Tensori e forme differenziali

PAOLO CARESSA

Roma, 1996

Vogliamo qui considerare i *tensori* che sono probabilmente gli oggetti dell'algebra lineare più utilizzati nelle applicazioni geometriche e fisiche. Ai fisici interessanto perché rappresentano grandezze la cui forma è la stessa in tutti i sistemi di riferimento, e che quindi sono adatti ad espeimere le leggi fisiche delle cosiddette "teorie del campo", come Elettromagnetismo, Relatività, ecc.

A noi interessano perché consentono di formulare in modo intrinseco alcune costruzioni fondamentali algebriche e geometriche, come le forme differenziali.

Ora e nel seguito supporremo di avere a che fare con spazi vettoriali di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$, che potremo limitarci a pensare come i numeri reali $\mathbb{R}$ o complessi $\mathbb{C}$.

Consideriamo quindi due spazi vettoriali V e W. Vogliamo costruire a partire da questi due un nuovo spazio vettoriale di dimensione finita che abba il diritto di dirsi "prodotto" dei due dati. L'idea è che i suoi elementi, che saranno formati a partre dagli elementi di V e W non dovranno soddisfare altre relazioni se non quelle di bilinearità.

Ricordiamo che una mappa bilineare fra gli spazi vettoriali V, W e Z è una applicazione

$$f : V \times W \to Z$$

tale che, fissato un qualsiasi $v \in V$ la mappa $w \mapsto f(v, w)$ sia lineare da W a Z e, fissato un qualsiasi $w \in W$ la mappa $v \mapsto f(v, w)$ sia lineare da V a Z.

Quando $Z = \mathbb{K}$ f si fice *forma bilineare*. Ad esempio un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale è una forma bilineare.

Il problema che ora ci poniamo è di trovare uno spazio vettoriale "universale" rispetto al concetto di bilinearità, e la risposta è fornita dal seguente

Teorema .1 *Se V eW sono spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ allora esiste uno spazio vettoriale T su $\mathbb{K}$ ed una mappa bilineare*

$$\tau : V \times W \to T$$

tale che

(1) *Per ogni mappa bilineare $f : V \times W \to Z$ esiste un'unica mappa lineare $f_* : T \to Z$ tale che $f = f_* \circ \tau$, i.e. che il seguente diagramma*

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "f"'] & & T \arrow[dl, "f_*"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

(2) *Se $(v_1, ..., v_n)$ è una base di V e $(w_1, ..., w_m)$ è una base di W allora $\{\tau(v_i, w_j)\}_{i,j}$ è una base di T.*

DIMOSTRAZIONE: Questa dimostrazione non è la più raffinata ma ha il pregio della concretezza: consideriamo la base $(v_1, ..., v_n)$ di V e la base $(w_1, ..., w_m)$ di W, ed associamo ad ogni coppia (v_i, w_j) un simbolo τ_{ij}. Allora lo spazio vettoriale T generato su $\mathbb{K}$ dai simboli τ_{ij} ha dimensione nm, ed è formato da tutti le combinazioni lineari formali

$$\sum_{i,j} a_{ij}\tau_{ij}$$

con $a_{ij} \in \mathbb{K}$. In altri termini le $\{\tau_{ij}\}$ sono per definizione una base di T.

Definiamo ora la mappa τ su una coppia qualsiasi di vettori di V e W, espressi in termini delle loro basi come $v = \sum_i x_i v_i$ e $w = \sum_j y_j w_j$, nel modo seguente:

$$\tau(v, w) := \sum_{i,j} x_i y_j \tau_{ij}$$

Per definizione questa mappa è bilineare. Verifichiamo ora i due enunciati del teorema.

Sia dunque f la nostra mappa bilineare. Se definiamo

$$f_*(\tau_{ij}) := f(v_i, w_j)$$

questo determina un'unica mappa lineare su T (infatti l'abbiamo definita sulla sua base $\{\tau_{ij}\}$) e per definizione si ha $f = f_* \circ \tau$.

Per dimostrare il secondo enunciato, basta considerare due altre basi di V e W: $(v'_1, ..., v'_n)$ e $(w'_1, ..., w'_n)$. Dobbiamo dimostrare che gli elementi $\{\tau(v'_i, w'_j)\}$

costituiscono una base di T. Ma di certo questi elementi generano T, in quanto, per ogni coppia $(v, w) \in V \times W$ esistono dei coefficienti in $\mathbb{K}$ tali che

$$v = \sum x_i v'_i$$
$$w = \sum y_i w'_i$$

Sicché, per bilinearità di τ:

$$\tau(v, w) = \sum_{i,j} x_i y_j \tau(v'_i, w'_j)$$

e quindi ogni elemento di T si esprime come combinazione lineare degli $\{\tau(v'_i, w'_j)\}$. Inoltre, dato che questi elementi sono nm e che la dimensione di T pure è nm, devono necessariamente costituirne una base.

QED

Osserviamo che la definizione di T è ben posta in virtù del secondo enunciato del teorema, non dipende cioè dalla scelta delle basi fissate in V e W per costruire i generatori di T.

Un altro corollario immediato del teorema è che lo spazio T è unico a meno di isomorfismi: infatti se ne esiste un altro, diciamo T' soddisfacente alla proprietà (1) del teorema, possiamo applicare il teorema a T' con $Z = T$ e $f = \tau$ ed a T con $Z = T'$ e $f = \tau'$, ottenendo così due mappe τ_* e τ'_* che sono ovviamente l'una l'inversa dell'altra e dunque realizzano un isomorfismo di T con T'.

D'ora in poi indicheremo lo spazio T associato a V e W con $V \otimes W$, e lo chiameremo *prodotto tensoriale di V e W*. Inoltre al posto di $\tau(v, w)$ scriveremo $v \otimes w$ e chiameremo gli elementi di $V \otimes W$ *tensori.*

Per costruzione si ha

$$\dim(V \otimes W) = \dim(V) \dim(W)$$

Come esercizio lasciamo la verifica dell'esistenza dei seguenti isomorfismi canonici (tutto ciò che bisogna usare è il teorema 1):

$$V \otimes W \cong W \otimes V$$
$$V \otimes (W \otimes Z) \cong (V \otimes W) \otimes Z)$$

Dimostriamo invece la

Proposizione .2 *$V^* \otimes W \cong Hom(V, W)$.*

DIMOSTRAZIONE: Definiamo esplicitamente:

$$\begin{aligned} F : V^* \otimes W &\to Hom(V, W) \\ \varphi \otimes w &\mapsto (v \mapsto \varphi(v)w) \end{aligned}$$

Cioè, al tensore $\varphi \otimes w$ (ove $\varphi \in V^*$ e $w \in W$) assegnamo la mappa lineare $F_{\varphi\otimes w} : V \to W$ che calcolata su un elemento v dà come risultato $\varphi(v)w$. È un'ovvia verifica che F è lineare e ben definita. Per vedere che è un isomorfismo basta osservare che è iniettiva, il che è ovvio.

QED

Il seguente fatto è banale, ma molto importante, ed esprime la cosiddetta funtorialità del prodotto tensoriale: se $f : V \to U$ e $g : W \to Z$ sono mappe lineari di spazi vettoriali allora è definita la mappa lineare

$$f \otimes g : V \otimes W \to U \otimes Z$$

come

$$(f \otimes g)(v \otimes w) := f(v) \otimes g(w)$$

Esercizio .3

(1) Dimostrare che $V \otimes \mathbb{K} \cong V$.

(2) Dimostrare che ha luogo l'isomorfismo $V^* \otimes W^* \cong (V \otimes W)^*$.

(3) Se V è uno spazio vettoriale reale, possiamo considerare $V^{\mathbb{C}} := V \otimes \mathbb{C}$ ove $\mathbb{C}$ è visto come spazio reale bidimensionale. Dimostrare che $V^{\mathbb{C}}$ è uno spazio vettoriale complesso ed indentificarne una base a partire da una base di V.

Per concludere questa discussione del prodotto tensoriale notiamo il motivo per quale lo si può considerare una versione intrinseca del concetto di multilinearità: ha luogo infatti l'isomorfismo

$$(V \otimes W)^* \cong \mathrm{Bil}(V, W)$$

ove $\mathrm{Bil}(v, W)$ denota lo spazio delle forme bilineari su $V \times W$. Questo isomorfismo è semplicemente un modo differente di esprimere la proprietà (1) del Teorema 1.

In modo del tutto analogo, considerando per uno spazio vettoriale V le sue potenze tensoriali $V^{\otimes 2} := V \otimes V$, $V^{\otimes 3} := V \otimes V \otimes V$, ... possiamo identificare le forme multilineari sullo spazio vettoriale V con le forme lineari sui tensori di V.

Introduciamo ora un oggetto molto importante, l'*algebra tensoriale*. Partiamo dal solito spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$. Ovviamente possiamo iterare il prodotto tensoriale quante volte vogliamo, e così considerare le potenze tensoriali di V: $V^{\otimes 0} := \mathbb{K}$, $V^{\otimes 1} = V$, ...,$V^{\otimes n}$, ...

Lo spazio vettoriale (di dimensione infinita)

$$T(V) := \bigoplus_{n=1}^{\infty} V^{\otimes n}$$

si chiama algebra tensoriale. È infatti un'algebra associativa rispetto ad un ovvio prodotto che possiamo definire nel modo seguente: se $(v_1, ..., v_n)$ è una base di V, allora un tipico elemento di $T(V)$ è della forma

$$\sum_k \sum_{i_1,...,i_k} a_{i_1,...,i_k} v_{i_1} \otimes ... \otimes v_{i_k}$$

ove la somma su k è finita e gli indici possono anche essere ripetuti, ed i coefficienti stanno ovviamente in $\mathbb{K}$. Cioè i tensori che stanno in $T(V)$, che sono tutti i tensori possibili su V, sono una specie di polinomi nelle variabili $\{v_i\}$, con la notevole eccezione di non essere commutativi, in quanto ovviamente $v \otimes w \neq w \otimes v$. Che $T(V)$ sia uno spazio vettoriale è vero per costruzione, mentre la struttura di algebra si ha considerando il prodotto definito come:

$$v_{i_1} \otimes ... \otimes v_{i_k} \cdot v_{j_1} \otimes ... \otimes v_{j_h} := v_{i_1} \otimes ... \otimes v_{i_k} \otimes v_{j_1} \otimes ... \otimes v_{j_h}$$

Questo è ovviamente un prodotto associativo ed ha un'unità che è poi l'1 di $\mathbb{K} \subset T(V)$.

L'algebra tensoriale è ovviamente di dimensione infinita (possiamo pensare i suoi elementi come "polinomi non commutativi" negli elementi di V), e graduata, nel senso che si decompone in somma diretta di sottospazi vettoriali (per costruzione). Ha così senso parlare di grado di un tensore: un elemento $x \in T(V)$ ha grado n se si scrive come somma di elementi di potenze tensoriali di V non maggiori della n-ma (del tutto analogamente al grado dei polinomi: l'algebra $\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$ è infatti graduata ed il grado è quello usuale dei polinomi).

Consideriamo in $T(V)$ l'ideale $I(V)$ generato dagli elementi della forma $v \otimes v$ per $v \in V$, e quindi il quoziente

$$\wedge(V) := T(V)/I(V)$$

Denotiamo l'immagine di un tensore $v_{i_1} \otimes ... \otimes v_{i_k} \in T(V)$ nel quoziente $\wedge(V)$ con la scrittura $v_{i_1} \wedge ... \wedge v_{i_k}$. Poichè l'ideale $I(V)$ è graduato, nel senso che se $I^k(V) := I(V) \cap V^{\otimes k}$ allora

$$I(V) = \bigoplus_k I^k(V)$$

anche l'algebra $\wedge(V)$ è graduata:

$$\wedge(V) = \bigoplus_k \wedge^k(V)$$

con

$$\wedge^k(V) = V^{\otimes k}/I^k(V)$$

Questa nuova algebra è stata costruita in modo che i suoi elementi, oltre a soddisfare le relazioni multilineari dei tensori qualsiasi, soddisfino anche quelle antisimmetriche, cioè se v e w sono in V allora

$$v \wedge w = -w \wedge v$$

e quindi

$$v \wedge v = 0$$

Da qui per induzione:

$$\forall x \in \wedge^k(V) \quad \forall y \in \wedge^h(V) \qquad x \wedge y = (-1)^{kh} y \wedge x$$

Gli elementi di $\wedge(V)$ si dicono *tensori antisimmetrici*, e $\wedge(V)$ si dice *algebra esterna su* V.

Ora ci concentreremo sui singoli addenti $\wedge^k(V)$ dell'algebra esterna. Consideriamo cioè il solito spazio vettoriale V di dimensione n con la solita base $(v_1, ..., v_n)$, e l'algebra esterna di grado k su V: $\wedge^k V$.

Vogliamo caratterizzare questo spazio in termini di mappe multilineari, come abbiamo fatto per i tensori. Intanto osserviamo che $\wedge^k V$ si ottiene da $V^{\otimes k}$ quozientando per il sottospazio generato dai vettori $v \wedge v$, e quindi i suoi elementi, che hanno la forma

$$\sum_{i_1,...,i_k} a_{i_1...i_k} v_{i_1} \wedge ... \wedge v_{i_k}$$

verificano relazioni del tipo:

$$v_{i_1} \wedge ... \wedge v_{i_j} \wedge ... \wedge v_{i_j} \wedge ... \wedge v_{i_k} = 0$$

Ora consideriamo le applicazioni multilineari alterne di V in sé, cioè le funzioni

$$f : V^k \to W$$

multilineari e tali che

$$f(v_{i_1}, ..., v, ..., v, ..., v_{i_k}) = 0$$

il che ovviamente implica

$$f(v_{i_1}, ..., v, ..., w, ..., v_{i_k}) = -f(v_{i_1}, ..., w, ..., v, ..., v_{i_k})$$

Se $W = \mathbb{K}$ abbiamo il concetto di forma multilineare alternante in k variabili: un esempio che dovrebbe essere noto è il determinante di una matrice: se vediamo una matrice A come la successione ordinata dei vettori colonna che la compongono, $A = (A^1, ..., A^n)$, il determinante

$$\det : V^n \to \mathbb{K}$$

è multilineare alternante, e si può completamente caratterizzare aggiungendo la condizione

$$\det(I) = 1$$

che il determinante della matrice identica sia 1.

Proprio il determinante interviene nella dimostrazione del seguente teorema:

Teorema .4 *Se V e W sono spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ e se*

$$f : V^k \to W$$

è una funzione multilineare alternante, dati qualsiasi $w_1, ..., w_k \in V$ e se $A = ((a_{ij}))$ è una matrice, allora, se

$$u_1 = \sum_{i=1}^{k} a_{1i} w_i, \qquad \cdots, \qquad u_k = \sum_{i=1}^{k} a_{ki} w_i$$

si ha che

$$f(u_1, .., u_k) = \det(A) f(w_1, ..., w_k)$$

DIMOSTRAZIONE: Intanto si ha

$$f(u_1, .., u_k) = f\left(\sum_{i=1}^{k} a_{1i} w_i, ..., \sum_{i=1}^{k} a_{ki} w_i\right)$$

e, per multilinearità, si ottiene

$$\sum_{\sigma} f\left(a_{1,\sigma(1)} w_{\sigma(1)}, ..., a_{1,\sigma(k)} w_{\sigma(k)}\right)$$

ove la somma è estesa a tutte le possibili mappe $\sigma : \{1, ..., k\} \to \{1, ..., k\}$ che riordinano k elementi. Questa somma è pari a

$$\sum_\sigma a_{1,\sigma(1)}...a_{k,\sigma(k)} f(w_{\sigma(1)}, ..., w_{\sigma(k)})$$

sempre per multilinearità. Osserviamo che la somma in realtà non è estesa a tutte le combinazioni possibili di elementi, ma solo alle permutazioni, cioè alle mappe σ biunivoche, perché nel caso di una combinazione di termini che non sia una permutazione, nel termine $f(w_{\sigma(1)}, ..., w_{\sigma(k)})$ due o più argomenti sono uguali e quindi il termine è nullo, per alternanza di f. Otteniamo cioè

$$\sum_{\sigma \in S_k} a_{1,\sigma(1)}...a_{k,\sigma(k)} f(w_{\sigma(1)}, ..., w_{\sigma(k)})$$

ove S_k è il gruppo simmetrico su k elementi (cioè l'insieme di tutte le permutazioni su k elementi). Ora, ogni permutazione $\sigma \in S_k$ si può ottenere come una sequenza di scambi fra coppie di elementi: quando scambiamo due argomenti nel temine $f(w_{\sigma(1)}, ..., w_{\sigma(k)})$ il segno cambia (per alternanza) e quindi una volta effettuata la permutazione, otteniamo un fattore $(-1)^{\text{segno}(\sigma)}$ ove il segno di una permutazione è il numero di scambi che la compongono.

Insomma, trasformare il termine $f(w_{\sigma(1)}, ..., w_{\sigma(k)})$ in $f(w_1, ..., w_k)$ comporta unicamente l'apparizione di un segno $(-1)^{\text{segno}(\sigma)}$, e quindi la somma precedente si trasforma in

$$f(u_1, ..., u_k) = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\text{segno}(\sigma)} a_{1,\sigma(1)}...a_{k,\sigma(k)} f(w_1, ..., w_k)$$

che è uguale a

$$\det(A) f(w_1, ..., w_k)$$

QED

Il fatto che il determinante di A sia definito come

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\text{segno}(\sigma)} a_{1,\sigma(1)}...a_{k,\sigma(k)}$$

segue dal familiare sviluppo di Laplace, e costituisce un esercizio di calcolo combinatorio (nel farlo può essere utile esaminare i casi $k = 2$ e $k = 3$ separatamente...)

La comprensione del teorema precedente è cruciale per capire le forme alternanti. Abbiamo comunque bisogno di una versione più generale di questo teorema, la cui dimostrazione proveremo a lasciare per esercizio, non prima d'aver messo in grado il lettore di risolverlo, per via delle seguenti osservazioni.

Consideriamo una matrice A di dimensioni $k \times n$ e con $k \leq n$ ed un sottoinsieme S dell'insieme di interi $\{1, ..., n\}$ con k elementi. Di tali sottoinsiemi ve ne sono

$$\binom{n}{k}$$

come noto dal calcolo combinatorio. Se questi elementi sono $S = \{i_1, ..., i_k\}$ allora possiamo assumere che siano ordinati: $i_1 < ... < i_k$. Consideriamo una funzione

$$\sigma : \{1, ..., k\} \to S$$

cioè un modo di associare ad un numero fra 1 e k un elemento di S e supponiamo che questa funzione sia iniettiva. Allora è biunivoca (perché?) e quindi definisce una permutazione di S. Ad esempio, se $n = 4$ e $k = 3$, e $S = \{1, 3, 4\}$, la permutazione σ definita da

$$\sigma(1) = 4 \qquad \sigma(3) = 1 \qquad \sigma(4) = 3$$

ha segno $+1$.

Se chiamiamo $P(S)$ l'insieme delle permutazioni degil elementi di S (che è dire l'inisieme delle biiezioni di S in sé, e se torniamo alla nostra matrice $A = ((a_{ij}))$, per ogni insieme S di cardinalità k possiamo considerare il minore $k \times k$ di A costituito dagli elementi a_{ij} tali che $j \in S$. Denotiamo con

$$\det{}_S(A)$$

il determinante di questo minore. Allora è

$$\det{}_S(A) = \sum_{\sigma \in P(S)} (-1)^{\text{segno}(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} ... a_{k,\sigma(k)}$$

Ora siano $w_1, ..., w_n$ elementi in V, e per ognuno degli insiemi S definiamo

$$w_S = (w_{i_1}, ..., w_{i_k})$$

ove gli elementi di S sono tali che $i_1 < ... < i_k$. A questo punto, usando le notazioni introdotte, il lettore dovrebbe dimostrare il seguente

Teorema .5 *Se V e W sono $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, se*

$$f : V^k \to W$$

è una mappa multilineare alternante, se $w_1, ..., w_n$ sono elementi di V e A è una matrice $k \times n$ e se

$$u_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} w_i, \qquad \cdots, \qquad u_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} w_i$$

allora

$$f(u_1,..,u_k) = \sum_S \det{}_S(A) f(w_S)$$

(Come suggerimento si osservi che la dimostrazione è simile a quella del teorema precedente, salvo in un punto nel quale bisogna spezzare la somma $\sum_\sigma$ come $\sum_S \sum_{\sigma \in P(S)}$).

Siamo ora in grado di dimostrare una proprietà universale dei prodotti esterni, analoga al teorema 1:

Teorema .6 *Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{K}$ e se k è un intero tale che $1 \leq k \leq n$ allora esiste un unico spazio vettoriale Λ di dimensione finita su $\mathbb{K}$, ed una mappa multilineare alternante*

$$\lambda : V^k \to \Lambda$$

tale che

(1) *Se W è uno spazio vettoriale e se $f : V^k \to W$ è una mappa multilineare alternante, allora esiste un'unica mappa lineare $f_* : \Lambda \to W$ tale che $f = f_* \circ \lambda$, i.e. che il seguente diagramma*

$$\begin{tikzcd} V^k \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "f"'] & & \Lambda \arrow[dl, "f_*"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

(2) *Se $(v_1, ..., v_n)$ è una base di V allora$\{\lambda(v_{i_1}, ..., v_{i_k})\}$ con $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$ è una base di W.*

Dimostrazione: Procediamo in modo analogo al teorema 1, considerando per ogni sottoinsieme S di $\{1, ..., n\}$ si k elementi un simbolo λ_S, e prendendo lo spazio vettoriale generato da questi simboli su $\mathbb{K}$, che ha dimensione $\binom{n}{k}$, e che denotiamo Λ. Se ora $\{v_1, ..., v_n\}$ è una base di V, se $\{u_1, ..., u_k\}$ sono elementi di V e la matrice A è definita come

$$u_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$$

allora la mappa λ si definisce come:

$$\lambda(u_1, ..., u_k) := \sum_S \det{}_S(A) \lambda_S$$

Che si tratti di una mappa multilineare alternante segue dalle proprietà dei determinanti, ed è pure un fatto ovvio che

$$\lambda(v_{i_1}, ..., v_{i_k}) = \lambda_S$$

se $S = \{i_1, ..., i_k\}$ con $i_1 < ... < i_k$.

La dimostrazione della (1) si riduce alla semplice osservazione che se $f : V^k \to W$ è multilineare alternante, la mappa

$$f_*(\lambda_S) := f(v_{i_1}, ..., v_{i_k})$$

è ben definita su una base di Λ e quindi si estende ad un'unica mappa lineare da Λ in W.

La dimostrazione della (2) si lascia come esercizio: di nuovo basterà notare che gli elementi $\{\lambda(v_{i_1}, ..., v_{i_k})\}$ generano Λ e sono esattamente $\binom{n}{k}$.

QED

Di nuovo possiamo dedurre l'unicità dello spazio Λ dalla sua proprietà universale, ed è un esercizio vedere che la potenza esterna $\wedge^k(V)$ soddisfa questa proprietà: ne segue che abbiamo una naturale identificazione

$$\Lambda \cong \wedge^k(V)$$

che, a livello di basi, è

$$\lambda(v_{i_1}, ..., v_{i_k}) \longleftrightarrow v_{i_1} \wedge ... \wedge v_{i_k}$$

Osserviamo che il risultato precedente può riformularsi dicendo che lo spazio delle forme multilineari alternanti è isomorfo allo spazio duale dei tensori antisimmetrici:

$$Alt(V^k, \mathbb{K}) \cong (\wedge^k(V))^*$$

Inoltre, è possibile associare ad una mappa $f : V \to W$ lineare la sua potenza esterna k-ma $\wedge^k f : \wedge^k V \to \wedge^k W$ definita come

$$\wedge^k f(u_1, ..., u_k) = f(u_1) \wedge ... \wedge f(u_k)$$

In particolare, dato che

$$\dim(\wedge^k(V)) = \binom{\dim(V)}{k}$$

osserviamo che la massima potenza esterna ($k = n$) di V è unidimensionale: inoltre, dato che $v \wedge v = 0$, non possono esservi potenze esterne $(n+1)$-dimensionali o più, e quindi l'algebra esterna è finito dimensionale!

Dato che $\wedge^n(V) \cong \mathbb{K}$, una sua base è data da un qualsiasi scalare non nullo: una scelta naturale è proprio la funzione determinante, che si caratterizza con la condizione $det(1) = 1$.

Esercizio .7 Se $dim(V) = n$ e se $f : V \to V$ è una mappa lineare, allora la mappa $\wedge^n f : \wedge^n(V) \to \wedge^n(V)$ è semplicemente una mappa lineare di $\mathbb{K}$ in sè, cioè la moltiplicazione per uno scalare. Dimostrare che

$$(\wedge^n f)(x) = \det(f)x$$

Per finire vogliamo osservare che un caso particolare di prodotto esterno è certo noto al lettore: si tratta del prodotto vettoriale. Ricordiamo infatti che se V ha dimensione 3, è definito il prodotto vettoriale di due suoi elementi:

$$[v, w] := \begin{pmatrix} v_1 w_2 - v_2 w_1 \\ v_1 w_3 - v_3 w_1 \\ v_2 w_3 - v_3 w_2 \end{pmatrix}$$

se $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$. Ma si ha

$$[v, w] = v \wedge w$$

Infatti $\dim(\wedge^2 V) = \dim(V) = 3$ (*in questo caso e solo in questo caso* la dimensione di V coincide con quella della sua seconda potenza esterna), e dato che il prodotto vettoriale è una funzione bilineare alternante, per universalità si ha la formula precedente.

Questa è una particolarità della dimensione 3, che ha molte ripercussioni in fisica, ad esempio nello scrivere le equazioni dei moti rigidi: si potrebbe dire che lo spazio reale ha tre dimensioni perchè c'è questa coincidenza fra la dimensione di $\mathbb{R}^3$ e quella di $\wedge^2\mathbb{R}^3$!!!