Capitolo 8

SPAZI VETTORIALI TOPOLOGICI

Gli spazi di Hilbert e Banach hanno come esempi principali gli spazi di funzioni sommabili e gli spazi di funzioni continue: tuttavia esiste un'altra classe di spazi vettoriali molto importanti in Analisi, gli spazi di funzioni differenziabili, per i quali non è possibile trovare una struttura hilbertiana o di Banach. Per ovviare a questo inconveniente di solito si considerano sottospazi di questi spazi che siano di Hilbert, ad esempio nella teoria delle equazioni a derivate parziali si considerano gli spazi di Sobolev. Tuttavia è possibile dare una teoria per spazi vettoriali topologici non di Banach, i cui esempi sono gli spazi delle funzioni differenziabili: la teoria della dualità di questi spazi conduce al concetto di distribuzione, che generalizza quello di funzione e di misura.

8.1 Topologie e seminorme

Gli spazi di Hilbert e, più in generale, gli spazi normati, sono al tempo stesso spazi vettoriali e spazi topologici, e la loro struttura vettoriale è compatibile con quella topologica, nel senso che le funzioni di somma fra vettori e moltiplicazione per uno scalare sono continue; questo suggerisce la seguente definizione:

8.1.1 Definizione *Se X è uno spazio vettoriale sul campo fissato*[1] $\mathbb{K}$ *e $\mathcal{T}$ una topologia sull'insieme X, la coppia $(X, \mathcal{T})$ si dice uno* spazio vettoriale topologico *se le applicazioni di addizione e prodotto per uno scalare sono continue.*

Una base $\mathcal{U}_0$ di intorni dell'elemento zero $0 \in X$ gode delle proprietà seguenti

- $\mathcal{U}_0$ determina la topologia di X: infatti se $x_0 \in X$, la continuità della somma implica immediatamente che $\{x_0 + U | U \in \mathcal{U}_0\}$ è una base di intorni di x_0, ovvero, la traslazione per un certo vettore di un intorno dello zero fornisce un intorno del vettore dato.

[1] Per noi il campo $\mathbb{K}$ sarà sempre $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$.

- Ogni intorno dello zero $U \in \mathcal{U}_0$ è un *insieme assorbente*, il che significa che

$$\forall x \in X \ \exists k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad kx \in U$$

il che segue immediatamente dalla continuità del prodotto per uno scalare.

è ovvio che possiamo scegliere una base $\mathcal{U}_0$ di intorni dello zero di X tale che ogni suo elemento sia un *insieme equilibrato*, vale a dire tale che

$$\forall U \in \mathcal{U}_0 \ \forall k \in \mathbb{R} \quad |k| \leq 1 \Rightarrow kU \subset U$$

8.1.2 Definizione *Uno spazio vettoriale topologico di dice* localmente convesso *se esiste una base* $\mathcal{U}_0$ *di intorni dello zero* convessi*, cioè tali che*

$$\forall U \in \mathcal{U}_0 \ \forall x, y \in X \ \forall a, b \in \mathbb{R}_+ \quad a + b = 1 \Rightarrow ax + by \in U$$

Una conseguenza immediata di questa definizione è che in uno spazio localmente convesso esiste sempre una base di intorni dello zero convessi ed equilibrati.

Finora gli unici esempi che conosciamo di spazi vettoriali topologici sono gli spazi normati, nei quali la topologia è indotta da una metrica; vedremo fra breve tuttavia degli esempi di spazi vettoriali topologici non normati: gli spazi delle funzioni differenziabili.

In generale, se $F(S)$ è un insieme di funzioni da un insieme qualsiasi S in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ munito di somma e prodotto per scalari definiti punto per punto, la stessa base di intorni rende $F(S)$ uno spazio localmente convesso.

In generale uno spazio vettoriale topologico non è di Hausdorff (lo sono certamente gli spazi normati, perché metrizzabili):

8.1.3 Proposizione *In ogni spazio vettoriale topologico X esiste un sottospazio X_0 tale che*

- *Ogni intorno non vuoto di un punto $x \in X$ contiene l'insieme $x + X_0$.*
- *Lo spazio quoziente X/X_0 (con la topologia quoziente[2] è di Hausdorff.*

Dimostrazione: Definiamo

$$X_0 := \bigcap_{U \in \mathcal{U}_0} U$$

come intersezione degli intorni (non vuoti!) dello zero; allora X_0 è ovviamente (per continuità delle operazioni di somma e prodotto) un sottospazio di X che verifica la (1).

[2]Che ovviamente lo rende uno spazio vettoriale topologico.

Se $x, y \in X/X_0$ deve esistere un intorno $U \subset X/X_0$ dello zero che non contenga $x - y$ e, per continuità della somma, deve quindi esistere un intorno $V \subset X/X_0$ dello zero tale che $V - V \subset U$: allora $x + V$ e $y + V$ sono intorni disgiunti che contengono x e y.

QED

Se la topologia di uno spazio vettoriale topologico è indotta da una distanza $d(x, y)$, allora possiamo definire la funzione $q : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ come

$$q(x) := d(0, x)$$

osserviamo che in questa situazione lo spazio è certamente separabile (si sfrutta la densità di $\mathbb{Q}_+$ in $\mathbb{R}_+$).

Un'altra osservazione immediata è che se la funzione q determina la metrica, cioè se vale la

$$\forall x, y \in X \quad d(x, y) = q(x - y)$$

allora la funzione q è simmetrica, subadditiva e non degenere, cioè verifica le relazioni

$$(Q) \qquad q(x) = q(-x) \qquad q(x + y) \leq q(x) + q(y) \qquad q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Viceversa, se X è uno spazio vettoriale topologico metrizzabile e $q : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione soddisfacente alle relazioni (Q) e tale che $d(x, y) = q(x-y)$ per una distanza che induca la topologia di X allora q si dice *quasinorma compatibile* per X.

8.1.4 Definizione *Uno spazio vettoriale topologico localmente convesso, metrizzabile e completo si dice* spazio di Fréchet.

L'esempio principale è quello degli spazi di funzioni differenziabili; le topologie che vi introdurremo sono definite in termini di seminorme.

Osserviamo che la definizione di seminorma, di funzionale di Minkowski ed il teorema di Hahn–Banach che abbiamo discusso nel capitolo precedente valgono per ogni spazio vettoriale reale (o complesso), quindi possiamo darle per uno spazio vettoriale topologico.

Se $\mathcal{S}$ è una famiglia di seminorme in uno spazio vettoriale X, possiamo considerare la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ generata dalla sottobase di aperti

$$U_{p,\varepsilon}(x) := \{y \in X \mid p(x - y) < \varepsilon\}$$

al variare di $x \in X$, $p \in \mathcal{S}$ e $\varepsilon > 0$. Si dice che $\mathcal{S}$ è una sl sottobase di seminorme per X.

Osserviamo che

8.1.5 Proposizione *La topologia $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ su X è di Hausdorff se e solo se*

$$\forall x \in X \ \forall p \in \mathcal{S} \quad p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

8.1.6 Definizione *Se X è uno spazio vettoriale topologico la cui topologia coincida con $\mathcal{T}(\mathcal{S})$, l'insieme $\mathcal{S}$ si dice* base di seminorme *per X se*

- *Per ogni $p \in \mathcal{S}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$: $\lambda p \in \mathcal{S}$.*
- *Per ogni $p_1, p_2 \in \mathcal{S}$ esiste $p \in \mathcal{S}$ tale che*

$$\forall x \in X \quad p_1(x) \leq p(x) \text{ e } p_2(x) \leq p(x)$$

8.1.7 Teorema *X è uno spazio vettoriale localmente convesso se e solo se è uno spazio vettoriale topologico la cui topologia sia definita da una base di seminorme ed è di Hausdorff. Se $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ sono basi di seminorme per le topologie $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ su X allora la topologia $\mathcal{T}'$ è più fine di $\mathcal{T}$ se e solo se ogni seminorma di $\mathcal{S}$ è maggiorata da qualche seminorma di $\mathcal{S}'$.*

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo intanto che se $\mathcal{S}_0$ è una famiglia di seminorme l'insieme dei multipli positivi delle somme *finite* di elementi di $\mathcal{S}_0$ è una base di seminorme per $\mathcal{T}(\mathcal{S}_0)$. ora sia $\mathcal{S}$ una base di seminorme; una base di intorni dello $0 \in X$ è data dagli aperti

$$\mathcal{U}_{\mathcal{S}}(0) := \{B_p\}_{p \in \mathcal{S}}$$

ove $B_p := \{x \in X \mid p(x) < 1\}$. Ovviamente si tratta di una base di intorni, e, per ogni $x, x_0 \in X$, $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathcal{S}$:

$$p(\lambda x - \lambda_0 x_0) \leq |\lambda| p(x - x_0) + |\lambda - \lambda_0| p(x_0)$$

il che prova che la topologia definita da $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}(0)$ rende X uno spazio vettoriale topologico, localmente convesso perché le p sono seminorme.

Viceversa, se X è localmente convesso e $\mathcal{U}(0)$ è una base invariante per omotetie di intorni dello 0 convessi ed equilibrati, i funzionali di Minkowski

$$\mathcal{S} := \{p_B\}_{B \in \mathcal{U}(0)}$$

sono ovviamente una base di seminorme per la topologia di X perché gli elementi di $\mathcal{U}(0)$ sono aperti e $x \in B \iff p_B(x) < 1$.

Dimostriamo la seconda parte del teorema: che la condizione sia sufficiente è ovvio. Ma $\mathcal{T}$ è meno fine di $\mathcal{T}'$ se e solo per ogni intorno convesso equilibrato dello zero $U \in \mathcal{T}$ contiene un intorno convesso equilibrato dello zero $U' \in \mathcal{T}'$, sicché

$$p_{U'}(x) < 1 \Rightarrow p_U(1) < 1$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha allora che $p_U((p_{U'}(x)+\varepsilon)^{-1}x) < 1$ e quindi

$$\forall x \in X \quad p_U(x) < p_{U'}(x) + \varepsilon$$

Per arbitrarietà di ε si ha che $p_U \leq p_{U'}$.

QED

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto, lo spazio vettoriale $C^\infty(\Omega)$ delle funzioni infinitamente differenziabili su Ω è uno spazio vettoriale topologico, la cui topologia è indotta dalle seminorme

$$p_{Ki}(f) := \max_{x\in K} |\partial^i f(x)|$$

ove $K \subset \Omega$ è un compatto e $i = (i_1, ..., i_h)$ un multiindice rispetto al quale si effettuano le derivate parziali che figurano nella definizione (cioè si deriva i_k volte rispetto alla variabile x_k).

8.1.8 Teorema *Lo spazio $C^\infty(\Omega)$ è di Fréchet.*

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamo che la topologia di $C^\infty(\Omega)$ è indotta da una famiglia numerabile di seminorme. Sia

$$K_m := \left\{ x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{m} \text{ e } d(x,0) \leq m \right\}$$

Ovviamente K_m è compatto, $K_m \overset{o}{\subset\!\longrightarrow} K_{m+1}$ e $\bigcup_m K_m = \Omega$. Definiamo le seminorme

$$p_m(f) := \sup_{x\in K_m} \sup_{|i|\leq m} |\partial^i f(x)|$$

Se $K \subset \Omega$ è un qualsiasi compatto allora la funzione $\delta(x) := d(x, \partial\Omega)$ è continua e positiva su K, dunque ha un minimo δ_0 su K; analogamente la funzione $\Delta(x) = d(x,0)$ assume un massimo Δ_0 su K. Allora scegliamo m in modo che

$$\frac{1}{m} < \delta_0 \qquad \text{e} \qquad \Delta_0 < m$$

Con questa scelta di m si ha che $K_m \subset K$ e, se $|i| \leq m$, la seminorma $p_{K,i}$ è maggiorata da p_m. Che poi ogni seminorma p_m sia maggiorata da $\sum_{i=0}^m p_{K_m,i}$ è ovvio.

Quindi la topologia di $C^\infty(\Omega)$ è generata dalle $\{p_m\}$, ed in particolare lo spazio è metrizzabile.

Ora proviamo che $C^\infty(\Omega)$ è completo. Se $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy, il che significa che è di Cauchy rispetto a qualsiasi seminorma p_m che genera la topologia di $C^\infty(\Omega)$. Ma allora la restrizione di $\{f_n\}$ a K_n è una successione di Cauchy di funzioni definite sul compatto K_m: ora sfruttiamo il fatto che lo spazio delle funzioni differenziabili $C^\infty(K)$ su un compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ è di Banach rispetto alla norma

$$||f||_{C^\infty} := \sup_{x\in K} \sup_i |\partial^i f(x)|$$

come si constata facilmente (la convergenza in questo spazio è la convergenza uniforme della f e di tutte le sue derivate parziali). Dunque esiste una funzione $F_m \in C^\infty(K)$ alla quale la successione ristretta a K_m converge. Per definizione di K_m le funzioni F_m così definite coincidono sulle intersezioni $K_m \cap K_l$ e quindi inducono una funzione $F \in C^\infty(\Omega)$ tale che, per definizione,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} p_m(f_n - F_m) = 0$$

QED

In $C^\infty(\Omega)$ è contenuto lo spazio $C_c^\infty(\Omega)$ delle funzioni differenziabili a supporto compatto. Non si tratta di un sottospazio chiuso, quindi non è certo completo per la topologia indotta da quella di $C^\infty(\Omega)$. Definiamo ora su $C_c^\infty(\Omega)$ una topologia più forte di quella indotta da $C^\infty(\Omega)$.

Se K_m è il sistema di compatti definito nella dimostrazione del teorema precedente, ad ogni successione $N = \{N_n\}$ di numeri naturali associamo la seminorma

$$p_N(f) := \sum_{m=1}^\infty N_m \sup_{x\in K_m\setminus K_{m-1}} \sup_{|i|\le N_m} |\partial^i f(x)|$$

(assumiamo $K_0 := \emptyset$).

8.1.9 Teorema *Lo spazio $C_c^\infty(\Omega)$ è completo e non metrizzabile.*

Dimostrazione: Consideriamo una successione di Cauchy $\{f_n\}$; dimostriamo allora che tutte le funzioni f_n appartengono a $C_K^\infty(\Omega)$, ove K è un fissato compatto e $C_K^\infty(\Omega)$ denota lo spazio delle funzioni $f \in C^\infty(\Omega)$ a supporto in K: si tratta di un sottospazio di Fréchet di $C^\infty(\Omega)$, quindi la successione $\{f_n\}$ dovrà convergere ad un elemento di $C_K^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$ col che avremo la prima parte del teorema.

Per assurdo supponiamo dunque che i supporti delle $\{f_n\}$ non stiano in nessun compatto K fissato. Possiamo supporre (a meno di rinumerare le $\{f_n\}$) che sia $\operatorname{supp} f_m \notin K_m$, i.e. che esista $x_m \notin K_m$ con $f_m(x_m) \neq 0$. Allora se

$$V := \left\{ f \in C_c^\infty(\Omega) \mid \forall m \ge 1 \ |f(x_m)| \le \frac{|f_m(x_m)|}{m} \right\}$$

l'intersezione $V \cap C_K^\infty(\Omega)$ è aperta (dato che ogni compatto K contiene solo un numero finito di x_m e quindi questa intersezione è intersezione finita di aperti) i.e. V è aperto in $C_c^\infty(\Omega)$. Se p_V è il funzionale di Minkowski di V allora, dato che V

è equilibrato e convesso, p_V è una seminorma continua in $C_c^\infty(\Omega)$, precisamente la

$$p_V(f) = \sup_m \left| \frac{mf(x_m)}{f_m(x_m)} \right|$$

Quindi $m \leq p_V(f_m)$ e la successione di Cauchy $\{f_n\}$ non converge in $C_K^\infty(\Omega)$ il che è assurdo.

Dunque lo spazio $C_c^\infty(\Omega)$ è completo nella sua topologia. Dimostriamo che però non è metrizzabile. Se lo fosse, infatti, presa una sua successione $\{f_m\}$ tale che $\operatorname{supp} f_m \notin K_m$ dalla continuità della moltiplicazione per uno scalare si deduce che esiste un numero $\delta_m > 0$ tale che $d(0, \delta_m f_m) < 1/m$ e quindi la successione $\{\delta_m f_m\}$ tende a zero; ma si è visto nelle dimostrazione della prima parte che questo non è possibile a meno che tutte le funzioni $\{f_n\}$ appartengano ad un medesimo spazio $C_K^\infty(\Omega)$ per un compatto K fissato. L'assurdo prova che $C_c^\infty(\Omega)$ non è metrizzabile.

QED

Si può dimostrare che lo spazio $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per $1 \leq p < \infty$ ed in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Limitiamoci qui a fornire un esempio di funzione appartenente a $C_c^\infty(\mathbb{R})$:

$$f(x) = \begin{cases} \exp \frac{2}{x^2-1} \text{ se } |x| < 1 \\ 0 \text{ se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Funzioni di questo tipo sono considerate nella costruzione di partizioni dell'unità e nello studio delle trasformate di Fourier e delle convoluzioni negli spazi di funzioni differenziabili.

8.2 Dualità e topologie deboli

8.2.1 Definizione *Due spazi vettoriali X e Y su $\mathbb{K}$ si dicono* in dualità *se esiste una forma bilineare*

$$\langle , \rangle : V \times W \longrightarrow \mathbb{K}$$

tale che

$$\begin{aligned} &\forall x \in X \ (\forall y \in Y \quad \langle x, y \rangle = 0) \Rightarrow x = 0 \\ &\forall y \in Y \ (\forall x \in X \quad \langle x, y \rangle = 0) \Rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

Evidentemente una dualità fra X e Y induce due applicazioni lineari

$$\begin{array}{lcl} X \longrightarrow Y^* & \quad \text{e} \quad & Y \longrightarrow X^* \\ x \longmapsto (y \longmapsto \langle x, y \rangle) & & y \longmapsto (x \longmapsto \langle x, y \rangle) \end{array}$$

La forma bilineare $\langle , \rangle$ si dice *fortemente non degenere* se queste mappe sono isomorfismi: in questo caso $X = Y^*$.

Se X e Y sono in dualità possiamo considerare una topologia su X, la $\sigma(X,Y)$*-topologia*, che è per definizione la topologia debole rispetto alle applicazioni

$$\{x \longmapsto \langle x, y\rangle\}_{y\in Y}$$

Questa topologia è indotta dalla base di seminorme $\{p_F\}_{F\subset Y \text{ finito}}$ ove

$$p_F(x) := \sum_{y\in F} |\langle y, x\rangle|$$

8.2.2 Lemma *Se X è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e F un funzionale lineare, allora F è continuo se e solo se per ogni base $\mathcal{S}$ di seminorme della topologia di X esiste $p \in \mathcal{S}$ tale che*

$$\forall x \in X \quad |F(x)| \le p(x)$$

Dimostrazione: Che la condizione sia sufficiente è ovvio. Se poi F è un funzionale lineare continuo, la $x \longmapsto |F(x)|$ è una seminorma continua per X, quindi vale la condizione dell'enunciato.

QED

8.2.3 Proposizione *Se X e Y sono spazi vettoriali in dualità e F è un funzionale lineare su X allora sono equivalenti le*

- $\exists y \in Y\ \forall x \in X\ F(x) = \langle y, x\rangle$.
- *F è continuo nella $\sigma(X,Y)$-topologia.*

Dimostrazione: Che (1) implichi (2) è ovvio. Se vale la (2), per il lemma deve esistere un $F = \{y_1, ..., y_n\} \subset Y$ finito tale che

$$\forall x \in X \quad |F(x)| \le p_F(x)$$

i.e.

$$\forall x \in X \quad \langle y_1, x\rangle = ... = \langle y_n, x\rangle = 0$$

da cui $F(x) = 0$ per dualità. Quindi se M è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ generato dai vettori $\{(\langle y_1, x\rangle, ..., \langle y_n, x\rangle)\}_{x\in X}$ deve esistere un funzionale lineare $f \in M^*$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r] \arrow[dr] & (\langle y_1, x\rangle, ..., \langle y_n, x\rangle) \arrow[d, "f"] \\
& F(x)
\end{tikzcd}$$

sia commutativo. Ma ogni tale funzionale f è determinato univocamente da un vettore $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$ in modo che

$$f(r_1, ..., r_n) = \sum_{i=1}^{n} v_i c_i$$

e quindi

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i \langle y_i, x\rangle = \langle y, x\rangle$$

QED

Ovviamente possiamo definire per uno spazio vettoriale topologico qualsiasi, proprio come avevamo fatto per gli spazi normati, lo spazio X^* *duale topologico* dei funzionali lineari continui su X.

Per ogni funzionale $f \in X^*$ esiste la forma bilineare fra X e X^*:

$$x \longmapsto \langle f, x\rangle := f(x)$$

che è una dualità fra X e X^*:

$$\forall x \in X \quad \langle f, x\rangle = 0 \Rightarrow f = 0$$

8.2.4 Definizione *Su uno spazio vettoriale topologico la* topologia debole *è la $\sigma(X, X^*)$-topologia e la* topologia *-debole *è la $\sigma(X^*, X)$-topologia.*

Infatti dato che $X \hookrightarrow X^{**}$ la dualità fra X e X^* induce una dualità fra X^* e X: si noti che ciascuna di queste dualità è fortemente non degenere se e solo se lo spazio X è riflessivo.

Il nome della topologia debole viene dal fatto (evidente) che si tratta di una topologia più debole di quella di X. Per la caratterizzazione precedente dei funzionali lineari e continui abbiamo che

8.2.5 Proposizione *Un funzionale lineare su X è continuo se e solo se è debolmente continuo.*

8.2.6 Definizione *Se X e Y sono spazi vettoriali in dualità, il* polare *di un sottoinsieme $E \subset X$ è il sottoinsieme di Y:*

$$E^o := \{y \in Y \mid \forall x \in X \ \ \mathrm{Re}\langle y, x\rangle \leq 1\}$$

(La parte reale è ovviamente superflua nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Ovviamente:

8.2.7 Proposizione *Il polare è un insieme convesso, chiuso nella $\sigma(Y, X)$-topologia, contenente lo zero e tale che $E \subset E^{oo}$.*

In particolare, se X è localmente convesso, il polare $E^o \subset X^*$ è *-debolmente chiuso e se $F \subset X^*$ il polare $F^o \subset X$ è debolmente chiuso. Se $E \subset X$ allora evidentemente $\overline{E}^o = E^o$.

Prima di affrontare il risultato principale sui polari, diamo alcuni lemmi sulla convessità, che sono in realtà corollari del teorema di Hahn–Banach, applicato a spazi vettoriali topologici.

8.2.8 Lemma *Sia X uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e K un chiuso convesso in X contenente l'origine. Allora se $0 \in K$, per ogni $x_0 \notin K$ esiste un funzionale lineare continuo F su X tale che $\operatorname{Re} f(x_0) > 1$ ma*

$$\forall x \in X \quad \operatorname{Re} f(x) < 1$$

(nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la parte reale è superflua).

DIMOSTRAZIONE: Dato che per ipotesi $\complement K$ è aperto, deve esistere un intorno V di 0 tale che $x_0 + V \subset \complement K$; ma la topologia di X è localmente convessa, quindi V può scegliersi convesso ed equilibrato, sicché $x_0 + V \cap K = \emptyset$ implica

$$x_0 + \frac{1}{2}V \cap K + \frac{1}{2}V = \emptyset$$

Ora, $U := K + \frac{1}{2}U$ è aperto (essendo unione di aperti) e convesso, dato che, se $k_1, k_2 \in K$, $v_1, v_2 \in V$ e $a + b = 1$ $(a, b > 0)$:

$$a\left(k_1 + \frac{1}{2}v_1\right) + b\left(k_2 + \frac{1}{2}v_2\right) = ak_1 + bk_2 + \frac{av_1 + bv_2}{2} \in U$$

Ma $x_0 \notin \overline{U}$ e, se $M := \mathbb{R}x_0$ e p_U è il funzionale di Minkowski di U, allora per

$$\begin{aligned} f_0 : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ rx_0 &\longmapsto rp_U(x_0) \end{aligned}$$

$(r \in \mathbb{R})$ si ha che

$$f_0(x_0) = p_U(x_0) > 1$$

(perché $x_0 \notin \overline{U}$) e

$$\forall x \in M \quad f_0(x) \leq p_U(x)$$

Ora per il teorema di Hahn–Banach esiste un funzionale lineare f su X che estende f_0 ed è maggiorato dalla seminorma p_U. Ma per definizione $p_U \leq 1$ su U, quindi su U la tesi è verificata. Infine usiamo la linearità di f per ottenere:

$$|f(x)| \leq (p_U(x) + p_U(-x)) = p(x)$$

i.e. la continuità di f.

QED

8.2.9 Teorema del bipolare *Se X è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e $K \subset X$ è un insieme convesso contenente l'origine di X allora la chiusura di K nella topologia di X coincide con la chiusura nella topologia debole e si ha*

$$\overline{K} = \overline{K}^{deb} = K^{oo}$$

(i polari si riferiscono alla dualità fra X e X^*).

DIMOSTRAZIONE: Dato che $\overline{K} \subset \overline{K}^{oo} = K^{oo}$ e K^{oo} è debolmente chiuso, basta dimostrare che $K^{oo} \subset \overline{K}$.

Sia $x \notin \overline{K}$; allora, per il lemma, esiste $f \in X^*$ tale che

$$\forall x \in \overline{K} \quad \mathrm{Re}\langle f, x\rangle < 1$$

i.e. $f \in \overline{K}^o = K^o$ e $\mathrm{Re}\langle f, x_0\rangle > 1$ cioè $x_0 \notin K^{oo}$.

QED

Osserviamo che se $f : X \longrightarrow Y$ è una mappa lineare continua fra spazi vettoriali topologici, possiamo definirne al solito modo la *trasposta* come

$$\begin{aligned} f^* : & Y^* \longrightarrow X^* \\ & \psi \longmapsto (x \longmapsto \psi(f(x))) \end{aligned}$$

che è ovviamente lineare e continua (consideriamo i duali topologici).

8.2.10 Teorema *Se $f : X \longrightarrow Y$ è una mappa lineare continua e iniettiva fra spazi vettoriali topologici allora*

$$\ker f^* = (\mathrm{im}\, f)^o$$

DIMOSTRAZIONE: Se consideriamo le dualità $\langle,\rangle$ fra X e X^*, e Y e Y^*, ovviamente:

$$\forall x \in X \ \forall \psi \in Y^* \quad \langle \psi, f(x)\rangle = \langle f^*(\psi), x\rangle$$

perciò, se $\psi \in (\mathrm{im}\, f)^o$ allora per ogni $x \in X$: $\langle f^*(\psi), x\rangle = 0$ e quindi $f^*(\psi) = 0$; viceversa, se $\psi \in \ker f^*$ allora per ogni $x \in X$; $\langle f^*(\psi), x\rangle = 0$, dunque $\psi \perp \mathrm{im}\, f$.

QED

8.2.11 Corollario *Una mappa lineare continua $f : X \longrightarrow Y$ fra spazi vettoriali topologici, ove Y sia localmente convesso, è biunivoca se e solo se* $\mathrm{im}\, f$ *è denso in Y.*

DIMOSTRAZIONE: Per il teorema di Hahn–Banach: se $M \neq Y$ è un sottospazio vettoriale di Y allora esiste un funzionale lineare continuo non identicamente nullo che si annulla identicamente su M; quindi se $\overline{\mathrm{im}\, f}$ non è denso, esiste un funzionale $\psi \in Y^*$ non nullo che si annulla su $\mathrm{im}\, f$, i.e. tale che $f^*(\psi) = 0$.

QED

Il seguente fondamentale teorema sancisce la compattezza *-debole della palla associata al funzionale di Minkowski p:

$$\{f \in X^* \mid \forall x \in X\ |f(x)| \leq p(x)\}$$

8.2.12 Teorema (Alaoglu–Banach–Bourbaki) *Se X è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e W un intorno convesso ed equilibrato dello zero allora il polare W^o di W in X^* è $\sigma(X, X^*)$-compatto.*

Dimostrazione: Sia p il funzionale di Minkowski di W allora per $x \in W$: $p(x) < 1$, e quindi se $|f(x)| \leq p(x)$ la parte reale di $\langle f, x\rangle$ è ≤ 1 e $f \in W^o$; ma W è equilibrato, cioè $|\langle f, x\rangle| \leq p(x)$ e quindi

$$W^o = \{f \in X^* \mid \forall x \in X\ |f(x)| \leq p(x)\}$$

Dimostriamo che si tratta di un insieme *-debolmente compatto. Se, per $x \in X$:

$$K_x := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq p(x)\}$$

Si tratta ovviamente di un compatto in $\mathbb{C}$, quindi, per il teorema di Tychonoff, l'insieme

$$K := \prod_{x \in X} K_x$$

pure è compatto (nella topologia prodotto, che è quella debole rispetto alle proiezioni $p_x : K \longrightarrow K_x$). Se

$$\begin{aligned} \Psi : W^o &\longrightarrow K \\ f &\longmapsto (x \in X \longmapsto f(x) \in K_x) \end{aligned}$$

evidentemente, se $\pi_x : K \longrightarrow \mathbb{C}$ è la proiezione che alla funzione $(X \xrightarrow{\kappa} \bigcup_x \{K_x\}) \in \prod_X K_x$ associa il numero $\kappa(x) \in \mathbb{C}$, allora

$$\Psi(W^o) = \bigcap_{x,y \in X} \bigcap_{z,w \in \mathbb{C}} (\pi_{zx+wy} - z\pi_x - w\pi_y)^{-1}(\{0\})$$

Ma le proiezioni π_x sono continue (per definizione) e quindi lo è la funzione $\pi_{zx+wy} - z\pi_x - w\pi_y : K \longrightarrow \mathbb{C}$; ne segue che la controimmagine tramite essa dell'insieme chiuso $\{0\}$ (cioè $\Psi(W^o)$) è un chiuso in K, che è compatto, dunque a sua volta un compatto. Infine osserviamo che Ψ è biunivoca e quindi[3] è un omeomorfismo. Dunque, essendolo $\Psi(W^o)$, anche W^o è compatto.

QED

[3] Una funzione biunivoca e continua da un compatto ad uno spazio di Hausdorff è un omeomorfismo.

8.3 Compattezza e convessità

8.3.1 Definizione *Un insieme $B \subset X$ in uno spazio vettoriale topologico si dice* limitato *se per ogni intorno dello zero $U \subset X$ esiste un numero $C > 0$ tale che $B \subset CU$.*

Dato che esiste una base di intorni chiusi dello zero, la chiusura di un insieme limitato è limitato: in generale non si tratta di un insieme compatto, a differenza del caso di dimensione finita (teorema di Heine–Borel). Tuttavia:

8.3.2 Teorema *Un insieme compatto in uno spazio vettoriale topologico è limitato.*

DIMOSTRAZIONE: Se $K \subset X$ è compatto e U un intorno equilibrato dello zero allora

$$K \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} nU = X$$

quindi, per compattezza, esiste un insieme finito di interi $\{n_1, ..., n_k\}$ tali che

$$K \subset n_1 U \cup ... \cup n_k U = \left(\max_{j=1,...,k} n_j \right) U$$

QED

Il viceversa non è vero: ad esempio, se X è normato, l'essere un insieme chiuso e limitato compatto implicherebbe la locale compattezza di X e quindi $\dim X < \infty$ (corollario 6.1.15).

8.3.3 Teorema *Uno spazio X localmente convesso di Hausdorff è normato se e solo se possiede un intorno dello zero limitato.*

DIMOSTRAZIONE: Se X è normato, ogni palla centrata nello zero è limitata. Viceversa, se X è Hausdorff e localmente convesso, e se contiene un intorno U dello zero, che possiamo supporre equilibrato, allora la famiglia $\left\{ \frac{1}{n} U \right\}$ fornisce una base di intorni dello zero in X: infatti se V è un intorno dello zero, che possiamo assumere equilibrato, c'è un intero $n > 0$ tale che $U \subset nV$. Dato che X è Hausdorff si ha

$$\bigcap_{n>0} \frac{1}{n} U = \{0\}$$

e quindi il funzionale di Minkowski p_U associato a U è in realtà una norma.

QED

In alcuni casi importanti, tuttavia, un insieme limitato ha effettivamente chiusura compatta: ad esempio negli spazi $C^\infty(\Omega)$ e $C_c^\infty(\Omega)$; per dimostrarlo dobbiamo prima trarre una conseguenza dal teorema di Ascoli–Arzelà 3.5.2:

8.3.4 Teorema *Se K è un compatto contenuto in un aperto limitato Ω di $\mathbb{R}^n$ allora la mappa di restrizione, che ad una funzione f in Ω assegna la sua restrizione $f|_K$ a K trasforma insiemi limitati di $C^1(\Omega)$ in insiemi compatti di $C(K)$.*

Dimostrazione: Per il teorema di Ascoli–Arzelà basta dimostrare che la restrizione a K di un insieme limitato in $C^1(\Omega)$ è equicontinuo in K (che sia limitato è ovvio): possiamo in effetti limitarci alle palle di centro l'origine in $C^1(\overline{\Omega})$.

Se dunque $f \in C^1(\overline{\Omega})$ allora è un fatto elementare che per ogni $x_0 \in \Omega$ esista un $r_0 > 0$ tale che se $|x - x_0| \leq r_0$ allora $x \in \Omega$ e

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \sup_{y\in\Omega} \left(\sup_{j=1,\dots,n} \left| \frac{\partial f(y)}{\partial x_j} \right| \right) |x - x_0| \leq ||f||_1 |x - x_0|$$

Quindi ogni palla centrata nell'origine di $C^1(\overline{\Omega})$ è equicontinua in Ω e quindi l'immagine di questa palla per tramite della mappa di restrizione è pure un insieme equicontinuo in K.

QED

8.3.5 Teorema *Ogni insieme chiuso e limitato in $C^\infty(\Omega)$ è compatto.*

Dimostrazione: Esprimiamo Ω come unione numerabile di compatti $K_0 \subset K_1 \subset ...$ tali che, se Ω_i è l'interno di K_i allora $K_i \subset \Omega_{i+1}$; dato che in uno spazio metrico un insieme è compatto se e solo se ha un punto di accumulazione, ci basterà dimostrare questa proprietà. Ci servirà il

8.3.6 Lemma *Per ogni $i \geq 1$ ed ogni successione S limitata in $C^\infty(K_i)$ esiste una sottosuccessione $S_1 \subset S$ tale che le restrizioni delle funzioni $f \in S_1$ a Ω_{i-1} formino una successione convergente in $C^\infty(K_i)$.*

Dimostriamo il lemma: che S sia limitata in $C^\infty(K_i)$ vuol dire che per ogni multiindice p la successione sul campo fissato[4] $\mathbb{K}$ e $\mathcal{T}$ una topologia di Hausdorff sull'insieme V

$$\left\{ \frac{\partial^p f}{\partial x^p} \right\}$$

è equilimitata in $C^1(K_i)$ e quindi, per il teorema di Ascoli–Arzelà, possiede una sottosuccessione S_1 tale che per ogni $f \in S_1$, le restrizioni delle $\dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}$ a Ω_{i-1} siano convergenti in $C^1(K_{i-1})$ e, essendo la convergenza uniforme, le derivate qualsiasi degli elementi di S_1 convergono in $C^\infty(K_{i-1})$. Questo dimostra il lemma.

[4]Per noi il campo $\mathbb{K}$ sarà sempre $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$.

Sia ora S una successione limitata in $C^\infty(\Omega)$; la restrizione $S|_{\Omega_1}$ dà luogo ad una successione limitata in $C^\infty(K_1)$ che, per il lemma, ammette una sottosuccessione convergente in $C^\infty(K_0)$. Lo stesso discorso possiamo ripetere per $K_2, K_3, ...$ ottenendo una successione di sottosuccessioni della S:

$$S = S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset ...$$

tale che $S_i|_{\Omega_{i-1}}$ converga in $C^\infty(K_{i-1})$; se $\{f_1, f_2, ...\}$ sono i limiti di queste sottosuccessioni in $C^\infty(K_0), C^\infty(K_1), ...$ allora esistono elementi $g_i \in S_i$ tali che

$$\sup_p \sup_{x\in\Omega_{i-1}} \left| \frac{\partial^p}{\partial x^p}(g_i - f_i) \right| \le \frac{1}{i}$$

Evidentemente la successione $S' := \{g_i\}$ converge in $C^\infty(\Omega)$ ed il suo limite è la funzione f le cui restrizioni a Ω_{i-1} coincidono con le f_i; quindi $S' \subset S$ è la sottosuccessione convergente voluta.

QED

La nozione di compattezza si rivela particolarmente interessante se combinata con quella di convessità: se K è un compatto convesso in uno spazio vettoriale topologico localmente convesso X, per ogni $f \in X^*$, la funzione reale continua $x \longmapsto \operatorname{Re}\langle f, x\rangle$ assume un massimo α su K; l'iperpiano M determinato dall'equazione lineare

$$\operatorname{Re}\langle f, x\rangle = \alpha$$

è *tangente* a K, cioè, se per ogni $x, y \in K$ tali che, se $a, b > 0$ e $a + b = 1$, $ax + by \in M$ allora $x, y \in M$.

Ovviamente $M \cap K$ è convesso e ogni convesso $F \subset K$ tangente a K si dice una *faccia* di K. Ad esempio, la faccia $M \cap K$ è compatta. Specifichiamo meglio queste nozioni.

8.3.7 Definizione *Una* faccia *di un convesso K è un punto $k \in K$ tale che per ogni $a, b \in [0, 1]$ con $a + b = 1$ e $k', k'' \in K$ tali che*

$$k = ak' + bk'' \qquad e \qquad k \ne k',\ k \ne k'',\ k' \ne k''$$

allora k' e k'' giacciono su uno stesso segmento.

8.3.8 Proposizione *Se K non è ridotto ad un sol punto esiste un iperpiano tangente M tale che $M \cap K \ne K$.*

DIMOSTRAZIONE: Basta osservare che se $k, k' \in K$ sono distinti, scegliendo $f \in X^*$ tale che

$$f(k' - k) = 1$$

(il che è possibile per il lemma 8.2.8) e

$$M = \{x \in X \mid \operatorname{Re}\langle f, x\rangle = \alpha\}$$

ove α è il massimo di $\operatorname{Re}\langle f, x\rangle$ su K. Se $k' \in M \cap K$ allora $\operatorname{Re}\langle f, k\rangle = \alpha = 1$ e $K \notin M \cap K$.

QED

Se $F \subset K$ è una faccia del convesso K e $f' \subset F$ è una faccia del convesso F allora F' è una faccia di K (per definizione!).

8.3.9 Definizione *I* punti estremali *di un convesso K costituiscono l'insieme*

$$\operatorname{Extr}(K) := \left\{ k \in K \,\middle|\, \begin{array}{c} \forall k', k'' \in K \ \forall a, b \in [0,1] \ a + b = 1 \\ \text{e } k = ak' + bk'' \Rightarrow ab = 0 \text{ oppure } k' = k'' \end{array} \right\}$$

In altri termini, x è un punto estremale se $\{x\}$ è una faccia di K.

8.3.10 Teorema (di Krejn–Millman) *Se X è uno spazio localmente convesso e $K \subset X$ un sottoinsieme convesso e compatto allora*

- *Ogni iperpiano tangente a K contiene un punto estremale.*
- *L'inviluppo convesso dell'insieme* $\operatorname{Extr}(K)$ *dei punti estremali di K è denso in K (si dice che* genera *K).*

Dimostrazione: (1) Sia M un iperpiano tangente a K; mostriamo che $F = M \cap K$ contiene una faccia chiusa minimale e quindi un punto estremale. Sia $\mathcal{F}$ l'insieme delle facce chiuse di K contenute in F. Ovviamente è un insieme parzialmente ordinato rispetto alla relazione di inclusione, ma, di più, soddisfa anche le ipotesi del lemma di Zorn. Infatti, se $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$ è un sottoinsieme totalmente ordinato di $\mathcal{F}$ mostriamo che esiste un $F_0 \in \mathcal{F}$ contenuto in ogni elemento di $\mathcal{L}$; per farlo usiamo la compattezza di K.

Si noti che $\mathcal{L}$, essendo totalmente ordinato, verifica la proprietà dell'intersezione finita, i.e. $\bigcap \mathcal{L} = F_0 \neq \emptyset$. Ma $F_0 \in \mathcal{F}$, i.e. è una faccia chiusa: proprio l'elemento minimale richiesto dalle ipotesi del lemma di Zorn (ne stiamo applicando una versione "dualizzata" in cui si richiede che ogni sottoinsieme totalmente ordinato abbia un minimo per dedurre l'esistenza di un elemento minimale). L'elemento minimale fornito dal lemma di Zorn è il punto estremale di K richiesto dalla tesi.

(2) Sia K_0 l'inviluppo convesso di $\operatorname{Extr}(K)$, ovvero il più piccolo convesso di X contenente $\operatorname{Extr}(K)$ (i.e. l'intersezione di tutti questi convessi); allora K_0 è

formato dalle combinazioni convesse finite di punti estremali di K. Supponiamo che $0 \in K_0$ (a meno di traslare possiamo sempre farlo).

Per il teorema del bipolare $\overline{K} = K^{oo}$ e quindi basta dimostrare

$$K \subset K_0^{oo}$$

per avere la tesi (dato che $K_0 \subset K$ implica $K_0^{oo} \subset K$), ovvero basta dimostrare che

$$K_0^o \subset K^o$$

Sia dunque $f \in K_0^o$, i.e. $f \in X^*$ tale che

$$\forall x \in K_0 \quad \mathrm{Re}\langle f, x\rangle \leq 1$$

e consideriamo il minimo β della funzione (reale e continua) $x \longmapsto \mathrm{Re}\langle f, x\rangle$ sull'insieme compatto K; vogliamo dimostrare che $f \in K^o$, ovvero che $\beta \leq 1$. Ma l'iperpiano di equazione $\mathrm{Re}\langle f, x\rangle = \beta$ è tangente a K, quindi (per la (1)), contiene un punto estremale $x_o \in \mathrm{Extr}(K) \subset K_0$. Allora

$$\beta = \mathrm{Re}\langle f, x_0\rangle \leq 1$$

(dato che su K_0 $\mathrm{Re}\langle f, x\rangle \leq 1$).

QED

Un risultato fondamentale sugli insiemi compatti e convessi è il seguente teorema, di grande utilità nella ricerca di soluzioni a svariati tipi di equazioni differenziali, che enunciamo senza dimostrazione

Teorema (DEL PUNTO FISSO DI SCHAUDER). *Se X è uno spazio vettoriale localmente convesso e $K \subset X$ un sottoinsieme compatto e convesso allora ogni mappa continua $f : K \longrightarrow K$ possiede un punto fisso, i.e. esiste $x_0 \in K$ tale che $f(x_0) = x_0$.*

Notiamo che la funzione f nel teorema di Schauder può essere non lineare: nel risultato seguente diamo un teorema di punto fisso per una famiglia qualsiasi di applicazioni lineari *che commutino fra loro*.

8.3.11 Teorema (MARKOV–KAKUTANI) *Se X è uno spazio vettoriale topologico e $K \subset X$ un sottoinsieme convesso e compatto, e se $\mathcal{F}$ è una famiglia di applicazioni lineari continue $f : X \longrightarrow X$ tali che*

- $\forall f \in \mathcal{F}\ f(K) \subset K$.
- $\forall x \in X\ \forall f, g \in \mathcal{F}\ f(g(x)) = g(f(x))$.

allora esiste un punto fisso in K comune a tutte le funzioni della famiglia $\mathcal{F}$:

$$\exists x_0 \in K \ \forall f \in \mathcal{F} \quad f(x_0) = x_0$$

Dimostrazione: Siano $f \in \mathcal{F}$ e $n \in \mathbb{N}$ e poniamo

$$f^{(n)} := \frac{1}{n+1}(I + f + ... + f^n)$$

(col prodotto fg denotiamo la composizione di applicazioni) e

$$K_{n,f} = f^{(n)}(K)$$

Consideriamo la famiglia $\mathcal{K} = \{K_{n,f}\}_{n\in\mathbb{N},f\in\mathcal{F}}$. Dato che K è convesso, la (1) implica che $K_{n,f} \subset K$ e la (2) che

$$f^{(n)}g^{(m)}(K) = g^{(m)}f^{(n)}(K)$$

Quindi

$$(\dagger) \qquad f^{(n)}g^{(m)} \subset K_{n,f} \cap K_{m,g}$$

Ma K è compatto e $f \in \mathcal{F}$ continua, sicché gli elementi di $\mathcal{K}$ sono chiusi e la famiglia $\mathcal{K}$ verifica la proprietà dell'intersezione finita, come afferma la $(\dagger)$.

Quindi, $\bigcap \mathcal{K} \neq \emptyset$. Esiste dunque un $x_0 \in \bigcap \mathcal{K}$: se $f \in \mathcal{F}$ mostriamo che $f(x_0) = x_0$. Basta far vedere che per ogni intorno U dello 0 in X si ha

$$f(x_0) - x_0 \in U$$

Ma $x_0 \in \bigcap \mathcal{K}$, quindi esiste $x_N \in K$ tale che

$$x_0 = \frac{1}{N}(I + f + ... + f^N)x_N$$

i.e.

$$f(x_0) - x_0 = \frac{1}{N}(T^{N+1}x_N - x_N) \in \frac{1}{N}(K - K)$$

($K - K$ è l'insieme degli elementi di X della forma $k - k'$ con $k, k' \in K$). Quindi basta dimostrare che esiste un N tale che

$$\frac{1}{N}(K - K) \subset U$$

Questo si vede facilmente, dato che $K - K$ è compatto (ad esempio perché è immagine, tramite la mappa continua $(x, y) \longmapsto x - y$, del compatto $K \times K$) e quindi è limitato; la famiglia $\{nU\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento di X perché U è un insieme assorbente, quindi esiste N tale che $K - K \subset NU$.

QED

Si noti che lo spazio X non è stato supposto localmente convesso.

8.4 Distribuzioni

Consideriamo lo spazio delle funzioni $C^\infty(\Omega)$ infinitamente differenziabili in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: sappiamo che è uno spazio di Fréchet, mentre il suo sottospazio $C_c^\infty(\Omega)$ delle funzioni a supporto compatto non è metrizzabile pur essendo completo. In ambedue i casi si tratta di spazi non normabili: vogliamo studiare su essi la teoria della dualità.

8.4.1 Definizione *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto, una* distribuzione *in Ω è un elemento del duale topologico $C_c^\infty(\Omega)^*$.*

La nostra conoscenza della topologia di $C_c^\infty(\Omega)$ ci permette immediatamente di dare un criterio perché un funzionale lineare sia una distribuzione

8.4.2 Proposizione *Se $f \in C_c^\infty(\Omega)^*$, le tre seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- *f è una distribuzione.*
- *Per ogni compatto $K \subset \Omega$ esistono un intero $m \geq 0$ ed una costante $C > 0$ tali che*
$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \operatorname{supp}\varphi \subset K \Rightarrow |f(\varphi)| \leq C \sup_{|p|\leq m} \sup_{x\in\Omega} \left| \frac{\partial^p}{\partial x^p}\varphi(x) \right|$$
- *Se la successioni $\{\partial^p/\partial x^p(\varphi_n)\} \subset C_c^\infty(\Omega)$ convergono uniformemente a zero (per ogni multiindice p) e se i supporti delle $\{\varphi_n\}$ sono contenuti in $K \subset \Omega$ (compatto) allora $f(\varphi_n) \longrightarrow 0$.*

8.4.3 Esempio *Se X è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso di funzioni $\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, contenente $C_c^\infty(\Omega)$, e tale che la topologia di X ristretta a $C_c^\infty(\Omega)$ sia meno fine della topologia di $C_c^\infty(\Omega)$, allora, per ogni funzionale lineare continuo $f \in X^*$, $f|_{C_c^\infty(\Omega)}$ è una distribuzione. Evidentemente, se $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in E allora se $f \neq g$ sono elementi di X^*, le loro restrizioni sono distribuzioni diverse, per il teorema di Hahn–Banach.*

8.4.4 Esempio *Se consideriamo lo spazio $X = C_c(\Omega)$ delle funzioni continue complesse a supporto compatto, abbiamo che ogni funzionale μ continuo su X* [5] *induce una distribuzione T_μ.*

[5] Cioè ogni misura di Radon complessa, per il teorema di Riesz–Markov che sarà dimostrato a pagina 289.

In realtà, nell'esempio precedente, la mappa $\mu \longmapsto T_\mu$ è iniettiva (cioè una misura può considerarsi una particolare distribuzione): questo segue dal fatto che ogni funzione continua può approssimarsi con funzioni C^∞ a supporto compatto. Stabiliamo dunque questo risultato.

Preliminarmente consideriamo un esempio di funzione a supporto compatto e infinitamente differenziabile:

$$\rho(x) := \begin{cases} a\exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

ove la costante a è definita come

$$a = \frac{1}{\int_{|x|<1} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) dx}$$

in modo che si abbia

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx = 1$$

La funzione ρ è analitica in ogni punto della palla aperta $\{|x| < 1\}$ ed è ovviamente C^∞ in $\{|x| > 1\}$; verifichiamo che è C^∞ anche sul bordo $\{|x| = 1\}$. Dato che la funzione è invariante per rotazioni basta verificarne la regolarità nel caso $n = 1$, i.e. basta verificare che la funzione

$$f(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t}\right) \text{ se } t > 0 \\ 0 \text{ se } t \leq 0 \end{cases}$$

è C^∞. Ma questo è ovvio:

$$\exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2(1-t)}\right)\exp\left(-\frac{1}{2(1+t)}\right)$$

Se $\varepsilon > 0$, una funzione C^∞ a supporto in $\{|x| \leq \varepsilon\}$ è

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{\rho(\varepsilon x)}{\varepsilon^n}$$

8.4.5 Teorema *Se Ω è un aperto in $\mathbb{R}^n$, ogni funzione in $C(\Omega)$ è limite di una successione di funzioni in $C_c^\infty(\Omega)$.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo una successione di aperti $\{\Omega_i\}$ la cui unione sia Ω e tali che, per $i \geq 1$, $\overline{\Omega_{i-1}}$ sia compatto e contenuto in Ω_i. Possiamo allora considerare la successione numerica $\{d_i\}$, ove

$$d_i := d(\overline{\Omega_{i-1}}, \complement\Omega_i) > 0$$

e la funzione continua

$$g_i(x) := \begin{cases} 1 \text{ se } d(x, \complement\Omega_i) > \dfrac{3d_i}{4} \\ 0 \text{ se } d(x, \complement\Omega_i) < \dfrac{d_i}{2} \end{cases}$$

Scegliamo allora $\varepsilon_i := d_i/4$ e consideriamo la funzione

$$h_i(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \rho_{\varepsilon_i}((x-y)g_i(y)dy$$

Ora sia $x \in \Omega_{i-1}$: allora, per $x - y \in \operatorname{supp} \rho_{\varepsilon_i}$, si ha

$$d(y, \complement\Omega_i) \geq d(x, \complement\Omega_i) - |x-y| \geq d_i - \frac{d_i}{4} = \frac{3d_i}{4}$$

e quindi $g_i(y) = 1$, i.e.

$$h_i(x) = \int \rho_{\varepsilon_i}(x-y)dy = 1$$

Pertanto $h_i|_{\Omega_{i-1}} = 1$. Dato che le $\{h_i\}$ sono ovviamente a supporto compatto e che convergono a $1 \in C^\infty(\Omega)$.

Ora sia $f \in C(\Omega)$: è immediato che possiamo approssimarla con funzioni continue a supporto compatto: infatti $h_i f \in C_c(\Omega)$ e, dato che $fh_i = f$ su Ω_{i-1} la funzione fh_i converge a f in $C(\Omega)$; se $K \subset \Omega$ è compatto, per i grande abbastanza si ha $K \subset \Omega_{i-1}$ e quindi $\operatorname{supp} f \cap K = \operatorname{supp}(fh_i) \cap K$.

Vediamo infine che l'approssimazione può farsi effettivamente con funzioni C^∞: per questo basta mostrare che le funzioni $fh_i \in C_c(\Omega)$ sono approssimabili con funzioni $C_c^\infty(\Omega)$, il che si vede considerando

$$F_{i,\varepsilon}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x-y)f(y)h_i(y)dy$$

Derivando sotto il segno di integrale si trova immediatamente che queste sono funzioni in $C_c^\infty(\Omega)$; dimostriamo che, per $\varepsilon \longrightarrow 0$, la $F_{i,\varepsilon}$ converge uniformemente a fh_i, col che avremo la tesi del teorema.

Dato che le fh_i sono continue a supporto compatto, sono uniformemente continue, quindi per ogni $\eta > 0$ esiste un $\varepsilon > 0$ tale che

$$\forall x, y \ |x-y| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \eta$$

e quindi, dato che $\int \rho_\varepsilon = 1$:

$$f(x)h_i(x) - F_{i,\varepsilon}(x) = \int \rho_\varepsilon(x-y)(f(x)h_i(x) - f(y)h_i(y))dy$$

pertanto

$$|f(x)h_i(x) - F_{i,\varepsilon}(x)| \le \sup_{|x-y|<\varepsilon} |f(x)h_i(x) - f(y)h_i(y)| \int \rho_\varepsilon(x-y)dy \le \eta$$

QED

Osserviamo che, se la funzione f è C^∞ nel teorema precedente, la stessa dimostrazione ci permette di approssimarla con funzioni C_c^∞ date dalle fh_i. Quindi

8.4.6 Corollario *$C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $C^\infty(\Omega)$.*
Avvertiamo che nel teorema seguente, col termine "misura di Radon" intendiamo un funzionale lineare e continuo su $C_c(\Omega)$, mentre in precedenza (definizione 4.5.1) avevamo usato un'altra definizione: il già citato teorema di Riesz–Markov 9.2.2, mostrerà l'equivalenza di queste definizioni.

8.4.7 Teorema *Se T è una distribuzione su Ω allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- *T è una misura di Radon.*
- *T è continuo nella topologia su $C_c^\infty(\Omega)$ indotta da quella di $C_c(\Omega)$.*
- *Per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste una costante $C > 0$ tale che*

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \operatorname{supp}\varphi \subset K \Rightarrow |\langle T, \varphi\rangle| \le C \sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)|$$

- *Se una successione di funzioni $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente a zero e se i supporti delle $\{\varphi_n\}$ sono contenuti in un compatto $K \subset \Omega$ allora $\langle T, \varphi_n\rangle \longrightarrow 0$.*

DIMOSTRAZIONE: In vista della proposizione 8.4.2, l'unica cosa che dobbiamo dimostrare per avere il teorema è che T è una (distribuzione indotta da una) misura di Radon se e solo se vale la (1): che la condizione sia necessaria è ovvio; se poi vale la (1), possiamo estendere T (che è continuo nella topologia indotta da $C_c(\Omega)$) in modo unico ad un funzionale lineare continuo su $C_c(\Omega)$ per densità di $C_c^\infty(\Omega)$ in $C_c(\Omega)$.

QED

Quindi le misure di Radon sono casi particolari di distribuzioni (storicamente infatti i primi esempi di distribuzioni sono state le misure di Dirac); in particolare anche le funzioni possono essere viste come distribuzioni. Infatti, se $f \in L^1(K)$, con $K \subset \Omega$ compatto, allora il funzionale

$$T(\varphi) := \int_\Omega \varphi(x) f(x) dx$$

è una distribuzione (modulo uguaglianza q.o.).

Usualmente lo spazio delle distribuzioni su Ω si denota come $\mathcal{D}'(\Omega)$.

8.4.8 Definizione *Una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si dice* svanire *in un aperto $A \subset \Omega$ se*

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \operatorname{supp} \varphi \subset U \Rightarrow \langle T, \varphi \rangle = 0$$

Vogliamo definire il concetto di supporto anche per le distribuzioni: per questo necessitiamo del

8.4.9 Teorema *L'unione degli aperti di Ω nei quali una distribuzione svanisce è un aperto nel quale la distribuzione svanisce.*
che è immediata conseguenza del

8.4.10 Lemma *Se $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è una famiglia di aperti di Ω e $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia di distribuzioni sugli $\{U_\alpha\}$ e se, per ogni $\alpha, \beta \in A$, $T_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = T_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ allora esiste un'unica distribuzione T su $\bigcup_\alpha U_\alpha$ tale che, per ogni $\alpha \in A$: $T|_{U_\alpha} = T_\alpha$.*

DIMOSTRAZIONE: Intanto ricordiamo che $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è paracompatto e quindi esiste un raffinamento $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ di $U := \bigcup_\alpha U_\alpha$ localmente finito. Sappiamo poi che esiste una partizione C^∞ dell'unità subordinata al ricoprimento $\{V_\beta\}$: se $\varphi \in C_c^\infty(U)$, allora

$$\varphi = \sum_{\beta \in B} g_\beta \varphi$$

Poniamo, se α_β è tale che $V_\beta \subset U_{\alpha_\beta}$,

$$\langle T, \varphi \rangle := \sum_{\beta \in B} \langle T_{\alpha_\beta}, g_\beta \varphi \rangle$$

(la somma ha senso perché ha senso quella precedente). Questa definizione non dipende dal raffinamento scelto, perché sulle intersezioni di elementi di $\{U_\alpha\}$ le distribuzioni $\{T_\alpha\}$ coincidono. Dimostriamo che non dipende nemmeno dalla partizione dell'unità $\{g_\beta\}$: se infatti $\{h_\gamma\}$ è un'altra partizione dell'unità subordinata al raffinamento $\{W_\gamma\}$ localmente finito di $\{U_\alpha\}$ allora per ogni γ esiste un indice α_γ tale che $W_\gamma \subset U_{\alpha_\gamma}$ e quindi

$$\sum_\beta \langle T_{\alpha_\beta}, g_\beta \varphi \rangle = \sum_{\beta,\gamma} \langle T_{\alpha_\beta}, g_\beta h_\gamma \varphi \rangle = \sum_{\beta,\gamma} \langle T_{\alpha_\gamma}, g_\beta h_\gamma \varphi \rangle = \sum_\gamma \langle T_{\alpha_\gamma}, h_\gamma \varphi \rangle$$

Vediamo ora che T è effettivamente una distribuzione, cioè che è un funzionale continuo: se $\varphi\in C_c^\infty(K)$ converge a zero uniformemente ($K \subset U$ compatto) allora esiste un sottoinsieme finito $B' \subset B$ tale che

$$\forall\beta \in B' \quad g_\beta\varphi = 0$$

e quindi $g_\beta\varphi \longrightarrow 0$ in $C_c^\infty(U_{\alpha_\beta})$, i.e. $\langle T_{\alpha_\beta}, g_\beta\varphi\rangle \longrightarrow 0$. Quindi T è continuo in $C_c^\infty(U)^*$.

L'unicità segue facilmente dal fatto che le distribuzioni $\{T_\alpha\}$ coincidono sulle intersezioni di elementi della famiglia $\{U_\alpha\}$.

QED

In virtù del teorema appena dimostrato, ha senso la

8.4.11 Definizione *Se T è una distribuzione in Ω, il suo* supporto $\operatorname{supp} T$ *è il complementare dell'unione di tutti gli aperti nei quali T svanisce.*

8.4.12 Esempio *La* misura di Dirac δ_{x_0} *è il funzionale che a $f \in C_c^\infty(\Omega)$ associa $f(x_0)$: il supporto della misura di Dirac δ_{x_0} è il singolo punto $\{x_0\}$. Il supporto della distribuzione $T(\varphi) = \int \varphi(x)f(x)dx$ è il complementare dell'insieme sul quale f è q.o. nulla.*

Dato che $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $C^\infty(\Omega)$, possiamo identificare il duale $\mathcal{E}'(\Omega)$ di $C^\infty(\Omega)$ con un sottospazio di $\mathcal{D}'(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)^*$.

Come è naturale attendersi si ha il

8.4.13 Teorema *Una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ appartiene a $\mathcal{E}'(\Omega)$ se e solo se ha supporto compatto.*

DIMOSTRAZIONE: Se $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ è una distribuzione allora, per definizione della topologia di $C^\infty(\Omega)$, esistono un compatto $K \subset \Omega$, un intero $m \geq 0$ ed una costante $C > 0$ tali che

$$\forall\varphi \in C^\infty(\Omega) \quad |\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sup_{|p|\leq m} \sup_{x\in K} \left|\frac{\partial^p}{\partial x^p}\varphi(x)\right|$$

e quindi, se $\operatorname{supp}\varphi \subset \complement K$ allora $\langle T, \varphi\rangle = 0$, i.e. $\operatorname{supp} T \subset K$.

Viceversa, se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è una distribuzione a supporto compatto K, e se $f \in C_c^\infty(\Omega)$ è una funzione identicamente 1 in un intorno U di K [6] allora

$$\forall\varphi \in C^\infty(\Omega) \quad \langle T, \varphi\rangle = \langle T, g\varphi\rangle$$

[6] La cui costruzione è semplicissima: se $W = \Omega \setminus \overline{U}$, allora $\{U, W\}$ è un ricoprimento aperto di Ω localmente finito (!) e quindi esiste una partizione dell'unità $\{g_U, g_W\}$ ad esso subordinata: dato che $g_W = 0$ in U e $g_U + g_W = 1$ deve essere $g_W = 1$ in U; si tratta della nostra funzione g.

$(\operatorname{supp}(1-g)\varphi \subset \complement \operatorname{supp} T)$. Ma su $C_c^\infty(\operatorname{supp} g)$ le topologie indotte da $C^\infty(\Omega)$ e $C_c^\infty(\Omega)$ coincidono allora $g\varphi \longrightarrow 0$ in $C_c^\infty(\Omega)$ per $C^\infty(\Omega)$ e quindi la distribuzione T è continua su $C_c^\infty(\Omega)$ rispetto alla topologia indotta da $C^\infty(\Omega)$: dunque $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$.

QED

Osserviamo ora che, per ogni $m \geq 1$, $C^\infty(\Omega)$ è un sottospazio dello spazio delle funzioni m volte differenziabili $C^k(\Omega)$; un ragionamento analogo a quello del teorema 8.4.5 mostra che $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $C_c^m(\Omega)$; ha quindi senso la

8.4.14 Definizione *Una distribuzione T appartenente allo spazio $\mathcal{D}^m(\Omega) = C_c^m(\Omega)^*$ si dice* di ordine minore di m. *Se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è una distribuzione ed esiste un intero $m \geq 0$ tale che T sia di ordine minore di m allora T si dice* di ordine finito.

8.4.15 Esempio *Le distribuzioni di ordine (minore di) zero sono le misure di Radon.*

Sulle distribuzioni possiamo calcolare gli operatori differenziali, usandone la dualità; ricordiamo che un operatore differenziale è una espressione della forma

$$P = \sum_{|p|\leq m} a_p \frac{\partial^p}{\partial x^p}$$

con $a_p \in C^\infty(\Omega)$ e $p = (p_1, ..., p_r)$ è un multiinidice con $|p| = p_1 + ... + p_r$. Ovviamente P è un operatore lineare e continuo di $C^\infty(\Omega)$ in se stesso. Vogliamo definire il suo operatore "aggiunto"

$$P^* : \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

Sulle distribuzioni della forma $\psi = f(x)dx$ otteniamo, se $\varphi \in C^\infty(\Omega)$,

$$\langle P^*\psi, \varphi\rangle = \int \psi(x)P\varphi(x)dx = \sum_{|p|\leq m} \int a_p(x) \left(\frac{\partial^p}{\partial x^p}\varphi(x)\right) \psi(x)dx$$

Possiamo ora integrare per parti ottenendo (non ci sono integrali sul bordo $\partial\Omega$ perché $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$)

$$\sum_{|p|\leq m} \int \varphi(x)(-1)^{|p|} \frac{\partial^p}{\partial x^p} \left(a_p(x)\psi(x)\right) dx$$

ottenendo

$$P^*\psi = \sum_{|p|\leq m} \varphi(x)(-1)^{|p|} \frac{\partial^p}{\partial x^p} \left(a_p(x)\psi(x)\right)$$

Se vogliamo esprimerlo come operatore differenziale, scriviamo

$$P^*\psi = \sum_{|p|\leq m} \varphi(x)(-1)^{|p|}\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(a_p(x)\psi(x)\right) = \sum_{|p|\leq m} b_p(x)\frac{\partial^p}{\partial x^p}$$

dove

$$b_p(x) = \sum_{p\leq q}(-1)^{|q|}\binom{q}{p}\frac{\partial^{q-p}}{\partial x^{q-p}}a_q(x)$$

e dove $q \leq p$ significa $q_1 \leq p_1, ..., q_r \leq p_r$ e

$$\binom{q}{p} := \binom{q_1}{p_1}...\binom{q_r}{p_r}$$

Abbiamo quindi un operatore differenziale lineare continuo P^* sullo spazio delle distribuzioni.

8.4.16 Teorema *Una distribuzione a supporto compatto ha ordine finito.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$; se $U \subset \Omega$ ha chiusura compatta e $\operatorname{supp} T \subset \overline{U}$ allora $T|_U$ è di ordine finito. Infatti è evidente dalle definizioni che la topologia di $C_c^\infty(\Omega)$ è l'intersezione delle topologie di $C_c^m(\Omega)$ e quindi la restrizione di T a $\overline{U}$ è continua in $C_c^\infty(\overline{U})$ nella topologia indotta da $C_c^m(\overline{U})$ per qualche $m \geq 0$, e quindi è continua su $C_c^\infty(U) \subset C_c^\infty(\overline{U})$; ma la topologia di $C_c^m(U)$ è più fine di quella indottavi da $C_c^m(\overline{U})$, dunque T è continua su $C_c^\infty(U)$ rispetto alla topologia indotta da $C_c^m(U)$: ioè $T|_U \in \mathcal{D}^m(U)$.

Ma $T = 0$ su $\complement \operatorname{supp} T$ e quindi T è di ordine finito in tutto Ω.

QED

Concludiamo questa introduzione alla dualità negli spazi $C^m(\Omega)$ dimostrando la proprietà fondamentale delle distribuzioni di ordine finito.

8.4.17 Teorema *Se T è una distribuzione di ordine finito $m < \infty$ in Ω allora, per ogni intorno aperto U di* $\operatorname{supp} T$ *esiste una famiglia di misure di Radon $\{\mu_p\}_{p\in\mathbb{N}^m;|p|<m}$ in Ω tali che*

$$T = \sum_{|p|\leq m} \frac{\partial^p}{\partial x^p}\mu_p$$

e tali che per ogni $p \in \mathbb{N}^n$, $|p| \leq m$: $\operatorname{supp} \mu_p \subset U$.

DIMOSTRAZIONE: Sia $N = N_{n,m}$ il numero di multiindici p con $|p| \leq 1$: esiste allora una inclusione naturale nel prodotto

$$\begin{aligned}\Psi_m : C_c^m(\Omega) &\longrightarrow (C_c(\Omega))^N \\ \varphi &\longmapsto \left(\frac{\partial^p \varphi}{\partial x^p}\right)_{p\in\mathbb{N}^n, |p|\leq m}\end{aligned}$$

Si tratta ovviamente di una applicazione lineare che, pur non essendo suriettiva, è un isomorfismo (su $\operatorname{im}\Psi_m$) fra spazi vettoriali topologici[7]. Dato che $\Psi_m : C_c^m(\Omega) \xrightarrow{\cong} \operatorname{im}\Psi$, ogni funzionale lineare continuo su $C_c^m(\Omega)$ ne determina univocamente uno su $\operatorname{im}\Psi_m$, che può quindi, per il teorema di Hahn–Banach, estendersi ad un funzionale sull'intero spazio $C_c(\Omega)^N$. Ma il duale di un prodotto diretto di spazi vettoriali topologici è canonicamente isomorfo al prodotto dei duali[8] e quindi un funzionale lineare continuo su $C_c(\Omega)^n$ può identificarsi con un insieme di N misure di Radon (λ_p) su Ω tali che

$$\langle(\lambda_p), (\varphi_p)\rangle = \sum_{p\in\mathbb{N};|p|\leq m} \langle\lambda_p, \varphi_p\rangle$$

Questo funzionale estende il funzionale $\varphi \longmapsto \langle T, \varphi\rangle$ su $\operatorname{im}\Psi_m$; quindi, per $\varphi_p := \dfrac{\partial^p\varphi}{\partial x^p}$ (se $\varphi \in C_c^m(\Omega)$):

$$T = \sum_{|p|\leq m} (-1)^{|p|} \frac{\partial^p}{\partial x^p}\lambda_p$$

Ora dobbiamo verificare la condizione sui supporti delle misure λ_p; consideriamo una funzione $g \in C^\infty(\Omega)$ che sia identicamente 1 in un intorno U di $\operatorname{supp} T$ ed identicamente zero fuori da qualche chiuso contenuto in U e consideriamo il prodotto gT: ovviamente $gT = T$ (per definizione, $\langle gT, \varphi\rangle = \langle T, g\varphi\rangle$) i.e.

$$T = gT = \sum_{|p|\leq m} (-1)^{|p|} g \frac{\partial^p}{\partial x^p}\lambda_p$$

[7] φ converge a zero in $C_c^m(\Omega)$ se e solo se ciascuna delle sue derivate di ordine $\leq m$ converge a zero in $C_c(\Omega)$

[8] Se $X_1, ..., X_n$ sono spazi vettoriali topologici, basta considerare l'isomorfismo

$$\begin{aligned}X_1^* \times ... \times X_n^* &\longrightarrow (X_1 \times ... \times X_n)^* \\ (\varphi_1, ..., \varphi_n) &\longmapsto \left((x_1, ..., x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n \langle\varphi_i, x_i\rangle\right)\end{aligned}$$

e, per l'identità di Leibniz:

$$\langle g\frac{\partial^p\lambda_p}{\partial x^p},\varphi\rangle = (-1)^{|p|}\langle\lambda_p,\frac{\partial^p(g\varphi)}{\partial x^p}\rangle = (-1)^{|p|}\sum_{q\le p}\binom{p}{q}\langle\lambda_p,\frac{\partial^{p-q}g}{\partial x^{p-q}}\frac{\partial^q\varphi}{\partial x^q}\rangle$$
$$=\sum_{q\le p}\langle\frac{\partial^q}{\partial x^q}\left((-1)^{|p-q|}\frac{\partial^{p-q}g}{\partial x^{p-q}}\lambda_p\right),\varphi\rangle$$

e quindi

$$g\frac{\partial^p\lambda_p}{\partial x^p}=\sum_{q\le p}\frac{\partial^q}{\partial x^q}\left((-1)^{|p-q|}\frac{\partial^{p-q}g}{\partial x^{p-q}}\lambda_p\right)$$

Sostituendo nell'espressione precedente per la T:

$$T=\sum_{|p|\le m}\sum_{q\le p}(-1)^{|p|}\frac{\partial^q}{\partial x^q}\left((-1)^{|p-q|}\frac{\partial^{p-q}g}{\partial x^{p-q}}\lambda_p\right)$$

con i supporti delle misure $\dfrac{\partial^{p-q}g}{\partial x^{p-q}}\lambda_p$ sono contenuti in $\operatorname{supp} g\subset U$.

QED

Da questo teorema segue che le distribuzioni di ordine $\le m$ sono somme finite di derivate al più di ordine m di misure di Radon.

8.5 Trasformata di Fourier di funzioni differenziabili

Vogliamo esemplificare alcune idee qui introdotte proseguendo la discussione della trasformata di Fourier iniziata alla fine del capitolo precedente: tratteremo direttamente il caso in n dimensioni.

Consideriamo quindi in $\mathbb{R}^n$ la dualità con $\mathbb{R}^{n*}$ data dal prodotto euclideo

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n x_iy_i$$

Evidentemente, se $(e_1,...,e_n)$ è una base di $\mathbb{R}^n$ e $(e^1,...,e^n)$ una base duale, se $x=\sum_i x_ie_i\in\mathbb{R}^n$ e $\xi=\sum_i\xi_ie^i\in\mathbb{R}^{n*}$:

$$\langle\xi,x\rangle=\sum_{i=1}^n\xi^ix_i$$

In $\mathbb{R}^n$ consideriamo poi la misura di Lebesgue (che è determinata univocamente una volta che si fissi, ad esempio, una base, imponendo che il volume dell'ipercubo avente per vertici i vettori della base sia 1), che determina univocamente la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^{n*}$.

Definiamo ora uno spazio di funzioni "intermedio" fra $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $C^\infty(\mathbb{R}^n)$: si tratta dello *spazio di Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tali che, per ogni coppia di polinomi $P, Q \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| P(x)Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x)\right| < \infty$$

Oltre ad essere (come è ovvio) uno spazio vettoriale, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è localmente convesso rispetto alla famiglia di seminorme

$$p(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| P(x)Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x)\right|$$

Osserviamo che gli elementi di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si dicono anche *funzioni a decrescenza rapida* nel senso che tutte le loro derivate tendono a zero (per $|x| \longrightarrow \infty$) più velocemente di ogni potenza di $|x|^{-1}$. Infatti la condizione $p(f) < \infty$ equivale alla

$$\lim_{|x|\longrightarrow\infty} |x|^k \left| \frac{\partial^p}{\partial x^p} f(x)\right| = 0$$

per ogni multiindice p ed ogni intero $k \geq 0$. Una famiglia di seminorme per la topologia di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è

$$|f|_{m,k} = \sup_{|p|\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left((1+|x|)^k \left| \frac{\partial^p}{\partial x^p} f(x)\right|\right)$$

Così lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è metrizzabile; osserviamo che la sua topologia è più fine di quella indotta da $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Una successione $\{f_i\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tende infatti a zero se e solo se le funzioni

$$(1+|x|)^k \left| \frac{\partial^p}{\partial x^p} f_i(x)\right|$$

convergono uniformemente (ovunque in $\mathbb{R}^n$) a zero per ogni k e p. In particolare questo implica la convergenza uniforme delle derivate e quindi della successione $\{f_i\}$ in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

8.5.1 Teorema *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio di Fréchet.*

DIMOSTRAZIONE: Dobbiamo mostrare la completezza della topologia di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; se $\{f_i\}$ è una successione di Cauchy in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, a maggior ragione lo è in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$

e quindi converge ad una $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dato che la successione è di Cauchy, per ogni m e k, esiste un intero $N = N_{m,k}$ tale che

$$\forall i \geq N \quad |f_i - f_N|_{m,k} \leq 1$$

e quindi

$$\forall i \quad |f_i|_{m,k} \leq 1 + \sup_{j=1,\dots,N} |f_j|_{m,k}$$

i.e. esiste una costante $M_{m,k}$ tale che

$$\forall i \quad |f_i|_{m,k} \leq M_{m,k}$$

In altri termini

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \sup_{|p|\leq m} \left| \frac{\partial^p}{\partial x^p} f_i(x) \right| \leq \frac{M_{m,k}}{(1+|x|)^k}$$

Ma le derivate delle f_i convergono uniformemente alle corrispondenti derivate della f e quindi

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \sup_{|p|\leq m} \left| \frac{\partial^p}{\partial x^p} f(x) \right| \leq \frac{M_{m,k}}{(1+|x|)^k}$$

Quindi $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; che, infine, la convergenza avvenga anche nella topologia di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è ovvio.

QED

Ovviamente, sebbene abbiamo considerato la scelta di una base per definire la topologia di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ la definizione è intrinseca.

Osserviamo che, se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ allora anche

$$x \longmapsto e^{-2\pi i \langle \xi, x\rangle} f(x)$$

(per ξ fissato) è a decrescenza rapida. Possiamo ripetere allora una definizione che già conosciamo per $L^1(\mathbb{R})$:

8.5.2 Definizione *La* trasformata di Fourier *di una funzione $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è la funzione*

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle \xi, x\rangle} f(x) dx$$

Notiamo il fattore 2π: nel caso $n = 1$ lo avevamo inglobato nel prodotto scalare (che era semplicemente il prodotto di numeri reali).

Ricordiamo le seguenti proprietà seguenti della trasformata di Fourier:

8.5.3 Proposizione *Se* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*:*

- $\widehat{f+g} = \widehat{f} + \widehat{g}$.
- $\widehat{af} = a\widehat{f}$ *per* $a \in \mathbb{C}$.
- $\widehat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)}$ *(complessa coniugata).*
- *Se* $f_y(x) := f(x-y)$ *allora* $\widehat{f_y}(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{-2\pi i\langle\xi,y\rangle}$.

8.5.4 Esempio *Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione*

$$f(x) = e^{-ax^2}$$

in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *(con* a *costante). Per definizione*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2-2\pi i\xi x}dx$$

e l'integrando è una funziona olomorfa intera, che tende a zero lungo ogni retta parallela all'asse reale del piano complesso; quindi, per il teorema di Cauchy[9]*, l'integrale non cambia valore se l'integrazione è svolta non lungo l'asse* $\mathbb{R}$ *ma lungo un suo traslato* $\mathbb{R}_y\{x+iy\}_{x\in\mathbb{R}}$ *per* y *fissato: quindi*

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}_y} e^{-ax^2-2\pi i\xi x}dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-a(x+iy)^2-2\pi i\xi(x+iy)}dx \\ &= e^{ay^2+2\pi\xi y}\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2-2aixy-2\pi i\xi x}dx \\ &= e^{ay^2+2\pi\xi y}\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2-2ix(ay+\pi\xi)}dx\end{aligned}$$

Ora consideriamo y *costante in modo che nell'esponente della funzione integranda scompaia la parte immaginaria, ponendo cioè* $y = -\pi\xi/a$ *e ricordando che* $\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\pi/a}$ *(cfr. appendice al paragrafo 8.5.1):*

$$\widehat{f}(\xi) = e^{a\frac{(\pi\xi)^2}{a^2}-2\frac{(\pi\xi)^2}{a}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}dx = e^{-\frac{(\pi\xi)^2}{a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

In particolare, per $a = \pi$:

$$\widehat{e^{-\pi x^2}}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$$

[9]Alcuni richiami di Analisi Complessa, compreso questo teorema, sono dati in appendice al prossimo capitolo.

8.5.5 Teorema *La trasformata di Fourier* $\widehat{\ }: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n*})$ *è un isomorfismo di spazi di Fréchet.*

Dimostrazione: Dimostriamone per prima cosa la continuità: se $P, Q \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ allora, per l'identità di Leibniz e la derivazione sotto il segno di integrale:

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\widehat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i\langle\xi,x\rangle}Q(-2\pi ix)f(x)dx$$

e, integrando per parti:

$$P(\xi)\widehat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i\langle\xi,x\rangle}P\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\right)f(x)dx$$

Combinando queste formule:

$$P(\xi)Q\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\widehat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i\langle\xi,x\rangle}P\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\right)(Q(-2\pi ix)f(x))\,dx$$

e quindi, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^{n*}$:

$$\begin{aligned}\left|P(\xi)Q\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\widehat{f}(\xi)\right| &\leq \int\left|P\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\right)(Q(-2\pi ix)f(x))\right|dx \leq \\ &\leq \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{n+1}\left|P\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\right)(Q(-2\pi ix)f(x))\right|\right)\int\left(\frac{1}{1+|x|}\right)^{n+1}dx\end{aligned}$$

Da qui la continuità.

Consideriamo ora l'operatore $\widetilde{\ }: \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n*}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definito dalla

$$\widetilde{g}(x) := \int_{\mathbb{R}^{n*}} e^{2\pi i\langle\xi,x\rangle}g(\xi)d\xi$$

Lo stesso calcolo effettuato per $\widehat{\ }$ ci mostra che $\widetilde{\ }$ è continuo: dimostriamo che si tratta dell'operatore inverso di $\widehat{\ }$, col che avremo la tesi del teorema.

Sia quindi $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n*})$:

$$\begin{aligned}\int g(\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\langle\xi,x\rangle}d\xi &= \iint g(\xi)f(y)e^{2\pi i\langle\xi,x-y\rangle}dyd\xi \\ &= \int f(y)\widetilde{g}(x-y)dy = \int f(x-y)\widetilde{g}(y)dy\end{aligned}$$

(abbiamo usato il teorema di Fubini: $(y,\xi) \longmapsto f(y)g(\xi)$ è integrabile in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n*}$ rispetto alla misura $dx \otimes d\xi$). Dunque

$$\int g(\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\langle\xi,x\rangle}d\xi = \int f(x-y)\widetilde{g}(y)dy$$

Dato che vogliamo dimostrare che la composizione $\widetilde{\ }\circ\widehat{\ }$ è $id_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$ (l'altra identità $\widehat{\ }\circ\widetilde{\ } = id_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n*})}$ segue in modo analogo), è sufficiente dimostrare che se $\widetilde{g}$ converge alla misura di Dirac concentrata nell'origine di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$ allora $\{f_n\}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n*})$ converge funzione 1: basta considerare, ad esempio

$$\{e^{-\frac{|\xi|^2}{k}}\}_{k\geq 1}$$

Infatti $\lim_k e^{-\frac{|\xi|^2}{k}} = 1$ e

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}\widetilde{e^{-\frac{|\xi|^2}{k}}}d\xi = \lim_{k\longrightarrow\infty}\sqrt{k\pi}e^{-k(|\pi\xi|)^2}d\xi = \delta_0$$

QED

La formula

$$\widetilde{g\widehat{f}}(x) = \int f(x-y)\widetilde{g}(y)dy$$

è uno dei modi di esprimere la *formula di inversione di Fourier*.

8.5.6 Teorema *Se* $f,h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*:*

(*Formula di Parseval*)
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{h(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^{N*}}\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{h}(\xi)}d\xi$$

(*Formula di Plancherel*)
$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2dx = \int_{\mathbb{R}^{n*}}|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi$$

DIMOSTRAZIONE: Se nella formula di inversione di Fourier consideriamo $x=0$ ed effettuiamo il cambiamento di variabile $y\longmapsto -y$ otteniamo

$$(*)\qquad \int g(\xi)\widehat{f}(\xi)d\xi = \int f(y)\widetilde{g}(-y)dy$$

Allora per $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n*})$ tale che $\widetilde{g}(-y) = \overline{h(y)}$ (una tale scelta è possibile per il teorema precedente) otteniamo

$$g(\xi) = \overline{\widehat{h}(\xi)}$$

e quindi, sostituendo nella (*), otteniamo la formula di Parseval.

La formula di Plancherel è la formula di Parseval nel caso $f=h$.

QED

Sappiamo che lo spazio $C_c(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$; inoltre $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ è denso in $C_c(\mathbb{R}^n)$ e quindi lo è in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Questo fatto e la formula di Plancherel implicano immediatamente che

8.5.7 Corollario *La trasformata di Fourier si può estendere ad una isometria fra spazi di Hilbert*

$$\widehat{\ }: L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^{n*})$$

Le formule di Parseval e Plancherel si scrivono in $L^2(\mathbb{R}^n)$ come

$$(x, y) = (\widehat{x}, \widehat{y}) \qquad \text{e} \qquad ||x||_2 = ||\widehat{x}||_2$$

Sono ovviamente equivalenti per le identità di polarizzazione.

Costruiamo ora un sistema ortogonale per $L^2(\mathbb{R})$ (per semplicità consideriamo il caso $n = 1$): precisamente ne troveremo uno nel quale la trasformata di Fourier è una matrice (infinita) diagonale.

Partiamo dall'osservazione che l'equazione

$$f''(x) - x^2 f(x) = cf(x) \tag{†}$$

è trasformata in sé dalla trasformata di Fourier, se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. In effetti sappiamo che (indichiamo con l'apice la derivata rispetto a x):

$$\widehat{-ixf} = (\widehat{f})'$$

Inoltre

$$\widehat{f'} = i\xi \widehat{f}$$

Infatti, integrando per parti (la f è nulla all'infinito).

$$\int f'(x) e^{i\xi(x)} dx = i\xi \int f(x) e^{i\xi(x)} dx$$

Quindi la (†) è mutata in sé dalla trasformata di Fourier.

Consideriamo ora soluzioni della (†) della forma

$$f = p(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ove p è un polinomio. Sostituendo nella (†) troviamo che

$$p''(x) - 2xp'(x) = (c + 1)p(x)$$

Se $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ otteniamo le identità

$$k(k - 1)a_k - 2(k - 2)a_{k-2} = (c + 1)a_{k-2}$$

(per $k = 2, ..., n$). Dato che $a_n \neq 0$ (per definizione è il coefficiente direttore del polinomio) si ha

$$c = -(2n + 1) \qquad \text{e} \qquad a_{n-1} = 0$$

Evidentemente $a_k = 0$ se k è un intero di parità diversa da n, mentre se k e n hanno la stessa parità allora $a_k \neq 0$, e, per induzione:

$$a_{k-2} = \frac{k(k-1)}{2k-2n-4} a_k$$

Quindi sono tutti definiti in termini di a_n; non scriviamo esplicitamente una formula per p (cosa che sarebbe assai facile a questo punto), ma osserviamo che le funzioni

$$f_n(x) = p_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

sono in $L^2(\mathbb{R})$, ove $p_n(x)$ è semplicemente il polinomio p in grado n: la scelta di un tale polinomio si riduce infatti a quella di una costante (il suo coefficiente direttore) che possiamo fissare e del suo grado, che è l'intero n.

Queste funzioni sono ortogonali: siano $n \neq m$; allora, dato che f_n e f_m soddisfano la (†):

$$f_n''(x) - x^2 p_n'(x) = -(2n+1) f_n(x) \qquad \text{e} \qquad f_m''(x) - x^2 p_m'(x) = -(2m+1) f_m(x)$$

Sottraendo queste equazioni si ottiene

$$(f_n' f_m - f_m' f_n)' = 2(m-n) f_m f_n$$

che, integrata, dà luogo alla

$$\int f_n f_m = \frac{1}{2(m-n)} \int (f_n' f_m - f_m' f_n)' = \frac{1}{2(m-n)} (f_n' f_m - f_m' f_n)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

I polinomi p_n si dicono *polinomi di Hermite*.

Sappiamo già che le $\{f_n\}$ costituiscono un sistema completo, quindi una base ortonormale per lo spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. Si potrebbe dimostrare che la trasformata di Fourier ammette queste funzioni come autovettori:

$$\widehat{f_n} = c_n f_n$$

con $c_n = \pm\sqrt{2\pi}$ oppure $c_n = \pm i\sqrt{2\pi}$

8.5.1 Appendice: l'integrale di Gauss

Vogliamo calcolare l'integrale di Gauss

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$$

Dato che $e^{-ax^2} = e^{-a(-x)^2}$ si osserva per prima cosa che

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = 2\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx$$

Calcoliamo quindi questo secondo integrale: se

$$C_r := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leq r^2 \text{ e } x, y \geq 0\}$$

e Q_r è il quadrato

$$Q_r := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq x, y \leq r\}$$

allora, dato che $e^{-a(x^2+y^2)} > 0$ e $C_r \subset Q_r \subset C_{r\sqrt{2}}$:

$$(*) \qquad \int_{C_r} e^{-a(x^2+y^2)} dx \otimes dy < \int_{Q_r} e^{-a(x^2+y^2)} dx \otimes dy < \int_{C_{r\sqrt{2}}} e^{-a(x^2+y^2)} dx \otimes dy$$

Inoltre, per il teorema di Fubini:

$$(**) \qquad \int_{Q_r} e^{-a(x^2+y^2)} dx \otimes dy = \int_0^r e^{-ax^2} \int_0^r e^{-ay^2} dy dx = \left(\int_0^r e^{-ax^2} dx\right)^2$$

Infine, usando le coordinate polari in C_r:

$$\int_{C_r} e^{-a(x^2+y^2)} dx \otimes dy = \frac{\pi}{2} \int_0^r e^{-a\rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi}{4a} \int_0^r e^{-a\rho^2} d(a\rho^2) = \frac{\pi}{4a}\left(1 - e^{-ar^2}\right)$$

da cui otteniamo

$$\lim_{r \longrightarrow \infty} \int_{C_r} e^{-a(x^2+y^2)} dx \otimes dy = \lim_{r \longrightarrow \infty} \int_{C_{r\sqrt{2}}} e^{-a(x^2+y^2)} dx \otimes dy = \frac{\pi}{4a}$$

Quindi, passando al limite nella (*) ed usando la (**):

$$\lim_{r \longrightarrow \infty} \left(\int_0^r e^{-ax^2} dx\right)^2 = \frac{\pi}{4a}$$

Abbiamo quindi il valore dell'integrale di Gauss:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = 2\sqrt{\frac{\pi}{4a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

In maniera del tutto analoga, se A è una matrice simmetrica invertibile $n \times n$, si trova

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x\rangle} dx = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}}$$

(le condizioni sulla matrice sono indispensabili per l'integrabilità della funzione) che generalizza la formula dell'integrale di Gauss.

8.6 Distribuzioni temperate

Osserviamo che le immersioni continue

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

sono dense, e quindi danno luogo alle immersioni continue

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

ove $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^*) := \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$ è lo spazio delle *distribuzioni temperate*.

8.6.1 Esempio

- *Una distribuzione a supporto compatto è temperata.*
- *Ogni funzione continua f che tenda all'∞ più lentamente di ogni polinomio induce una distribuzione fdx temperata: infatti una distribuzione è temperata se e solo se è continua nella topologia su $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ indotta da quella di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; per lo stesso motivo ogni funzione $f \in L^p$ (con $1 \leq p \leq \infty$) induce una distribuzione fdx temperata.*

8.6.2 Teorema *Una distribuzione è temperata se e solo se è somma (finita) di derivate di funzioni continue che tendono all'∞ più lentamente di qualsiasi polinomio.*

DIMOSTRAZIONE: La sufficienza della condizione è ovvia; Se T è una distribuzione temperata allora esistono $m, h \geq 0$ ed una $C > 0$ tali che

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \quad |\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sup_{|p|\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|(1+|x|^2)^h \frac{\partial^p}{\partial x^p}\varphi(x)\right|$$

Se

$$\varphi_h := (1+|x|^2)^h \varphi(x)$$

ovviamente $\varphi_h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. è poi ovvio che la mappa $\varphi \longmapsto \varphi_h$ è lineare e biunivoca da $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ in se stesso; per induzione:

$$\left|\frac{\partial^p}{\partial x^p}\varphi(x)\right| \leq C_{p,h} \frac{1}{(1+|x|^2)^h} \sum_{q\leq p} \left|\frac{\partial^p}{\partial x^p}\varphi_h(x)\right|$$

quindi

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C' \sup_{|p|\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial^p}{\partial x^p}\varphi_h(x)\right|$$

Consideriamo ora il monomio differenziale

$$D := \frac{\partial}{\partial x_1} ... \frac{\partial}{\partial x_n}$$

Ovviamente (per $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$):

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_n} D\varphi(y) dy_1 ... dy_n$$

e quindi

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \leq ||D\varphi||_{L^1}$$

Sostituendo nella stima precedente:

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C'' \sup_{|p| \leq m+n} \left|\left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^p \varphi_h(x) \right|\right|_{L^1}$$

Un modo di interpretare questa stima è considerare la mappa iniettiva

$$J : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \left(L^1(\mathbb{R}^n) \right)^N$$
$$\psi \longmapsto \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^p \psi \right)_{|p| \leq m+n}$$

(ove N è il numero delle n-ple p tali che $|p| \leq m+n$) ed affermare che il funzionale lineare (si ricordi che ogni funzione $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ è univocamente rappresentabile come φ_h)

$$J\varphi_h \longmapsto \langle T, \varphi \rangle$$

è continuo su $JC_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ rispetto alla topologia indotta da $(L^1(\mathbb{R}^n)^N$; Quindi, per il teorema di Hahn–Banach, si estende ad un funzionale su tutto $L^1(\mathbb{R}^n))^N$. Ma, dato che $L^1(\mathbb{R}^n)^* = L^\infty(\mathbb{R}^n)$, allora (per il teorema di Riesz 6.4.8) $(L^1(\mathbb{R}^n))^{N*} = L^\infty(\mathbb{R}^n)^N$ e quindi esistono N funzioni $h_p \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ($|p| \leq m + n$) tali che

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{|p| \leq m+n} \langle h_p, \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^p \varphi_h \rangle$$

i.e.

$$T = \sum_{|p| \leq m+n} (1 + |x|^2)^h (-1)^{|p|} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^p h_p$$

Se, per ogni p poniamo

$$g_p(x) := \int_0^{x_1} ... \int_0^{x_n} h_p(y_1, ..., y_n) dy_1 ... dy_n$$

allora, dato che le h_p sono essenzialmente limitate, le g_p sono continue e

$$|g_p(x)| \leq |x_1|...|x_n| \; ||h_p||_{L^\infty}$$

Ma, dato che $h_p = Dg_p$:

$$T = \sum_{|p|\leq m+n} (1+|x|^2)^h \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p k_p$$

ove $k_p = (-1)^{|p|} Dg_p$. Per induzione su h segue infine che

$$(1+|x|^2)^h \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p k_p(x) = \sum_{q\leq p} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p (P(x)k_p(x))$$

per qualche polinomio P che dipende da p, q, h, e quindi la tesi.

QED

8.6.3 Definizione *L'applicazione lineare duale della trasformata di Fourier in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è la* trasformata di Fourier *nello spazio delle distribuzioni temperate.*

Osserviamo che, essendo $L^2(\mathbb{R}^n)^* = L^2(\mathbb{R}^n)$, questo concetto è autoduale sullo spazio delle funzioni a quadrato integrabile.

Applicando l'operatore di dualità * al teorema 8.5.5 si ha il

8.6.4 Teorema *La trasformata di Fourier è un isomorfismo fra gli spazi vettoriali topologici $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n*})$.*

Ricordiamo che lo spazio di Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ è un'algebra associativa e commutativa rispetto alla convoluzione: ricordiamo in particolare che, se $f, g \in C_(\mathbb{R}^n)$, la loro *convoluzione* è la funzione

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

Le seguenti proprietà sono state già enunciate nel caso di $L^1(\mathbb{R})$: dimostriamole in dettaglio nel caso di funzioni continue a supporto compatto.

8.6.5 Proposizione *Se $f, g, h \in C_c(\mathbb{R}^n)$ allora*

- $f * g = g * f$
- $f * (g * h) = (f * g) * h$
- $(f + g) * h = f * h + g * h$

- *Se* $f_y(x) := f(x-y)$ *allora* $(f*g)_y = f_y * g = f * g_y$

DIMOSTRAZIONE: Le (1) e (2) seguono dall'invarianza della misura di Lebesgue per traslazioni $d(ax+c) = adx$:

$$\begin{aligned} f*g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(-y)g(y+x)dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)d(-y) = g*f(x) \end{aligned}$$

e, per il teorema di Fubini[10]:

$$\begin{aligned} f*(g*h)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g*h(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\int_{\mathbb{R}^n} g(y-z)h(z)dzdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y-z)h(z)dz\otimes dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-z-y)g(y)dyh(z)dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f*g(x-z)h(z)dz = (f*g)*h(x) \end{aligned}$$

La (3) si riduce alla linearità dell'integrale, e la (4) è pure un molto semplice: intanto

$$f_y * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y-z)g(z)dz = (f*g)_y(x)$$

e quindi

$$f_y * g = (f*g)_y = (g*f)_y = g_y * f = f * g_y$$

QED

Evidentemente basta che solo una delle funzioni f, g sia a supporto compatto perché la definizione abbia senso. Esistono comunque condizioni più generali per l'esistenza della convoluzione di due funzioni.

8.6.6 Teorema *Se* p, q, r *sono tali che* $1 \le p, q, r \le \infty$ *e*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$$

allora, per ogni $f, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$*:*

$$||f*g||_{L^r} \le ||f||_{L^p}||g||_{L^q}$$

[10] Possiamo applicarlo perché le funzioni a supporto compatto sono integrabili rispetto alla misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$.

DIMOSTRAZIONE: Poniamo $h(x) := f * g(x)$ e $s = p(1 - 1/q)$; per la disuguaglianza di Hölder:

$$|h(x)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{(1-s)q} |g(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \left|\left| |f|^s \right|\right|_{L^t}$$

ove t è tale che $1/t + 1/q = 1$. Ma allora $st = p$ e quindi

$$|h(x)|^q \leq ||f||_{L^p}^{sq} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{(1-s)q} |g(y)|^q dy$$

Consideriamo ora la funzione

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\longrightarrow L^\alpha(\mathbb{R}^n) \\ y &\longmapsto \left(x \longmapsto |f(x-y)|^{1-s)q} |g(y)|^q \right) \end{aligned}$$

(per α opportuno): evidentemente F è continua a supporto compatto e, per la proprietà del modulo dell'integrale[11]

$$\left|\left| \int_{\mathbb{R}^n} F(y) dy \right|\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} ||F(y)|| dy$$

otteniamo

$$\left|\left| |h|^q \right|\right|_{L^\alpha} \leq ||f||_{L^p}^{sq} \left|\left| |f|^{(1-s)q} \right|\right|_{L^p} \left|\left| |g|^q \right|\right|_{L^1}$$

vale a dire

$$||h||_{L^\alpha}^q \leq ||f||_{L^p}^{sq} ||f||_{L^{\alpha(1-s)q}}^{(1-s)q} ||g||_{L^q}^q$$

Allora, per $\alpha = r/q$

$$||h||_{L^r} \leq ||f||_{L^p}^s ||f||_{L^{(1-s)r}}^{1-s} ||g||_{L^q}$$

cioè la tesi, dato che

$$(1-s)r = \left(1 - p - \frac{p}{q} \right) r = pr \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \right) = p$$

QED

Dato che $C_c(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$ segue il

[11] Osserviamo che stiamo integrando una funzione continua a valori in uno spazio di Banach L^α: dovrebbe essere ovvio che la definizione di questo integrale procede come nel caso di funzioni a valori reali; ad esempio, essendo la funzione continua, possiamo definire l'integrale come limite (nella norma di L^α) di somme integrali alla Riemann; in generale l'integrazione ha valori in uno spazio di Banach ha perfettamente senso e si dice *integrazione alla Bochner*.

8.6.7 Corollario *Se* p, q, r *sono tali che* $1 \leq p, q, r \leq \infty$ *e*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$$

allora, per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *e* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$*:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

definisce un elemento di $L^r(\mathbb{R}^n)$ *che si denota* $f * g$ *ed è tale che*

$$||f * g||_{L^r} \leq ||f||_{L^p}||g||_{L^q}$$

In particolare: per $q = 1$ deduciamo che la mappa lineare

$$\begin{aligned} \varphi : L^p(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n) \\ g &\longmapsto f * g \end{aligned}$$

è continua e $||\varphi|| \leq ||f||_{L^1}$, mentre per $p = q = 1$ deduciamo cha la mappa bilineare

$$\begin{aligned} L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^1(\mathbb{R}^n) \\ (f, g) &\longmapsto f * g \end{aligned}$$

è continua e $||f * g||_{L^1} \leq ||f||_{L^1}||g||_{L^1}$. Cioè lo spazio di Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ dotato dell'operazione di convoluzione è un'algebra di Banach commutativa (cfr. capitolo seguente).

Osserviamo ora che se $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n)$, le formule di Leibniz e di derivazione sotto il segno di integrale implicano che $f * g$ è derivabile rispetto a x e

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g = f * \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

Ora, se $A \subset \mathbb{R}^n$ e $f, g \in C(\mathbb{R}^n)$ (ed una delle due ha supporto compatto), definendo

$$f_A(x) := \begin{cases} f(x) \text{ se } x \in A \setminus \operatorname{supp} g \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

abbiamo allora, per $x \in A$

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_A(x)g(y)dy = f_A * g(x)$$

Applicando questa osservazione a $\partial f / \partial x_i$ otteniamo, per ogni $x \in A$:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} f * g(x) \right| \leq \sup_{y \in A \setminus \operatorname{supp} g} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) \right| \, ||g||_{L^1}$$

Se $\operatorname{supp} g$ e A sono compatti la parte destra di questa disuguaglianza è finita, quindi

8.6.8 Proposizione *Se* $0 \le m \le \infty$ *e* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *ha supporto compatto allora la convoluzione* $f \longmapsto f * g$ *è lineare e continua da* $C^m(\mathbb{R}^n)$ *in sè.*

Osservando che

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$$

(somma vettoriale in $\mathbb{R}^n$) si trae facilmente il

8.6.9 Corollario *Se* $0 \le m \le \infty$ *e* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *ha supporto compatto allora la convoluzione* $f \longmapsto f * g$ *è lineare e continua da* $C^m_c(\mathbb{R}^n)$ *in sè.*

Dimostriamo ora che la trasformata di Fourier si comporta come un morfismo di algebre fra prodotto punto per punto e convoluzione.

8.6.10 Teorema

$$\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g} \qquad e \qquad \widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$$

DIMOSTRAZIONE: Usiamo ovviamente il teorema di Fubini

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(\xi) &= \int f * g(x) e^{-2\pi i \langle \xi, x\rangle} dx = \int\int f(y) g(x-y) e^{-2\pi i \langle \xi, x\rangle} dy dx \\ &= \int f(y) e^{-2\pi i \langle \xi, y\rangle} \int g(x-y) e^{-2\pi i \langle \xi, x-y\rangle} dy dx \\ &= \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)\end{aligned}$$

Il viceversa segue per il teorema 8.5.5: ogni funzione di Schwartz è della forma $\widehat{h}$ così che $\widehat{fg} = \widehat{\widehat{k}\widehat{h}} = \widehat{\widehat{h * k}} = h * k = \widehat{f} * \widehat{g}$.

QED

In analogia a quanto abbiamo fatto per la trasformata di Fourier, vogliamo ora definire una operazione di convoluzione fra distribuzioni.

8.6.11 Definizione *Se* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *è una distribuzione temperata allora la distribuzione temperata* $\widehat{T}$ *definita da*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \langle \widehat{T}, \varphi\rangle = T(\widehat{\varphi})$$

è la sua trasformata di Fourier.

Dato che la trasformata di Fourier è un isomorfismo fra gli spazi di Schwartz, vale la formula di inversione per le trasformate di Fourier delle distribuzioni temperate: prima osserviamo che, se T_f è l'unica distribuzione associata alla funzione f:

$$T_f(\varphi) = \int f\varphi$$

allora

$$T_{\widehat{f}} = \widehat{T_f}$$

Infatti, se $f, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ allora, per il teorema di Parceval:

$$T_{\widehat{f}}(\varphi) = \int \widehat{f}\varphi = \int \widehat{\widehat{f}}\widehat{\varphi} = \int f\widehat{\varphi} = T_f(\widehat{\varphi})$$

8.6.12 Teorema *La trasformata di Fourier è l'unica estensione debolmente continua dell'isomorfismo* $\widehat{\ }: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{*n})$ *agli spazi delle distribuzioni temperate corrispondenti. Si tratta di una mappa lineare e biunivoca.*

Dimostrazione: Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; allora, se $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ i $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: $\widehat{\varphi_n} \longrightarrow \widehat{\varphi}$ e quindi $T(\widehat{\varphi_n}) \longrightarrow T(\widehat{\varphi})$ e, per definizione $\widehat{T}(\varphi_n) \longrightarrow \widehat{T}(\varphi)$. Quindi la $T \longmapsto \widehat{T}$ è debolmente continua.

QED

8.6.13 Esempio *La trasformata di Fourier della derivata della δ_{ξ_0} è:*

$$\widehat{\delta_{\xi_0}}(\varphi) = \delta_{\xi_0}(\widehat{\varphi}) = \int \varphi(x)e^{-2\pi i\langle \xi_0, x\rangle}$$

i.e. $\widehat{\delta_{\xi_0}}$ è la funzione $e^{-2\pi i\langle \xi, x\rangle}$.

Infine definiamo anche la convoluzione di una distribuzione temperata T con una funzione di Schwartz f (se f è una funzione denotiamo con $\widetilde{f}$ la funzione $\widetilde{f}(x) = f(-x)$):

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \langle T * f, \varphi\rangle := \langle T, \widetilde{f} * \varphi\rangle$$

Dimostriamo che gode delle proprietà attese da una convoluzione.

8.6.14 Teorema *La funzione $T \longmapsto T * f$ è debolmente continua ed estende la convoluzione in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Inoltre*

$$(T * f) * g = T * (f * g)$$

e

$$\widehat{T * f} = \widehat{f}\widehat{T}$$

DIMOSTRAZIONE: La debole continuità è ovvia, come pure il fatto che estenda la convoluzione usuale:

$$\begin{aligned}T_f * g(\varphi) =&\langle T_f, \widetilde{g} * \varphi\rangle = \int f(y) \int g(-x)\varphi(y-x)dxdy\\ &= \int f(y) \int g(-y-x)\varphi(-x)dxdy = \int f(y) \int g(z-y)\varphi(z)dzdy\\ &= \int \int f(y)g(z-y)dy\varphi(z)dz = T_{f*g}(\varphi)\end{aligned}$$

La debole densità di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ implica che le due identità per la convoluzione di funzioni si estendano alle convoluzioni.

QED