

# CAPITOLO 1

## Esempi di varietà di Poisson

In questo primo capitolo si richiama la teoria delle varietà di Poisson mettendone in luce gli aspetti essenziali per mezzo di esempi. Si tratta quindi di una compilazione di materiale noto che appartiene agli ultimi venti anni di ricerca, e che viene qui presentato in forma sintetica secondo la visione di chi scrive. Nel §1 si introducono le parentesi di Poisson sulle varietà simplettiche e si discute in dettaglio la corrispondenza fra le proprietà algebriche delle parentesi e quelle geometriche della forma simplettica, terminando con l'introduzione della categoria delle varietà di Poisson; nel §2 si analizzano le strutture di Lie–Poisson, il principale esempio non simplettico e il più semplice esempio di struttura di Poisson non localmente costante, mettendone in luce gli aspetti che si generalizzano al caso di una varietà di Poisson qualsiasi; nel §3 si introduce la fogliazione (generalizzata) simplettica determinata da una varietà di Poisson e si mostrano alcuni esempi fondamentali; nel §4 si introducono i gruppi di Poisson–Lie, che sono una classe di esempi di varietà di Poisson che non ha luogo nel caso simplettico e che si considerano generalmente come limiti semiclassici dei gruppi quantici.

Ora e nel séguito, il termine “varietà sarà sinonimo di “varietà infinitamente differenziabile di dimensione finita, pura, di Hausdorff e paracompatta.

### 1.1 Parentesi di Poisson sulle varietà simplettiche

Sia  $(M, \omega)$  una varietà simplettica<sup>1</sup>: poiché ci limitiamo al caso di oggetti di dimensione finita esiste un unico significato da attribuire alla condizione “ $\omega$  è non degenera, che possiamo riformulare come segue: la mappa di fibrati

$$\omega^\flat : TM \longrightarrow T^*M$$

indotta da  $\omega$  come  $(X \in \mathfrak{X}(M))$

---

<sup>1</sup>Per la teoria delle varietà simplettiche, che certo assumiamo per nota, i migliori testi di riferimento sono quelli di Meccanica, come [1], [5], [73]; per gli aspetti più puramente geometrici e topologici due ottime introduzioni sono la raccolta [6] e la monografia [75].

$$\omega^\flat(X) = -i_X\omega$$

è un isomorfismo di fibrati vettoriali<sup>2</sup>. In particolare ammette un isomorfismo inverso  $\omega^\sharp : T^*M \rightarrow TM$ , che possiamo comporre con il differenziale  $d : C^\infty(M) \rightarrow \Omega^1(M)$  per ottenere una funzione  $\mathbb{R}$ -lineare

$$X : C^\infty(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

Un elemento che appartenga all'immagine di questa applicazione si dice *campo hamiltoniano*: è della forma  $X(h)$  e lo denotiamo più semplicemente con  $X_h$ ; la funzione  $h \in C^\infty(M)$  si dice l'*hamiltoniana* del campo vettoriale  $X_h$ . Per definizione il campo hamiltoniano di  $h$  soddisfa alla condizione

$$i_{X_h}\omega = -dh$$

Notiamo che la funzione hamiltoniana non è univocamente determinata: la condizione  $X_h = X_k$  equivale alla

$$dh = dk$$

e quindi  $h$  e  $k$  differiscono per una funzione localmente costante.

Ad esempio, se  $M = \mathbb{R}^{2n}$  è dotato della struttura simplettica standard, vale a dire di coordinate  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  e della forma simplettica

$$\omega = \sum_i dq_i \wedge dp_i$$

allora se  $h \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  il campo hamiltoniano da essa generato è

$$X_h = \sum_i \left( \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right)$$

L'importanza dei campi hamiltoniani è stata riconosciuta già da Lagrange e Poisson (cfr. [61, Vol.II], [82]), che li utilizzarono per la formulazione del problema dell'integrabilità delle equazioni del moto in termini di integrali primi: in effetti le curve integrali del campo hamiltoniano  $X_h$  sono esattamente le soluzioni delle equazioni canoniche

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial h}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial h}{\partial q_i} \end{cases}$$

---

<sup>2</sup>La scelta del segno è ovviamente convenzionale: la nostra convenzione renderà il passaggio ai campi hamiltoniani un morfismo di algebre di Lie, piuttosto che un antiomorfismo. Questa scelta del segno è in accordo con la convenzione adottata in [63], [102] ma non in [5], [1] né in [73].

Dunque una funzione  $f$  costante sulle traiettorie del sistema hamiltoniano, vale a dire un integrale primo del sistema canonico, deve verificare la

$$X_h(f) = 0$$

Poisson scoprì una operazione per ottenere, a partire da integrali primi, nuovi integrali primi, cioè la parentesi che oggi porta il suo nome.

Torniamo al caso generale di una varietà simplettica e definiamo, per ogni  $f, g \in C^\infty(M)$ , la loro *parentesi di Poisson* come

$$\{f, g\} := \mathcal{L}_{X_f}g = X_f(g)$$

Ovviamente

$$\{f, g\} = X_f(g) = i_{X_f}dg = -i_{X_f}i_{X_g}\omega = \omega(X_f, X_g)$$

per antisimmetricità di  $\omega$ , sicché  $\{ \} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$  è una operazione  $\mathbb{R}$ -bilineare e antisimmetrica. Inoltre, dato che i campi hamiltoniani (come tutti i campi vettoriali) definiscono derivazioni nell'algebra  $C^\infty(M)$  vale l'identità di Leibniz

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$$

Infine, come mostrato da Jacobi, l'applicazione bilineare  $\{ \}$  definisce una struttura di algebra di Lie reale su  $C^\infty(M)$ , in quanto è verificata l'identità di Jacobi:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$$

che segue (anzi equivale) alla chiusura della forma simplettica. Per dimostrarla notiamo che equivale alla seguente identità di derivazione

$$\mathcal{L}_{X_h}\{f, g\} = \{\mathcal{L}_{X_h}f, g\} + \{f, \mathcal{L}_{X_h}g\}$$

che si verifica ricorrendo al flusso  $\varphi_t$  del campo hamiltoniano  $X_h$ : per prima cosa si osservi che questo flusso preserva le parentesi di Poisson; infatti

$$\mathcal{L}_{X_h}\omega = di_{X_h}\omega = -d^2h = 0$$

e quindi

$$\frac{d\varphi_t^*\omega}{dt} = \varphi_t^*\mathcal{L}_{X_h}\omega = 0$$

Dunque, per ogni  $f, g \in C^\infty(M)$ :

$$\varphi_t^*\{f, g\} = \{\varphi_t^*f, \varphi_t^*g\}$$

Derivando questa identità in  $t$  e valutando in  $t = 0$  otteniamo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_h}\{f, g\} &= \left(\frac{d}{dt}\{\varphi_t^* f, \varphi_t^* g\}\right)_{t=0} = \left(\frac{d}{dt}\omega(X_{\varphi_t^* f}, X_{\varphi_t^* g})\right)_{t=0} \\ &= \omega(X_{\mathcal{L}_{X_h} f}, X_g) + \omega(X_f, X_{\mathcal{L}_{X_h} g}) \\ &= \{\mathcal{L}_{X_h} f, g\} + \{f, X_{\mathcal{L}_{X_h} g}\}\end{aligned}$$

Una formulazione interessante dell'identità di Jacobi è<sup>3</sup>

$$X_{\{f, g\}} = [X_f, X_g]$$

che fra l'altro implica che i campi hamiltoniani sono una sottoalgebra di Lie dell'algebra dei campi di vettori e una rappresentazione dell'algebra di Lie  $C^\infty(M)$  rispetto alle parentesi di Poisson: che questa identità equivalga a quella di Jacobi si verifica immediatamente

$$X_{\{f, g\}}(h) = \{\{f, g\}, h\} = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} = [X_f, X_g](h)$$

**Definizione 1.1.1** *L'algebra di Lie dei campi di vettori della forma  $X_f$  ( $f \in C^\infty(M)$ ) si denota con  $\text{Ham}(M)$  e si dice algebra dei campi hamiltoniani di  $M$ .*

Si osservi che, essendo  $\omega^\# : T^*M \longrightarrow TM$  un isomorfismo, il  $C^\infty(M)$ -modulo generato dall'algebra di Lie reale  $\text{Ham}(M)$  coincide con l'intero modulo  $\mathfrak{X}(M)$  dei campi vettoriali di  $M$ : in effetti è immagine del sottomodulo di  $\Omega^1(M)$  generato dallo spazio dei differenziali esatti che è  $\Omega^1(M)$  stesso e, dato che  $X_f = \omega^\# df$ , lo spazio delle forme esatte è isomorfo a quello dei campi hamiltoniani sicché anche i moduli da essi generati sono isomorfi, essendo  $\omega^\#$  un isomorfismo di fibrati vettoriali.

Notiamo che nel dedurre l'identità di Jacobi abbiamo usato in modo essenziale la condizione di integrabilità della struttura simplettica  $d\omega = 0$ . In effetti questa condizione equivale all'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson: precisamente, se  $\omega$  è una 2-forma non degenera ma non necessariamente chiusa, possiamo comunque definire l'isomorfismo  $\omega^\# : T^*M \longrightarrow TM$  e quindi la funzione  $X : C^\infty(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$  e, per tramite di essa, le parentesi  $\{f, g\} = X_f(g)$ ; queste saranno bilineari e antisimmetriche (essendo  $\omega$  una 2-forma), e verificheranno l'identità di Leibniz perché  $X$  ha immagine in  $\mathfrak{X}(M)$ ;

<sup>3</sup>Si tratta della formulazione che lo stesso Jacobi le diede originariamente.

supponiamo ora che  $\{ \}$  verifichino anche l'identità di Jacobi, e calcoliamo

$$\begin{aligned}
d\omega(X_f, X_g, X_h) &= \mathcal{L}_{X_f}\omega(X_g, X_h) - \mathcal{L}_{X_g}\omega(X_f, X_h) + \mathcal{L}_{X_h}\omega(X_f, X_g) - \\
&\quad - \omega([X_f, X_g], X_h) + \omega([X_f, X_h], X_g) - \omega([X_g, X_h], X_f) \\
&= \mathcal{L}_{X_f}\{g, h\} - \mathcal{L}_{X_g}\{f, h\} + \mathcal{L}_{X_h}\{f, g\} - \\
&\quad - \omega(X_{\{f, g\}}, X_h) + \omega(X_{\{f, h\}}, X_g) - \omega(X_{\{g, h\}}, X_f) \\
&= \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \\
&\quad - \{\{f, g\}, h\} - \{\{h, f\}, g\} - \{\{g, h\}, f\} \\
&= 2(\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}) = 0
\end{aligned}$$

Poiché i campi hamiltoniani generano il modulo dei campi di vettori questa verifica basta a mostrare che  $d\omega = 0$ .

La presenza delle parentesi di Poisson consente di riformulare nel linguaggio delle funzioni tutti i risultati geometrici espressi nel linguaggio delle forme differenziali; ad esempio le equazioni canoniche possono semplicemente scriversi come

$$\dot{f} = \{h, f\}$$

è ora evidente che le costanti del moto sono esattamente le funzioni che commutano con l'hamiltoniana: l'essere la forma simplettica non degenerare può quindi riformularsi dicendo che le uniche costanti del moto per ogni sistema hamiltoniano rispetto a quella forma sono le funzioni localmente costanti.

Le funzioni localmente costanti possono essere pensate come la componente  $H^0(M)$  di grado zero della coomologia di de Rham della varietà; possiamo anche dare una interpretazione coomologica per i campi hamiltoniani. Infatti abbiamo già osservato come i campi hamiltoniani siano immagine delle 1-forme esatte; è naturale chiedersi a cosa corrispondano le forme chiuse: basta riscrivere la condizione  $d\omega^\flat X = 0$  come

$$0 = d\omega^\flat X = -di_X\omega = -i_Xd\omega - di_X\omega = -\mathcal{L}_X\omega$$

Dunque i campi che corrispondono alle forme chiuse sono quelli lungo i quali la forma simplettica è costante: in termini di parentesi di Poisson

$$\mathcal{L}_X\{f, g\} = \{\mathcal{L}_X f, g\} + \{f, \mathcal{L}_X g\}$$

Un campo siffatto si chiama *localmente hamiltoniano* perché, in virtù del lemma di Poincaré, la forma che gli corrisponde è localmente esatta. Dunque  $H^1(M)$  misura quanti campi di vettori localmente hamiltoniani non sono hamiltoniani. Notiamo infine che esiste una successione esatta

$$0 \longrightarrow H^0(M) \longrightarrow C^\infty(M) \longrightarrow \text{Loc}(M) \longrightarrow H^1(M) \longrightarrow 0$$

ove  $\text{Loc}(M)$  denota lo spazio dei campi localmente hamiltoniani, e una successione esatta

$$0 \longrightarrow H^0(M) \longrightarrow C^\infty(M) \longrightarrow \text{Ham}(M) \longrightarrow 0$$

Sia  $\text{Loc}(M)$  che  $\text{Ham}(M)$  sono algebre di Lie: infatti  $[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$  e  $\mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$  il che implica che se  $\mathcal{L}_X\omega = \mathcal{L}_Y\omega = 0$  anche  $\mathcal{L}_{[X,Y]}\omega = 0$ . Si noti inoltre che  $\text{Ham}(M)$  è un ideale di Lie in  $\text{Loc}(M)$ :

$$[X, X_f](g) = \mathcal{L}_X\{f, g\} - \{f, \mathcal{L}_X g\} = \{\mathcal{L}_X f, g\} = X_{\mathcal{L}_X f}(g)$$

Rammentiamo ora qualche esempio di varietà simplettica: intanto abbiamo il caso lineare, che possiamo formulare in modo intrinseco come segue: sia  $V$  uno spazio vettoriale e  $V^*$  il suo spazio duale. Allora su  $V \times V^*$  esiste una forma simplettica (lineare!) data da

$$\omega_{(v,\varphi)}((w, \psi), (z, \chi)) = \chi(w) - \psi(z)$$

ove  $(v, \varphi) \in V \times V^*$  è il punto nel quale la forma è calcolata e  $(w, \psi), (z, \chi) \in T_{(v,\varphi)}(V \times V^*)$  sono vettori tangenti nel punto (usiamo l'identificazione fra lo spazio tangente in un punto e lo spazio stesso per mezzo della traslazione). Ovviamente questa forma è costante e non degenera; che sia chiusa è facile vederlo, anzi è semplice verificarne l'esattezza: se  $\Theta$  è la 1-forma definita nel punto  $(v, \varphi)$  come

$$\Theta_{(v,\varphi)}(w, \psi) = \varphi(w)$$

allora  $\omega = -d\Theta$ . La 1-forma  $\Theta$  si dice *forma di Liouville* e la sua relazione con la forma simplettica si verifica facilmente nelle coordinate canoniche: si tratta di scegliere un qualsiasi sistema di coordinate  $(q_1, \dots, q_n)$  in  $V$ , il che induce una scelta di coordinate duali  $(p_1, \dots, p_n)$  in  $V^*$ : allora è immediato verificare che

$$\Theta = \sum_i p_i dq_i$$

e quindi che

$$-d\Theta = \sum_i dq_i \wedge dp_i = \omega$$

Si noti che questa discussione può farsi nel caso in cui  $V$  abbia dimensione infinita, sebbene in tal caso sia necessario specificare in che senso la forma  $\omega$  è non degenera (cfr. [20], [73]).

In ogni caso le parentesi di Poisson di due funzioni  $F, G \in C^\infty(V \times V^*)$  si scrivono facilmente tenendo conto del fatto che  $C^\infty(V \times V^*) \cong C^\infty(V) \otimes$

$C^\infty(V^*)$  (cfr. [101, p.531]) e che quindi possiamo scrivere  $F = f \otimes \varphi$  e  $G = g \otimes \gamma$ , col che

$$\{f \otimes \varphi, g \otimes \gamma\} = d\gamma(df) - d\varphi(dg)$$

Ad esempio, fissate delle coordinate  $(q_1, \dots, q_n)$  su  $V$  (e quindi le loro coordinate duali  $(p_1, \dots, p_n)$  su  $V^*$ ) abbiamo che

$$\begin{aligned} \{f \otimes \varphi, g \otimes \gamma\} &= \left\langle \sum_i \frac{\partial \gamma}{\partial p_i} p_i, \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j} q_j \right\rangle - \left\langle \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} p_i, \sum_j \frac{\partial g}{\partial q_j} q_j \right\rangle \\ &= \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) \end{aligned}$$

cioè l'usuale espressione delle parentesi di Poisson quale si ritrova ad esempio in [82].

L'importanza del caso lineare è dovuta al teorema di Darboux:

**Teorema (DARBOUX) 1.1.2** *Se  $(M, \omega)$  è una varietà simplettica, per ogni  $x \in M$  esiste una carta locale  $U \ni x$  con coordinate  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  nella quale la forma simplettica è costante (e quindi isomorfa alla forma simplettica standard).*

Ricordiamo brevemente l'elegante argomento dato da Moser in [77] per dimostrare questo teorema (argomento valido anche in dimensione infinita quando la forma è fortemente non degenera, ad esempio nel caso di spazi riflessivi): poiché l'enunciato del teorema si riferisce ad una carta locale possiamo supporre che  $M$  sia uno spazio vettoriale simplettico e  $x = 0$ . Se  $\omega_0 = \omega(0)$  e  $\tilde{\omega} = \omega - \omega_0$  allora, per il lemma di Poincaré e la simpletticità di  $\omega$ , esiste una 1-forma  $\alpha$  tale che  $d\alpha = \tilde{\omega}$  e, a meno di sostituire  $\alpha$  con  $\alpha - \alpha(0)$ , possiamo supporre che  $\alpha(0) = 0$ . Ora entra in gioco l'ipotesi di non degenerazione della forma  $\omega$ , che consente di definire un campo vettoriale dipendente dal tempo  $X_t$  come

$$i_{X_t} \omega_t = -\alpha$$

ove  $\omega_t = \omega + t\tilde{\omega}$  è ovviamente chiusa e non degenera. La condizione  $\alpha(0) = 0$  implica  $X_t(0) = 0$  e quindi possiamo integrare l'equazione differenziale associata al campo  $X_t$  intorno a 0: il flusso del campo  $\varphi_t$  sarà tale che  $\varphi_0 = \text{identità}$  e quindi

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^* \omega_t) = \varphi_t^*(\mathcal{L}_{X_t} \omega_t) + \varphi_t^* \frac{d}{dt} \omega_t = \varphi_t^* di_{X_t} \omega_t + \varphi_t^* \tilde{\omega} = \varphi_t^*(d(-\alpha) + \tilde{\omega}) = 0$$

sicché  $\varphi_1$  è un diffeomorfismo che trasforma  $\omega$  in  $\omega_0$ .

È immediato generalizzare l'esempio di uno spazio vettoriale simplettico al caso del fibrato cotangente di una varietà differenziabile  $M$ : allora possiamo definire una 1-forma su  $T^*M$  usando ad esempio le coordinate locali  $(x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n)$  su  $T^*M$  come

$$\Theta = \sum_i \xi_i dx_i$$

e quindi una forma simplettica  $\omega = -d\Theta$ .

Una classe di esempi di varietà simplettiche assai rilevante è data dalle varietà kähleriane: si tratta di varietà complesse  $(M, J)$  dotate di una metrica riemanniana  $g$  compatibile

$$g(JX, Y) + g(X, JY) = 0$$

e tale che la struttura complessa sia parallela rispetto alla connessione indotta dalla metrica:  $\nabla J = 0$ . Possiamo allora definire una 2-forma differenziale come

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y)$$

Dato che  $g$  è una metrica riemanniana la forma  $\omega$  è non degenera, e la condizione  $\nabla J = 0$  implica  $d\omega = 0$ : infatti  $\omega$  è parallela perché lo sono  $g$  e  $J$ , quindi è chiusa (cfr. [53] Vol.II). Dunque, se  $g^\# : T^*M \rightarrow TM$  è l'isomorfismo indotto dal tensore non degenera  $g$ , i campi hamiltoniani  $X_f$  sono della forma  $Jg^\#df$ ; cioè le parentesi di Poisson si scrivono in termini della metrica e della struttura complessa.

L'esempio elementare di varietà kähleriana è uno spazio di Hilbert complesso  $\mathcal{H}$ , equipaggiato del suo prodotto scalare hilbertiano  $(\cdot, \cdot)$ ; in questo caso la metrica riemanniana è la parte reale del prodotto hilbertiano e la forma simplettica ne è la parte immaginaria:

$$(v, w) = g(v, w) + i\omega(v, w)$$

L'altro esempio fondamentale, relevantissimo in Meccanica Quantistica e Geometria Algebrica, è lo spazio proiettivo complesso, cioè lo spazio  $\mathbb{P}\mathcal{H}$  delle rette complesse per l'origine in uno spazio di Hilbert complesso  $\mathcal{H}$ . Lo spazio  $\mathbb{P}\mathcal{H}$ , come  $\mathcal{H} \setminus \{0\}$ , è una varietà complessa (con spazio tangente in  $v$  isomorfo a  $\mathcal{H}/v\mathbb{C}$ ) e la proiezione canonica  $\pi : \mathcal{H} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}\mathcal{H}$  che al vettore  $v \in \mathcal{H}$  assegna la retta  $v\mathbb{C}$  da esso generata è una submersione suriettiva. La metrica hermitiana (*metrica di Fubini-Study*) su  $\mathbb{P}\mathcal{H}$  è data da

$$h((d\pi)_v(w_1), (d\pi)_v(w_2)) = (w_1, w_2)$$

(per  $v \in \mathcal{H}$  con  $\|v\| = 1$ ,  $w_1, w_2 \in T_v\mathbb{P}\mathcal{H} \cong (v\mathbb{C})^\perp$ ); la sua parte reale è una metrica riemanniana e la sua parte complessa una forma simplettica (cfr. [53, Vol. II]).

Gli esempi che abbiamo dato di varietà simplettiche sono formulati in termini strettamente geometrici, cioè esibendo una forma simplettica; per determinare le parentesi di Poisson su queste varietà è quindi necessario applicare i procedimenti generali esposti in precedenza, che possiamo riassumere nel seguente schema:

Forma simplettica	$\longleftrightarrow$	Parentesi di Poisson
$d\omega = 0$	$\longleftrightarrow$	Identità di Jacobi
$\omega$ non degenerare	$\longleftrightarrow$	$\cap \ker X_f = H^0$

Il fatto che le frecce in questo schema siano invertibili è una osservazione dovuta a Pauli e Jost (cfr. [81] e [47]; Souriau in [96] attribuisce a Maxwell l'equivalenza fra l'identità di Jacobi e la condizione di cociclo):

**Teorema (PAULI–JOST) 1.1.3** *Se sull'algebra  $C^\infty(M)$  di una varietà  $M$  esiste una struttura di algebra di Lie  $\{ \}$  le cui parentesi soddisfino l'identità di Leibniz e il cui centro sia ridotto alle funzioni localmente costanti allora  $M$  possiede una struttura simplettica le cui parentesi di Poisson sono date dalle  $\{ \}$ .*

Questo legittima un modo alternativo di studiare la geometria simplettica, cioè partire direttamente dalla presenza delle parentesi di Poisson e spostare quindi l'attenzione dal punto di vista geometrico a quello analitico, cosa che possiamo formalizzare con la seguente definizione, la cui storia è assai complicata e che, per quanto formulata da Kirillov e Lichnerowicz negli anni '70 del XX secolo, può ascrivere a Sophus Lie (cfr. [65, p.237]):

**Definizione 1.1.4** *Una varietà  $M$  si dice varietà di Poisson se l'algebra delle funzioni  $C^\infty(M)$  possiede una struttura di algebra di Lie  $\{ \}$  in modo che l'identità di Leibniz*

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$$

*sia verificata per ogni  $f, g, h \in C^\infty(M)$ . Le parentesi di Lie  $\{ \}$  si dicono parentesi di Poisson della varietà.*

La discussione che abbiamo fin qui svolto mostra come ogni varietà simplettica sia una varietà di Poisson: ovviamente non vale il viceversa. Infatti non imponiamo nessuna condizione sulle parentesi di Poisson che sia paragonabile alla non degenerazione della forma simplettica. In effetti un esempio banale di varietà di Poisson è la *varietà di Poisson nulla*, dotata cioè delle parentesi  $\{f, g\} \equiv 0$  che corrisponde al caso di un'algebra di Lie abeliana. Qualsiasi varietà può banalmente essere equipaggiata di questa struttura di Poisson, che

non aggiunge né toglie nulla alla varietà ovviamente, ma che rende conto della diversità fra la teoria di Poisson e quella symplettica: la prima non possiede alcun tipo di rigidità, vale a dire che non esistono varietà che non sopportino strutture di Poisson, mentre è ben noto che vi sono varietà anche non topologicamente complicate che non posseggono struttura symplettica alcuna.

Se  $M$  è una varietà di Poisson possiamo evidentemente definire la mappa hamiltoniana  $X : C^\infty(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$  come

$$X_f(g) := \{f, g\}$$

Allora le identità di Leibniz e Jacobi si scrivono come

$$\begin{aligned} X_{fg} &= fX_g + gX_f \\ X_{\{f,g\}} &= [X_f, X_g] \end{aligned}$$

I campi hamiltoniani sono, come nel caso symplettico, le immagini delle funzioni per tramite della mappa  $X$  e ha ovviamente ancora senso definire i campi localmente hamiltoniani. Si noti tuttavia che in generale i campi localmente hamiltoniani *non sono* caratterizzati dalla

$$\mathcal{L}_X\{f, g\} = \{\mathcal{L}_X f, g\} + \{f, \mathcal{L}_X g\}$$

Un campo  $X$  che verifichi questa equazione è quindi esattamente una derivazione dell'algebra di Lie  $C^\infty(M)$  rispetto alle parentesi di Poisson.

**Definizione 1.1.5** *Un campo vettoriale  $X$  che sia una derivazione dell'algebra di Lie delle parentesi di Poisson su una varietà  $M$  si dice campo canonico o anche automorfismo infinitesimale della struttura di Poisson. Lo spazio formato dai campi canonici si denota con  $\text{Can}(M)$ .*

In generale:

$$\text{Ham}(M) \subsetneq \text{Loc}(M) \subsetneq \text{Can}(M)$$

Ad esempio su una varietà di Poisson nulla (con parentesi identicamente nulle) abbiamo  $\text{Ham}(M) = \text{Loc}(M) = 0$ , mentre  $\text{Can}(M) = \mathfrak{X}(M)$ .

Il nucleo della mappa  $X$  non sarà in generale ridotto alle sole funzioni localmente costanti.

**Definizione 1.1.6** *Una funzione  $c \in C^\infty(M)$  tale che  $\{c, f\} = 0$  per ogni  $f \in C^\infty(M)$  si dice funzione di Casimir. Lo spazio delle funzioni di Casimir si denota con  $\text{Cas}(M)$ .*

Le funzioni di Casimir sono dunque gli elementi del centro dell'algebra di Lie delle parentesi di Poisson. Ancora possiamo scrivere la successione esatta di algebre di Lie

$$0 \longrightarrow \text{Cas}(M) \longrightarrow C^\infty(M) \longrightarrow \text{Ham}(M) \longrightarrow 0$$

**Definizione 1.1.7** *Se  $(M, \{ \}_M)$  e  $(N, \{ \}_N)$  sono varietà di Poisson una funzione di Poisson è una funzione differenziabile  $F : M \longrightarrow N$  tale che*

$$F^*\{f, g\}_N = \{F^*f, F^*g\}_M$$

per ogni  $f, g \in C^\infty(N)$ . Lo spazio delle funzioni di Poisson si denota con  $P^\infty(M, N)$ .

Si noti che, se  $(M, \omega_M)$  e  $(N, \omega_N)$  sono varietà simplettiche una mappa canonica  $F : M \longrightarrow N$  nel senso usuale del termine, cioè tale che

$$\omega_M = F^*\omega_N$$

non è necessariamente una mappa di Poisson. Ad esempio possiamo considerare l'inclusione  $I : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$  rispetto alle strutture simplettiche canoniche definita come

$$I(q, p) = (q, 0, p, 0)$$

ove  $(q, p)$  e  $(q_1, q_2, p_1, p_2)$  sono le coordinate canoniche nei rispettivi spazi. Allora

$$I^*(dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2) = I^*dq_1 \wedge I^*dp_1 + I^*dq_2 \wedge I^*dp_2 = I^*dq_1 \wedge I^*dp_1 = dq \wedge dp$$

Tuttavia  $I^*\{q_2, p_2\} = 1$  mentre  $\{I^*q_2, I^*p_2\} = 0$ ; cioè  $I$  è una trasformazione simplettica ma non di Poisson. Se invece consideriamo la proiezione  $P : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  definita come

$$P(q_1, q_2, p_1, p_2) = (q_1, p_1)$$

allora abbiamo certamente una mappa di Poisson, mentre

$$P^*(dq \wedge dp) = P^*dq \wedge P^*dp = dq_1 \wedge dp_1 \neq dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2$$

cioè  $P$  non è simplettica.

Questi due controesempi mostrano anche il motivo per il quale i concetti di applicazione simplettica e di Poisson sono distinti: le mappe simplettiche “tendono ad essere immersioni, mentre quelle di Poisson sottoimmersioni. Allora, come ci si può attendere:

**Proposizione 1.1.8** *Se  $F : M \longrightarrow N$  è un diffeomorfismo locale fra varietà simplettiche, è una mappa simplettica se e solo se è di Poisson.*

**DIMOSTRAZIONE:** Una mappa  $F : M \longrightarrow N$  è di Poisson se e solo se data una funzione  $f \in C^\infty(N)$  qualsiasi esiste la  $F$ -relazione seguente fra i campi hamiltoniani:

$$\forall f \in C^\infty(N) \quad F_*X_{f \circ F} = X_f$$

(basta scrivere  $\{f, g\}$  come  $X_f(g)$ ). Allora,  $\omega_M = F^*\omega_N$  se e solo se

$$F^*\{f, g\}_N = \omega_M(F^*X_f, F^*X_g) = \omega_M(X_{f \circ F}, X_{g \circ F}) = \{f \circ F, g \circ F\}_M$$

QED

Si noti che è possibile usare la relazione  $F_*X_{f \circ F} = X_f$  per ogni  $f$  solo se  $F$  è un diffeomorfismo locale, altrimenti  $F_*$  non sarebbe nemmeno definita.

Ovviamente la composizione di applicazioni di Poisson è di Poisson sicché è ben definito il gruppo dei diffeomorfismi di Poisson; ad esempio il flusso di un campo hamiltoniano, come abbiamo visto, definisce un gruppo ad 1-parametro di diffeomorfismi di Poisson.

## 1.2 Strutture di Lie–Poisson

La prima e principale differenza esistente fra le parentesi di Poisson qualsiasi e quelle simplettiche risiede nella struttura locale. Esiste un analogo del teorema di Darboux per le varietà di Poisson (dovuto a Lie e a Weinstein nella sua forma più generale) che rende conto della ricchezza e complessità della teoria già nel caso locale, e che vogliamo discutere in questo paragrafo.

Per prima cosa notiamo che le parentesi di Poisson su una varietà di Poisson inducono sempre un 2-tensore controvariante antisimmetrico: deve cioè esistere una sezione  $\pi$  di  $\bigwedge^2 TM$  tale che

$$\{f, g\} = \pi(df, dg) = \langle \pi, df \wedge dg \rangle = i_\pi(df \wedge dg)$$

Infatti l'identità di Leibniz implica che la mappa  $(f, g) \mapsto \{f, g\}$  è una biderivazione antisimmetrica dell'algebra associativa  $C^\infty(M)$ , e quindi si identifica ad un 2-tensore antisimmetrico controvariante  $\pi \in \Gamma(\bigwedge^2 TM)$ .

È spontaneo chiedersi se non si possa definire la struttura di Poisson in termini del solo tensore  $\pi$ , e infatti è possibile: l'unica restrizione che dobbiamo imporre è l'identità di Jacobi, che costituirà la condizione di integrabilità della struttura di Poisson. Il seguente teorema è dovuto a Lichnerowicz [64] e, nella sua veste locale, a Lie [65], anche se il nostro enunciato è diverso nella forma:

**Teorema (LIE–LICHNEROWICZ) 1.2.1** *Un tensore  $\pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$  definisce per mezzo della*

$$\{f, g\} := \pi(df, dg)$$

*delle parentesi di Poisson su una varietà  $M$  se e solo se*

$$(*) \quad i_\pi di_\pi \omega = \frac{1}{2} i_{\pi \wedge \pi} d\omega$$

*per ogni 3-forma  $\omega$ .*

**DIMOSTRAZIONE:** Supponiamo che valga la condizione (\*) sul tensore  $\pi$ : allora

$$\begin{aligned} i_\pi di_\pi(df \wedge dg \wedge dh) &= \frac{1}{3}(i_\pi d\pi(df, dg) \wedge dh - d\pi(df, dh) \wedge dg + d\pi(dg, dh) \wedge df) \\ &= \frac{1}{3}(\pi(d\{f, g\} \wedge dh) - \pi(d\{f, h\}, dg) + \pi(d\{g, h\}, df)) \\ &= \frac{1}{3}(\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\}) \end{aligned}$$

e quindi la (\*) implica l'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson. Viceversa, l'identità di Jacobi implica la (\*) per forme esatte (per lo stesso calcolo appena svolto), mentre, se  $a \in C^\infty(M)$ :

$$\begin{aligned} i_\pi di_\pi(adf \wedge dg \wedge dh) &= i_\pi dai_\pi(df \wedge dg \wedge dh) \\ &= i_\pi da \wedge i_\pi(df \wedge dg \wedge dh) + ai_\pi di_\pi(df \wedge dg \wedge dh) \\ &= i_\pi da \wedge i_\pi(df \wedge dg \wedge dh) = i_{\pi \wedge \pi} d(adf \wedge dg \wedge dh) \end{aligned}$$

e quindi la (\*) segue dall'identità di Jacobi per combinazioni  $C^\infty(M)$ -lineari di forme esatte, cioè per forme qualsiasi.

QED

Dunque potremmo definire una varietà di Poisson come una coppia  $(M, \pi)$  ove  $\pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$  soddisfa alla (\*).

**Definizione 1.2.2** *Un tensore  $\pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$  soddisfacente alla (\*) del teorema precedente si dice tensore di Poisson sulla varietà  $M$ .*

Una ulteriore caratterizzazione delle parentesi di Poisson in termini tensoriali procede come segue: il tensore di Poisson induce una mappa differenziabile (questo fatto è del tutto analogo al caso della forma simplettica, solo che in questo caso il ruolo del fibrato tangente e cotangente è scambiato)

$$\pi^\# : \Omega^1 M \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

come

$$\pi^\# \alpha = i_\pi \alpha$$

Questo operatore ovviamente non è un isomorfismo né, in generale, una mappa di fibrati visto che il rango del tensore di Poisson può non essere costante (in altri termini il nucleo e l'immagine di  $\pi^\#$  non sono fibrati ma solo fasci nel caso generale). Comunque

$$\{f, g\} = \pi(df, dg) = \langle \pi^\# df, dg \rangle$$

da cui segue in particolare che

$$X_f = \pi^\# df$$

Dunque una struttura di Poisson può anche definirsi come una mappa  $\pi^\#$  antisimmetrica ( $\langle \pi^\# df, dg \rangle + \langle df, \pi^\# dg \rangle = 0$ ) e tale che

$$\langle \pi^\# \mathcal{L}_{\pi^\# \alpha_1} \alpha_2, \alpha_3 \rangle + \langle \pi^\# \mathcal{L}_{\pi^\# \alpha_2} \alpha_3, \alpha_1 \rangle + \langle \pi^\# \mathcal{L}_{\pi^\# \alpha_3} \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 0$$

per ogni terna di 1-forme differenziali  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Infatti

$$\langle \pi^\# \mathcal{L}_{\pi^\# df_1} df_2, df_3 \rangle = \langle \pi^\# d\mathcal{L}_{X_{f_1}} f_2, df_3 \rangle = \langle \pi^\# d\{f_1, f_2\}, df_3 \rangle = \{\{f_1, f_2\}, f_3\}$$

In séguito daremo una formulazione di questa condizione di integrabilità in un contesto più generale (che è come usualmente viene introdotta) usando il formalismo di Schouten–Nijenhuis. Qui invece, visto che siamo interessati a chiarire la natura locale delle parentesi di Poisson su una varietà, vediamo come la condizione del teorema precedente si scrive in coordinate, seguendo sostanzialmente Lie (cfr. [65, Cap.13, §62]). Fissiamo dunque un sistema di coordinate locali  $(x_1, \dots, x_n)$  intorno a qualche punto della nostra varietà di Poisson  $M$ : per semplificare (ciò che è equivalente) limitiamoci dunque a considerare  $M = \mathbb{R}^n$  con delle coordinate  $(x_1, \dots, x_n)$ ; supponiamo data su  $M$  una struttura di Poisson  $\{ \}$ :

$$\{f, g\} = X_f(g)$$

$X_f$  è un campo vettoriale, quindi

$$X_f = \sum_i \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

ove  $\xi_i \in C^\infty(M)$ . Se calcoliamo il campo  $X_f$  sulle funzioni coordinate otteniamo

$$\{f, x_i\} = X_f(x_i) = \xi_i$$

Dunque

$$\{f, g\} = \sum_i \{f, x_i\} \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

Ora, per  $f = x_j$ , otteniamo (si rammenti l'antisimmetricità di  $\{ \}$ )

$$\{g, x_j\} = \sum_i \{x_i, x_j\} \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

col che

$$X_g = \sum_i \sum_j \{x_i, x_j\} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Dunque l'espressione generale delle parentesi di Poisson è

$$\{f, g\} = \sum_i \sum_j \{x_i, x_j\} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

il che dimostra che le parentesi stesse sono completamente determinate, nel sistema di coordinate scelto, dalla matrice di funzioni  $((\{x_i, x_j\}))$ . Notiamo che fin qui non abbiamo usato l'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson in alcun modo: la conclusione che abbiamo tratto senza di essa è che la struttura di Poisson è indotta da una matrice  $\pi$  i cui elementi sono le parentesi di Poisson delle funzioni coordinate, e questa matrice non è altri che il tensore di Poisson scritto in coordinate (precisamente gli elementi della matrice sono le componenti del tensore).

Ora consideriamo un qualsiasi tensore doppio controvariante  $\pi$  in  $\mathbb{R}^n$  nelle coordinate scelte: avrà la forma

$$\pi = \sum_i \sum_j \pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$$

La condizione (\*) del teorema di Lie–Lichnerowicz si scrive allora come segue:

**Criterio di Integrabilità (LIE) 1.2.3** *Il tensore antisimmetrico  $\pi = ((\pi_{ij}))$  è di Poisson se e solo se*

$$(Lie) \quad \sum_l \left( \pi_{li} \frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_l} + \pi_{lj} \frac{\partial \pi_{ki}}{\partial x_l} + \pi_{lk} \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_l} \right) = 0$$

DIMOSTRAZIONE: Per prima cosa notiamo che se  $\pi$  è un tensore di Poisson allora nelle coordinate scelte soddisfa la condizione (Lie); basta infatti scrivere in coordinate la condizione di integrabilità ponendo  $\omega = dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$ :

$$\begin{aligned} i_\pi di_\pi(dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k) &= \frac{1}{3} i_\pi(d\pi_{ij} \wedge dx_k - d\pi_{ik} \wedge dx_j + d\pi_{jk} \wedge dx_i) \\ &= \frac{1}{3} \sum_l \left( \pi_{lk} \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_l} + \pi_{lj} \frac{\partial \pi_{ki}}{\partial x_l} + \pi_{li} \frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_l} \right) \end{aligned}$$

Il secondo membro della (\*) è nullo poiché la forma  $dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$  è chiusa, quindi otteniamo la (Lie).

Ora mostriamo il viceversa, cioè che (Lie)  $\implies$  (\*): dato che (\*) equivale all'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson dimostriamo direttamente quest'ultima, nella forma

$$X_{\{f,g\}} = [X_f, X_g]$$

In effetti:

$$\begin{aligned} X_{\{f,g\}} &= X_{\sum_{i,j} \pi_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}} = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} X_{\pi_{ij}} + \sum_{i,j} \pi_{ij} X_{\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}} \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} X_{\pi_{ij}} + \sum_{i,j} \pi_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} X_{\frac{\partial g}{\partial x_j}} + \sum_{i,j} \pi_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j} X_{\frac{\partial f}{\partial x_i}} \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} X_{\pi_{ij}} + \sum_{i,j,h,k} \pi_{ij} \pi_{hk} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g}{\partial x_h \partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &\quad - \sum_{i,j,h,k} \pi_{ij} \pi_{hk} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (**)$$

(abbiamo usato anche l'antisimmetricità di  $\pi_{ij}$  e la (Lie) nella forma  $X_{\pi_{ij}} = [X_{x_i}, X_{x_j}]$ ). Ora scriviamo il commutatore dei campi hamiltoniani relativi a  $f$  e  $g$  e, per mezzo di cambiamenti di indici e dell'antisimmetricità, trasformiamolo nell'ultimo termine dell'espressione precedente:

$$\begin{aligned} [X_f, X_g] &= X_f \left( \sum_{h,j} \pi_{hj} \frac{\partial g}{\partial x_h} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - X_g \left( \sum_{h,j} \pi_{hj} \frac{\partial f}{\partial x_h} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{k,i} \pi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{h,j} \pi_{hj} \frac{\partial g}{\partial x_h} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \sum_{k,i} \pi_{ki} \frac{\partial g}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{h,j} \pi_{hj} \frac{\partial f}{\partial x_h} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k,i,h,j} \pi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_k} \pi_{hj} \frac{\partial g}{\partial x_h} \frac{\partial}{\partial x_i x_j} + \sum_{k,i,h,j} \pi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \pi_{hj} \frac{\partial g}{\partial x_h} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} + \\
&\quad - \sum_{h,j,k,i} \pi_{hj} \frac{\partial g}{\partial x_h} \pi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j x_i} - \sum_{k,i,h,j} \pi_{ki} \frac{\partial g}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \pi_{hj} \frac{\partial f}{\partial x_h} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_{k,i,h,j} \pi_{ki} \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial g}{\partial x_h} \frac{\partial \pi_{hj}}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_k} \pi_{hj} \frac{\partial g}{\partial x_i x_h} - \frac{\partial g}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_h} \frac{\partial \pi_{hj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_k} \pi_{hj} \frac{\partial f}{\partial x_i x_h} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} X_{\pi_{ij}} + \sum_{i,j,h,k} \pi_{ki} \pi_{hj} \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial g}{\partial x_i x_h} - \frac{\partial g}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i x_h} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}
\end{aligned}$$

Quest'ultima espressione, a meno di un cambiamento di indici, coincide con l'ultimo termine della (\*\*).

QED

L'esempio più semplice di tensore di Poisson è quello di un tensore costante: supponiamo cioè che la matrice  $\pi = ((\pi_{ij}))$  sia una matrice antisimmetrica costante; allora la condizione (Lie) del teorema precedente svanisce identicamente, e quindi è banalmente verificata.

Dunque ogni matrice antisimmetrica definisce una struttura di Poisson in  $\mathbb{R}^n$ , le cui parentesi sono costanti: una tale matrice ammette una forma canonica come

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & I_r & 0 \\ -I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ove  $I_r$  è la matrice identità  $r \times r$ . Questo vuol dire che lo spazio  $\mathbb{R}^n$  si spezza come  $\mathbb{R}^n = S \times N$  ove  $S$  è uno spazio vettoriale simplettico di dimensione  $2r$  con la struttura simplettica canonica e  $N$  è uno spazio vettoriale di dimensione  $n - 2r$  sul quale la struttura di Poisson è nulla. Le parentesi di Poisson sono ovviamente

$$\{f, g\}(q, p, z) = \sum_{i=1}^r \left( \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{\partial g}{\partial p_1} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right)$$

ove  $(p, q)$  sono coordinate in  $S$  e  $z$  in  $N$ . Le funzioni di Casimir sono chiaramente quelle che dipendono solo dalle variabili  $z$ , quindi la struttura è simplettica solo se  $2r = n$ . Si noti che in questo caso il tensore di Poisson ha rango costante pari a  $2r$ .

Naturalmente questo è il caso più semplice: in realtà le funzioni  $\pi_{ij} = \{x_i, x_j\}$  possono essere funzioni differenziabili qualsiasi, e questo rende la classificazione delle strutture di Poisson in  $\mathbb{R}^n$  equivalente al problema della classificazione dei germi di funzioni differenziabili. Comunque, da Newton in poi, la prima reazione di fronte ad un problema non lineare è quella di

linearizzarlo: nel nostro caso questo conduce naturalmente allo studio delle strutture di Poisson in  $\mathbb{R}^n$  tali che le funzioni  $\pi_{ij}$  siano lineari (anche questa discussione si ritrova nell'opera di Lie in [65]; cfr. anche [11, §38]); supponiamo cioè che gli elementi della matrice  $\pi$  siano funzioni della forma

$$\pi_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \sum_i a_{ij}^k x_k$$

Si nota immediatamente che i numeri  $((a_{ij}^k))$  non sono le componenti di alcun tensore; tuttavia determinano completamente la struttura di Poisson, e notiamo che la (Lie) del teorema di Lie diviene:

$$0 = \sum_l \left( \pi_{li} \frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_l} + \pi_{lj} \frac{\partial \pi_{ki}}{\partial x_l} + \pi_{lk} \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_l} \right) = \sum_r \sum_l (a_{li}^r a_{jk}^l + a_{lj}^r a_{ki}^l + a_{lk}^r a_{ij}^l) x_r$$

cioè (per  $x_i = \delta_{ij}$  con  $j = 1, \dots, n$ ):

$$\sum_l (a_{li}^r a_{jk}^l + a_{lj}^r a_{ki}^l + a_{lk}^r a_{ij}^l) = 0$$

Queste sono esattamente le equazioni che caratterizzano le costanti di struttura di un'algebra di Lie in coordinate (cfr. [83, §52]), il che vuol dire che, se  $(e_1, \dots, e_n)$  è la base di  $\mathbb{R}^n$  relativa alle coordinate  $(x_1, \dots, x_n)$  allora

$$[e_i, e_j] = \sum_k a_{ij}^k e_k$$

definisce una struttura di algebra di Lie su  $\mathbb{R}^n$ , che pensiamo come la "linearizzazione della struttura di Poisson.

Viceversa, se  $[\ ]$  sono parentesi di Lie su  $\mathbb{R}^n$  allora possiamo definire delle parentesi di Poisson su  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Stavolta procediamo in modo intrinseco: supponiamo cioè di avere un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di dimensione  $n$  e consideriamo il suo spazio vettoriale duale  $V = \mathfrak{g}^*$ ; fissando delle coordinate lo possiamo identificare con la nostra varietà  $\mathbb{R}^n$ . Ora consideriamo due funzioni  $f, g \in C^\infty(V)$  e, in un punto  $v \in V$ , i loro differenziali che, potendo identificare  $T_v V$  con  $V$  stesso per mezzo di una traslazione, possiamo considerare come funzionali lineari:  $(df)_x, (dg)_x \in V^*$ . Ma  $V^* = \mathfrak{g}^{**} \cong \mathfrak{g}$  in modo canonico, dunque i differenziali  $(df)_x$  e  $(dg)_x$  sono elementi dell'algebra di Lie e possiamo considerarne il commutatore, che è ancora un elemento di  $\mathfrak{g}$  e calcolarvi il funzionale lineare  $v \in V = \mathfrak{g}^*$ : questo numero è per definizione il valore della funzione  $\{f, g\}$  nel punto  $v$

$$\{f, g\}(v) := v([(df)_v, (dg)_v])$$

Che queste parentesi siano bilineari, antisimmetriche e soddisfino all'identità di Jacobi segue dalle analoghe proprietà delle parentesi di Lie su  $\mathfrak{g}$  in termini delle quali sono definite. L'identità di Leibniz pure segue con facilità dalla regola di differenziazione delle funzioni composte:

$$\begin{aligned}\{fg, h\}(v) &= v([(df)_v g(v), (dh)_v]) + v([(dg)_v f(v), (dh)_v]) \\ &= g(v)v([(df)_v, (dh)_v]) + f(v)v([(dg)_v, (dh)_v]) \\ &= (g\{f, h\} + f\{g, h\})(v)\end{aligned}$$

Mostriamo infine che questa costruzione è l'inversa di quella data in precedenza. Fissiamo cioè una base  $(e_1, \dots, e_n)$  e scriviamo le costanti di struttura della nostra algebra di Lie

$$[e_i, e_j] = \sum_k c_{ij}^k e_k$$

Allora, se  $(x_1, \dots, x_n)$  sono le coordinate associate alla base scelta, abbiamo che

$$\begin{aligned}\{f, g\}(v) &= v\left(\left[\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(v)e_i, \sum_j \frac{\partial g}{\partial x_j}(v)e_j\right]\right) = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(v) \frac{\partial g}{\partial x_j}(v)v([e_i, e_j]) \\ &= \sum_{i,j,k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(v) \frac{\partial g}{\partial x_j}(v)v(c_{ij}^k e_k) = \sum_{i,j,k} c_{ij}^k v_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}\end{aligned}$$

se  $v = \sum_i v_i e^i$  essendo  $(e^1, \dots, e^n)$  la base duale di quella fissata su  $\mathfrak{g}$ .

Possiamo riassumere questa discussione nel seguente

**Teorema 1.2.4** *Le strutture di Poisson lineari su uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione finita sono in corrispondenza biunivoca con le strutture di algebre di Lie su  $V$ .*

Già nel caso lineare si manifesta quindi una varietà di esempi di strutture di Poisson locali che rende la teoria assai difforme da quella simplettica. Le parentesi indotte da un'algebra di Lie nel modo appena spiegato si chiamano *parentesi di Lie–Poisson*, perché introdotte da Lie<sup>4</sup>.

**Definizione 1.2.5** *Una varietà di Poisson che sia diffeomorfa al duale  $\mathfrak{g}^*$  di un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  con le parentesi di Lie–Poisson si dice varietà di Lie–Poisson.*

<sup>4</sup>Il lavoro di Lie su queste parentesi fu sostanzialmente dimenticato, e, quando negli anni '60 furono riscoperte da Berezin [7], Kirillov [50], Konstant [55] e Souriau [96], per un certo periodo portarono i loro nomi finché non ci si accorse che la loro teoria era già stata sviluppata in [65, p.294 sgg.].

Un esempio importante di varietà di Lie–Poisson è lo spazio  $\mathfrak{so}(3)^*$ , la cui struttura di Poisson interviene nella teoria dei corpi rigidi sviluppata da Eulero (cfr. [1] e [73]); in questo caso, dato che la parentesi di Lie dell'algebra si può identificare col prodotto vettoriale in  $\mathbb{R}^3$ , le parentesi di Poisson si scrivono come

$$\{f, g\}(x) = x \cdot \nabla f \wedge \nabla g$$

(prodotto misto in  $\mathbb{R}^3$ ) ove  $\nabla f$  è il gradiente di  $f$ . La formula dei campi hamiltoniani rispetto a questa struttura di Poisson figura nella *Mécanique* di Lagrange (cfr. [61, Vol.II, p.212], formula (A)).

Identifichiamo i campi hamiltoniani di  $\mathfrak{g}^*$ : ad ogni campo hamiltoniano  $X_f$  possiamo associare, in un punto  $x \in \mathfrak{g}^*$ , una derivazione interna dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ , e precisamente  $ad_{(df)_x}$ ; abbiamo cioè una funzione

$$\text{Ham}(C^\infty(\mathfrak{g}^*)) \longrightarrow \text{im } ad \subset \text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$$

$\mathbb{R}$ -lineare; si tratta ovviamente di un monomorfismo di algebre di Lie, quindi i campi hamiltoniani corrispondono alle derivazioni interne di  $\mathfrak{g}$ . I campi canonici corrispondono invece, per definizione, esattamente a tutte le derivazioni dell'algebra di Lie. Quindi

$$\text{Can}(C^\infty(\mathfrak{g}^*)) / \text{Ham}(C^\infty(\mathfrak{g}^*)) \cong \text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) / \text{im } ad = H^1(\mathfrak{g})$$

è il primo gruppo di coomologia di Chevalley–Eilenberg dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  a coefficienti nella rappresentazione banale (cfr. [19, §13-2], [41, §1.4]).

Notiamo che se  $\pi$  è il tensore di Poisson di una varietà di Lie–Poisson allora *non può avere rango costante a meno che le parentesi di Poisson non siano identicamente nulle*. Infatti nell'origine  $0 \in \mathfrak{g}^*$  le parentesi si annullano identicamente per linearità delle componenti del tensore  $\pi$ :

$$\forall f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*) \quad \{f, g\}(0) = 0$$

e quindi in 0 il tensore ha rango nullo. Dunque, già nel caso lineare, si manifesta per le varietà di Poisson un fenomeno che non ha analoghi nella geometria delle  $G$ -strutture, ad esempio ( $G = Sp(n)$ ) per le strutture simplettiche, vale a dire la non regolarità del tensore che definisce la struttura geometrica stessa.

**Definizione 1.2.6** *Il rango di una struttura di Poisson su una varietà  $M$  in un punto  $x \in M$  è il rango del tensore di Poisson nel punto  $x$ .*

Il rango definisce una funzione

$$\text{rango} : M \longrightarrow \mathbb{N}$$

che è semicontinua inferiormente: infatti il rango di un tensore non può decrescere nell'intorno di un punto. I punti di continuità del rango si dicono *punti regolari* della varietà di Poisson e formano un aperto (il che è ovvio) denso: infatti intorno ad ogni punto  $x$  la funzione rango ha un massimo locale, poiché il rango è limitato (essendo la varietà di dimensione finita), e quindi intorno al punto di massimo rango è continua.

**Definizione 1.2.7** *Una varietà di Poisson è regolare se ogni suo punto è regolare.*

Questo equivale all'essere il rango una funzione localmente costante. Evidentemente una varietà symplettica è regolare di rango massimo in ciascun punto (il rango è ovviamente sempre un intero pari, dato che è il rango di un tensore antisimmetrico); un altro esempio è il prodotto  $S \times N$  di una varietà symplettica con una varietà  $N$  con tensore di Poisson  $\pi = \pi_S + 0_N$  ove  $\pi_S$  è il tensore di Poisson su  $S$ . Il rango è in questo caso la costante  $\dim S$ .

Le varietà di Lie–Poisson forniscono esempi di varietà non regolari: il punto origine ha sempre rango nullo, così se la struttura di Poisson non è nulla non può avere rango costante.

Non esiste, per strutture di Poisson non lineari in  $\mathbb{R}^n$ , una parametrizzazione soddisfacente come per quelle lineari; un programma di classificazione dovrebbe per prima cosa distinguere la classe di funzioni permesse come elementi del tensore di Poisson: ad esempio si potrebbe decidere di limitarsi a funzioni polinomiali, ovvero a funzioni analitiche. Comunque in letteratura non è presente nessun tentativo, se non parziale, di affrontare questa questione. Diamo tuttavia, nello spirito di questa esposizione, alcuni esempi che ci sembrano interessanti.

Consideriamo il caso di dimensione più bassa, cioè  $n = 2$ . Si tratta quindi di studiare strutture di Poisson in  $\mathbb{R}^2$ : una parentesi di Poisson è ovviamente del tipo

$$\{f, g\} = \pi\{f, g\}_S$$

ove  $\pi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  e  $\{\cdot, \cdot\}_S$  denota le usuali parentesi symplettiche

$$\{f, g\}_S(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}$$

Il rango del tensore di Poisson  $\begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}$  è ovviamente 0 o 2 secondo che  $\pi$  si annulli o meno nel punto ove si calcola il rango.

La condizione di integrabilità di Lie svanisce identicamente in dimensione due e, se  $(x, y)$  sono coordinate nel piano,  $\pi(x, y) = \{x, y\}$ . Questo significa

che esistono tante strutture di Poisson quante sono le funzioni (o meglio i germi di funzioni) nel piano. Evidentemente la struttura symplettica corrisponde ad una qualsiasi funzione  $\pi$  costante, e si denota semplicemente con  $\{f, g\}$ . Il piano dotato della struttura di Poisson associata alla funzione  $\pi$  verrà qui denotato con  $\mathbb{R}_\pi^2$ .

Dunque, in un certo senso, le strutture di Poisson nel piano sono parametrizzate dalle funzioni  $C^\infty$ , il che rende l'idea di quanto complicate possano essere queste strutture. In realtà, a meno di cambiamenti di coordinate, quello che interessa è il germe della funzione più che la funzione stessa, e in effetti i risultati di classificazione per queste strutture nel piano (sostanzialmente dovuti a V.I. Arnol'd [5], che vi era stato condotto dalle sue famose ricerche sui *denominatori piccoli* in Meccanica Celeste) si inquadrano nella teoria delle singolarità delle applicazioni differenziabili.

Il caso più semplice è quello delle strutture lineari, vale a dire tali che  $\pi$  sia una funzione lineare omogenea  $\pi(x, y) = ax + by$ ; ci si può sempre ridurre al caso  $\pi(x, y) = y$  con un diffeomorfismo del piano che preserva la struttura di Poisson, quindi abbiamo essenzialmente una struttura di Poisson lineare non nulla nel piano.

Esiste una classificazione completa anche delle strutture di Poisson quadratiche nel piano, cioè quelle corrispondenti a funzioni  $\pi(x, y)$  che siano polinomi omogenei di grado due (cfr. [8], [37], [67]):

**Teorema 1.2.8** *Le strutture di Poisson quadratiche su  $\mathbb{R}^2$  corrispondono, a meno di diffeomorfismi di Poisson, alle seguenti funzioni:*

- (1)  $\pi(x, y) = 0$ .
- (2)  $\pi(x, y) = a(x^2 + y^2)$  con  $a \neq 0$ .
- (3)  $\pi(x, y) = axy$  con  $a \neq 0$ .
- (4)  $\pi(x, y) = y^2$ .

Ad esempio consideriamo  $\pi(x, y) = x^2 + y^2$ : la struttura di Poisson corrispondente ha rango nullo nell'origine e rango due in ogni altro punto: si tratta quindi di una "struttura symplettica con una singolarità isolata, che tuttavia, pur nella sua semplicità, presenta aspetti interessanti: solitamente si denota  $\mathbb{R}_0^2$  il piano di Poisson con queste parentesi.

### 1.3 Struttura di una varietà di Poisson

Esistono due teoremi fondamentali sulla struttura delle varietà di Poisson: il primo, dovuto a Weinstein [104], generalizza il teorema di Darboux alle varietà di Poisson qualsiasi. Per enunciarlo necessitiamo di alcuni preliminari.

**Definizione 1.3.1** *Se  $(M, \{\cdot, \cdot\}_M)$  e  $(N, \{\cdot, \cdot\}_N)$  sono varietà di Poisson il loro prodotto di Poisson è la varietà  $M \times N$  con la parentesi di Poisson  $\{\cdot, \cdot\}_{M \times N}$  il cui tensore di Poisson  $\pi_{M \times N}$  è la somma diretta dei tensori di Poisson  $\pi_M \oplus \pi_N$  dei due fattori.*

Ad esempio, localmente troviamo che il tensore di Poisson su  $M \times N$  corrisponde alla matrice a blocchi  $\begin{pmatrix} \pi_M & 0 \\ 0 & \pi_N \end{pmatrix}$  ove  $\pi_M$  e  $\pi_N$  sono le matrici che, nelle coordinate scelte, rappresentano i tensori di Poisson di  $M$  e  $N$ .

Si noti inoltre che se  $p_M : M \times N \rightarrow M$  (rispettivamente  $p_N : M \times N \rightarrow N$ ) è la proiezione sul primo (rispettivamente sul secondo) fattore del prodotto allora per ogni  $f \in C^\infty(M)$  e per ogni  $g \in C^\infty(N)$  si ha

$$\{p_1^*f, p_2^*g\}_{M \times N} = 0$$

Possiamo finalmente enunciare il teorema di spezzamento di Weinstein (per la cui dimostrazione si rimanda a [104], [63] o [102]).

**Teorema di Spezzamento (WEINSTEIN) 1.3.2** *Se  $M$  è una varietà di Poisson e  $x \in M$  allora esiste intorno a  $x$  una carta locale  $U$  isomorfa ad un prodotto  $S \times N$  in modo che le parentesi di Poisson di  $M$  indotte su  $U \cong S \times N$  rendano  $S$  una varietà simplettica e  $N$  una varietà di Poisson il cui rango del tensore di Poisson nel punto  $p_N(x)$  (ove  $p_N : U \rightarrow N$  è la proiezione sul secondo fattore) sia nullo. Questa fattorizzazione è unica a meno di isomorfismi di Poisson locali.*

Notiamo che, se il punto  $x$  è regolare allora il rango del tensore di Poisson è costante intorno a  $x$ , sicché le parentesi di Poisson sul fattore  $N$  sono identicamente nulle. In altri termini possiamo trovare delle coordinate  $(q_1, \dots, q_r, p_1, \dots, p_r, z_1, \dots, z_{n-2r})$  (ove  $2r$  è il rango nel punto  $x$ ) in modo che, in  $U$ :

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = \{z_i, f\} = 0 \quad \text{e} \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

per ogni funzione  $f \in C^\infty(U)$ . Nel caso generale non possiamo dire nulla se non che queste relazioni valgono nel punto  $x$ : è questo il caso, ad esempio, di una qualsiasi struttura di Lie–Poisson nel punto  $x = 0$ , ove il tensore di Poisson si annulla identicamente, sicché intorno a quel punto il teorema di spezzamento non ci dice praticamente nulla se non che esistono solo le coordinate  $(z_1, \dots, z_n)$  centrate in  $x = 0$ .

Si noti, all'estremo opposto, che se  $M$  è simplettica il teorema si spezza in modo degenera nel teorema di Darboux: il fattore  $N$  non esiste e  $U = S$  è esattamente la carta locale con le coordinate canoniche nelle quali il tensore di Poisson è costante.

**Definizione 1.3.3** *Una carta locale  $U = S \times N$  che soddisfi la tesi del teorema di spezzamento si dice intorno di Darboux–Weinstein del punto  $x$ .*

Il teorema di Spezzamento di Weinstein stabilisce espressamente che la struttura simplettica locale è unica, cioè nelle coordinate fornite dal teorema si scrive sempre in forma canonica, mentre sulla *struttura trasversale*, cioè quella del fattore  $N$  nella decomposizione locale  $U = S \times N$ , non si può dire, nel caso generale, altro se non che si annulla identicamente nel punto  $p_N(x)$ ; il teorema sancisce che queste strutture trasversali sono tutte isomorfe, sicché si può parlare solo di un germe di struttura trasversale canonicamente associato al punto  $x$  dalla struttura di Poisson. Un problema assai interessante (e arduo) è quello della linearizzazione di queste strutture trasversali: consideriamo una varietà di Poisson  $M$ , un suo punto  $x_0 \in M$  e un intorno di Darboux–Weinstein  $U \ni x_0$ ; allora il tensore di Poisson in  $U$  si scrive come

$$\pi(q, p, z) = \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{i,j} \nu_{ij} \frac{\partial}{\partial z_i} \wedge \frac{\partial}{\partial z_j}$$

ove  $\nu_{ij}$  sono le componenti del tensore di Poisson su  $N$ , che verificano le  $\nu_{ij}(x_0) = 0$ . Possiamo allora considerarne gli sviluppi di MacLaurin al primo ordine intorno a  $x_0$ :

$$\nu_{ij}(x) = \sum_k c_{ij}^k z_k + O(|z|^2)$$

Se scriviamo la condizione di integrabilità di Lie per il tensore di Poisson  $\nu$  e trascuriamo i termini di ordine superiore al primo otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_l \left( \nu_{li} \frac{\partial \nu_{jk}}{\partial z_l} + \nu_{lj} \frac{\partial \nu_{ki}}{\partial z_l} + \nu_{lk} \frac{\partial \nu_{ij}}{\partial z_l} \right) \\ &= \sum_l \left( \sum_r c_{li}^r c_{jk}^l z_r + \sum_r c_{lj}^r c_{ki}^l z_r + \sum_r c_{lk}^r c_{ij}^l z_r \right) \\ &= \sum_r \left( \sum_l c_{li}^r c_{jk}^l + \sum_r c_{lj}^r c_{ki}^l + \sum_r c_{lk}^r c_{ij}^l \right) z_r \end{aligned}$$

sicché le  $c_{ij}^k$  sono costanti di struttura per un'algebra di Lie e quindi la linearizzazione del tensore  $\nu$  fornisce una struttura di Lie–Poisson su  $N$ .

Abbiamo cioè associato ad ogni punto  $x_0 \in M$  un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}(x_0)$ : questa algebra di Lie dipende in realtà solo dalla foglia passante per  $x_0$  e non dal singolo punto. In effetti consideriamo la foglia  $S \ni x_0$  per  $x_0$  e il suo spazio tangente  $T_{x_0} S_{x_0} \subset T_{x_0} M$ ; il quoziente  $N_{x_0} S_{x_0} = T_{x_0} M / T_{x_0} S_{x_0}$  è

lo spazio normale alla foglia in  $x_0$ , e il suo spazio duale  $(N_{x_0}S_{x_0})^*$  si può identificare allo spazio dei covettori che si annullano su  $T_{x_0}S_{x_0}$ :

$$(N_{x_0}S_{x_0})^* \cong \text{Ann}(T_{x_0}S_{x_0})$$

Ora, per ogni  $\alpha, \beta \in \text{Ann}(T_{x_0}S_{x_0})$  possiamo scegliere due funzioni  $f, g \in C^\infty(M)$  tali che  $(df)_{x_0} = \alpha$  e  $(dg)_{x_0} = \beta$ ; poiché  $\alpha, \beta \in (N_{x_0}S_{x_0})^*$  possiamo scegliere  $f$  e  $g$  come funzioni che si annullino sulla foglia  $S_{x_0}$ : allora è ben definita l'operazione bilineare

$$\{\alpha, \beta\} = (d\{f, g\})_{x_0}$$

che rende  $\text{Ann}(T_{x_0}S_{x_0})$  un'algebra di Lie intrinsecamente associata alla foglia (per i dettagli cfr. [49, §1]): si tratta esattamente della struttura data, in coordinate, dalle costanti di struttura  $\{c_{ij}^k\}$  precedentemente definite.

Sorge spontanea la domanda se sia possibile trovare un isomorfismo locale che trasformi  $\nu$  nel suo linearizzato, cioè se sia sempre possibile linearizzare un tensore di Poisson localmente. La risposta è negativa e la questione è assai difficile: si tratta sostanzialmente di un problema di Analisi, anche se ammette una formulazione in termini di algebre di Lie; è stato posto da Weinstein [104], e affrontato con risultati interessanti da Conn (cfr. [21], [22]), dallo stesso Weinstein [107] e da Dufour [36].

Il secondo risultato fondamentale sulla struttura delle varietà di Poisson è il teorema di decomposizione simplettica dovuto a Lie e Kirillov. L'esempio guida è quello delle varietà di Lie–Poisson: sia  $\mathfrak{g}^*$  una tale varietà; come spazio vettoriale possiamo considerare  $\mathfrak{g}^*$  una rappresentazione dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ , precisamente la rappresentazione coaggiunta. Poiché non si tratta di un'azione transitiva (ad esempio  $\{0\}$  è una singola orbita!) lo spazio  $\mathfrak{g}^*$  si decompone nelle orbite di questa azione. Ciascuna orbita è una sottovarietà (non necessariamente con la topologia indotta: cfr. e.g. [51, p.293]) e la restrizione del tensore di Poisson ad essa la rende una varietà di Poisson: Lie nel XIX secolo e Kirillov nel XX<sup>5</sup> hanno dimostrato il seguente notevole teorema (cfr. [50] e [65, Cap.19, particolarmente p.349 e l'osservazione a p.347])

**Teorema (LIE–KIRILLOV) 1.3.4** *Le orbite dell'azione coaggiunta sono varietà simplettiche rispetto alla restrizione della struttura di Lie–Poisson.*

Questo teorema è la base per l'introduzione della Geometria Simplettica in Teoria delle Rappresentazioni, secondo quella collezione di metodi che va comunemente sotto il nome di Teoria delle Orbite (cfr. [51]); per una discussione

---

<sup>5</sup>Per quanto possa sembrare assurdo il lavoro di Lie sulle strutture di Poisson è rimasto inesplorato per quasi un secolo, nascosto nelle pagine del monumentale ma labirintico trattato tripartito *Theorie der Transformationsgruppen*.

completa di questo teorema nell'ambito della Geometria di Poisson e della Meccanica Analitica si veda [73, §14.4]; gli aspetti legati alla quantizzazione geometrica sono magistralmente esposti in [55] e [96].

Non solo una varietà di Lie–Poisson si decompone in sottovarietà simplettiche: anche la struttura di Poisson costante di rango  $2r$  su  $\mathbb{R}^n$  ammette una tale decomposizione:

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^{2r-n}} \mathbb{R}^{2r} \times \{x\}$$

in piani paralleli ciascuno dei quali è simplettico.

Questo fenomeno è in realtà dovuto alla sola presenza della struttura di Poisson e si verifica in generale: se  $M$  è una varietà di Poisson possiamo sempre decomporla in “orbite simplettiche nel modo seguente.

**Definizione 1.3.5** *Se  $M$  è una varietà di Poisson e  $x \in M$  la foglia simplettica per  $x$  è l'insieme  $S_x$  dei punti  $y \in M$  che possono essere congiunti a  $x$  da una curva differenziabile a tratti il cui campo tangente in ciascun tratto differenziabile sia hamiltoniano.*

Evidentemente le foglie simplettiche di una varietà di Poisson sono le classi di equivalenza della relazione che intercorre fra  $x$  e  $y$  se possono essere congiunti da una curva hamiltoniana a tratti, quindi danno una decomposizione in parti disgiunte della varietà. Una foglia simplettica è un esempio di sottovarietà di Poisson:

**Definizione 1.3.6** *Se  $M$  è una varietà di Poisson una sottovarietà di Poisson è una sottovarietà (non necessariamente con la topologia indotta)  $N \subset M$  tale che l'inclusione  $N \hookrightarrow M$  sia una mappa di Poisson.*

Per il seguente fondamentale teorema si veda [63], [73] o [102]:

**Teorema di Stratificazione Simplettica (LIE–KIRILLOV) 1.3.7** *Se  $M$  è una varietà di Poisson allora si decompone in unione disgiunta delle sue foglie simplettiche  $S_x$ ; ciascuna foglia è una sottovarietà di Poisson (non necessariamente con la topologia indotta) e la struttura di Poisson di  $M$  ristretta a ciascuna foglia la rende simplettica di dimensione pari al rango di un qualsiasi punto passante per essa.*

Il teorema si deve nella sua generalità a Kirillov, mentre per strutture di Poisson il cui tensore abbia rango costante è dovuto essenzialmente a Lie. Si tratta di una profondissima generalizzazione della decomposizione della rappresentazione coaggiunta di un'algebra di Lie nelle sue orbite simplettiche:

suggestivamente possiamo pensare alle foglie simplettiche di una varietà di Poisson come a “orbite coaggiunte generalizzate.

Se consideriamo il caso di una varietà di Poisson regolare questo teorema è un corollario del teorema di Frobenius: in effetti poiché il rango del tensore  $\pi$  è costante la mappa hamiltoniana  $\pi^\# : T^*M \longrightarrow TM$  è una mappa di fibrati, dunque la sua immagine im  $\pi^\#$  è un sottofibrato  $H \subset TM$ , involutivo, dato che le sue sezioni sono il  $C^\infty(M)$ -modulo generato dai campi hamiltoniani, sicché se  $X, Y \in \Gamma(H)$  allora anche  $[X, Y] \in \Gamma(H)$ , e quindi, per il teorema di Frobenius, esiste una fogliazione integrale massimale per questo fibrato. Ciascuna foglia è esattamente una foglia simplettica nel senso della definizione precedente.

Si noti dunque che una qualsiasi fogliazione di una varietà le cui foglie siano simplettiche dà luogo ad una varietà di Poisson se le strutture simplettiche variano in modo differenziabile. Ad esempio consideriamo il toro tridimensionale visto come quoziente dello spazio per un suo reticolo:

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$$

Su  $\mathbb{R}^3$  possiamo considerare una struttura di Poisson regolare ottenuta come segue: nelle coordinate cartesiane  $(x, y, z)$  consideriamo il fascio di piani  $p_\varphi$  contenenti la retta  $\{y = z = 0\}$  e parametrizzati dall'angolo  $\varphi$  che formano con il piano  $\{z = 0\}$ ; ciascuno di essi è una varietà simplettica in modo naturale (scegliendo come forma simplettica l'elemento d'area) rispetto ad una certa forma  $\omega_\varphi$ , che induce una forma chiusa su  $\mathbb{R}^3$  per *pull-back* rispetto alla proiezione ortogonale sul piano  $p_\varphi$ ; denotiamo con  $\mathbb{T}_\varphi^3$  la varietà di Poisson così ottenuta. Possiamo allora passare al quoziente il piano  $p_\varphi$  ottenendo una superficie in  $\mathbb{T}^3$  la cui natura varia secondo che  $\varphi \in \mathbb{Q}$  o meno.

Se  $\varphi \in \mathbb{Q}$  allora l'immagine di  $p_\varphi$  è un toro bidimensionale immerso in  $\mathbb{T}_\varphi^3$  con la topologia indotta come sottoinsieme compatto, e lo stesso vale per tutti i suoi piani paralleli passati al quoziente: questo induce una fogliazione simplettica su  $\mathbb{T}_\varphi^3$  che in questo modo diviene una varietà di Poisson regolare con foglie diffeomorfe a  $\mathbb{T}^2$ . Se invece  $\varphi \notin \mathbb{Q}$  allora il piano  $p_\varphi$  al quoziente diviene una superficie ergodica, densa in  $\mathbb{T}_\varphi^3$  e diffeomorfa ad un cilindro  $\mathbb{R} \times S^1$ , e lo stesso vale per tutti i suoi piani paralleli passati al quoziente: questo induce una fogliazione simplettica su  $\mathbb{T}_\varphi^3$  che in questo modo diviene una varietà di Poisson regolare con foglie dense diffeomorfe a cilindri. In ambedue i casi otteniamo una struttura di Poisson regolare.

Nel caso generale non siamo in presenza di una distribuzione nel senso classico del termine, ma piuttosto di una *distribuzione singolare*, un fenomeno tipico in Teoria dei Controlli. Esistono generalizzazioni del teorema di Frobenius a questo caso con singolarità dovute a Stefan, Sussmann e Viflyantsev

(cfr. [98], [99], [103]) che in genere sono utilizzate per dimostrare il teorema precedente: comunque è anche possibile dimostrarlo direttamente (cfr. [73]).

Arricchiamo il nostro bagaglio di esempi di varietà di Poisson con un'altra classica costruzione dovuta a Dirac (cfr. [31], [32]): qui la introdurremo in uno spirito più geometrico, seguendo [95], [64] e [102].

**Definizione 1.3.8** *Una varietà quasi-simplettica è una varietà  $Q$  dotata di una 2-forma  $\omega$  non degenera.*

La nostra discussione del teorema di Pauli–Jost implica che per ogni varietà quasi-simplettica possiamo definire campi hamiltoniani e parentesi di Poisson che non soddisferanno più, tuttavia, all'identità di Jacobi. Una varietà quasi-simplettica non dà luogo in alcun modo naturale ad una varietà di Poisson a meno che non si faccia intervenire un'altra condizione: una possibilità è richiedere che la forma sia chiusa (ottenendo così il caso simplettico), l'altra è richiedere che  $M$  sia fogliata in varietà simplettiche le cui forme simplettiche siano i *pull-back* della forma  $\omega$  su  $M$ : precisamente, supponiamo che sulla varietà quasi-simplettica  $(Q, \omega)$  esista un sottofibrato  $H \subset TM$  involutivo tale che le sue varietà integrali massimali (foglie), che si immergono in  $Q$  come  $i_S : S \hookrightarrow Q$  siano simplettiche rispetto al *pull-back*  $i_S^*\omega$ .

**Teorema (DIRAC) 1.3.9** *Se  $Q$  è una varietà quasi-simplettica rispetto ad una forma  $\omega$  e se le foglie della fogliazione integrale di un sottofibrato  $H$  sono simplettiche rispetto ai pull-back della forma  $\omega$ , per ogni  $f, g \in Q$  possiamo definire:*

$$\{f, g\}_Q(x) = \{f|_{S_x}, g|_{S_x}\}_{S_x}(x)$$

ove  $S_x$  è la foglia per  $x$  e  $\{ \}_{S_x}$  le parentesi simplettiche su di essa. Le parentesi  $\{ \}_Q$  rendono  $Q$  una varietà di Poisson regolare.

Per i dettagli cfr. [64], [102]: qui ci limitiamo ad osservare che se  $x \in S \subset Q$  è un punto di  $Q$  appartenente alla foglia  $S$ :

$$\{f, g\}_Q(x) = (i_S^*\omega)_x(X_{i^*f_x}, X_{i^*g_x})$$

il che mostra come le  $\{ \}_Q$  siano effettivamente parentesi di Poisson: l'unica difficoltà è mostrare che questa definizione dà luogo ad una funzione differenziabile (stiamo incollando funzioni foglia per foglia) il che segue dalla regolarità e dalla differenziabilità della distribuzione. Ovviamente le foglie simplettiche di questa struttura di Poisson sono esattamente le foglie della distribuzione  $H$ , che coincide quindi con quella dei campi hamiltoniani.

**Definizione 1.3.10** *Le parentesi  $\{ \}_Q$  sulla varietà quasi-complessa e fogliata simpletticamente  $Q$  si dicono parentesi di Dirac.*

Vaisman ha mostrato come ogni varietà di Poisson regolare si immerga in una struttura di Dirac (cfr. [102]). L'idea è molto semplice: se  $M$  è una varietà di Poisson regolare allora la distribuzione dei campi hamiltoniani definisce un sottofibrato  $H \subset TM$ ; scelta una decomposizione

$$TM = H \oplus N$$

la varietà di Dirac richiesta sarà la base del fibrato duale  $N^*$ . Se  $(q, p, z)$  sono coordinate locali di Darboux–Weinstein su  $M$  allora la distribuzione è generata dai campi  $\{\frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial p}\}$  e quindi  $N$  ha come coordinate  $(q, p, z, \xi)$  ove  $\xi$  sono le coordinate nella base duale  $dz_1, \dots, dz_k$ .

L'esempio più elementare di parentesi di Dirac si ottiene considerando la varietà simplettica  $\mathbb{R}^{2n}$  rispetto alla struttura canonica e la fogliazione in piani che hanno equazioni

$$\begin{cases} q_i = c_i \\ p_i = d_i \end{cases}$$

( $i = 2, \dots, n$  e  $c_i, d_i$  costanti).

In generale la distribuzione sarà definita da delle condizioni

$$\varphi(q, p) = 0$$

che rappresenteranno i *vincoli del sistema hamiltoniano* sulla varietà  $\mathbb{R}^{2n}$  (cfr. [32, §1]).

Un esempio di origine non simplettica si ha considerando oggetti comunque imparentati con la varietà simplettiche e di grande interesse in Meccanica e Topologia: sia  $(C, \vartheta)$  una varietà di contatto con forma di contatto  $\vartheta$ ; rammentiamo (cfr. [53, Vol.II], [96], [1], [5], [63]) che ciò vuol dire che  $C$  è una varietà di dimensione  $2n+1$  con una 1-forma  $\vartheta$  tale che  $\vartheta \wedge d\vartheta^n$  sia una forma di volume (per essere precisi questa è una varietà di contatto esatta: cfr. [1, §5.1]). Possiamo definire, data  $C$ , una varietà quasi-simplettica  $Q = C \times S^1$  la cui forma quasi-simplettica definiamo come

$$\omega = d\vartheta + \vartheta \wedge \lambda$$

se  $\lambda$  è la forma di volume (di lunghezza in questo caso!) su  $S^1$ .

Se su  $C$  consideriamo il campo vettoriale  $V$  determinato dalle

$$i_V \vartheta = 1 \quad \text{e} \quad i_V d\vartheta = 0$$

questo si solleva ad un campo vettoriale  $\tilde{V}$  su  $Q$ , come pure ad un campo  $\tilde{T}$  su  $Q$  si solleva il campo  $T$  tangente a  $S^1$ . Poiché questi campi sono sollevamenti di campi definiti su fattori diversi commutano:  $[\tilde{V}, \tilde{T}] = 0$  e quindi la distribuzione  $H$  su  $Q$  il cui spazio in  $x$  è generato dai vettori  $\tilde{V}_x$  e  $\tilde{T}_x$  è involutiva, quindi integrabile. Si tratta di una distribuzione di piani, e, dato che

$$\omega(\tilde{T}, \tilde{V}) = \vartheta(V)\lambda(T) \neq 0$$

il *pull-back* di  $\omega$  a ciascuna foglia definisce una forma non degenera: chiaramente questa forma è chiusa (perché è una 2-forma su una varietà bidimensionale), quindi è simplettica.

Si noti che se  $(M, \omega)$  è una varietà simplettica e  $S \subset M$  una sottovarietà tale che il *pull-back* di  $\omega$  per tramite dell'inclusione la renda una varietà simplettica le parentesi di Dirac su  $M$  indotte da  $S$  non coincidono con le parentesi simplettiche su  $M$ : in effetti le parentesi di Dirac ignorano completamente la struttura trasversale di  $S$  in  $M$ . Per vederlo in modo concreto, consideriamo  $x_0 \in S \subset M$  e fissiamo delle coordinate locali  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  intorno ad esso in modo che, in queste coordinate,  $S$  abbia equazioni  $\{q_{k+i} = p_{k+i} = 0\}_{i=1, \dots, n-k}$ ,  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  siano coordinate canoniche su  $M$  intorno a  $x_0$  e  $(q_1, \dots, q_k, p_1, \dots, p_k)$  siano coordinate canoniche su  $S$  intorno a  $x_0$ . La matrice  $A$  le cui componenti sono le funzioni

$$i, j = 1, \dots, n - k \qquad \{x_{k+i}, x_{k+j}\}$$

(ove  $x_i = q_i$  ovvero  $x_i = p_i$ ) è invertibile (perché le  $(q_i, p_j)$  sono coordinate canoniche) e quindi possiamo considerare la sua inversa  $A^{-1}$  che avrà delle componenti che denoteremo  $a_{ij}$ .

Vogliamo confrontare, su  $S$ , la struttura di Poisson su  $M$  data dalla sua forma simplettica e quella data dalle parentesi di Dirac: per farlo decomponiamo lo spazio  $T_{x_0}M$  in somma diretta

$$T_{x_0}M = T_{x_0}S \oplus (T_{x_0}M)^\perp$$

ove l'ortogonale è preso rispetto alla forma  $\omega$ . Allora esiste un operatore di proiezione  $p_{x_0} : T_{x_0}M \rightarrow T_{x_0}S$  che ci permette di esprimere il legame fra le parentesi simplettiche e quelle di Dirac su  $M$  come

$$X_f^{Dirac}(x) = p_x \circ X_f^{Simpl}(x)$$

ove  $X_f^{xxx}$  è il campo hamiltoniano associato alla struttura di Poisson xxx. Ovviamente  $p_x \circ X_f(x)$  non è semplicemente  $X_f(x)$  e quindi esiste un termine "trasversale per il quale le parentesi di Dirac differiscono da quelle simplettiche.

Si può esplicitamente scrivere questo termine, nelle coordinate locali fissate precedentemente intorno a  $x_0$ , usando la notazione

$$(x_1, \dots, x_{2n}) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$$

come

$$X_f^{Simpl}(x) - X_f^{Dirac}(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) X_{x_{k+i}}^{Simpl}(f) X_{x_{k+j}}^{Simpl}(x)$$

Per i dettagli cfr. [95] o [73, §8].

Le strutture di Poisson regolari, come si è visto, sono strettamente imparentate con quelle simplettiche: *a priori* è facile definire una struttura di Poisson su una varietà semplicemente incollando strutture locali che siano regolari, ma non è detto che l'incollamento produca strutture di Poisson globalmente regolari, né che ogni varietà, quindi, ne possenga.

Ad esempio se consideriamo la sfera  $S^4$  a quattro dimensioni, vediamo immediatamente che non possiede strutture di Poisson regolari non nulle: infatti non possiede strutture simplettiche<sup>6</sup>, e quindi una struttura regolare non nulla non può che avere rango due; supponiamo che esista, cioè che ci sia una distribuzione involutiva con foglie simplettiche  $H \subset TS^4$ ; allora considerando la mappa  $\pi^\# : T^*S^4 \rightarrow TS^4$  indotta dalla struttura di Poisson (che è una mappa di fibrati perché la struttura è regolare) abbiamo che la sua immagine è un sottofibrato  $H$  di  $TS^4$ , che risulta così una somma di Whitney:

$$TS^4 = H \oplus N$$

Notiamo che  $H \cong N$  (ad esempio fissando una metrica) e quindi possiamo definire un operatore  $J : TS^4 \rightarrow TS^4$  come

$$J(X_H \oplus X_N) = X_N \oplus -X_H$$

Ovviamente  $J^2 = -Id$ , e in questo modo avremmo una struttura quasi-complessa  $J$  su  $S^4$ , mentre solo per  $n = 2, 6$  la sfera  $S^n$  possiede strutture quasi-complesse (cfr. [97, §41]). Questo assurdo è nato dall'aver supposto esistente una struttura di Poisson regolare di rango due su  $S^4$ .

Accenniamo a due altre classi di esempi di varietà di Poisson che corrispondono in realtà ad operazioni nella categoria di Poisson: cominciamo con una nozione dovuta a Weinstein [104].

<sup>6</sup>Una forma simplettica  $\omega$  su  $S^4$  dovrebbe in particolare essere chiusa, quindi darebbe luogo a una classe di coomologia in  $H^2(S^4)$  che è nullo; dunque la forma simplettica dovrebbe essere esatta e, dato che la varietà è compatta e non ha bordo, per il teorema di Stokes avremmo  $\int_{S^4} \omega \wedge \omega = 0$ , il che mostra che  $\omega$  non può essere non degenere.

**Proposizione 1.3.11** *Se  $M$  è una varietà di Poisson e  $N$  una sottovarietà tale che, per ogni foglia simplettica  $S \subset M$  l'intersezione  $S \cap N$  è anche una varietà simplettica allora  $N$  è una varietà di Poisson rispetto alla struttura indotta da  $M$  in modo che le sue foglie simplettiche siano esattamente le  $S \cap N$ .*

L'idea di questa costruzione è di definire le parentesi di Poisson su  $N$  come, se  $x \in N$ :

$$\{f, g\}(x) = (X_f g)(x)$$

se  $X_f$  è il campo hamiltoniano associato alla struttura simplettica su  $S \cap N \ni x$ . Ovviamente bisogna verificare che questa definizione produca effettivamente una funzione  $\{f, g\} \in C^\infty(N)$ , cfr. [102, p.38].

L'interesse di questa costruzione sta nel fatto che la sottovarietà  $N$ , pur essendo una varietà di Poisson *non è necessariamente una sottovarietà di Poisson di  $M$ .*

Di gran lunga più interessante è un'altra costruzione generale che coinvolge i quozienti: per una teoria generale della riduzione si rimanda a [72].

Consideriamo un gruppo di Lie  $G$  che agisca su una varietà di Poisson in modo canonico, cioè  $m \mapsto g \cdot m$  deve essere una mappa di Poisson. Se l'azione

$$A : G \times M \longrightarrow M$$

è propria (cioè se è propria la mappa  $A$ ) e libera (cioè priva di punti fissi) allora il quoziente  $M/G$  è una varietà differenziabile e la proiezione  $p : M \longrightarrow M/G$  è una sottoimmersione suriettiva (cfr. [1, §4.1]).

**Teorema 1.3.12** *Esiste un'unica struttura di Poisson su  $M/G$  che renda  $p : M \longrightarrow M/G$  una mappa di Poisson.*

L'idea è ovviamente quella di definire, per  $f, g \in C^\infty(M/G)$ :

$$\{f, g\} \circ p = \{f \circ p, g \circ p\}$$

Per i dettagli cfr. [73, §10.7]. Qui ci limitiamo ad illustrare questa costruzione con l'esempio fondamentale: sia  $M = T^*G$ , il fibrato cotangente del gruppo di Lie  $G$  rispetto alla sua struttura simplettica standard.

Evidentemente  $G$  agisce sul suo fibrato tangente semplicemente per sollevamento dell'azione regolare: quest'ultima è la moltiplicazione a sinistra  $A : G \times G \longrightarrow G$  definita come  $A(g)h = A_g h = gh$ ; si rammenti ora che un gruppo di Lie è parallelizzabile (cfr. [84]), cioè  $\mathfrak{X}(G)$  possiede una base come  $C^\infty(G)$ -modulo, data da una qualsiasi base dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di  $G$  vista

come spazio dei campi invarianti a sinistra. Similmente  $\Omega^1(G)$  possiede una  $C^\infty(G)$ -base data da una qualsiasi base dello spazio  $\mathfrak{g}^*$  delle 1-forme invarianti a sinistra; questo vuol dire che il fibrato cotangente è banale,  $T^*G = G \times \mathfrak{g}^*$ , e quindi che il sollevamento dell'azione regolare si definisce semplicemente come ( $g \in G, \varphi \in \mathfrak{g}^*$ )

$$\tilde{A}_h(g, \varphi) = (hg, \varphi)$$

Evidentemente si tratta di una azione propria e libera, e il quoziente è la varietà lineare  $\mathfrak{g}^* = T^*G/G$ ; la proiezione  $p : T^*G \rightarrow \mathfrak{g}^*$  è la proiezione canonica  $p$  del prodotto  $G \times \mathfrak{g}^*$  sul suo secondo fattore.

Ora, secondo quanto afferma il teorema precedente, esiste un'unica struttura di Poisson su  $\mathfrak{g}^*$  che renda questa mappa un morfismo di Poisson, che possiamo definire con la formula precedente; per capire esattamente quali parentesi otteniamo su  $\mathfrak{g}^*$ , notiamo che, date  $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$  possiamo interpretarle come funzioni "invarianti a sinistra sul fibrato cotangente di  $G$ ": precisamente  $f$  e  $g$  si estendono in modo unico a due funzioni  $\tilde{f}, \tilde{g} \in C^\infty(T^*G)$ , tali che  $f \circ p = \tilde{f}$  e  $g \circ p = \tilde{g}$ : allora

$$\{f, g\}_{\mathfrak{g}^*} = \{\tilde{f}, \tilde{g}\}_{T^*G}$$

Quello che si può dimostrare (cfr. [1, §4], [63, §4], [?, §13]) è che le parentesi  $\{ \}_{\mathfrak{g}^*}$  sono esattamente le parentesi di Lie–Poisson. Dunque il teorema di riduzione rispetto all'azione di un gruppo, nel caso del fibrato cotangente del gruppo, ci dice che le parentesi sullo spazio ridotto sono esattamente le parentesi di Lie–Poisson: possiamo cioè calcolarle estendendo le funzioni su  $\mathfrak{g}^*$  a funzioni  $G$ -invarianti su  $T^*G$ , calcolando le parentesi simplettiche e poi restringendo di nuovo a  $\mathfrak{g}^*$ .

Si rammenti inoltre che possiamo calcolare le parentesi di Lie–Poisson anche per restrizione, cioè considerando la foglia passante per il punto nel quale vogliamo calcolarle, restringere le funzioni a quella foglia e usare la forma simplettica della foglia medesima; esistono profonde applicazioni meccaniche di questa identità fra il procedimento di restrizione (usando la stratificazione simplettica di  $\mathfrak{g}^*$ ) e di estensione (usando la riduzione  $T^*G \rightarrow \mathfrak{g}^*$ ) discusse ad esempio in [73, §11-15].

## 1.4 Gruppi di Poisson–Lie e bialgebre di Lie

Una classe di esempi di varietà di Poisson che non ha luogo nel caso simplettico è data dai gruppi di Poisson–Lie introdotti da Drinfel'd (anche se alcuni prodromi della teoria emergono nei lavori di Sklijanin e di Belavin e Drinfel'd sul metodo inverso della diffusione quantistica) in [35]. Sebbene le

motivazioni dell'attenzione nei confronti di questi oggetti si trovino nella teoria dei gruppi quantistici è perfettamente giustificabile la loro introduzione, nel nostro contesto, in vista di una generalizzazione naturale delle varietà di Lie–Poisson. Infatti una varietà di Lie–Poisson, malgrado possa avere una struttura di Poisson non banale, è comunque assai semplice dal punto di vista geometrico e topologico, essendo uno spazio vettoriale: è quindi naturale cercare di fornire esempi non lineari di varietà di quel tipo, il che conduce naturalmente alla nozione di gruppo di Poisson–Lie.

Il concetto di gruppo di Poisson–Lie si ottiene sostituendo al gruppo additivo (dello spazio vettoriale)  $\mathbb{R}^n$  un qualsiasi gruppo di Lie nella costruzione della varietà di Lie–Poisson.

**Definizione 1.4.1** *Un gruppo di Poisson–Lie è un gruppo di Lie  $G$  dotato di una struttura di Poisson  $\{ \}$  in modo che la moltiplicazione*

$$\mu : G \times G \longrightarrow G$$

*del gruppo sia una mappa di Poisson:  $\mu \in P^\infty(G \times G, G)$ .*

Ad esempio se  $G = \mathbb{R}^n$  rispetto alla struttura di gruppo di Lie abeliano data dalla somma vettoriale, qualsiasi struttura di Lie–Poisson rende  $G$  un gruppo di Poisson–Lie; lo dimostreremo agevolmente fra breve non appena avremo dato alcune utili caratterizzazioni dei gruppi di Poisson–Lie: infatti non ogni tensore di Poisson definisce una struttura di gruppo di Poisson–Lie su un gruppo di Lie dato: ad esempio, sul gruppo abeliano  $\mathbb{R}^2$  la struttura  $\{f, g\}(x, y) = (x^2 + y^2)(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y})$  non soddisfa la condizione della definizione precedente.

**Proposizione 1.4.2** *Se  $G$  è un gruppo di Lie, le seguenti condizioni sono equivalenti*

- (1)  *$G$  è un gruppo di Poisson–Lie rispetto a un tensore di Poisson  $\pi$ .*
- (2)  *$\pi_{gh} = (L_g)_* \pi_h + (R_h)_* \pi_g$  se  $g, h \in G$  e  $L_g$  e  $R_g$  sono le azioni regolari sinistra e destra.*
- (3) *( $G$  connesso)  $\pi_e = 0$  e  $\mathcal{L}_X \pi$  è invariante a sinistra (destra) se lo è  $X$ .*

Queste sono verifiche immediate dalla definizione (cfr. [70], [102, §10], [56]). Notiamo in particolare che  $\pi_e = 0$  (per la (2) della proposizione, ove  $e$  è l'unità del gruppo di Lie  $G$ ) e che la mappa  $\iota : G \longrightarrow G$  data dal passaggio all'elemento inverso è di Poisson.

Notiamo inoltre che, avendosi  $\pi_e = 0$ , una struttura di gruppo di Poisson–Lie ha sempre rango nullo in  $e$  e quindi *un gruppo di Poisson–Lie non può*

*mai essere simplettico.* Abbiamo cioè degli esempi di varietà di Poisson che non possono in alcun modo provenire dalla geometria simplettica.

Consideriamo ad esempio una varietà di Lie–Poisson  $\mathfrak{g}^*$ : allora il tensore di Poisson verifica la (2), perché, se  $\pi$  è il suo tensore di Poisson, essendo questo lineare, deve aversi  $\pi_{x+y} = \pi_x + \pi_y$ . Notiamo inoltre che se  $\pi$  è un qualsiasi tensore di Poisson sul gruppo abeliano  $(\mathbb{R}^n, +)$  allora affinché vi induca una struttura di gruppo di Poisson–Lie deve aversi la medesima equazione (2), e quindi  $\pi$  è necessariamente lineare. Dunque

**Corollario 1.4.3**  $\mathbb{R}^n$  è un gruppo di Poisson–Lie additivo solo per la struttura di Lie–Poisson.

Ad esempio, se consideriamo il toro  $\mathbb{T}^n$ , che pure è abeliano, vediamo immediatamente che non ammette alcuna struttura di gruppo di Poisson–Lie: se infatti esistesse un tensore  $\pi$  di Poisson su  $\mathbb{T}^n$  che soddisfacesse la (2) del teorema precedente, potremmo, per mezzo della suriezione canonica  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = \mathbb{T}^n$ , sollevarlo ad un tensore di Poisson che renderebbe  $\mathbb{R}^n$  un gruppo di Poisson–Lie; ma questo tensore dovrebbe avere componenti periodiche, quindi di certo non lineari, il che non è possibile per la proposizione precedente.

Su un gruppo di Lie  $G$  importanza particolare rivestono i campi invarianti (a destra o sinistra): se  $P$  è un tensore controvariante su  $G$  possiamo sempre considerare una mappa

$$R^*P : G \longrightarrow \otimes^k \mathfrak{g}$$

(ove  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  è l'algebra di Lie del gruppo) come

$$R^*P(g) = (R_{g^{-1}})_* P_g$$

Rammentiamo ora che se  $V$  è una rappresentazione di  $G$ , un operatore  $\gamma : G \rightarrow V$  tale che

$$\gamma(gh) = g \cdot \gamma(h) + \gamma(g)$$

si dice *1-cociclo* di  $G$  a valori in  $V$ . Questa terminologia è presa dalla teoria della coomologia delle algebre di Lie a coefficienti in una rappresentazione  $V$  di  $\mathfrak{g}$  (cfr. [19, §XIII], [84, §19], [41, §1.3]): in effetti, se  $G$  è un gruppo di Lie–Poisson, con tensore di Poisson  $\pi$  allora possiamo considerare la “derivata intrinseca di questo tensore nell’identità del gruppo, come

$$D\pi = (dR^*\pi)_e$$

e troviamo che

**Proposizione 1.4.4** La derivata  $D\pi$  è un 1-cociclo rispetto all’azione aggiunta sullo spazio  $\gamma \wedge \gamma$ .

DIMOSTRAZIONE: Poiché il tensore  $\pi$  soddisfa alla

$$\pi_{gh} = (L_g)_*\pi_h + (R_h)_*\pi_g$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} R^*\pi(gh) &= (R_{(gh)^{-1}})_*\pi_{gh} = (R_{h^{-1}g^{-1}})_*((L_g)_*\pi_h + (R_h)_*\pi_g) \\ &= \text{Ad}_g(R_{h^{-1}})_*\pi_h + (R_{g^{-1}})_*\pi_g \\ &= \text{Ad}_g R^*\pi_h + R^*\pi_g \end{aligned}$$

Ora, nell'intorno di  $e \in G$ , utilizziamo le coordinate canoniche (cfr. [83, §42–44], [84, §4]) per scrivere  $g = \exp tX$  e  $h = \exp tY$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) in modo che

$$gh = \exp \left( tX + tY + \frac{1}{2}t^2[X, Y] + o(t^3) \right)$$

La formula precedente diviene dunque

$$R^*\pi_{\exp(tX+tY+\frac{1}{2}t^2[X,Y]+o(t^3))} = \text{Ad}_{\exp tX} R^*\pi_{\exp tY} + R^*\pi_{\exp tX}$$

che, derivata rispetto a  $t$  e calcolata in  $t = 0$ , dà luogo alla

$$D\pi(gh) = \text{ad}_g D\pi(h) + D\pi(g)$$

(rammentando che  $\text{Ad}_{\exp X} = \exp \text{ad}_X$ ).

QED

Drinfel'd ha dimostrato (cfr. [35] e [56]) il

**Teorema 1.4.5** *Se  $G$  è un gruppo di Poisson–Lie e  $\gamma = D\pi$  allora la mappa duale  $\gamma^* : \bigwedge^2 \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$  definisce una parentesi di Lie su  $\mathfrak{g}^*$ .*

Si giunge in questo modo ad un concetto algebrico di per sé interessante:

**Definizione 1.4.6** *Una bialgebra di Lie è una coppia  $(\mathfrak{g}, \gamma)$  ove  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie,  $\gamma : \mathfrak{g} \longrightarrow \bigwedge^2 \mathfrak{g}$  un 1-cociclo rispetto alla rappresentazione aggiunta la cui duale renda  $\mathfrak{g}^*$  un'algebra di Lie.*

Rammentiamo che questo significa che

$$\gamma[X, Y] = [\gamma X, Y] + [X, \gamma Y]$$

Dunque il teorema di Drinfel'd afferma che l'algebra di Lie di un gruppo di Poisson–Lie è una bialgebra di Lie: la struttura di varietà si riflette nelle

parentesi su  $\mathfrak{g}$ , la struttura di Poisson si riflette nelle parentesi su  $\mathfrak{g}^*$  e la condizione di compatibilità della struttura di Poisson col prodotto di Lie si riflette nella condizione di cociclo.

Più in generale enunciamo il<sup>7</sup>

**Teorema (DRINFEL'D) 1.4.7** *Esiste un funtore dalla categoria dei gruppi di Poisson–Lie alla categoria delle bialgebre di Lie, e questo funtore, ristretto alla sottocategoria dei gruppi di Poisson–Lie connessi e semplicemente connessi, è una equivalenza di questa categoria sulla categoria delle bialgebre di Lie.*

Una discussione completa, anche se non nella formulazione che qui abbiamo dato, si trova in [102, §10]; cfr. pure [70].

Lo studio delle bialgebre di Lie riveste quindi la stessa importanza, nel nostro caso, che lo studio delle algebre di Lie ha nel caso dei gruppi di Lie. Una classe particolarmente interessante di queste bialgebre si ottiene considerando la teoria delle equazioni di Yang–Baxter, che ha origine in Meccanica Statistica. Una formulazione generale della teoria di Yang–Baxter si può dare secondo le linee seguenti (sostanzialmente è quale la si ritrova nei lavori di Semenov-Tjian-Šankij: [90], [91], [92], [87]): consideriamo un'algebra di Lie<sup>8</sup>  $\mathfrak{g}$  e un operatore lineare

$$R : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

Possiamo allora definire l'applicazione bilineare antisimmetrica

$$[X, Y]_R := [RX, Y] + [X, RY]$$

**Definizione 1.4.8** *Una R-matrice classica sull'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  è un operatore lineare tale che l'applicazione  $[\ ]_R$  sia una parentesi di Lie.*

Quando  $R : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$  è una R-matrice, possiamo considerare la struttura di Lie–Poisson su  $\mathfrak{g}^*$  indotta dalle parentesi di Lie  $[\ ]_R$ , che ha rilevanza nella teoria della diffusione: in particolare si può dimostrare che le funzioni di Casimir rispetto alle parentesi di Lie su  $\mathfrak{g}$  usuali formano una sottoalgebra abeliana rispetto alle nuove parentesi  $[\ ]_R$  e che le equazioni del moto rispetto

<sup>7</sup>Ovviamente un morfismo di bialgebre di Lie è un morfismo di algebre il cui duale sia un morfismo delle algebre duali, e un morfismo di gruppi di Poisson–Lie è un morfismo di gruppi di Lie che sia anche una mappa di Poisson.

<sup>8</sup>Poiché avremo bisogno di identificare  $\mathfrak{g}$  con il suo duale, necessitiamo che l'algebra abbia dimensione finita: in realtà questa limitazione può farsi cadere se si prestano le dovute cautele nella considerazione dei prodotti scalari; qui siamo interessati alle algebre di Lie provenienti da gruppi di Lie, quindi supporremo sempre di trovarci nell'ambito finito-dimensionale.

alle parentesi di Lie–Poisson indotte da  $[\ ]_R$  sono nella forma di Lax (cfr. [90], [87, §2]).

Se introduciamo la notazione

$$B_R(X, Y) = [RX, RY] - R[RX, Y] - R[X, RY]$$

allora l'identità di Jacobi per le parentesi  $[\ ]_R$  equivale alla

$$[B_R(X, Y), Z] + [B_R(Y, Z), X] + [B_R(Z, X), Y] = 0$$

che si chiama *equazione di Yang–Baxter* (YBE). Notiamo che se  $R$  è una  $R$ -matrice tale che

$$B_R(X, Y) = 0$$

allora

$$[RX, RY] = R[X, Y]_R$$

cioè la condizione che  $R$  sia un morfismo di algebre di Lie. Questa è una condizione naturale da richiedere, e si dice *equazione di Yang–Baxter classica* (CYBE). Un'altra immediata condizione che implica l'equazione di Yang–Baxter è ovviamente

$$B_R(X, Y) = \alpha[X, Y]$$

( $\alpha$  scalare) poiché in questo modo l'equazione di Yang–Baxter diviene semplicemente l'identità di Jacobi per le parentesi di Lie  $[\ ]$ . Quest'ultima equazione si chiama *equazione di Yang–Baxter modificata* (MYBE).

Siamo qui interessati alle  $R$ -matrici perché inducono strutture di bialgebre di Lie: supponiamo che  $\mathfrak{g}$  sia dotata di un prodotto scalare invariante e simmetrico; allora possiamo identificare per mezzo di esso  $\mathfrak{g}$  con  $\mathfrak{g}^*$  e considerare l'operatore

$$\tilde{R} : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}$$

definito come (scriviamo  $\varphi^\#$  per denotare il vettore corrispondente al covettore  $\varphi \in \mathfrak{g}^*$ ):

$$\tilde{R}\varphi = R\varphi^\#$$

Se inoltre  $R$  è antisimmetrico rispetto a questo prodotto scalare possiamo definire

$$[\varphi, \psi]_R = \text{ad}_{\tilde{R}\varphi}^* \psi - \text{ad}_{\tilde{R}\psi}^* \varphi$$

( $\text{ad}_X^*$  denota l'azione coaggiunta). Allora (si rammenti l'invarianza del prodotto scalare)

$$\begin{aligned}
[\varphi, \psi]_R(Z) &= \text{ad}_{R\varphi^\#}^* \psi(Z) - \text{ad}_{R\psi^\#}^* \varphi(Z) \\
&= \psi[Z, R\varphi^\#] - \varphi[Z, R\psi^\#] \\
&= (\psi^\#, [Z, R\varphi^\#]) - (\varphi^\#, [Z, R\psi^\#]) \\
&= ([R\varphi^\#, R\psi^\#], Z) + ([\varphi^\#, R\psi^\#], Z) \\
&= ([\varphi^\#, \psi^\#]_R, Z)
\end{aligned}$$

Dunque l'identità di Jacobi per le parentesi su  $\mathfrak{g}^*$  equivale a quella per le parentesi su  $\mathfrak{g}$ . Notiamo che abbiamo in questo modo definito una mappa

$$\rho : \mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

della quale possiamo considerare la duale:

**Teorema 1.4.9** *La mappa duale  $\rho^*$  è un 1-cociclo rispetto alla rappresentazione aggiunta di  $\mathfrak{g}$  su  $\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ , dunque  $(\mathfrak{g}, \rho^*)$  è una bialgebra di Lie.*

(cfr. [102, §10], [56, §2]).

Questo metodo per produrre bialgebre di Lie è importante nelle applicazioni; un esempio notevole è il seguente, dovuto a Semenov-Tijan-Šanskij: consideriamo un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  che sia somma diretta (come spazio vettoriale) di due sottoalgebre  $\mathfrak{g}_-$  e  $\mathfrak{g}_+$ , e condideriamo gli operatori di proiezione

$$P_\pm : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}_\pm$$

e la loro differenza

$$R = P_+ - P_-$$

Allora (scriviamo  $X = X_+ + X_-$  per la decomposizione del vettore  $X \in \mathfrak{g}$  nelle sue componenti secondo la somma diretta di spazi vettoriali  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ )

$$\begin{aligned}
[X, Y]_R &= [X_+ - X_-, Y_+ + Y_-] + [X_+ + X_-, Y_+ - Y_-] \\
&= [X_+, Y_+] - [X_-, Y_+] + [X_+, Y_-] - [X_-, Y_-] + \\
&\quad + [X_+, Y_+] - [X_+, Y_-] + [X_-, Y_+] - [X_-, Y_-] \\
&= 2[X_+, Y_+] - 2[X_-, Y_-]
\end{aligned}$$

Notiamo inoltre che

$$R(X_+) = X_+ \quad \text{e} \quad R(X_-) = -X_-$$

Quindi (si osservi che  $[X_{\pm}, Y_{\pm}] \in \mathfrak{g}_{\pm}$  per ipotesi)

$$\begin{aligned}
B_R(X, Y) &= [RX, RY] - R[X, Y]_R \\
&= [X_+ - X_-, Y_+ - Y_-] - 2R[X_+, Y_+] + 2R[X_-, Y_-] \\
&= [X_+, Y_+] - [X_+, Y_-] + [X_-, Y_-] - [X_-, Y_+] \\
&\quad - 2[X_+, Y_+] - 2[X_-, Y_-] + \\
&= -[X_+, Y_+] - [X_+, Y_-] - [X_-, Y_+] - [X_-, Y_-] \\
&= -[X, Y]
\end{aligned}$$

sicché  $R$  è una  $R$ -matrice che soddisfa l'equazione di Yang–Baxter modificata.

L'importanza delle  $R$ -matrici che soddisfano l'equazione di Yang–Baxter modificata risiede nel seguente teorema, sostanzialmente dovuto a Belavin e Drinfel'd (cfr. [90], [91], [56])

**Teorema 1.4.10** *Se  $\mathfrak{g}$  è un'algebra semplice complessa allora una qualsiasi struttura di bialgebra di Lie è indotta da una  $R$ -matrice che soddisfa l'equazione di Yang–Baxter modificata.*

Che una qualsiasi struttura di bialgebra su un'algebra semisemplice sia necessariamente indotta da una  $R$ -matrice è ovvio: infatti ogni 1-cociclo di un'algebra semisemplice è un 1-cobordo (a coefficienti in qualsivoglia rappresentazione) per il lemma di Whitehead (cfr. [84, §19]).

Se  $(\mathfrak{g}, \gamma)$  è una bialgebra di Lie, possiamo considerare la sua *bialgebra duale*  $(\mathfrak{g}^*, \lambda)$  ove  $\lambda : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^*$  è la mappa duale della parentesi di Lie di  $\mathfrak{g}$ ; abbiamo ovviamente un isomorfismo naturale fra la duale della duale di una bialgebra di Lie e la bialgebra medesima. Inoltre vale il seguente risultato, dovuto a Drinfel'd e Manin (cfr. [35], [90], [91], [56])

**Teorema 1.4.11** *Se  $(\mathfrak{g}, \gamma)$  è una bialgebra di Lie allora esiste un'unica struttura di algebra di Lie sullo spazio vettoriale  $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$  tale che  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{g}^*$  siano sottoalgebre e tale che il prodotto scalare*

$$(X + \varphi, Y + \psi) := \varphi(Y) + \psi(X)$$

*sia invariante.*

L'algebra di Lie  $\mathfrak{d}$  si dice *doppio della bialgebra di Lie  $\mathfrak{g}$* ; si noti che le sottoalgebre  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{g}^*$  di  $\mathfrak{d}$  sono isotrope rispetto al prodotto scalare  $(\cdot, \cdot)$ . La struttura di algebra di Lie  $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{d}}$  postulata dal teorema è determinata dalle seguenti condizioni ( $X, Y \in \mathfrak{g}$ ,  $\varphi, \psi \in \mathfrak{g}^*$ ):

$$[X, Y]_{\mathfrak{d}} = [X, Y]_{\mathfrak{g}} \quad \text{e} \quad [\varphi, \psi]_{\mathfrak{d}} = [\varphi, \psi]_{\mathfrak{g}^*} \quad \text{e} \quad [X, \varphi]_{\mathfrak{d}} = -\text{ad}_{\varphi}^* X + \text{ad}_X^* \varphi$$

ove  $\text{ad}^*$  denota l'azione coaggiunta. Si noti che il doppio di  $\mathfrak{g}$  si presenta in modo naturale come una bialgebra di Lie, perché possiamo considerare la R-matrice

$$R = P_{\mathfrak{g}} - P_{\mathfrak{g}^*}$$

ottenuta come differenza degli operatori di proiezione sulle sottoalgebre  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{g}^*$  di  $\mathfrak{d}$ .

Illustriamo ora la teoria con alcuni esempi che prendiamo da [35].

**Esempio.** Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie complessa semplice di rango  $r$ , con sottoalgebra di Cartan  $\mathfrak{h}$  e sottoalgebra di Borel (rispetto ad un ordinamento positivo del sistema di radici)  $\mathfrak{b}_+$  (cfr. [83, §62], [45, §16]). Se poniamo  $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$  (somma diretta di algebre di Lie) e consideriamo le sottoalgebre

$$\mathfrak{k}_1 = \{X \oplus X \mid X \in \mathfrak{g}\}$$

$$\mathfrak{k}_2 = \{X \oplus Y \mid X \in \mathfrak{b}_+, Y \in \mathfrak{b}_-, \mathfrak{h}\text{-componenti di } X \text{ e } Y \text{ opposte}\}$$

allora su  $\mathfrak{k}$  abbiamo un prodotto scalare

$$(X \oplus Y, X' \oplus Y') = (\langle X, X' \rangle - \langle Y, Y' \rangle)$$

ove  $\langle \rangle$  è la forma di Killing su  $\mathfrak{g}$ . Dunque  $(\ )$  è un prodotto scalare non degenero (perché lo è  $\langle \rangle$ ) e invariante rispetto al quale  $\mathfrak{k}_1$  e  $\mathfrak{k}_2$  sono sottoalgebre isotrope e complementari.

Ora possiamo identificare  $\mathfrak{k}_2$  con  $\mathfrak{k}_1^*$ , associando al vettore  $X \oplus Y \in \mathfrak{k}_2$  il covettore  $C(X, Y) \in \mathfrak{k}_1^*$  definito come

$$C(X, Y)(X' \oplus X') = (X \oplus Y, X' \oplus X')$$

La mappa  $X \oplus Y \mapsto C(X, Y)$  è iniettiva, dato che  $C(X, Y) = 0$  implica  $(X \oplus Y, X' \oplus X') = 0$ , cioè  $\langle X, X' \rangle = \langle Y, X' \rangle$  e, poiché  $X$  e  $Y$  appartengono all'algebra di Borel positiva e negativa, deve aversi  $X' = 0$ . Inoltre,  $\mathfrak{k}_1$  e  $\mathfrak{k}_2$  hanno visibilmente la stessa dimensione, quindi  $\mathfrak{k}_1^* = \mathfrak{k}_2$ .

Dunque le parentesi di Lie su  $\mathfrak{k}_2$  definiscono delle parentesi di Lie su  $\mathfrak{k}_1$  che la rendono una bialgebra di Lie (questo metodo per produrre bialgebre di Lie lo si deve a Manin, cfr. [35]): naturalmente è possibile scrivere in termini concreti questa struttura di bialgebra, ricorrendo ad esempio alla base di Weyl ([45, §10]).

Per non violare una consolidata tradizione diamo questi dettagli solo per il caso  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ; consideriamo la sua base di Weyl  $\{H, X, Y\}$ : la forma di Killing in questo caso è determinata dalle

$$\langle H, H \rangle = 8 \quad \text{e} \quad \langle X, Y \rangle = 4$$

(ed è zero negli altri casi).  $\mathfrak{b}_+$  è generata da  $H$  e  $X$  (e  $\mathfrak{b}_-$  è generata da  $H$  e  $Y$ ), sicché una base per  $\mathfrak{k}_1$  è  $\{H \oplus H, X \oplus X, Y \oplus Y\}$ , mentre una base per  $\mathfrak{k}_2$  è  $\{H \oplus -H, 0 \oplus X, Y \oplus 0\}$  in modo che

$$(H \oplus H, H \oplus -H) = -16 \quad \text{e} \quad (Y \oplus Y, 0 \oplus X) = 4 \quad \text{e} \quad (X \oplus X, Y \oplus 0) = -4$$

(e svanisce negli altri casi). Questo prodotto scalare ci consente di identificare  $\mathfrak{k}_1^*$  con  $\mathfrak{k}_2$  per mezzo delle posizioni

$$H \oplus -H \mapsto -16H^* \quad \text{e} \quad 0 \oplus X \mapsto 4Y^* \quad \text{e} \quad Y \oplus 0 \mapsto -4X^*$$

Ora, dato che le regole di commutazione per  $\mathfrak{k}_2$  sono

$$\begin{aligned} [H \oplus -H, 0 \oplus X] &= 0 \oplus -[H, X] = -2(0 \oplus X) \\ [H \oplus -H, Y \oplus 0] &= [H, Y] \oplus 0 = -2(Y \oplus 0) \\ [0 \oplus X, Y \oplus 0] &= 0 \end{aligned}$$

ne deduciamo le regole di commutazione per il duale di  $\mathfrak{k}_1$  e quindi la sua struttura di bialgebra di Lie:

$$[H^*, X^*] = \frac{1}{8}X^* \quad \text{e} \quad [H^*, Y^*] = \frac{1}{8}Y^* \quad \text{e} \quad [X^*, Y^*] = 0$$

Si tratta dunque ancora di  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .

**Esempio.** Continuiamo l'esempio precedente dell'algebra di Lie semplice complessa  $\mathfrak{g}$ : sia  $\{H_j, X_\alpha, Y_\alpha\}_{j=1, \dots, r; \alpha \in \Delta^+}$  la sua base di Weyl; lo spazio reale generato dagli elementi

$$iH_j \quad \text{e} \quad X_\alpha - Y_\alpha \quad \text{e} \quad i(X_\alpha + Y_\alpha)$$

è una sottoalgebra reale  $\mathfrak{k}$  di  $\mathfrak{g}$  (vista come algebra di Lie reale) che si dice la sua forma compatta, e che soddisfa alla

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{b}$$

ove  $\mathfrak{b}$  è la sottoalgebra reale di Borel, generata dagli elementi della forma  $H_j$  e  $X_\alpha$ .

Allora  $\mathfrak{k}$  è una bialgebra di Lie (con bialgebra duale  $\mathfrak{b}$ ) dato che possiamo considerare i ragionamenti precedentemente svolti usando come prodotto scalare la parte immaginaria della forma di Killing.

Di nuovo chiariamo nel caso più semplice: consideriamo cioè  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  e quindi  $\mathfrak{k} = \mathfrak{su}(2)$ . Allora una base di  $\mathfrak{k}$  è

$$E_1 = iH \quad e \quad E_2 = X - Y \quad e \quad E_3 = i(X + Y)$$

mentre una base di  $\mathfrak{b}$  è

$$F_1 = H \quad e \quad F_2 = X \quad e \quad F_3 = iX$$

Si tratta, quest'ultima, dell'algebra delle matrici triangolari superiori con diagonale reale e traccia nulla.

Determiniamo quindi la struttura di bialgebra di Lie su  $\mathfrak{k}$  scrivendo i commutatori dell'algebra di Lie  $\mathfrak{b}$ : quest'ultima si identifica a  $\mathfrak{k}^*$  per mezzo delle posizioni

$$F_1 \mapsto 16E_1^* \quad e \quad F_2 \mapsto 8E_3^* \quad e \quad F_3 \mapsto -8E_2^*$$

(ovviamente  $(E_1^*, E_2^*, E_3^*)$  è la base duale di  $(E_1, E_2, E_3)$ ). Ma le relazioni di Weyl si leggono come

$$[F_1, F_2] = 2F_2 \quad e \quad [F_1, F_3] = 2F_3 \quad e \quad [F_2, F_3] = 0$$

sicché la struttura di bialgebra è data dalle regole seguenti

$$[E_1^*, E_2^*] = \frac{1}{8}E_2^* \quad e \quad [E_1^*, E_3^*] = \frac{1}{8}E_3^* \quad e \quad [E_2^*, E_3^*] = 0$$

Dunque  $\mathfrak{su}(2)^*$  è un'algebra di Lie risolubile.

Tutta questa nostra discussione sulle bialgebre di Lie si può riportare ai gruppi di Poisson–Lie per mezzo del teorema di Drinfel'd: ad esempio, dato che i gruppi di Poisson–Lie connessi e semplicemente connessi corrispondono in modo biunivoco alle bialgebre di Lie possiamo integrare le strutture di bialgebre da noi determinate a strutture di gruppo di Poisson–Lie.

Ad esempio, se  $R : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$  è una R-matrice e se esiste un prodotto scalare  $(\cdot)$  invariante che ci consenta di identificare  $\mathfrak{g}$  con  $\mathfrak{g}^*$  allora possiamo considerare il tensore  $r \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$  definito come  $(\varphi, \psi \in \mathfrak{g}^*)$

$$\langle r, \varphi \wedge \psi \rangle = \langle \tilde{R}\varphi, \psi \rangle$$

Un tensore sull'algebra di Lie può considerarsi sia come un tensore invariante a destra che come un tensore invariante a sinistra: se  $R_g$  è la traslazione a destra e  $L_g$  è la traslazione a sinistra possiamo definire i tensori

$$(L_g)_*r : G \longrightarrow TG \wedge TG \quad e \quad (R_g)_*r : G \longrightarrow TG \wedge TG$$

La seguente osservazione è dovuta a Drinfel'd:

**Proposizione 1.4.12** *I tensori  $(L_g)_*r$  e  $(R_g)_*r$  sono tensori di Poisson su  $G$  se  $r$  è indotto da una  $R$ -matrice, e ogni loro combinazione lineare è pure una struttura di Poisson.*

Tuttavia in questa famiglia  $\alpha(L_g)_*r + \beta(R_g)_*r$  di strutture di Poisson su  $G$  soltanto

$$\pi^r = (L_g)_*r - (R_g)_*r$$

rende  $G$  un gruppo di Poisson–Lie:

**Teorema 1.4.13** *Un tensore  $\pi \in TG \wedge TG$  rende un gruppo di Lie  $G$  un gruppo di Poisson–Lie se e solo se è della forma  $\pi^r$  per qualche  $R$ -matrice  $r$ .*

(per questi risultati cfr. [70], [56] e [102, §10]).

Consideriamo ad esempio il gruppo di Lie  $SL(2, \mathbb{C})$  la cui algebra è  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ : la forma di Killing definisce un tensore doppio  $k \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  (l'elemento di Casimir, cfr. [44, §6])

$$k = \frac{1}{16}H \otimes H + \frac{1}{8}(X \otimes Y + Y \otimes X)$$

Definiamo allora

$$r = \frac{1}{16}(H \otimes H + 2X \otimes Y)$$

ottenendo un tensore che, come ogni tensore doppio, si decompone univocamente in una parte simmetrica (la forma di Killing) e una parte antisimmetrica (cioè  $a = \frac{1}{2}X \wedge Y$ ): quest'ultima induce una struttura di bialgebra di Lie su  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  semplicemente considerando il suo cobordo nel senso della coomologia delle algebre di Lie, che è determinato dalle

$$\delta a(H) = 0 \quad \text{e} \quad \delta a(X) = \frac{1}{2}X \wedge H \quad \text{e} \quad \delta a(Y) = \frac{1}{2}Y \wedge H$$

e che induce la parentesi di Lie seguente su  $\mathfrak{su}(2, \mathbb{C})$ :

$$[H^*, X^*] = \frac{1}{2}X^* \quad \text{e} \quad [X^*, Y^*] = \frac{1}{2}Y^* \quad \text{e} \quad [X^*, Y^*] = 0$$

Si tratta cioè della struttura che avevamo precedentemente dedotto (questo è un esempio concreto dell'equivalenza del tensore  $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  e dell'operatore  $R : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  in presenza di un prodotto scalare invariante, la forma di Killing in questo caso).

Ora passiamo al gruppo  $G = SL(2, \mathbb{C})$  e consideriamo su di esso il tensore  $16r$  (normalizzato per comodità): se scriviamo il tensore

$$\pi_g = (R_g)_*r - (L_g)_*r$$

ove  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , otteniamo le regole di commutazione, per le parentesi di Poisson, in termini di funzioni coordinate

$$\begin{array}{lll} \{a, b\} = ab & \text{e} & \{a, c\} = ac & \text{e} & \{a, d\} = 2bc \\ \{b, c\} = 0 & \text{e} & \{b, d\} = bd & \text{e} & \{c, d\} = cd \end{array}$$

Se invece consideriamo il gruppo di matrici reali  $SL(2, \mathbb{R})$  e il tensore

$$r = X \otimes H - H \otimes X$$

otteniamo una R-matrice che soddisfa l'equazione di Yang–Baxter classica, e tale che

$$\delta r(X) = 0 \quad \text{e} \quad \delta r(Y) = 2Y \wedge X \quad \text{e} \quad \delta r(H) = X \wedge H$$

Infine, sul gruppo  $SU(2)$  la cui algebra di Lie è la forma reale e compatta  $\mathfrak{su}(2)$  di  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , considerando la base dell'algebra di Lie

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

con le regole di commutazione

$$[X, Y] = Z \quad \text{e} \quad [Y, Z] = X \quad \text{e} \quad [Z, X] = Y$$

il tensore  $r = Y \wedge X$  dà luogo alle parentesi di Poisson–Lie

$$\begin{array}{lll} \{a, b\} = iab & \text{e} & \{a, c\} = iac & \text{e} & \{a, d\} = 2ibc \\ \{b, c\} = 0 & \text{e} & \{b, d\} = ibd & \text{e} & \{c, d\} = icd \end{array}$$

Questi esempi si generalizzano al caso di  $SL(n, \mathbb{C})$  e di un qualsiasi gruppo semisemplice complesso: in generale si utilizza la decomposizione di Iwasawa per ottenere il gruppo di Poisson–Lie reale e compatto soggiacente, e le formule possono darsi in termini della teoria delle radici delle algebre di Lie e delle basi di Weyl: per una discussione completa cfr. [70], [69], [66], [56]; inoltre una teoria analoga ha luogo anche per i *loop groups* perché a livello algebrico può svolgersi nel caso delle algebre di Kac–Moody: questo è solo accennato da Drinfel'd [35] e Semenov-Tijan-Šanskij [90], ma si può trovare discusso ad esempio in [40].

I concetti di bialgebra duale e di doppio di una bialgebra di Lie si prestano ad una globalizzazione sui gruppi di Poisson–Lie: ad esempio, se  $G$  è un gruppo di Poisson–Lie e  $\mathfrak{g}$  la sua algebra di Lie, dato che è una bialgebra, esiste un unico gruppo di Lie  $G^*$  connesso e semplicemente connesso la cui algebra

di Lie sia  $\mathfrak{g}^*$ , che chiamiamo *duale del gruppo di Poisson–Lie*  $G$ . Si tratta ovviamente di un gruppo di Poisson–Lie dato che la sua algebra di Lie è una bialgebra, e il suo duale è il rivestimento universale di  $G$ .

Una volta definito il duale di un gruppo di Poisson–Lie possiamo anche considerarne il doppio, che è per definizione il gruppo di Lie  $D$  connesso e semplicemente connesso la cui algebra di Lie è il doppio  $\mathfrak{d}$  della bialgebra di Lie di  $G$  (esiste anche un altro concetto di doppio di un gruppo di Poisson–Lie, il *doppio di Heisenberg*, per il quale si vedano [93] e [3]).

**Esempio.** Se  $G$  è un gruppo di Lie equipaggiato del tensore di Poisson nullo allora  $\mathfrak{g}^*$  è un'algebra di Lie abeliana, e quindi il gruppo che la integra è lo spazio vettoriale  $\mathfrak{g}^*$  stesso; dunque il duale di un gruppo di Poisson–Lie nullo è una varietà di Lie–Poisson. Il doppio di  $G$  col tensore di Poisson nullo è il prodotto semidiretto di  $G$  con  $\mathfrak{g}^*$  rispetto alla rappresentazione coaggiunta: in altri termini è il gruppo di Lie  $T^*G$ , il fibrato cotangente di  $G$ .

**Esempio.** Se consideriamo il gruppo  $SU(2)$  con la struttura di Poisson–Lie indotta dalla R-matrice  $r = Y \wedge X$  allora il suo duale è il gruppo risolubile connesso  $SB(2, \mathbb{C})$  costituito dalle matrici della forma

$$\begin{pmatrix} a & b + ic \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

ove  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $a > 0$ . In effetti una base dell'algebra di Lie di questo gruppo è

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e}$$

con le regole di commutazione

$$[H, X] = 2X \quad \text{e} \quad [H, Y] = 2Y \quad \text{e} \quad [X, Y] = 0$$

e quindi è isomorfa a  $\mathfrak{su}(2)^*$ . Si noti che possiamo costruire  $SB(2, \mathbb{C})$  anche come il sottogruppo di  $B_- \times B_+$  (ove  $B_{\pm}$  è il sottogruppo di Borel in  $SL(2, \mathbb{R})$ ) dei prodotti  $g \times h$  tali che gli elementi diagonali delle matrici  $g$  siano gli inversi degli elementi diagonali delle matrici  $h$ ; dunque  $SB(2, \mathbb{C})$  è anche il duale del gruppo di Poisson–Lie  $SL(2, \mathbb{R})$ . Si noti tuttavia che  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})^*$  e  $\mathfrak{su}(2)^*$  non sono isomorfe come bialgebre di Lie, sicché  $SB(2, \mathbb{C})$  ha due strutture di gruppo di Poisson–Lie diverse secondo che sia considerato come il duale di  $SU(2)$  o di  $SL(2, \mathbb{R})$ . Il doppio di  $SU(2)$  è esplorato in dettaglio in [2].

Menzioniamo che esiste una caratterizzazione delle foglie simplettiche dei gruppi di Poisson–Lie in termini di trasformazioni di rivestimento, la cui teoria

è sviluppata in [91], [70], [109], [56], [3]. Infine, per una discussione chiara e approfondita dei risultati di classificazione per i gruppi semplici, rimandiamo a [16].