriamo che questo tensore è un tensore di Poisson su $SU(2)$: consideriamo un intorno di I di coordinate

$$(\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}, x_1, x_2, x_3)$$

e calcoliamo in questa carta locale le componenti del tensore π valutandolo sulle forme $\{dx_1, dx_2, dx_3\}$ che formano la base dello spazio dei vettori cotangenti nell'identità:

$$\begin{aligned}
\pi_{12}(y) &= \pi_y(dx_1 \wedge dx_2) \\
&= X_2 \wedge X_3(x_1 \circ R_y \wedge x_2 \circ R_y) - X_2 \wedge X_3(x_1 \circ L_y \wedge x_2 \circ L_y) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial(x_1 \circ R_y)}{\partial x_2}\frac{\partial(x_2 \circ R_y)}{\partial x_3} - \frac{\partial(x_1 \circ R_y)}{\partial x_3}\frac{\partial(x_2 \circ R_y)}{\partial x_2} \\
&\quad - \frac{\partial(x_1 \circ L_y)}{\partial x_2}\frac{\partial(x_2 \circ L_y)}{\partial x_3} + \frac{\partial(x_1 \circ L_y)}{\partial x_3}\frac{\partial(x_2 \circ L_y)}{\partial x_2}\Big) \\
&= \frac{1}{2}(y_3 y_1 + y_2 y_0 - y_3 y_1 + y_2 y_0) = y_0 y_2
\end{aligned}$$

ove $(y_0 = \sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2}, y_1, y_2, y_3)$ sono le coordinate di y. Il valore delle funzioni $x_i \circ L_y$ e $x_i \circ R_y$ è facilmente determinato su un generico punto $x \in SU(2)$ considerando x e y come matrici, effettuando il prodotto matriciale e poi prendendo la coordinata reale x_i della matrice prodotto. In modo analogo si ottiene

$$\pi_{13}(y) = \pi_y(dx_1 \wedge dx_3) = y_0 y_3 \qquad\qquad \pi_{23}(y) = \pi_y(dx_2 \wedge dx_3) = 0$$

con il che il tensore π è totalmente determinato. Avendo a disposizione le sue componenti si verifica immediatamente, usando la condizione di Lie, che π è un tensore di Poisson. Possiamo anche constatare senza difficoltà che π verifica la condizione di 1-cociclo:

$$\begin{aligned}
\pi_{xy} &= (dR_{xy} - dL_{xy})X_2 \wedge X_3 \\
&= (dR_{xy} - d(R_y L_x) + d(L_x R_y) - dL_{xy})X_2 \wedge X_3 \\
&= (dR_y dR_x - dR_y dL_x + dL_x dR_r - dL_x dL_y)X_2 \wedge X_3 \\
&= dR_y \pi_x + dL_x \pi_y
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo dimostrato che π rende $SU(2)$ un gruppo di Lie–Poisson. Vediamo ora come questa struttura di Poisson si riverbera sull'algebra di Lie $\mathfrak{su}(2)$. Consideriamo lo spazio duale $\mathfrak{su}(2)^*$; dato che il gruppo di Lie $SU(2)$ è una varietà di Poisson sappiamo che questo spazio è un'algebra di Lie, rispetto alle parentesi:

$$[dx_i, dx_j] = d\{x_i, x_j\} = \left(\frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_1}\right)_I dx_1 + \left(\frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_2}\right)_I dx_2 + \left(\frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_3}\right)_I dx_3$$

Allora le costanti di struttura dell'algebra di Lie $\mathfrak{su}(2)^*$ sono le

$$f_k^{ij} := \left(\frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_k}\right)_I$$

A conti fatti si ottengono i valori

$$f_k^{12} = \delta_{k2} \qquad\qquad f_k^{13} = \delta_{k3} \qquad\qquad f_k^{23} = 0$$

Utilizzando quindi la (2) del teorema di Drinfeld–Manin è immediato verificare che $\mathfrak{su}(2)$ è una bialgebra di Lie, e precisamente, tramite la corrispondenza seguente fra gli elementi della sua base associata alle coordinate $\{x_i\}$:

$$dx_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad dx_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad dx_3 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

troviamo che $\mathfrak{su}(2)^* \cong \mathfrak{sb}(2, \mathbb{C})$ cioè è l'algebra delle matrici triangolari superiori complesse a traccia nulla e con elementi diagonali reali. Il cociclo δ che rende $(\mathfrak{su}(2), \delta)$ una bialgebra di Lie è semplicemente il duale della parentesi di Lie su $\mathfrak{su}(2)^*$ ovvero della derivata del cociclo π definito sul gruppo di Lie $SU(2)$.

La costruzione effettuata nell'esempio precedente ci mostra che l'algebra di Lie del gruppo di Lie–Poisson $SU(2)$ è una bialgebra di Lie: la struttura di algebra di Lie su $\mathfrak{su}(2)^*$ proviene dalle parentesi di Poisson, mentre il cociclo δ (o meglio il fatto che sia un cociclo) viene dal fatto che il pull-back nell'identità di π è un cociclo sul gruppo.

Questo risultato vale in generale ed anzi si può invertire. Per formularlo osserviamo preliminarmente che i gruppi di Lie–Poisson formano in modo ovvio una categoria $\mathcal{GP}$ rispetto agli omomorfismi di gruppi di Lie che siano anche mappe di Poisson, e cioè che preservino le parentesi di Poisson del gruppo.

Anche le bialgebre di Lie formano una categoria $\mathcal{BGL}$, le cui mappe sono le coppie di morfismi di algebre di Lie: se $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ sono bialgebre di Lie, allora un morfismo fra esse è un morfismo di algebre di Lie $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ tale che il suo duale $\varphi^* : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{g}^*$ sia un morfismo fra le algebre di Lie $\mathfrak{h}^*$ e $\mathfrak{g}^*$.

Osserviamo infine che ha senso la nozione di gruppo di Lie–Poisson locale, visto che il tensore di Poisson, che è l'unico oggetto geometrico coinvolto nella definizione, è definito e caratterizzato localmente: è a questo punto inutile avvertire che anche i gruppi di Lie–Poisson locali formano una categoria $\mathcal{GP}_{loc}$ e che c'è un ovvio funtore

$$\mathcal{LOC} : \mathcal{GP} \to \mathcal{GP}_{loc}$$

che porta un gruppo di Lie–Poisson in un suo intorno dell'identità (o più precisamente nel germe di gruppi locali definito intorno all'identità del gruppo di Lie–Poisson di partenza).

Enunciamo quindi il seguente e fondamentale

Teorema (Drinfeld) 4.5 *Se $\mathcal{GP}_0$ è la categoria dei gruppi di Lie–Poisson connessi e semplicemente connessi, allora*

(1) *Esiste un funtore $\mathcal{LP} : \mathcal{GP} \to \mathcal{BGL}$.*

(2) *I funtori*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{GP}_0 \arrow[rr, "\mathcal{LP}"] \arrow[dr, "\mathcal{LOC}"'] & & \mathcal{BGL} \\ & \mathcal{GP}_{loc} \arrow[ur, "\mathcal{LP}"'] & \end{tikzcd}$$

effettuano un'equivalenza di categorie.

Questo notevolissimo risultato (per una dimostrazione si veda [**?**] oppure [15]) formula l'analogo della teoria di Lie per i gruppi di Lie–Poisson: consente cioè di integrare sempre una bialgebra di Lie ad un gruppo di Lie–Poisson connesso, ed ad un'unico gruppo di Lie–Poisson connesso e semplicemente connesso. Questo riduce in un certo senso il problema di studiare e classificare i gruppi di Lie–Poisson a quello di studiare e classificare le bialgebre di Lie.

Lo studio delle bialgebre di Lie è ricco di per sé: infatti esiste un profondo legame, almeno nel caso delle algebre semisemplici, fra le bialgebre di Lie e le soluzioni della cosiddetta equazione di Yang–Baxter. Non possiamo qui addentrarci in questo argomento così intricato seppure interessante e denso di spunti. Limitiamoci ad osservare che il tensore π che abbiamo definito su $SU(2)$ è una r-matrice classica, cioè una soluzione dell'equazione di Yang–Baxter, e che tutti i tensori di Poisson che rendono $SU(2)$ un gruppo di Lie–Poisson sono analoghi ad esso, perché, si dimostra, devono essere soluzioni di un'equazione di Yang–Baxter.

Per cercare di gettare qualche lume su quanto detto proveremo a dare qualche nozione della teoria delle equazioni di Yang–Baxter. Queste equazioni furono introdotte in Meccanica Statistica, ma qui formuleremo la loro definizione in termini puramente algebrici, perché l'interesse che hanno queste equazioni è essenzialmente algebrico.

Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie dotata di un prodotto scalare () invariante e non degenere (ad esempio, è il caso più naturale, possiamo considerare un'algebra di Lie semisemplice con la sua forma di Killing) e sia R un operatore lineare sullo spazio vettoriale $\mathfrak{g}$ antisimmetrico rispetto al dato prodotto scalare:

$$(RX, Y) + (X, RY) = 0$$

Allora è definita la mappa bilineare

$$\begin{aligned} [\,]_R : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} &\to \mathfrak{g} \\ X \otimes Y &\mapsto [RX, Y] + [X, RY] \end{aligned}$$

che è antisimmetrica (lo è R e lo sono le parentesi di Lie su $\mathfrak{g}$).

Definizione 4.6 *Un operatore lineare antisimmetrico R su $\mathfrak{g}$ si dice una* r-matrice (classica) *se la mappa bilineare antisimmetrica $[\,]_R$ associata definisce su $\mathfrak{g}$ una struttura di algebra di Lie (i.e. se verifica l'identità di Jacobi).*

Perché, almeno dal nostro punto di vista, le r-matrici sono interessanti? Il motivo principale risiede nel seguente

Teorema (Belavin–Drinfeld–Semenov-Tijan-Šanskij) 4.7 *Se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie dotata di prodotto scalare invariante e non degenere, e se R è una r-matrice classica su $\mathfrak{g}$ allora $\mathfrak{g}$ è una bialgebra di Lie.*

Per la dimostrazione si veda [14].

Quindi le r-matrici classiche inducono strutture di gruppo di Lie–Poisson sui gruppi che integrano l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$.

Scrivendo l'identità di Jacobi per le parentesi $[\ ]_R$ indotte da un operatore lineare R su $\mathfrak{g}$, è possibile (dopo lunghi calcoli) caratterizzarla (in termini delle parentesi di Lie di partenza definite su $\mathfrak{g}$) nel modo seguente:

$$[[X,Y]_R,Z]_R + c.p.(X,Y,Z) = [R[X,Y]_R - [RX,RY],Z] + c.p.(X,Y,Z)$$

Cioè, definendo

$$B_R(X,Y) := R[X,Y]_R - [RX,RY]$$

otteniamo che $[\ ]_R$ sono parentesi di Lie, i.e. che R è una r-matrice classica, se e solo se

$$[B_R(X,Y),Z] + c.p.(X,Y,Z) = 0$$

Osserviamo che l'operatore B_R misura quanto R non sia un morfismo di algebre di Lie; una ipotesi che sembra naturale è che effettivamente R sia un morfismo di algebre di Lie, cioè che

$$B_R(X,Y) = 0$$

per ogni X e Y in $\mathfrak{g}$. Questa è l'*equazione di Yang–Baxter classica.*

Ovviamente se questa equazione è soddisfatta allora R è una r-matrice, ma può non essere vero il viceversa: ad esempio, la condizione di r-matrice che abbiamo più sopra scritto in termini di B_R è soddisfatta anche se

$$B_R(X,Y) := \alpha[X,Y]$$

ove $\alpha \in \mathbb{R}$. In questo caso infatti l'identità di Jacobi per $[\ ]$ diviene un multiplo dell'identit̀di Jacobi per $[\ ]_R$.

Quest'ultima equazione si chiama *equazione di Yang–Baxter modificata.*

Esiste anche un'altra equazione di Yang–Baxter, quella generalizzata, che fornisce una classe ancor più amplia di r-matrici classiche.

Per concludere questi cenni alle r-matrici, menzioniamo il fatto, scoperto da Gelfand e Dorfman, che le r-matrici classiche corrispondono in qualche modo agli operatori hamiltoniani sulle algebre di Poisson, e che le equazioni di Yang–Baxter corrispondono in parte alla condizione

$$[\mathcal{H},\mathcal{H}]_s = 0$$

che caratterizza gli operatori hamiltoniani sulle algebre (la formulazione di Gelfand e Dorfman non è sulle algebre ma in un contesto diverso: cfr. [6]).

Questo dovrebbe far riflettere sul forte legame esistente fra r-matrici classiche e strutture di Poisson sui gruppi.

Osserviamo che se $(\mathfrak{g}, \delta)$ è una bialgebra di Lie, allora anche $(\mathfrak{g}^*, \vartheta)$ lo è, ove ϑ è la mappa duale alle parentesi di Lie di $\mathfrak{g}$, e che la duale della duale di una bialgebra di Lie è la bialgebra di partenza.

Il fatto che $(\mathfrak{g}, \delta)^*$ sia a sua volta una bialgebra di Lie, implica che il gruppo connesso e semplicemente connesso G^* che la integra secondo il teorema di Drinfeld è un gruppo di Lie–Poisson. Quindi, dato un gruppo di Lie–Poisson, è sempre definito il suo gruppo duale G^*, ed il duale del duale è il rivestimento universale del gruppo di partenza G.

Un esempio banalissimo, ma non proprio insignificante, lo abbiamo considerando un gruppo di Lie–Poisson nullo, cioè un gruppo di Lie G il cui tensore di Poisson sia identicamente zero. Questo è, in modo assolutamente banale, un gruppo di Lie–Poisson; il cociclo che definisce la sua bialgebra di Lie è nullo, cosicchè la struttura di algebra di Lie su $\mathfrak{g}^*$ è data dalle parentesi di Lie identicamente nulle: si tratta semplicemente di uno spazio vettoriale. Ma se consideriamo la bialgebra duale di $\mathfrak{g}$, $(\mathfrak{g}^*, \vartheta)$, sappiamo che il cociclo che la definisce non è banale, bensì è il duale delle parentesi di Poisson su $\mathfrak{g}$, cioè è dato dall'azione coaggiunta. Ora, se consideriamo il gruppo di Lie–Poisson G^* duale di G, questo sarà il gruppo connesso semplicemente connesso che integra un'algebra di Lie abeliana, cioè uno spazio vettoriale: sarà quindi lo spazio $\mathfrak{g}^*$ stesso. Ma il cociclo della bialgebra $(\mathfrak{g}^*, \vartheta)$ non è banale, è dato dall'azione coaggiunta, ed induce quindi sul gruppo di Lie abeliano $\mathfrak{g}^*$ (gruppo additivo dello spazio vettoriale $\mathfrak{g}^*$) la struttura di Lie–Poisson.

Ne concludiamo che il duale di un gruppo di Lie con il tensore nullo è il gruppo di Lie abeliano delle orbite coaggiunte dell'algebra di Lie del gruppo di partenza. Ecco un ulteriore modo in cui vedere l'esempio della struttura di Lie–Poisson.

Un esempio fondamentale di bialgebra di Lie, che ha trovato larghe applicazioni in Fisica Matematica, si ha considerando una generalizzazione dell'esempio di $SU(2)$ che abbiamo precedentemente esaminato in dettaglio.

In quel caso avevamo scoperto che il gruppo compatto semisemplice $SU(2)$ era un gruppo di Lie–Poisson e che il suo gruppo duale era $SB(2, \mathbb{C})$, il gruppo risolubile delle matrici triangolari superiori a determinante 1 ed elementi diagonali reali. Dato che l'algebra di Lie $\mathfrak{su}(2)$ è una bialgebra, sappiamo che corrisponde in modo unico ad una tripla di Manin $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ ove $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$. Da questo segue che $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{sb}(2, \mathbb{C})$ è un'algebra di Lie, ed una verifica permette di constatare che la somma diretta è $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, e questa algebra si integra al gruppo $SL(2,\mathbb{C}) = SU(2)SB(2,\mathbb{C})$ (decomposizione di Gram–Schmidt delle matrici speciali).

Questo esempio può generalizzarsi al caso del gruppo speciale unitario di dimensione qualsiasi, ma Lu e Weinstein hanno dimostrato che può in realtà generalizzarsi a qualsiasi gruppo di Lie compatto. La loro idea consiste nel considerare la decomposizione di Iwasawa di un gruppo complesso G in una sua parte compatta ed in una sua parte risolubile:

$$G = K \cdot A \cdot N = K \cdot B$$

ove $B = A \cdot N$ è risolubile essendo A abeliano e N nilpotente. Nel caso precedente si aveva $G = SL(2,\mathbb{C})$, $K = SU(2)$ e $B = SB(2,\mathbb{C})$.

Quello che Lu e Weinstein hanno dimostrato è che ogni gruppo compatto K ha una struttura di gruppo di Lie–Poisson data da una r-matrice classica; allora la decomposizione di Iwasawa di un gruppo complesso che abbia il gruppo compatto di partenza come fattore K fornisce il gruppo di Lie–Poisson B duale di K, e la tripla di Manin di algebre di Lie $(\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{b}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$. Inoltre si dimostra che in questo modo si ottengono tutte e sole le strutture di gruppo di Lie–Poisson su un gruppo compatto (cfr. [13]).

Una generalizzazione del risultato di Lu e Weinstein è stata data da Lui e Qian, che hanno considerato l'analogia fra le r-matrici classiche e le strutture quasicomplesse, nel modo seguente.

Intanto ricordiamo che se G è un gruppo di Lie reale e connesso, la cui algebra di Lie sia $\mathfrak{g}$, e se H è un sottogruppo chiuso di G, la cui algebra sia $\mathfrak{h}$, supponendo che $\mathfrak{g}$ si decomponga come

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m} \qquad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$$

(i.e. che G/H sia uno spazio omogeneo riduttivo) allora vale il

Teorema (Koszul) 4.8 *G/H possiede una struttura complessa G-invariante se e solo se esiste un operatore $J \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ (endomorfismo di spazi vettoriali) tale che*

(1) $J|_h = 0$ *e* $J^2|_m = -I$.

(2) $\forall X \in \mathfrak{h} \qquad ad_X J = J ad_X$.

(3) $\forall X, Y, \in \mathfrak{g} \qquad [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] = [X, Y] \ mod\ \mathfrak{m}$.

(cfr. [9]).

La condizione (3) è sostanzialmente l'equazione di Yang–Baxter modificata (con $\alpha = 1$) che abbiamo precedentemente discusso: allora l'idea di

Lui e Qian è di scegliere le algebre $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ in modo che la (3) divenga esattamente l'equazione di Yang–Baxter modificata modulo $\mathfrak{h}$, e di utilizzare il precedente teorema per studiare le bialgebre associate alle r-matrici classiche che risolvono questa equazione.

La chiave di volta del ragionamento è il seguente

Teorema (Wang) 4.9 *Se G è un gruppo di Lie reale e connesso, H è un suo sottogruppo chiuso, se l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di G è semisemplice e compatta e l'algebra di Lie $\mathfrak{h}$ di H è la sottoalgebra di cartan di $\mathfrak{g}$ allora G/H è una varietà kähleriana omogenea.*

(cfr. [9]).

Utilizzando questo teorema in [12] si dimostra il

Teorema (Lui–Qian) 4.10 *Se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie semisemplice compatta con sottoalgebra di Cartan $\mathfrak{h}$ allora l'operatore J che rende G/H una varietà kähleriana omogenea è una r-matrice classica che soddisfa l'equazione di Yang–Baxter modificata*

$$J[X,Y]_J - [JX,JY] = -[X,Y]$$

Come corollario si ottiene che ogni gruppo di Lie semisemplice compatto è un gruppo di Lie–Poisson, cioè il risultato che Lu e Weinstein ottengono considerando la decomposizione di Iwasawa: il rapporto fra i due approcci sta nel fatto che la decomposizione di Iwasawa la si fa per un gruppo semisemplice complesso, ed il gruppo di Lie–Poisson ed il suo duale sono i suoi fattori di Iwasawa, mentre nella dimostrazione di Lui e Qian, il gruppo compatto sul quale c'è la struttura di Lie–Poisson è la forma reale e compatta del gruppo semisemplice complesso.

Il vantaggio dell'utilizzo di forme reali e compatte si ha nella possibilità di generalizzare la costruzione al caso di algebre semisemplici non necessariamente compatte: vale cioè il seguente

Teorema (Lui-Qian) 4.11 *Ogni algebra di Lie semisemplice (anche non compatta) $\mathfrak{g}_\vartheta$ con sottoalgebra di Cartan compatta è una bialgebra di Lie, e se $\mathfrak{g}$ è la forma reale compatta corrispondente allora l'algebra duale di $\mathfrak{g}_\vartheta$ che definisce la tripla di Manin associata è la stessa $\mathfrak{g}$.*

(cfr. [12]).

Il vantaggio dell'approccio di Lu e Weinstein sta invece nell'associare alla decomposizione di Bruhat del gruppo G un significato nel contesto della teoria di Poisson: infatti si può dimostrare che, analogamente a quanto avviene nel caso delle orbite coaggiunte, esiste una azione di G^* su G, la cosiddetta *azione dressing*, e quello che Lu e Weinstein dimostrano coi loro metodi è che le orbite di questa azione sono le celle della decomposizione di Bruhat del gruppo GG^* semisemplice complesso rispetto a certi sottogruppi parabolici ottenuti dalla decomposizione di Iwasawa (cfr. [13]).

Consideriamo ad esempio il caso di $K = SU(2)$: allora abbiamo $K^* = SB(2,\mathbb{C})$ ed il gruppo semisemplice complesso che dà luogo alla tripla di Manin è $G = SL(2,\mathbb{C})$. La decomposizione di Iwasawa infatti è

$$G = K\ A\ N$$

ove $AN = B = SB(2,\mathbb{C})$. Su $SU(2)$ come varietà di Poisson (ricordiamo che si tratta della 3-sfera) ci sono solo due tipi di foglie simplettiche (a meno di diffeomorfismi) rispetto alla struttura di Poisson indotta dalla r-matrice classica che abbiamo considerato, cioè rispetto al tensore

$$\pi_x = (dR_{-}dL_x)(X_2 \wedge X_3)$$

Queste foglie possono essere i singoli punti (come ad esempio l'identità $\{e\}$) e le 2-sfere. Il modo nel quale queste foglie sono disposte su $SU(2)$ si trova considerando la fibrazione di Hopf

$$\tau : SU(2) \to S^2$$

con fibra S^1 che è una mappa di Poisson[1] e la decomposizione globale in foglie simplettiche consta di un cerchio che è la controimmagine del polo nord di S^2 ed è costituito dai punti che formano le foglie singolari, e consiste di “pagine” che sono mappate simplettomorficamente via τ in $S^2 \setminus \{\text{polo nord}\}$: ogni tale “pagina” si ottiene scegliendo un punto (il suo “numero di pagina”) del cerchio $\tau^{-1}(\{\text{polo sud}\})$ e sollevando orizzontalmente (i.e. perpendicolarmente alle fibra di τ) le geodetiche di S^2 che passano per i poli nord e sud (cioè i meridiani): la decomposizione così ottenuta è proprio la decomposizione di Bruhat (cfr. [13]).

Se consideriamo ancora una volta la decomposizione di Iwasawa $G = KB$ e se ricordiamo che in questa decomposizione B si identifica *come varietà differenziabile* allo spazio vettoriale $\mathfrak{b}$ tramite la mappa esponenziale, abbiamo che il tensore π^B di Poisson indotto su B (dato che B è il duale di K è un gruppo di Lie–Poisson) si può pensare definito su $\mathfrak{b}$, che è come spazio vettoriale il duale di $\mathfrak{k}$. Ma su $\mathfrak{b} = \mathfrak{k}^*$ esiste anche la struttura di Lie–Poisson con

[1] Infatti si può dimostrare che se H è un sottogruppo chiuso di un gruppo di Lie–Poisson G allora G/H è una varietà di Poisson e la proiezione $G \to G/H$ è una mappa di Poisson.

tensore di Poisson π^{LP} indotta dall'algebra di Lie $\mathfrak{k}$ e le cui foglie simplettiche coincidono con le foglie della struttura di Poisson di gruppo di Lie–Poisson duale, dato che in entrambi i casi si tratta di orbite coaggiunte dell'algebra di Lie $\mathfrak{k}$.

Dato che sia π^B che π^{LP} sono nulli nell'identità $0 \in \mathfrak{b}$ abbiamo che π^{LP} è l'approssimazione lineare di π^B in 0. Ma, essendo l'algebra di Lie di partenza semisemplice e compatta, i risultati di Conn citati nel capitolo precedente ci consentono di concludere che queste due strutture di Poisson sono isomorfe nell'intorno di 0.

Vale in realtà il seguente risultato molto più forte:

Teorema (Ginzburg–Weinstein) 4.12 *Le varietà di Poisson $B = K^*$ e $\mathfrak{b} = \mathfrak{k}^*$ (orbite coaggiunte) sono isomorfe.*

La dimostrazione di questo teorema è estremamente interessante, dato che coinvolge la teoria di Hodge, la coomologia dfelle algebre di Lie e la teoria di Atiyah–Bott che collega la coomologia equivariante alla teoria della momentum map: può enuclearsi dai lavori [7], [12] e [13].

Le costruzioni alle quali si è accennato coinvolgono gruppi semisemplici, ma essenzialmente traggono la loro origine nel fatto che le soluzioni delle equazioni di Yang–Baxter (cioè le r-matrici classiche) parametrizzano tutte le strutture di bialgebra di Lie su un'algebra semisemplice.

Naturalmente, la costruzione di Lu e Weinstein fornisce uno schema per trattare i gruppi classici, ma dal punto di vista delle algebre di Lie corrisponde ad idee ancor più generali: infatti le soluzioni dell'equazione di Yang–Baxter possono in generale considerarsi su un'algebra di Kac–Moody. Contentiamoci di vedere in che modo un'algebra di Kac–Moody diviene unan bialgebra di Lie.

Se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Kac–Moody con fissato prodotto scalare invariante $\langle\rangle$, $\mathfrak{h}$ è la sottoalgebra di Cartan e $\mathfrak{b}_\pm$ le sottoalgebre di Borel (quindi $\mathfrak{g} = \mathfrak{b}_+ + \mathfrak{b}_-$ e $\mathfrak{b}_+ \cap \mathfrak{b}_- = \mathfrak{h}$) allora, posto

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}\#\mathfrak{g} &:= \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}_+ &:= \{X \oplus Y \in \mathfrak{g}\#\mathfrak{g} |\ X = Y\} \cong \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}_- &:= \{X \oplus Y \in \mathfrak{b}_+ \oplus \mathfrak{b}_- |\ X|_h = -Y|_h\} \end{aligned}$$

e definendo su $\mathfrak{g}\#\mathfrak{g}$ il prodotto scalare

$$(X_1 \oplus Y_1, X_2 \oplus Y_2) := \langle X_1|X_2\rangle - \langle Y_1|Y_2\rangle$$

allora $(\mathfrak{g}\#\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-)$ è una tripla di Manin e quindi $\mathfrak{g}_+ \cong \mathfrak{g}$ ha una struttura di Bialgebra di Lie (infatti la corrispondenza fra triple di Manin e bialgebre di Lie, nel verso che abbiamo considerato, vale anche nel caso di dimensione infinita).

Possiamo descrivere esplicitamente l'1-cociclo $\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ in termini di generatori canonici (nella usuale notazione, ad esempio quella del libro di Kac *Infinite dimensional Lie Algebras*): se E_i, F_i, α_i^* sono i generatori di $\mathfrak{g}$ (ove $E_i,\ F_i \in [\mathfrak{b}_\pm, \mathfrak{b}_\pm]$ ed α_i^* è l'immagine della radice semplice $\alpha_i \in \mathfrak{h}^*$ tramite l'isomorfismo $\mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}$) allora

$$\delta(\alpha_i^*) = 0 \qquad \delta(E_i) = \frac{1}{2} E_i \wedge \alpha_i^* \qquad \delta(F_i) = \frac{1}{2} F_i \wedge \alpha_i^*$$

Questa classe di esempi di bialgebre di Lie ha notevoli applicazioni in fisica, e fornisce possibili esempi di gruppi di Lie–Poisson di dimensione infinita (ad esempio le r-matrici classiche sull'algebra di Virasoro inducono strutture di Poisson sul gruppo dei diffeomorfismi della circonferenza).

Concludiamo questa panoramica osservando che, nel 1994 è stato dimostrato che ogni gruppo di Lie è in modo non banale un gruppo di Lie–Poisson, utilizzando la decomposizione di Levi ed i risultati sui gruppi semisemplici e risolubili.

Tuttavia le strutture di Poisson sui gruppi di Lie che hanno interesse sostanziale sembrano essere essenzialmente le orbite coaggiunte delle algebre di Lie e le strutture associate alle equazioni di Yang–Baxter: ad esempio, il caso abeliano non presenta grande interesse al di là delle strutture di Lie–Poisson. Infatti, considerando un esempio di gruppo di Lie abeliano che non sia uno spazio vettoriale, come il toro ad n dimensioni T^n ci rendiamo conto che non possono esistere su di esso strutture di gruppo di Lie–Poisson non banali: infatti se esistessero, allora sarebbero quozienti di strutture di Poisson lineari, cioè di strutture di Lie–Poisson, ma, le componenti del tensore di Poisson di una struttura di Lie–Poisson sono della forma

$$\pi_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \sum_k c_{ij}^k x_k$$

e quindi, se fossero periodiche di periodo t avremmo

$$\pi_{ij}(x_1 + t, \dots, x_n + t) = \pi_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

i.e.

$$\sum_k c_{ij}^k x_k = \sum_k c_{ij}^k x_k + \sum_k c_{ij}^k t$$

da cui $t = 0$. Quindi il tensore di Poisson non può essere definito da funzioni periodiche, il che implica che la struttura di gruppo di Lie–Poisson non passa al quoziente su T^n.

L'interesse sostanziale di questi gruppi resta quindi legato al caso semisemplice, che è poi quello di maggior rilevanza applicativa.

Bibliografia

[1] K.H. Bhaskara, K. Viswanath, *Poisson Algebras and Poisson Manifolds,* Pitman Res. Notes in Math. **174**, Longman Sci., Harlow–New York, 1988.

[2] J. Conn, *Normal Forms for Analytic Poisson Structures*, Ann. of Math. **119** (1984) 577-601.

[3] C. Chevalley, S. Eilenberg, *Cohomology theory of Lie Groups and Lie Algebras*, Trans. A.M.S. **63** (1948) 85–124.

[4] V.G. Drinfeld, *Hamiltonian Structures on Lie Groups, Lie Bialgebras and the Geometrical Meaning of the Classical Yang–Baxter Equations*, Soviet. Math. Dokl. **27** (1983) 68–71.

[5] V.G. Drinfeld *Quantum Groups*, Proc. I.C.M. Berkeley **1** (1986) 789–820.

[6] I.Ia. Dorfman, I.M. Gelfand *Hamiltonian Operators and the Classical Yang–Baxter Equation*, Funct. Anal. Appl. **16** (1983) 241–248.

[7] V. Ginzburg, A. Weinstein *Lie–Poisson structures on some Poisson Lie Groups*, Journ. A.M.S. **5** (1992) 445–453.

[8] M.V. Karasev, V.P. Maslov *Non linear Poisson Brackets. Geometry and Quantization*, Transl. of Math. Monogr. **119**, A.M.S., Providence, 1993.

[9] S. Kobayashi, K. Nomizu *Foundations of Differential Geometry*, Vol.II, Wiley, New York, 1969.

[10] L.S. Krasilščik, A.M. Vinogradov *What is the Hamiltonian Formalism?* Russian Math. Surveys **30** (1975) 177–202.

[11] A. Lichnerowicz, *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*, J. Diff. Geom. **12** (1977) 253–300.

[12] Z.J. Liu, M. Qian, *Generalized Yang–Baxter Equations, Koszul Operators and Poisson Lie Groups*, J. Diff. Geom. **35** (1992) 399-414.

[13] J.H. Lu, A. Weinstein, *Poisson Lie Groups, Dressing Transformations and Bruhat Decomposition*, J. Diff. Geom. **31** (1990) 501–526.

[14] M.A. Semenov-Tijan-Šanskij, *What is the Classical r-matrix?* Funct. Anal. Appl. **17** (1983) 259–272.

[15] I. Vaisman, *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds*, Progr. in Math. **118**, Birkhäuser, Basel–Berlin–Boston, 1994.

[16] A. Weinstein, *The local structure of Poisson Manifolds*, J. Diff. Geom. **18** (1983) 523–557.

This work is licensed under a *Creative Commons Attribution-Non Commercial 3.0 Unported License.*