Capitolo 2

Algebra delle parentesi di Poisson

In questo capitolo affrontiamo le strutture di Poisson da un punto di vista formale con lo scopo di trattare in modo completo e generale il calcolo differenziale di Poisson: inquadreremo quindi la teoria delle parentesi di Poisson nel contesto delle algebre associative, e faremo intervenire il calcolo differenziale nel contesto algebrico, sviluppando per questo scopo gli usuali strumenti di calcolo (differenziali e connessioni); su una varietà di Poisson esiste una teoria differenziale "duale che coinvolge i campi vettoriali e le loro potenze esterne piuttosto che le forme differenziali: si può dare una trattazione di questo calcolo, dovuto sostanzialmente a Lichnerowicz, Koszul, Bhaskara e Viswanath (cfr. [64], [57], [9]), in modo puramente algebrico, e questo è quello che faremo applicando le nozioni algebriche introdotte in precedenza.

2.1 Algebre di Poisson

La definizione di varietà di Poisson che abbiamo dato coinvolge in realtà solo l'algebra delle funzioni differenziabili: possiamo in effetti dare questa definizione in un contesto astratto nel quale l'algebra non sia necessariamente quella delle funzioni differenziabili di una varietà; a noi interessa solo questo caso[1] ma, specie per sviluppare il calcolo tensoriale, è utile considerare un contesto più astratto. Fissiamo dunque un anello commutativo con unità $\mathbb{K}$: gli esempi principali che abbiamo in mente sono i PID (come $\mathbb{Z}$, o le serie formali su un PID) e i campi (e.g. reali o complessi).

Definizione 2.1.1 *Un'*algebra di Poisson *è una terna* $(A, \cdot, \{\,\})$ *tale che:*

(1) *A sia una $\mathbb{K}$-algebra associativa rispetto al prodotto $\cdot$;*

(2) *A sia una $\mathbb{K}$-algebra di Lie rispetto alle parentesi $\{\,\}$;*

[1] La teoria generale delle algebre di Poisson non è mai stata oggetto di ricerca: il principale motivo è senza dubbio l'assenza di esempi non geometrici; l'unico aspetto che ha suscitato interesse e diverse ricerche è il rapporto con il caso non commutativo (cfr. [38], [?]), studiato nella teoria della quantizzazione per deformazione (cfr. [?], [44], [?]).

(3) $\forall a, b, c \in A \quad \{ab, c\} = a\{b, c\} + \{a, c\}b$ (*identità di Leibniz*).

L'operazione associativa $\cdot$ *si dice* prodotto *e l'operazione di Lie* $\{\,\}$ *si dice* parentesi di Poisson.

Dunque un'algebra di Poisson è caratterizzata da tre assiomi: l'associatività rispetto al prodotto, l'identità di Jacobi rispetto alle parentesi e la regola di Leibniz, che costituisce una condizione di compatibilità fra la struttura di Lie e quella associativa. *A priori* un'algebra di Poisson non è necessariamente commutativa rispetto al prodotto $\cdot$ benché sia sempre anticommutativa rispetto alle parentesi di Poisson $\{\,\}$ (il che fornisce una blanda motivazione estetica alla considerazione di algebre commutative: in questo caso esiste infatti una maggior simmetria fra la struttura associativa e quella di Lie).

Esempio. Se A è un'algebra associativa allora possiamo renderla un'algebra di Lie $[A]$ ponendo $[a, b] = ab - ba$; rispetto a questa struttura

$$(*) \quad [ab, c] = (ab)c - c(ab) = a(bc) - a(cb) + (ac)b - (ca)b = a[b, c] + [a, c]b$$

e quindi abbiamo un'algebra di Poisson. Si noti che, tuttavia, la struttura di Poisson, così come quella di Lie, è completamente determinata da quella associativa.

Esempio. Se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie allora la sua algebra inviluppante universale $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ è un'algebra di Poisson per via dello stesso calcolo (*) o, se si vuole, per il fatto che i funtori che assegnano ad un'algebra associativa A l'algebra di Lie $[A]$ e all'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ la sua inviluppante universale $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ sono aggiunti.

Esempio. Banalmente ogni algebra di Lie e ogni algebra associativa sono algebre di Poisson rispettivamente rispetto alla struttura associativa e alla struttura di Lie nulla.

In generale gli esempi che ci interessano di algebre di Poisson sono tutti del tipo $A = C^\infty(M)$ ove M è una varietà di Poisson: in effetti dire che M è un varietà di Poisson equivale ad affermare che $C^\infty(M)$ è un'algebra di Poisson. Per questo motivo ci limitiamo, d'ora in poi, a considerare esclusivamente algebre commutative e con unità: con *algebra di Poisson* si intenderà dunque un'*algebra di Poisson commutativa con unità.*

Questa restrizione, vediamo immediatamente, elimina alcune situazioni "tautologiche, come gli esempi precedenti nei quali la struttura di Poisson era in realtà contenuta in una struttura associativa o di Lie. In effetti, imponendo che A sia commutativa, la struttura di Poisson, se non è banale, non può essere la struttura di Lie indotta dal prodotto associativo di A, che infatti è abeliana.

I due esempi principali di algebre di Poisson sono i seguenti: li abbiamo già considerati ma qui sono presentati svestiti dei loro panni geometrici.

Esempio. Consideriamo uno spazio vettoriale V, il suo duale V^* e l'algebra simmetrica $\mathrm{Sym}(V^* \oplus V)$ sulla somma diretta dei due spazi (se V è uno spazio vettoriale topologico si considererà l'algebra dei tensori simmetrici continui). Quest'ultima è un'algebra associativa commutativa (in un certo senso è, fra tali algebre, la più generale possibile) isomorfa a $\mathrm{Sym}\, V^* \otimes \mathrm{Sym}\, V$, che possiamo rendere un'algebra di Lie rispetto alle parentesi simplettiche con una definizione induttiva sul grado degli elementi di $\mathrm{Sym}(V^* \oplus V)$: fra un elemento qualsiasi s e un elemento di grado zero c (una costante) si pone per definizione $\{s, c\} = 0$; sugli elementi di grado uno si pone

$$\{\varphi \oplus f, \gamma \oplus g\} = \gamma(f) - \varphi(g)$$

($\varphi, \gamma \in V^*$ e $f, g \in V$) e si estende in grado superiore per bilinearità in modo da rispettare l'identità di Leibniz. Poiché la parentesi fra due elementi qualsiasi è una costante, l'identità di Jacobi è banalmente verificata, e quindi otteniamo una struttura di Poisson che si dice *simplettica* sullo spazio vettoriale V. Se $V = \mathbb{R}^n$ otteniamo semplicemente la restrizione della struttura di Poisson canonica alle funzioni polinomiali in $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.

Esempio. Consideriamo di nuovo l'algebra simmetrica ma stavolta su uno spazio vettoriale V il cui duale sia un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ (ad esempio, in dimensione finita, basta $V = \mathfrak{g}^*$). Le parentesi che vogliamo definire stavolta non sono costanti, ma lineari: sia $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ l'algebra inviluppante universale di $\mathfrak{g}$; il teorema di Poincaré–Birkhoff–Witt (cfr. [94, §3]) afferma che esiste un isomorfismo di algebre graduate

$$\mathrm{Gr}\,\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{Sym}(\mathfrak{g})$$

fra l'algebra graduata associata alla filtrazione naturale dell'algebra inviluppante universale e l'algebra simmetrica su $\mathfrak{g}$. Possiamo rendere $\mathrm{Gr}\,\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ e quindi $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g})$ un'algebra di Poisson usando la struttura di Lie su $\mathfrak{g}$ come segue: ricordiamo intanto che l'algebra $\mathfrak{g}$ si immerge in $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ e che l'algebra inviluppante universale è filtrata come (cfr. [94, §3])

$$\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2 \subset ... \subset \mathcal{U}_k \subset ...$$

ove $\mathcal{U}_0 = \mathbb{K}$ e $\mathcal{U}_k$ è generato da $\mathbb{K}$ e dai prodotti $x_1 ... x_h$ (con $h \le k$) di elementi dell'algebra di Lie (da cui $\mathcal{U}_1 = \mathbb{K} \oplus \mathfrak{g}$). Allora

$$\mathrm{Gr}\,\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{k \ge 0} \frac{\mathcal{U}_{k+1}}{\mathcal{U}_k}$$

Un elemento di grado k è dunque una classe di equivalenza $[x]$ di prodotti di al più k elementi di $\mathfrak{g}$; possiamo allora definire una mappa bilineare antisimmetrica $\{\,\} : \mathcal{U}_k \times \mathcal{U}_h \longrightarrow \mathcal{U}_{h+k-1}$ come

$$\{[x], [y]\} := [xy - yx]$$

(si noti che l'immagine è in $\mathcal{U}_{h+k-1}$ e non $\mathcal{U}_{h+k}$ in virtù della proprietà universale dell'algebra inviluppante: ad esempio se x, y hanno grado uno, e quindi sono elementi di $\mathfrak{g}$, $xy-yx$ ha pure grado uno venendo a coincidere con $[x, y]$).

Rispetto alle parentesi $\{\,\}$ l'algebra $\mathrm{Gr}\,\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ è di Poisson: l'identità di Leibniz si verifica agevolmente

$$\begin{aligned}\{[x][y], [z]\} &= \{[xy], [z]\} = [xyz - zxy] = [xyz - xzy + xzy - zxy] \\ &= [x(yz - zy)] + [(xz - zx)y] = [x]\{[y], [z]\} + \{[x], [z]\}[y]\end{aligned}$$

mentre l'identità di Jacobi segue da quella per le parentesi di Lie in grado uno e, per induzione, in grado qualsiasi.

Osserviamo che $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g})$ può vedersi come l'algebra delle funzioni polinomiali sullo spazio $\mathfrak{g}^*$ e quindi la struttura di Poisson su questa algebra di funzioni è la struttura di Lie–Poisson da noi introdotta nel caso reale: precisamente, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\dim \mathfrak{g} < \infty$, allora $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*) \subset C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ e le parentesi appena introdotte sono esattamente la restrizione ai polinomi delle parentesi di Lie–Poisson. Una discussione dettagliata di questo approccio alle strutture di Lie–Poisson e del legame fra algebre di Lie e varietà di Lie–Poisson (ad esempio con una dimostrazione del teorema di Poincaré–Birkhoff–Witt che faccia intervenire questa struttura di Poisson) si può trovare in [17].

L'esempio precedente ammette una generalizzazione, come osservato da Krasilščik e Vinogradov [60]: in effetti supponiamo che A sia una $\mathbb{K}$-algebra associativa con unità (non necessariamente commutativa) e filtrata, cioè esprimibile come unione $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ di sottospazi tali che

$$A_0 \subset A_1 \subset A_1 \subset ... \subset A_{n-1} \subset A_n \subset A_{n+1} \subset ...$$

in modo che il prodotto associativo sia compatibile con la filtrazione:

$$A_i \cdot A_j \subset A_{i+j}$$

Supponiamo ora che l'algebra A soddisfi alla ulteriore condizione

$$(KV) \qquad [A_i, A_j] \subset A_{i+j-1}$$

ove $[\,]$ è il commutatore indotto dal prodotto associativo (stiamo cioè supponendo che $ab - ba \in A_{i+j-1}$ se $a \in A_i$ e $b \in A_j$. Allora l'algebra graduata associata

$$\mathrm{Gr}\, A = \bigoplus_{n\geq 1} \frac{A_n}{A_{n-1}}$$

è un'algebra di Poisson rispetto al prodotto associativo e al commutatore passati al quoziente: questo si vede esattamente come nel caso $A = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

In effetti questa generalizzazione non è tale, perché un'algebra filtrata che soddisfi alla ipotesi (KV) è sempre l'algebra inviluppante di qualche algebra di Lie; precisamente basta considerare A_1, notare che la condizione (KV) diviene $[A_1, A_1] \subset A_1$ e quindi che A_1 è un'algebra di Lie la cui inviluppante universale è, per definizione, A stessa.

Esempio. Un altro esempio di origine geometrica di algebra filtrata è l'algebra degli operatori differenziali su una varietà: possiamo infatti definire il concetto di operatore differenziale su un'algebra associativa A come segue (cfr. [60], [59], [10]); per prima cosa definiamo, fissato $a \in A$, la mappa

$$\mu_a : A \longrightarrow A$$

di moltiplicazione a sinistra: $\mu_a(b) = ab$, e, se $X \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)$, poniamo

$$D_a(X) = [\mu_a, X]$$

Si tratta di una mappa $\mathbb{K}$-lineare tanto nella a quanto nella X; definiamo inoltre

$$D_{a_0 a_1 \dots a_k} = D_{a_0} D_{a_1} \dots D_{a_k}$$

Definizione 2.1.2 *Un* operatore differenziale *è un operatore* $\mathbb{K}$*-lineare* $X : A \longrightarrow A$ *tale che*

$$\forall a_0 \ \forall a_1 \dots \ \forall a_n \quad D_{a_0 a_1 \dots a_k}(X) = 0$$

n *si dice l'*ordine dell'operatore.

Se $A = C^\infty(M)$ è l'algebra delle funzioni di una varietà otteniamo il classico concetto di operatore differenziale (cfr. [30, §XVII-13]): la condizione che D sia un operatore differenziale di ordine n può più semplicemente scriversi $D^{n+1}(X) = 0$. Consideriamo ora lo spazio

$$\mathfrak{D}_n(A) = \{X \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A) \mid D^{n+1}(X) = 0\}$$

Evidentemente $\mathfrak{D}_0(A) = \{\mu_a\}_{a \in A}$ e

$$\mathfrak{D}_n(A) \subset \mathfrak{D}_{n+1}(A)$$

Allora l'insieme

$$\mathfrak{D}(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{D}_n(A)$$

è un'algebra associativa filtrata: si può dimostrare, per induzione sull'ordine degli operatori (cfr. [10]), che

$$[\mathfrak{D}_n(A), \mathfrak{D}_m(A)] \subset \mathfrak{D}_{n+m-1}(A)$$

e quindi possiamo definire sul graduato associato $\mathrm{Gr}\,\mathfrak{D}(A)$ una struttura di Poisson: ma questo graduato associato non è altro che l'algebra commutativa dei simboli degli operatori differenziali.

Come esempio possiamo considerare uno spazio vettoriale V e l'algebra degli operatori differenziali $\mathfrak{D}(V)$ che si ottiene con la costruzione precedente considerando l'algebra simmetrica $A = \mathrm{Sym}(V)$; si tratta, fissata una base $(e_1, ..., e_n)$ dell'algebra dei polinomi, e un operatore differenziale equivale si scrive come

$$X = \sum_{|\alpha| \leq n} p_\alpha \partial^\alpha$$

ove $\alpha = (a_1, ..., a_n)$ è un multiindice e $\partial^\alpha = \partial_1^{a_1} ... \partial_n^{a_n}$ essendo ∂_i la derivazione associata all'elemento e_i ($\partial_i e^j = \delta_{ij}$). Possiamo allora considerare il *simbolo dell'operatore* X, cioè la funzione $\sigma_X : V \times V^* \longrightarrow \mathbb{K}$ definita come

$$\sigma_X(v, \varphi) = \sum_{|\alpha| = n} p_\alpha(v) \varphi_1^{a_1} ... \varphi_n^{a_n}$$

ove $\varphi = \sum_i \varphi_i e^i$ nella base $(e^1, ..., e^n)$ duale di $(e_1, ..., e_n)$. Non è difficile verificare che

$$\sigma_{XY} = \sigma_X \sigma_Y$$

e in effetti il simbolo si può identificare con un elemento del graduato associato di $\mathfrak{D}(V)$, come è evidente dalla definizione. Poiché si tratta di una funzione polinomiale abbiamo

$$\sigma : \mathfrak{D}(V) \longrightarrow \mathrm{Sym}(V \times V^*)$$

funzione che passa al quoziente definendo un isomorfismo di algebre associative

$$\overline{\sigma} : \mathrm{Gr}\,\mathfrak{D}(V) \longrightarrow \mathrm{Sym}(V \times V^*)$$

La prima è un'algebra di Poisson in quanto graduata associata ad un'algebra filtrata (che soddisfa la (KV)), la seconda è un'algebra di Poisson (il nostro primo esempio): si può dimostrare (cfr. [10]) che σ è un isomorfismo di algebre di Poisson. Questo è un esempio astratto di "riduzione di Poisson, fenomeno assai studiato nel caso delle varietà simplettiche [74] e di Poisson [?].

Osserviamo che le algebre di Poisson su $\mathbb{K}$ formano ovviamente una categoria, rispetto ai *morfismi di Poisson*, vale a dire rispetto ai morfismi $f : A \longrightarrow B$ di algebre associative che siano anche morfismi di algebre di Lie:

$$f\{a,b\} = \{f(a), f(b)\} \qquad \text{e} \qquad f(ab) = f(a)f(b)$$

Naturalmente abbiamo le seguenti definizioni:

Definizione 2.1.3 *Una* sottoalgebra di Poisson *di un'algebra di Poisson A è una sottoalgebra associativa di A che sia anche una sottoalgebra di Lie. Una sottoalgebra di Poisson è un* ideale di Poisson *se è un ideale associativo e un ideale di Lie.*

La più importante sottoalgebra di un'algebra di Poisson è la *sottoalgebra di Casimir* (o *spazio degli elementi di Casimir*), che è semplicemente il centro dell'algebra di Lie $(A, \{\,\})$:

$$\mathrm{Cas}\, A = \{c \in A \,|\, \forall a \in A \quad \{a, c\} = 0\}$$

In termini meccanici gli elementi di Casimir sono le costanti del moto di un qualsiasi sistema hamiltoniano relativo alle parentesi di Poisson dell'algebra A. Si noti che $\mathrm{Cas}\, A$ non è un ideale di Poisson ma solo un ideale di Lie: infatti se $c \in \mathrm{Cas}\, A$ e $a, b \in A$ allora $\{ca, b\} = c\{a, b\}$.

Si consideri ad esempio l'algebra $A = C^\infty(S)$ di Poisson di una varietà simplettica S: abbiamo già osservato come le sue funzioni di Casimir siano quelle localmente costanti:

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = 0$$

per ogni g implica (dato che la forma ω è non degenere) che $df = 0$. Questo ci induce a considerare le algebre delle funzioni differenziabili delle varietà simplettiche come "semplici, anche se non nel senso algebrico del termine[2] ovvero, con locuzione più appropriata, *non degeneri*.

Possiamo anche, nella categoria delle algebre di Poisson, considerare le usuali costruzioni algebriche per produrre nuove algebre a partire da algebre date, ad esempio intersezioni, somme dirette e quozienti per ideali; dato

[2]Trattando oggetti di dimensione infinita è quasi impossibile imbattersi in algebre semplici nel senso algebrico del termine (senza ideali non banali, nel caso delle algebre di Lie): in effetti le algebre di funzioni che stiamo considerando sono "così grandi che debbono per forza contenere almeno le funzioni localmente costanti: se vogliamo questo è dovuto al fatto che sono anche algebre associative che posseggono l'identità, il che rende $\mathbb{R}$ una sottoalgebra in modo automatico; questo è del tutto analogo a quanto accade nel caso della teoria delle algebre di Von Neumann, nella quale i fattori, che giocano il ruolo delle algebre semplici, sono le algebre il cui centro è ridotto alle sole costanti.

che per noi sono essenziali gli esempi geometrici (le nostre algebre sono sempre algebre di funzioni) è bene tenere a mente come queste costruzioni nella categoria delle algebre si riverberano nella categoria degli spazi soggiacenti.

In generale, consideriamo una categoria concreta $\mathcal{C}$ (ad esempio la categoria degli insiemi, dei gruppi, delle varietà differenziabili) che contenga l'anello $\mathbb{K}$ come oggetto e il funtore $\mathcal{F}_{\mathbb{K}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{K}}$ nella categoria delle $\mathbb{K}$-algebre associative e commutative che associa ad un oggetto C di $\mathcal{C}$ l'algebra $A(C)$ generata dai morfismi $\operatorname{Hom}(C, \mathbb{K})$ nella categoria $\mathcal{C}$; questo funtore è una equivalenza su una sottocategoria opportuna di $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}$: ad esempio, se $\mathcal{C}$ è la categoria degli spazi topologici di Hausdorff localmente compatti e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ allora $\mathcal{F}$ è una equivalenza sulla categoria delle C*-algebre commutative con identità (teorema di Gel'fand–Naijmark). Il comportamento del funtore $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$ rispetto alle operazioni possibili nella categoria $\mathcal{C}$ è ovviamente determinato da quello del funtore $\operatorname{Hom}(-, \mathbb{K})$. Il caso che più ci interessa è quello in cui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathcal{C}$ è la categoria delle varietà differenziabili. In questo caso il funtore $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ assegna ad una varietà M l'algebra di Fréchet $C^\infty(M)$ e alla funzione differenziabile $f : M \longrightarrow N$ il morfismo $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$ dall'algebra $C^\infty(N)$ all'algebra $C^\infty(M)$, e possiede le seguenti proprietà (cfr. [100], [12], [101]):

Teorema 2.1.4 *Siano M_1 e M_2 varietà differenziabili:*

(1) *Se $M_1 \subset M_2$ è una sottovarietà chiusa allora l'algebra $C^\infty(M_1)$ è un quoziente di $C^\infty(M_2)$ (modulo l'ideale delle funzioni nulle su N).*

(2) *$f : M_1 \longrightarrow M_2$ è una mappa differenziabile se e solo se $f^* : C^\infty(M_2) \longrightarrow C^\infty(M_1)$ è un morfismo di algebre.*

(3) *La categoria dei fibrati vettoriali su M_1 è equivalente alla categoria dei moduli proiettivi sull'anello $C^\infty(M_1)$.*

(4) *Se M_1 e M_2 sono varietà differenziabili allora $C^\infty(M_1 \times M_2)$ è isomorfa, come algebra topologica localmente convessa, a $C^\infty(M_1) \otimes C^\infty(M_2)$.*

Dato che lo spazio di Fréchet $C^\infty(M)$ è nucleare (cfr. [89, §III], [**?**, p. 351]) il prodotto tensoriale è ben definito in modo univoco.

Il prodotto tensoriale di due algebre di Poisson (commutative) A_1 e A_2, è definito in generale come la struttura di Poisson data dalle seguenti operazioni:

$$(a_1 \otimes a_2)(b_1 \otimes b_2) = (a_1 b_1) \otimes (a_2 b_2)$$

$$\{a_1 \otimes a_2, b_1 \otimes b_2\} = \{a_1, b_1\} \otimes a_2 b_2 + a_1 b_1 \otimes \{a_2, b_2\}$$

Si verifica immediatamente che con queste due operazioni lo spazio vettoriale $A_1 \otimes A_2$ è un'algebra di Poisson, che ovviamente si dice *prodotto tensoriale delle algebre di Poisson A e B*. Nel caso $A = C^\infty(M_1)$ e $B = C^\infty(M_2)$, per la (2) del teorema, possiamo considerare la struttura di Poisson sul prodotto $M_1 \times M_2$ definita dalle formule appena scritte come l'usuale prodotto di varietà di Poisson definito nel capitolo precedente.

Si noti che possiamo effettuare il prodotto tensoriale di un'algebra di Poisson A con un'algebra associativa o un'algebra di Lie; nel primo caso otteniamo ad esempio

$$\{a \otimes a', b \otimes b'\} = \{a, b\} \otimes a'b'$$

e nel secondo

$$\{a \otimes a', b \otimes b'\} = ab \otimes [a', b']$$

Torniamo ora a considerare algebre di Poisson qualsiasi su un campo $\mathbb{K}$ e osserviamo che l'identità di Leibniz ammette una formulazione in termini di derivazioni. Una idea è trarre spunto dal caso simplettico e provare a definire in generale i campi hamiltoniani.

Definizione 2.1.5 *Se $(A, \cdot, \{\,\})$ è una $\mathbb{K}$-algebra di Poisson, fissato un elemento $a \in A$, la funzione $\mathbb{K}$-lineare*

$$X_a : A \longrightarrow A$$

definita come

$$X_a(b) = \{a, b\}$$

si dice derivazione hamiltoniana *(o* campo hamiltoniano*) associata ad a.*

La terminologia è giustificata dal fatto che l'identità di Leibniz può, in questa notazione, esprimersi come

$$X_c(ab) = (X_c a)b + aX_c b$$

Abbiamo quindi una funzione $\mathbb{K}$-lineare

$$X : A \longrightarrow \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$$

dall'algebra di Lie $(A, \{\,\})$ all'algebra di Lie $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$ delle $\mathbb{K}$-derivazioni di $(A, \cdot)$. Si tratta di un morfismo di algebre di Lie, come segue da (ed equivale a) l'identità di Jacobi:

$$X_{\{a,b\}}c = \{\{a, b\}, c\} = \{a, \{b, c\}\} + \{b, \{c, a\}\} = X_a X_b c - X_b X_a c = [X_a, X_b]c$$

L'immagine di questa mappa X è dunque una $\mathbb{K}$-sottoalgebra di Lie dell'algebra delle derivazioni dell'algebra di Lie $(A, \cdot)$, composta dai campi hamiltoniani e che denotiamo $\mathrm{Ham}(A)$. Si osservi che non si tratta di un A-modulo (rispetto alla struttura associativa dell'algebra A), ma solo di un modulo di Lie per l'algebra di Lie $(A, \{\,\})$.

Un campo hamiltoniano X_a definisce anche una derivazione dell'algebra di Lie $(A, \{\,\})$, sempre per l'identità di Jacobi delle parentesi di Poisson:

$$X_a\{b,c\} = \{a,\{b,c\}\} = \{\{a,b\},c\} - \{b,\{c,a\}\} = \{X_a b, c\} + \{b, X_a c\}$$

La derivazione X_a è interna, e in effetti l'operatore X è semplicemente la rappresentazione aggiunta *ad* per l'algebra di Lie $(A, \{\,\})$. In effetti esiste la successione esatta di algebre di Lie seguente:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Cas} A \xrightarrow{i}\!\!\longrightarrow A \xrightarrow{X}\!\!\longrightarrow \operatorname{Ham} A \longrightarrow 0$$

ove i è l'inclusione.

Definizione 2.1.6 *Una funzione $\mathbb{K}$-lineare $D : A \longrightarrow A$ che sia una derivazione dell'algebra associativa $(A, \cdot)$ e allo stesso tempo una derivazione dell'algebra di Lie $(A, \{\,\})$ si dice* campo canonico*; la $\mathbb{K}$-algebra di Lie dei campi canonici si denota con* $\operatorname{Can}(A)$*.*

Ovviamente $\operatorname{Ham}(A)$ è una sottoalgebra di Lie di $\operatorname{Can}(A)$: in realtà ne è un ideale di Lie:

$$[X_a, D] = X_a D - D X_a = X_a D - X_{Da} - X_a D = -X_{Da}$$

Così come $\operatorname{Ham}(A)$, nemmeno $\operatorname{Can}(A)$ è un A-modulo.

Queste definizioni astratte sono la parafrasi algebrica di quanto già spiegato nel caso $A = C^\infty(M)$ con M varietà di Poisson: in particolare nel caso simplettico ha luogo l'isomorfismo di fibrati indotto dalla forma simplettica $\omega^\# : T^*S \longrightarrow TS$, per mezzo del quale possiamo scrivere $X_f = \omega^\# df$ e che, per tramite di questo isomorfismo, lo spazio dei campi hamiltoniani corrisponde allo spazio delle 1–forme esatte e lo spazio dei campi canonici allo spazio delle 1–forme chiuse; dunque $\operatorname{Can}(S)/\operatorname{Ham}(S) \cong H^1(S)$ (primo gruppo della coomologia di de Rham[3]).

Nel caso generale $\operatorname{Can}(A)/\operatorname{Ham}(A)$ è un'algebra di Lie che misura "quanti campi canonici non hamiltoniani esistono nell'algebra di Poisson A; ad esempio nel caso di un'*algebra di Poisson nulla*, cioè tale che le sue parentesi di Poisson siano identicamente nulle (e che quindi si riduce ad un'algebra associativa) abbiamo ovviamente che $\operatorname{Ham}(A) = 0$, mentre $\operatorname{Can}(A) =$

[3] La determinazione dell'algebra di Lie $\operatorname{Can}(A)/\operatorname{Ham}(A)$ è menzionata da Krasil'ščik e Vinogradov col termine di "teorema fondamentale della Meccanica: in effetti lo studio di questo invariante per le algebre di Poisson risale al loro lavoro, cfr. [60], [58].

$\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$. Si noti inoltre che $\mathrm{Can}(A)/\mathrm{Ham}(A)$ è una sottoalgebra di Lie dell'algebra $\mathrm{Der}_{Lie}(A)/\mathrm{Ham}(A)$, che può anche vedersi come $H^1(A)$ (coomologia di Chevalley–Eilenberg dell'algebra di Lie A a coefficienti nella rappresentazione banale, cfr. [19, §XIII-2], [41, §1.4]): ad esempio se l'algebra di Lie $(A,\{\,\})$ è semisemplice allora $H^1(A)=0$ (per il primo lemma di Whitehead, cfr. [84, §19]) e, *a fortiori*, $\mathrm{Can}(A)=\mathrm{Ham}(A)$.

Consideriamo l'altro esempio fondamentale di struttura di Poisson, vale a dire le parentesi di Lie–Poisson: il calcolo dell'invariante $\mathrm{Can}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*))/\mathrm{Ham}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*))$ è relativamente semplice in questa forma intrinseca: si trova che questa algebra di Lie quoziente è esattamente il primo gruppo di coomologia dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ a coefficienti nella rappresentazione banale $\mathbb{K}$ (cfr. [60] per una verifica esplicita).

L'operatore $X : A \longrightarrow \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$ precedentemente introdotto ci consente di descrivere la struttura di Poisson su un'algebra ma non di caratterizzarla completamente: per farlo dobbiamo provare a generalizzare l'equazione $X=\omega^{\#}\circ d$ dalle varietà simplettiche al contesto generale delle algebre di Poisson, facendo quindi intervenire il calcolo differenziale: apriamo dunque una digressione su questo formalismo nelle algebre associative commutative.

2.2 Calcolo differenziale nei moduli

Consideriamo un'algebra associativa, commutativa e con unità A su un campo $\mathbb{K}$ fissato: gran parte di quel che diremo potrebbe adattarsi, senza grandi cambiamenti, al caso di algebre su un anello commutativo $\mathbb{K}$, e, utilizzando le cocatene di Hochschild in luogo del complesso di de Rham (l'analogo della coomologia di de Rham nel caso non commutativo è l'omologia ciclica, cfr. [68]), al caso non commutativo; ma il nostro obiettivo è il caso in cui A sia un'algebra di funzioni e $\mathbb{K}$ il campo reale o complesso; inoltre in queste ultime ipotesi la teoria ha un carattere più naturale ed esistono delle funtorialità che non si danno nel caso generale.

Ad esempio la costruzione del modulo delle derivazioni è funtoriale solo nel caso commutativo: se E un A-modulo, il modulo delle derivazioni di A in E è l'A-modulo

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A,E)=\{X\in\hom_{\mathbb{K}}(A,E)\,|\,X(ab)=X(a)b+aX(b)\}$$

delle mappe K-lineari che si comportano rispetto al prodotto dell'algebra secondo l'identità di Leibniz. Si tratta di un A-modulo rispetto all'ovvia azione $(aX)(b)=aXb$.

Il passaggio da E a $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A,E)$ definisce un funtore controvariante nella categoria dei moduli su un'algebra *commutativa*.

Il caso di particolare interesse è $E = A$: allora denotiamo il modulo delle derivazioni semplicemente con $\operatorname{Der} A$; ovviamente si tratta di una $\mathbb{K}$-algebra di Lie rispetto alle parentesi

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$$

Come ben noto, se $A = C^\infty(M)$ è l'algebra delle funzioni differenziabili di una varietà differenziabile di dimensione finita allora $\operatorname{Der} A$ è isomorfo al modulo delle sezioni del fibrato tangente, vale a dire allo spazio dei campi di vettori.

Definizione 2.2.1 *Un* modulo differenziale *su A è una coppia (D, δ) ove D è un A-modulo e $\delta : A \longrightarrow D$ è una derivazione tale che l'A-modulo generato da* $\operatorname{im} \delta$ *coincida con D.*

La condizione $A \operatorname{im} \delta = D$ rende la categoria dei moduli differenziali una sottocategoria propria della categoria di tutti i moduli (altrimenti, con $\delta = 0$ ogni modulo sarebbe banalmente un modulo differenziale).

Un morfismo fra due moduli differenziali (D, δ) e (E, ε) è un omomorfismo di A-moduli $\mu : D \longrightarrow E$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\delta"] & E \\ D \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

sia commutativo. Rispetto a questi morfismi i moduli differenziali formano una categoria.

Abbiamo due esempi fondamentali di moduli differenziali, che provengono in realtà dalla Geometria: i differenziali di Kähler e i campi hamiltoniani.

I differenziali di Kähler si possono costruire come un oggetto universale in una categoria di A-moduli: noi li caratterizzeremo con la seguente proprietà universale

Definizione 2.2.2 *Se $\mathcal{C}$ è una categoria di A-moduli differenziali, un* modulo differenziale universale *di $\mathcal{C}$ è l'oggetto iniziale di $\mathcal{C}$. Il modulo differenziale universale nella categoria di tutti gli A-moduli differenziali si dice* modulo dei differenziali di Kähler *di A.*

Ovviamente, se il modulo differenziale universale esiste in una certa categoria allora è unico. L'esempio che ci ispira è il seguente:

Teorema 2.2.3 *Nella categoria dei moduli differenziali proiettivi sull'algebra $A = C^\infty(M)$ delle funzioni differenziabili di una varietà differenziabile M il modulo differenziale universale è lo spazio delle 1-forme differenziali (differenziali di de Rham).*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo un modulo differenziale proiettivo D su A: poiché è proiettivo esiste un fibrato vettoriale $E \longrightarrow M$ del quale D è lo spazio delle sezioni. Inoltre D è un modulo differenziale, il che vuol dire che esiste una mappa $\delta : A \longrightarrow D$ che soddisfi l'identità di Leibniz; se definiamo la mappa

$$\Phi : \Omega^1(M) \longrightarrow D$$

come

$$\Phi(df) = \delta f \tag{$*$}$$

estendendo per A-linearità abbiamo un morfismo di moduli differenziali, per definizione. Inoltre qualsiasi altro morfismo di moduli differenziali da $\Omega^1(M)$ a D deve soddisfare la (*) e quindi coincidere con Φ.

QED

I differenziali di Kähler sono un A-modulo differenziale (Ω_A, d) tale che, per ogni A-modulo differenziale (D, δ), esista un unico morfismo $\mu : \Omega_A \longrightarrow D$ di A-moduli differenziali tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "d"'] & D \\ \Omega_A \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

Teorema 2.2.4 *Nella categoria di tutti gli A-moduli differenziali il modulo dei differenziali di Kähler esiste.*

DIMOSTRAZIONE: Esibiamo esplicitamente l'oggetto universale richiesto considerando la funzione di moltiplicazione dell'algebra A

$$m : A \otimes A \longrightarrow A$$

$(m(a, b) = ab)$ e l'ideale $I = \ker m$. Allora possiamo costruire il quoziente I/I^2 e la mappa $f : A \longrightarrow I$ definita come

$$f(a) = a \otimes 1 - 1 \otimes a$$

Si tratta di una derivazione, come è ovvio, di A nel modulo I, e possiamo comporla con la proiezione $I \longrightarrow I/I^2$ sul quoziente per ottenere una derivazione $d \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A, I/I^2)$. Cioè $(I/I^2, d)$ è un modulo differenziale.

Ora, se (D, δ) è un modulo differenziale qualsiasi, possiamo considerare il morfismo di moduli $\mu : I/I^2 \longrightarrow D$ definito come

$$\mu(a \otimes 1 - 1 \otimes a) = \delta(a)$$

e che è, per definizione, un morfismo di moduli differenziali; che sia l'unico morfismo di moduli differenziali fra I/I^2 e D è ovvio per costruzione di I/I^2.

QED

Notiamo che per dimostrare l'esistenza di Ω_A si potrebbe semplicemente considerare il primo modulo di omologia di Hochschild di A a coefficienti nella rappresentazione aggiunta $H^1(A,A)$ (cfr. [68]) e mostrare che soddisfa alla proprietà universale che definisce i differenziali di Kähler.

È ben noto (cfr. [68]) che i differenziali di Kähler possono caratterizzarsi come un oggetto nella categoria di tutti gli A-moduli, precisamente come una rappresentazione del funtore $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A,-)$: cioè

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A,D) = \hom_A(\Omega_A, D)$$

per ogni A-modulo D: in altri termini le derivazioni $d \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A,D)$ corrispondono ai morfismi $\mu : \Omega_A \longrightarrow D$ costruiti nella dimostrazione del teorema precedente.

Osserviamo che, per universalità rispetto al funtore $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A,-)$, la funzione $d : A \longrightarrow \Omega_A$ soddisfa alle

(1) $d(ab) = bda + adb$

(2) $d(1) = 0$

I differenziali di Kähler sono stati costruiti nella categoria di tutti i moduli: restringendoci ad una sottocategoria potrebbe non esistere un tale oggetto universale (cioè i differenziali di Kähler potrebbero non appartenere, come modulo, alla sottocategoria); nel caso generale dovremo quindi cercare un nuovo oggetto iniziale, nella sottocategoria, ai moduli differenziali, cioè un modulo dei differenziali relativo alla sottocategoria, come nel caso dei moduli proiettivi su $A = C^\infty(M)$.

Si noti che in questo caso, il modulo dei differenziali di Kähler è molto più vasto di quello dei differenziali di de Rham che, come abbiamo detto, costituiscono l'oggetto universale voluto. Infatti il modulo dei differenziali di Kähler su $C^\infty(M)$ è costituito da tutte le sezioni del fibrato cotangente, non semplicemente da quelle differenziabili; in effetti nella costruzione universale dei differenziali non abbiamo fatto in alcun modo intervenire la topologia di Fréchet, e quindi, riportata al caso geometrico, questa costruzione ci fornirebbe tutte le sezioni *insiemistiche* del fibrato cotangente.

Convenzione. *Supporremo nel séguito di lavorare nella categoria di tutti gli A-moduli differenziali, e quindi per noi il modulo differenziale universale sarà quello dei differenziali di Kähler: gli stessi risultati che daremo si ottengono in categorie diverse di moduli differenziali purché siano dotate di un oggetto iniziale.*

L'altro esempio per noi fondamentale di modulo differenziale è il *modulo hamiltoniano di un'algebra di Poisson*, che per definizione è l'A-modulo $\mathcal{H}_A$

generato dai campi hamiltoniani, che abbiamo già considerato a partire da un'algebra di Poisson $(A, \cdot, \{\})$ e dall'operatore $\mathbb{K}$-lineare

$$X : A \longrightarrow \operatorname{Der} A$$

ponendo $(Xf)(g) = \{f, g\}$. L'identità di Leibniz può vedersi come l'asserzione che il modulo $(\mathcal{H}_A, X)$ è un modulo differenziale.

Ad esempio, se l'algebra di Poisson A è non degenere, cioè la struttura di Poisson è simplettica, allora $\mathcal{H}_A = \operatorname{Der} A$ è precisamente il duale di Ω_A.

Consideriamo ora l'A-modulo $\operatorname{Der} A$: per la proprietà universale dei differenziali di Kähler:

$$\operatorname{Der} A = \hom_A(\Omega_A, A) = \Omega_A^*$$

(nella categoria degli A-moduli), quindi esiste un accoppiamento A-bilineare

$$\langle , \rangle : \operatorname{Der} A \times \Omega_A \longrightarrow A$$

definito come (se $X \in \operatorname{Der} A$ e $\omega \in \Omega_A$)

$$\langle X, \omega \rangle = X(\omega)$$

In generale non sarà vero il viceversa, cioè avremo soltanto $\Omega_A \subset \Omega_A^{**} = (\operatorname{Der} A)^*$. Tuttavia ha senso considerare gli A-moduli

$$\Omega_A^k := \bigwedge_A^k \Omega_A$$

(ottenuti passando alle potenze esterne di Ω_A come A-modulo). Naturalmente la funzione $d : A \longrightarrow \Omega_A$ si estende in modo unico all'algebra esterna $d : \Omega_A^k \longrightarrow \Omega_A^{k+1}$ come

$$\begin{aligned}\langle d\omega, X_1 \wedge ... \wedge X_k \rangle = &\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} X_i(\langle \omega, X_1 \wedge ... \wedge \widehat{X_i} \wedge ... \wedge X_k \rangle) + \\ &+ \sum_{i<j}^{1...k} (-1)^{i+j} \langle \omega, [X_i, X_j] \wedge ... \wedge \widehat{X_i} \wedge ... \widehat{X_j} \wedge ... \wedge X_k \rangle\end{aligned}$$

Le verifiche delle

(1) $d \circ d = 0$

(2) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2$ (se $\omega_2 \in \Omega_A^r$)

(3) d è $\mathbb{K}$-lineare

non presentano difficoltà, essendo le stesse che si danno nel caso del differenziale esterno fra forme differenziali su una varietà (cfr. [1]). Osserviamo che l'algebra esterna sul modulo Ω_A

$$\Omega(A) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigwedge_A^n \Omega_A$$

è un'algebra associativa differenziale graduata.

Conviene anche definire, per $X \in \mathrm{Der}\, A$, l'*operatore di contrazione*

$$i_X : \Omega_A^{k+1} \longrightarrow \Omega_A^k$$

come

$$\langle i_X(\omega), X_1 \wedge ... \wedge X_k \rangle = \langle \omega, X \wedge X_1 \wedge ... \wedge X_k \rangle$$

Si tratta evidentemente di un operatore A-lineare, che permette di definire la *derivata di Lie* di una forma $\omega \in \Omega_A^k$ rispetto ad una derivazione $X \in \mathrm{Der}\, A$:

$$\mathcal{L}_X : \Omega_A^k \longrightarrow \Omega_A^k$$

con la formula di E.Cartan

$$\mathcal{L}_X \omega = i_X d\omega + d i_X \omega$$

Di nuovo la verifica delle proprietà

$$\mathcal{L}_{[X_1, X_2]} = [\mathcal{L}_{X_1}, \mathcal{L}_{X_2}]$$

$$i_{[X_1, X_2]} = [\mathcal{L}_{X_1}, i_{X_2}]$$

non differisce dalle usuali dimostrazioni che si danno per le varietà.

In questo modo, abbiamo il calcolo di Cartan nella categoria dei moduli, basandoci sull'esistenza di un elemento universale per il funtore $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A, -)$ in questa categoria.

Esiste una immediata generalizzazione di questo calcolo secondo le seguenti linee: fissiamo un A-modulo differenziale (D, δ); allora, dato che Ω_A è l'oggetto iniziale nella categoria dei moduli differenziali, esiste un morfismo naturale di moduli differenziali

$$\mu : \Omega_A \longrightarrow D$$

che è suriettivo per definizione, e quindi possiamo estendere δ alle potenze esterne di D, come

$$\delta(a\delta a_1 \wedge \delta a_2 \wedge \cdots \wedge \delta a_n) = \delta a \wedge \delta a_1 \wedge \delta a_2 \wedge \cdots \wedge \delta a_n$$

ottenendo in questo modo un complesso $\bigwedge^k D$ la cui coomologia possiamo chiamare *coomologia di de Rham* del modulo D.

Per un modulo differenziale (D, δ) qualsiasi possiamo ripetere quanto abbiamo detto per i differenziali di Kähler: ad esempio esiste una forma bilineare

$$\langle , \rangle : D \times \operatorname{Der} A \longrightarrow A$$

definita come

$$\langle a\delta b, X\rangle = aX(b)$$

che si estende in grado qualsiasi. Tuttavia l'operatore di contrazione indotto da questa forma bilineare non è non degenere; perché lo sia dobbiamo restringere la classe dei campi sui quali effettuare la contrazione considerando lo spazio

$$D_\delta = \{X \in \operatorname{Der} A \,|\, \forall c \in \ker\delta \quad X(c) = 0\}$$

che è un sotto-modulo di $\operatorname{Der} A$ e anche una sotto-algebra di Lie; è semplicemente lo spazio delle derivazioni che "vedono come costanti gli elementi di $\ker\delta$. Possiamo allora definire un operatore di *contrazione*

$$i : D_\delta \times D \longrightarrow A$$

come

$$i_X\delta a = X(a)$$

ed estenderlo per A-linearità ad una forma bilineare di A-moduli.

Notiamo infatti che per ogni $a \in A$ abbiamo $\delta a = \mu da$ (proprietà universale dei differenziali di Kähler), e quindi che possiamo valutare una derivazione $X \in D_\delta$ su un elemento di D, esattamente come si fa per i differenziali di Kähler; si noti che $\ker\delta$ non è un A-modulo, ma una $\mathbb{K}$-sottoalgebra di A, in quanto

$$\delta z = \delta z' = 0 \implies \delta(zz') = 0$$

Utilizzando questa contrazione e il differenziale δ del modulo D possiamo anche definire una *D-derivata di Lie* come

$$\mathcal{L}_X\eta = i_X\delta\eta + \delta i_X\eta$$

per $X \in D_\delta$ e $\eta \in D$. Chiaramente la contrazione si estende in modo immediato alle potenze esterne del modulo D come

$$i_X(a\delta a_1 \wedge \cdots \wedge \delta a_n) = aX(a_1)\delta a_2 \wedge \cdots \wedge \delta a_n$$

in modo da soddisfare le usuali proprietà.

Si osservi che il morfismo universale μ (tale che $\mu d = \delta$) si può naturalmente estendere alle algebre graduate esterne, tenendo conto del segno:

$$\mu(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n) = (-1)^n \mu(\omega_1) \wedge \mu(\omega_2) \cdots \wedge \mu(\omega_n)$$

ove $\omega_i \in \Omega_A$.

Un esempio particolarmente significativo si ha quando D è un sottomodulo di $\operatorname{Der} A$: fissiamo una derivazione $\delta : A \longrightarrow \operatorname{Der} A$: allora resta indotta una mappa $\mu : \Omega_A \longrightarrow \operatorname{Der} A$ (per la proprietà universale dei differenziali) tale che $\mu \circ d = \delta$. Naturalmente questo morfismo non sarà in generale né suriettivo né iniettivo; se è suriettivo si tratta evidentemente di un isomorfismo di moduli.

Notiamo infine che questo calcolo differenziale per i moduli differenziali può ricondursi all'usuale calcolo differenziale con derivazioni e differenziali di Kähler semplicemente cambiando l'anello degli scalari dell'algebra: infatti

Proposizione 2.2.5 *Se $A_\delta = A \otimes_{\mathbb{K}} \ker \delta$ allora $\Omega_{A_\delta} = D$ e $\operatorname{Der} A_\delta = D_\delta$.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo la mappa

$$\Xi : D_\delta \longrightarrow \operatorname{Der} A_\delta$$

definita come ($X \in \operatorname{Der} A_\delta$, $a \otimes c \in A_\delta$)

$$\Xi(X)(a \otimes c) := X(a) \otimes c$$

Evidentemente si tratta di un isomorfismo di A_δ-moduli e, per la proprietà universale dei differenziali di Kähler su A_δ abbiamo che

$$D_\delta = \operatorname{Der} A_\delta = \hom_{A_\delta}(\Omega_{A_\delta}, A_\delta)$$

sicché $\Omega_{A_\delta} = D$.

QED

Ad esempio se A è un'algebra di Poisson e $D = \mathcal{H}_A$ allora l'algebra A_δ è di Poisson (prodotto tensoriale di A con l'algebra di Poisson nulla $\ker \delta = \operatorname{Cas}(A)$) e abbiamo che un suo elemento $a \otimes c$ è di Casimir se e solo se

$$0 = \{a \otimes c, b \otimes e\} = \{a, b\} \otimes ce$$

cioè se e solo se $a \in \operatorname{Cas}(A)$, il che vuol dire che $a \otimes c$ è una costante (l'anello degli scalari è ora $\operatorname{Cas}(A)$) cioè che la struttura di Poisson è simplettica.

2.3 Connessioni e curvatura

Fin qui abbiamo delineato quello che potrebbe chiamarsi *calcolo differenziale di Cartan* sulle algebre associative: vogliamo spingerci più in là e considerare il *calcolo di Ricci*, avendo sempre in mente le nozioni che si danno sulle varietà differenziabili.

Definizione 2.3.1 *Se (D, δ) è un A-modulo differenziale, una D-*connessione *in un A-modulo E è un operatore K-lineare*

$$\nabla : E \longrightarrow E \otimes_A D$$

che soddisfi alla identità di Leibniz

$$\nabla(ae) = a\nabla e + e \otimes \delta a$$

per $a \in A$ ed $e \in E$.

Ovviamente la connessione avrà, in generale, valori nel modulo $E \otimes D$ e sarà non solo $\mathbb{K}$-lineare, ma $\ker D$-lineare, dato che, se $z \in \ker \delta$ allora

$$\nabla(zs) = z\nabla s + s \otimes \delta z = z\nabla s$$

Si noti inoltre che, nel caso $D = \Omega_A$ del modulo dei differenziali ritroviamo il classico concetto di connessione: chiameremo le Ω_A-connessioni semplicemente *connessioni* nel modulo E; ovviamente in questo caso $A_\delta = A$. Per la proprietà universale dei differenziali, ogni connessione ∇ dà luogo ad una D-connessione $\tilde{\nabla}$ per ogni modulo differenziale (D, δ) semplicemente per composizione: se $\nabla : E \longrightarrow E \otimes \Omega^1_A$ allora $\tilde{\nabla} = (I \otimes \mu)\nabla$ è una D-connessione in E ove $I : E \longrightarrow E$ è la mappa identica.

Proposizione 2.3.2 *L'insieme delle D-connessioni su un modulo E è uno spazio affine sul campo $\mathbb{K}$.*

DIMOSTRAZIONE: Se ∇ e ∇' sono D-connessioni in E allora

$$(\nabla - \nabla')(ae) = a\nabla e + e \otimes \delta a - a\nabla' e - e \otimes \delta a = a(\nabla - \nabla')(e)$$

Questo vuol dire che la differenza di connessioni è un endomorfismo del fibrato E e quindi lo spazio delle connessioni è uno spazio affine il cui spazio vettoriale tangente in ciascun punto è $\mathrm{End}(E)$.

QED

Un A-modulo E è ovviamente anche un A_δ-modulo rispetto all'azione $(a \otimes c) \cdot e = (ac) \cdot e$; possiamo allora formulare il seguente

Esempio. Il modulo libero $E = A_\delta^n$ possiede sempre una D-connessione: se $(e_1, ..., e_n)$ è una A_δ-base di E, allora, per $a \in A_\delta$, definiamo

$$\nabla(ae_i) = e_i \otimes \delta a$$

Estendendo per additività si ottiene ovviamente una D-connessione.

Possiamo agevolmente generalizzare questo esempio al caso di un modulo proiettivo (finitamente generato) sull'algebra A_δ: un modo semplice è ricordare che un modulo proiettivo è addendo diretto di un modulo libero. Quindi se E è proiettivo abbiamo che $E \oplus F = A_\delta^n$, sicché possiamo costruire una connessione ∇ in A_δ^n. Allora consideriamo la composizione

$$E \xrightarrow{i} A_\delta^n \xrightarrow{\nabla} A_\delta^n \otimes E \xrightarrow{p\otimes I} E \otimes D$$

ove i è l'immersione dell'addendo diretto E in A_δ^n e $I : E \longrightarrow E$ è la mappa identica. Ovviamente si tratta di una connessione, che si dice *connessione di Levi-Civita*, per l'ovvia analogia che esiste con la ben nota costruzione della Geometria Riemanniana.

Dunque ogni modulo proiettivo (finitamente generato) possiede una D-connessione naturalmente definita in termini della derivazione $\delta \in \mathrm{Der}(A, D)$.

Teorema 2.3.3 *Un modulo E possiede una D-connessione se e solo se E è A_δ-proiettivo.*

DIMOSTRAZIONE: Sappiamo già che un modulo proiettivo ammette una D-connessione. Viceversa, se $\nabla : E \longrightarrow E \otimes D$ è una connessione, dimostriamo che esiste una sezione A_δ-lineare al morfismo $m : E \otimes A_\delta \longrightarrow E$ dato dalla moltiplicazione $(m(a \otimes c, e) = (ac)e)$, il che equivale alla proiettività di E: consideriamo la successione

$$0 \longrightarrow E \otimes_{A_\delta} D \xrightarrow{\Delta} A_\delta \otimes_{\ker\delta} E \xrightarrow{m} E \longrightarrow 0$$

ove abbiamo posto

$$\Delta(e \otimes \delta a) = 1 \otimes ae - a \otimes e$$

Questa successione di $\mathbb{K}$-spazi vettoriali non solo è esatta, come è ovvio verificare ma si spezza per tramite della mappa $u : E \longrightarrow A_\delta \otimes E$ di immersione $u(e) = 1 \otimes e$. Ora data ∇ possiamo associarle una sezione $\sigma : E \longrightarrow A \otimes E$ per mezzo della

$$\sigma(e) = 1 \otimes e + \Delta(\nabla e)$$

Si tratta di una mappa ben definita che è A_δ-lineare dato che

$$\begin{aligned}\sigma(ae) &= 1 \otimes ae - \Delta(a\nabla e) - \Delta(e \otimes \delta a) \\ &= 1 \otimes ae - \Delta(a\nabla e) - 1 \otimes ae + a \otimes e \\ &= a \otimes e - a\Delta(\nabla e) = a\sigma(e)\end{aligned}$$

Abbiamo cioè mostrato l'esistenza di una sezione alla moltiplicazione $m : A_\delta \otimes E \longrightarrow E$, il che è possibile solo se E è A_δ-proiettivo.

QED

Questo teorema può più semplicemente vedersi come conseguenza del teorema di Kaplanskij, secondo il quale un modulo è proiettivo se e solo se è localmente libero.

Ora consideriamo il concetto di curvatura: in primo luogo notiamo che una D-connessione induce una famiglia di operatori

$$\nabla : E \otimes \bigwedge^n D \longrightarrow E \otimes \bigwedge^{n+1} D$$

semplicemente ponendo

$$\nabla(s \otimes P) = \nabla s \otimes P + (-1)^{\deg P} s \otimes \delta P$$

ove conveniamo che $\bigwedge^0 D = A$ e $\bigwedge^n D = \bigwedge^n_A D$ sono le potenze esterne del modulo D (che è generato da $\operatorname{im} \delta$).

Definizione 2.3.4 *Data una D-connessione ∇, la sua* curvatura $R_\nabla : E \longrightarrow E \otimes \bigwedge^2 D$ *è definita come $R_\nabla = \nabla \circ \nabla$. Se $R_\nabla = 0$, la D-connessione si dice* piatta.

Se osserviamo che, per $a \in A$ e $e \in E$:

$$R_\nabla(ae) = \nabla(a\nabla e + e \otimes \delta a) = aR_\nabla e - \nabla e \otimes \delta a + \nabla e \otimes \delta a - e \otimes \delta^2 a = aR_\nabla e$$

possiamo concluderne che

Proposizione 2.3.5 *La curvatura è A-lineare*

Notiamo che una D-connessione su E induce una D-connessione $\overline{\nabla} : \mathrm{End}(E) \longrightarrow \mathrm{End}(E) \otimes D$ su $\mathrm{End}\, E$ nel modo seguente: se $\varphi : E \longrightarrow E$ è A-lineare

$$\overline{\nabla}\varphi = [\nabla, \varphi] = \nabla \circ \varphi - \varphi \circ \nabla$$

In effetti si tratta di un operatore $\mathbb{K}$-lineare tale che

$$\overline{\nabla}(a\varphi) = \nabla(a\varphi) - a\varphi\nabla = a\nabla\varphi + \varphi \otimes \delta a - a\varphi\nabla = a\overline{\nabla}\varphi + \varphi \otimes \delta a$$

Il seguente facile calcolo:

$$\overline{\nabla}R_\nabla = [\nabla, R_\nabla] = \nabla R_\nabla - R_\nabla \nabla = \nabla\nabla^2 - \nabla^2\nabla = 0$$

conduce al

Teorema (IDENTITÀ DI BIANCHI) **2.3.6** $[\nabla, R_\nabla] = 0$

Dato che una D-connessione ha luogo solo in un modulo proiettivo, e dato che la localizzazione di un modulo proiettivo è un modulo libero, possiamo scrivere, anche in questo contesto algebrico, una connessione in “coordinate, nel modo seguente: se E è un modulo A_δ-libero (e.g. $E = A_\delta^n$) allora una D-connessione $E \longrightarrow E \otimes_A D$ è determinata da una matrice a coefficienti in D, i.e. da un elemento $\nabla \in \mathrm{End}_A(E) \otimes D$. Se

$$E = e_1 A_\delta \oplus \cdots \oplus e_n A_\delta$$

allora

$$\nabla e_i = \sum_j e_j \otimes \Gamma_{ji}$$

La matrice $\Gamma = ((\Gamma_{ij}))$ determina la connessione: se $e \in E$ si scrive rispetto alla base (e_i) come (gli a_i saranno della forma $f_i \otimes c_i$ ove $f_i \in A$ e $c_i \in \ker\delta$)

$$e = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

allora

$$\nabla e = \sum_i a_i \nabla e_i + \sum_i e_i \otimes \delta a_i = \sum_i e_i \otimes \left(\delta a_i + \sum_j a_i \Gamma_{ji} \right)$$

Cioè la matrice Γ non si comporta come un tensore, se non a meno di differenziali esatti.

L'esempio precedente si estende facilmente al caso di un modulo A_δ-proiettivo, utilizzando, ad esempio, il fatto che la localizzazione di ogni tale modulo dà luogo ad un modulo A_δ-libero, o più semplicemente il fatto che un modulo proiettivo è addendo diretto di un modulo libero.

Teorema (EQUAZIONE DI STRUTTURA) **2.3.7** *Se E è un A_δ-modulo proiettivo e ∇ una D-connessione in E allora*

$$R_\nabla = \Gamma \wedge \Gamma - \delta\Gamma$$

ove $\Gamma \wedge \Gamma$ è il prodotto di matrici (rispetto al prodotto $\wedge$) nel modulo D e $\delta\Gamma = ((\delta\Gamma_{ij}))$.

DIMOSTRAZIONE: Utilizzando le notazioni precedenti si trova che

$$\begin{aligned}\nabla^2 e_i &= \sum_j \nabla\left(e_j \otimes \Gamma_{ji}\right) = \sum_j \nabla e_j \wedge \Gamma_{ji} - \sum_j e_j \otimes \delta\Gamma_{ji} \\ &= \sum_{j,k} e_k \otimes \Gamma_{kj} \wedge \Gamma_{ji} - \sum_j e_j \otimes \delta\Gamma_{ji}\end{aligned}$$

QED

Osserviamo che un modulo proiettivo E finitamente generato, in quanto addendo diretto di un modulo libero (finitamente generato) A_δ^n è completamente determinato da un operatore (di proiezione) $P \in \mathrm{End}_A(A_\delta^n)$ idempotente ($P^2 = P$) la cui immagine sia esattamente E: ovviamente

$$A_\delta^n = \mathrm{im}\, P \oplus \mathrm{im}(I - P)$$

e quindi anche $\mathrm{im}(I - P)$ è un modulo proiettivo. Ne segue che possiamo definire per questi moduli la *traccia*

$$\mathrm{Tr} : \mathrm{End}_{A_\delta}(E) \longrightarrow A_\delta$$

come la traccia dell'operatore P.

Proposizione 2.3.8 *Se E è un A_δ-modulo proiettivo finitamente generato allora il diagramma*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}_A(E) \otimes_A D^k \arrow[r, "\overline{\nabla}"] \arrow[d, "\mathrm{Tr} \otimes \mathbb{I}"'] & \mathrm{End}_A(E) \otimes_A D^{k+1} \arrow[d, "\mathrm{Tr} \otimes \mathbb{I}"] \\
D^k \arrow[r, "\delta"'] & D^{k+1}
\end{tikzcd}$$

è commutativo.

DIMOSTRAZIONE: Basta dimostrare il teorema per i moduli liberi: in questo caso procediamo per induzione sulla dimensione di E e quindi l'unico caso non banale è quello $E = A_\delta$, ove

$$\nabla(a) = aP + \delta a$$

per qualche $P \in D$. Ora, sia δ che $\overline{\nabla} = [\nabla, -]$ sono $\bigwedge^k D$-lineari come pure Tr (infatti $\mathrm{End}_A(A) \otimes_A \bigwedge^k D = \bigwedge^k D$) e quindi basta limitarsi al grado $k = 0$:

$$[\nabla, a] = \nabla(a) - aP = aP + \delta a - aP = \delta a$$

QED

Se poniamo

$$ch(E, \nabla) := \mathrm{Tr}\ \exp R_\nabla$$

(con exp si intende la serie formale dell'esponenziale) allora, per le due proposizioni precedenti:

$$\delta(\mathrm{Tr} \exp R_\nabla)) = [\nabla, \exp R_\nabla] = 0$$

e quindi

Proposizione 2.3.9 *La componente omogenea di grado $2n$ di $ch(E, \nabla)$ ha differenziale nullo in $\bigwedge^{2n} D$.*

Dunque $ch(E, \nabla)$ genera una classe di coomologia di de Rham (rispetto al complesso (D, δ)

$$ch(E) \in \prod_{n \geq 0} H^{2n}_{dR}(D)$$

che si dice *carattere di Chern* dell'A_δ-modulo E.

Teorema 2.3.10 *Il carattere di Chern di un modulo E non dipende dalla connessione ∇ che figura nella definizione di $ch(E, \nabla)$.*

DIMOSTRAZIONE: Si tratta di un argomento ben noto: se ∇_1 e ∇_2 sono D-connessioni su E e se $\tilde{\nabla}_1$ è l'estensione di ∇_1 all'$A[t]$-modulo $E[t] = E \otimes_A A_\delta[t]$ allora

$$\tilde{\nabla} := t\tilde{\nabla}_1 + (1-t)\tilde{\nabla}_2$$

è una connessione in $E[t]$. Le proiezioni

$$\begin{aligned} P_0 : A_\delta[t] &\longrightarrow A_\delta \\ t &\mapsto 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} P_1 : A_\delta[t] &\longrightarrow A_\delta \\ t &\mapsto 1 \end{aligned}$$

inducono gli isomorfismi

$$(P_i)_* : H(A_\delta[t], D[t]) \xrightarrow{\cong} H(A_\delta, D)$$

(ove $D[t]$ è l'$A_\delta[t]$-modulo differenziale $D \otimes_{A_\delta} A[t]$) e ovviamente

$$(P_i)_*(ch(E[t], \tilde{\nabla}_i)) = ch(E, \nabla_i)$$

Ma $(P_0)_*^{-1}(P_1)_* : H(A_\delta, D) \longrightarrow H(A_\delta, D)$ è l'identità e quindi

$$ch(E, \nabla_0) = ch(E, \nabla_1)$$

QED

Esiste, nel caso $D = \Omega_A$, un algoritmo canonico per produrre connessioni, basato sulla considerazione di derivate covarianti, che ammette una generalizzazione nel nostro caso.

Definizione 2.3.11 *Se E è un A-modulo, una D-*derivata covariante *in E è un operatore $\mathbb{K}$-lineare*

$$\mathbf{D} : D_\delta \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$$

tale che, se $X \in D_\delta$, $a \in A$ e $e \in E$:

$$\mathbf{D}_X(ae) = a\mathbf{D}_X e + i_X(\delta a)e$$

e A-lineare nella variabile X: $\mathbf{D}_{aX} = a\mathbf{D}_X$.

Nel caso $D = \Omega_A$ ritroviamo ovviamente il concetto usuale di derivata covariante. Se $\mathbf{D}$ è una D-derivata covariante in E allora possiamo associarle una D-connessione ∇ determinata dalla

$$i_X \nabla e = \mathbf{D}_X e$$

Che ∇ così definita sia una connessione è ovvio:

$$i_X \nabla(ae) = \mathbf{D}_X(ae) = a\mathbf{D}_X e + i_X(\delta a)e = a i_X \nabla e + X(a)e = a\nabla_X e + i_X \delta a \otimes e$$

Questa corrispondenza fra derivate covarianti e connessioni è biunivoca, dato che la contrazione fra D_δ e D è non degenere.

Possiamo interpretare $\mathbf{D}$ come un operatore nello spazio $\bigwedge_A(D_\delta, E)$, formato dalle mappe A-multilineari alternanti da D_δ in E, tale che, se $\varphi : D_\delta^k \longrightarrow E$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}\varphi)(D_0, ..., D_k) = &\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \mathbf{D}_{D_i}(\varphi(D_0, ..., \widehat{D_i}, ..., D_k)) + \\ &+ \sum_{i<j}^{0...k}(-1)^{i+j}\varphi([D_i, D_j], D_0, ..., \widehat{D_i}, ..., \widehat{D_j}, ..., D_k)\end{aligned}$$

(D_δ è un'algebra di Lie). Osserviamo tuttavia che in generale questa mappa $\mathbf{D}$ non definisce un differenziale nel complesso $\bigwedge_A(D_\delta, E)$: infatti lo è se e solo se la curvatura della connessione associata a $\mathbf{D}$ è nulla.

Teorema 2.3.12 *La curvatura R_∇ di una connessione ∇ definisce una mappa $\mathbb{K}$-bilineare*

$$R_{\mathbf{D}} : D_\delta \times D_\delta \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$$

come

$$R_{\mathbf{D}}(X, Y) = i_X i_Y R_\nabla$$

che soddisfa alla

$$R_{\mathbf{D}}(X, Y) = \mathbf{D}_X\mathbf{D}_Y - \mathbf{D}_Y\mathbf{D}_X - \mathbf{D}_{[X,Y]}$$

Dimostrazione: Ovviamente la $R_{\mathbf{D}}$ definita come nell'enunciato è una mappa $\mathbb{K}$-bilineare; l'identità dell'enunciato equivale all'equazione di struttura. Un modo alternativo di dimostrarla è usare la definizione:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_X\mathbf{D}_Y e_i - \mathbf{D}_Y\mathbf{D}_X e_i - \mathbf{D}_{[X,Y]}e_i &= i_X\nabla i_Y\nabla e_i - i_Y\nabla i_X\nabla e_i - i_{[X,Y]}\nabla e_i \\
&= i_X\nabla\left(e_j\otimes i_Y\Gamma_{ji}\right) - i_Y\nabla\left(e_j\otimes i_X\Gamma_{ji}\right) - e_j\otimes i_{[X,Y]}\Gamma_{ji} \\
&= i_X\nabla e_j\otimes i_Y\Gamma_{ji} - i_Y\nabla e_j\otimes i_X\Gamma_{ji} + e_j\otimes i_X d\left(i_Y\Gamma_{ji}\right) - \\
&\quad - e_j\otimes i_Y d\left(i_X\Gamma_{ji}\right) - e_j\otimes i_{[X,Y]}\Gamma_{ji} \\
&= e_k\otimes\left(i_X\Gamma_{kj}i_Y\Gamma_{ji} - i_Y\Gamma_{kj}i_X\Gamma_{ji}\right) + \\
&\quad + e_j\otimes\big(i_Xi_Y\Gamma_{ji} - i_Yi_X\Gamma_{ji} - i_{[X,Y]}\Gamma_{ji}\big) \\
&= i_Xi_Ye_k\otimes\Gamma_{kj}\Gamma_{ji} + i_Xi_Ye_j\otimes d\Gamma_{ji} \\
&= i_Xi_Y\left(\nabla e_j\otimes\Gamma_{ji} + e_jd\Gamma_{ji}\right) \\
&= i_Xi_Y\nabla(e_j\otimes\Gamma_{ji}) = i_Xi_Y\nabla^2 e_i \\
&= R_{\mathbf{D}}(X,Y)e_i
\end{aligned}$$

(ove abbiamo usato la convenzione di Einstein sugli indici j e k).

QED

Una derivata covariante la cui curvatura sia identicamente nulla (cioè corrispondente ad una connessione piatta) consente di identificare il complesso $(\bigwedge_A(D_\delta, E), \mathbf{D})$ col complesso di Chevalley–Eilenberg per l'algebra di Lie $\mathrm{Der}(A)$ a coefficienti nel modulo E.

Ad esempio consideriamo il modulo differenziale $D = \mathcal{H}_A$: allora $D_\delta = A\,\mathrm{Ham}\,A = \mathcal{H}_A$, dato che il nucleo del differenziale è $\ker X = \mathrm{Cas}\,A$, e se $c \in \mathrm{Cas}\,A$:

$$X(c) = 0 \iff X \in \mathrm{Ham}\,A$$

Dunque una $\mathcal{H}_A$-derivata covariante è un operatore

$$\mathbf{D} : \mathcal{H}_A \times E \longrightarrow E$$

tale che

$$\mathbf{D}_{X_a}(be) = b\mathbf{D}_{X_a}e + \{a,b\}e$$

Notiamo che in questo caso la contrazione è un operatore

$$i : \mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_A \longrightarrow A$$

tale che

$$i_{aX_h}bX_k = abi_{X_h}X_k = ab\{h,k\}$$

2.4 Calcolo differenziale sulle algebre di Poisson

Torniamo ora a considerare un'algebra di Poisson qualsiasi $(A, \cdot, \{\,\})$, e l'operatore $X : A \longrightarrow \operatorname{Der} A$ che porta un elemento $a \in A$ nel campo hamiltoniano X_a corrispondente. Abbiamo già detto che $\operatorname{Ham}(A)$ (l'immagine di X) genera un A-sottomodulo di $\operatorname{Der} A$, che denotiamo $\mathcal{H}_A$: si tratta, rispetto alla funzione X, di un modulo differenziale, e quindi esiste un unico morfismo $\mu : \Omega_A \longrightarrow \mathcal{H}_A$ di A-moduli differenziali tale che il seguente diagramma commuti:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "X"] \arrow[d, "d"] & \mathcal{H}_A \\
\Omega_A \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}
$$

In altri termini $X = \mu \circ d$.

Ad esempio, nel caso $A = C^\infty(M)$ (varietà di Poisson) abbiamo che $\mu = \pi^\#$ (π è il tensore di Poisson), dato che $\mu : \Omega_A \longrightarrow \operatorname{Der} A$ deve essere unica per universalità e certamente $\pi^\#$ fa commutare il diagramma precedente (Ω_A è lo spazio delle 1-forme e $\operatorname{Der} A$ è l'algebra di Lie $\mathfrak{X}(M)$ dei campi di vettori): ciò segue dall'essere $\pi^\#$ un morfismo di moduli e dal fatto che i differenziali esatti generano, come modulo, l'intero spazio delle 1–forme differenziali.

Per definizione, abbiamo inoltre

$$\{a, b\} = X_a b = (\mu(da))(b) = \langle \mu da, db \rangle$$

Cioè le parentesi di Poisson si possono descrivere in termini dell'operatore μ: questo pone in evidenza come il valore di $\{a, b\}$ non dipenda che dai differenziali di a e b; naturalmente ciò poteva già dirsi dalla $\{a, b\} = X_a b$, dato che X_a è una derivazione e quindi, per universalità, corrisponde ad un elemento del duale Ω_A^* del modulo dei differenziali di Kähler.

Vogliamo ora usare l'operatore μ per caratterizzare completamente la struttura di Poisson: questo approccio al formalismo hamiltoniano (se non alle strutture di Poisson) è dovuto a Gel'fand e Dorfman (cfr. [**?**]).

Per caratterizzare la struttura di algebra di Poisson in termini dell'operatore μ consideriamo lo spazio degli operatori A-lineari $\Omega_A \longrightarrow \operatorname{Der} A$, e su di esso la seguente operazione[4]:

$$[\mu,\nu]_S(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = \mathop{\circlearrowright\!\!\!\!\!\!\sum}_{1,2,3} \left(\langle \mu\mathcal{L}_{\nu\omega_1}\omega_2,\omega_3\rangle + \langle \nu\mathcal{L}_{\mu\omega_1}\omega_2,\omega_3\rangle\right)$$

Questa operazione si dice *parentesi di Schouten* dei due operatori μ e ν, e definisce un operatore trilineare $\Omega_A \otimes \Omega_A \otimes \Omega_A \longrightarrow A$.

Teorema 2.4.1 *Un'algebra associativa* $(A,\cdot)$ *è un'algebra di Poisson rispetto a certe parentesi* $\{\,\}$ *se e solo se esiste un operatore* $\mu : \Omega_A \longrightarrow \operatorname{Der} A$ *tale che*

(1) $\{a,b\} = \langle \mu da, db\rangle$ *per ogni* $a,b\in A$*;*

(2) μ *è antisimmetrico:* $\langle\mu\varphi,\psi\rangle + \langle\varphi,\mu\psi\rangle = 0$*;*

(3) $[\mu,\mu]_S = 0$.

DIMOSTRAZIONE: Ovviamente, per tramite della (1), la (2) equivale all'antisimmetria delle parentesi di Poisson. Resta da verificare l'equivalenza della (3) all'identità di Jacobi: supponiamo ad esempio che valga l'identità di Jacobi per $\{\,\}$ e di voler dimostrare la (3) per l'operatore μ definito dalla (1); allora basta osservare che

$$\begin{aligned}[\mu,\mu]_S(da,db,dc) &= \mathop{\circlearrowright\!\!\!\!\!\!\sum}_{a,b,c} \left(\langle \mu\mathcal{L}_{X_a}db,dc\rangle + \langle \mu\mathcal{L}_{X_a}db,dc\rangle\right)\\ &= 2\mathop{\circlearrowright\!\!\!\!\!\!\sum}_{a,b,c}\langle \mu d\{a,b\},dc\rangle = 2\mathop{\circlearrowright\!\!\!\!\!\!\sum}_{a,b,c}\{\{a,b\},c\}\end{aligned}$$

Dato che Ω_A è generato dai differenziali esatti questo basta a concludere che se $\{\,\}$ soddisfa l'identità di Jacobi allora $[\mu,\mu]_S = 0$; il viceversa segue dallo stesso identico calcolo, letto a ritroso.

QED

Ora osserviamo che, usando la proprietà universale dei differenziali $\operatorname{Der} A = (\Omega_A)^*$ possiamo rendere più simmetrica questa caratterizzazione di una struttura di Poisson introducendo una mappa $\pi : \Omega_A \times \Omega_A \longrightarrow A$ legata all'operatore μ nel modo seguente:

$$\pi(da,db) = \langle \mu da, db\rangle$$

[4] Usiamo la seguente notazione: se un termine sintattico T dipende dai simboli $(a_1,\dots,a_n)$ presi in questo ordine allora la scrittura

$$\mathop{\circlearrowright\!\!\!\!\!\!\sum}_{a_1,\dots,a_n} T$$

denota la somma degli n termini ottenuti da T permutando ciclicamente i simboli $(a_1,\dots,a_n)$.

Di solito, in accordo con le notazioni della Geometria Differenziale, si scrive $\mu = \pi^{\#}$, considerando μ come il morfismo "musicale (*sharp map*) indotto dal tensore π.

L'operatore π si dice *tensore di Poisson*, dato che evidentemente si tratta, nel caso $A = C^\infty(M)$, esattamente del tensore di Poisson della varietà M: $\pi \in (\Omega_A \wedge \Omega_A)^* \cong \mathrm{Der}\, A \wedge \mathrm{Der}\, A$. Anche in questo caso esiste una condizione di integrabilità che generalizza quella di Lie sulle varietà e che si scrive utilizzando le parentesi di Schouten–Nijenhuis[5], che possiamo definire come segue: intanto consideriamo gli A-moduli delle multi-derivazioni antisimmetriche

$$D_A^k = \bigwedge\nolimits_A^k \mathrm{Der}\, A$$

(la cui somma diretta fornisce un modulo graduato) che chiameremo ovviamente *tensori controvarianti antisimmetrici* su A.

Teorema 2.4.2 *Esiste un'unica struttura di algebra di Lie graduata sullo spazio* $\bigwedge^* \mathrm{Der}\, A$ *dei tensori antisimmetrici controvarianti su un'algebra associativa A:*

$$[\,] : D_A^i \times D_A^j \longrightarrow D_A^{i+j-1}$$

tale che

$$(*) \qquad [P, Q \wedge R] = [P,Q] \wedge R + (-1)^{q(p+1)} Q \wedge [P,R]$$

e che estenda la parentesi di Lie delle derivazioni $\mathrm{Der}\, A$ *e la valutazione di una derivazione su un elemento dell'algebra A.*

DIMOSTRAZIONE: Vogliamo dimostrare che esistono uniche delle parentesi $[\,]$ tali che verifichino la (*) e le

$$(**) \qquad [P,Q] = (-1)^{pq}[Q,P]$$

$$(***) \quad (-1)^{p(r-1)}[P,[Q,R]] + (-1)^{r(q-1)}[R,[P,Q]] + (-1)^{q(p-1)}[Q,[R,P]] = 0$$

Le (**) e (***) sono gli assiomi per le algebre di Lie graduate.

L'enunciato richiede inoltre che la parentesi che vogliamo definire estenda l'usuale commutatore fra gli elementi di $D_A^1 = \mathrm{Der}\, A$ e la valutazione di una derivazione in D_A^1 su una funzione in $D_A^0 = A$; devono cioè essere soddisfatte le

$$[a,b] = 0 \qquad [a,X] = X(a) \qquad [X,Y] = XY - YX$$

[5]Esiste un intero formalismo che poggia su queste parentesi e su altre loro collegate, per il quale si rimanda a [10], [?] e [78].

da cui si ha pure

$$[aX, bY] = (aX)(bY) - (bY)(aX) = a(Xb)Y - b(Ya)X + ab[X, Y]$$

se $a, b \in D^0_A$ e $X, Y \in D^1_A$. Inoltre, per la (*) otteniamo ad esempio che, se $X, Y, Z \in \operatorname{Der} A$, allora deve aversi

$$[X, Y \wedge Z] = [X, Y] \wedge Z + Y \wedge [X, Z]$$

e quindi, per induzione, fra due tensori decomponibili $X_1 \wedge ... \wedge X_p$ e $Y_1 \wedge ... \wedge Y_q$ il prodotto deve verificare la:

$$[X_1 \wedge ... \wedge X_k, Y_1 \wedge ... \wedge Y_q] = (-1)^{p+1} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} (-1)^{i+j} [X_i, Y_j] \wedge X_1 \wedge ... \wedge \widehat{X_i} \wedge ... \\ ... \wedge X_p \wedge Y_1 \wedge ... \wedge \widehat{Y_j} \wedge ... \wedge Y_q$$

È un facile benché tedioso calcolo (cfr. e.g. [102], [10]) verificare che con questa definizione anche le (**) e (***) sono soddisfatte. Dato che l'A-modulo dei tensori è generato dai tensori decomponibili, ciò conclude la dimostrazione.

QED

Questo teorema risale sostanzialmente a Schouten e Nijenhuis (cfr. [?], [78]). Utilizzando la dualità fra derivazioni e forme possiamo esprimere la parentesi di Schouten nella forma datale da Nijenhuis:

Corollario 2.4.3 *Se $P \in D^p_A$, $Q \in D^q_A$ e $\omega \in \Omega^{p+q-1}_A$ allora*

$$i_{[P,Q]}\omega = (-1)^{q(p+1)} i_P d\left(i_Q \omega\right) + (-1)^p i_Q d\left(i_P \omega\right) - i_{P \wedge Q} d\omega$$

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamo il corollario per doppia induzione sul grado dei tensori P e Q: supponiamo che $X \in \operatorname{Der} A$ e $Q = Y_1 \wedge ... \wedge Y_q \in D^q_A$, e ricordiamo che

$$\begin{aligned} i_{X\wedge Q} d\omega = i_X i_Q \omega &+ \sum_{i=1}^{q} (-1)^i i_{Y_i} i_{X \wedge Y_1 \wedge ... \wedge \widehat{Y_i} \wedge ... \wedge Y_q} \omega + \\ &+ \sum_{j=1}^{q} (-1)^j i_{[X, Y_j] \wedge Y_1 \wedge ... \wedge \widehat{Y_i} \wedge ... \wedge Y_q} \omega + \\ &+ \sum_{i<j}^{1...q} (-1)^{i+j} i_{[Y_i, Y_j] \wedge X \wedge Y_1 \wedge ... \wedge \widehat{Y_i} \wedge ... \widehat{Y_j} \wedge ... \wedge Y_q} \omega \end{aligned}$$

Nel terzo addendo a secondo membro riconosciamo $i_{[X,Y_1\wedge\ldots\wedge Y_q]}\omega$, sicché

$$\begin{aligned} i_{[X,Q]}\omega &= i_X i_Q\omega - i_X i_Q d\omega + \sum_{i=1}^{q}(-1)^{i+q} i_{Y_i} i_{Y_1\wedge\ldots\wedge\widehat{Y_i}\wedge\ldots\wedge Y_q\wedge X}\omega + \\ &\quad + \sum_{i<j}^{1\ldots q}(-1)^{i+j+q-2} i_{[Y_i,Y_j]\wedge Y_1\wedge\ldots\wedge\widehat{Y_i}\wedge\ldots\widehat{Y_j}\wedge\ldots\wedge Y_q\wedge X}\omega \\ &= i_X d i_Q\omega - i_X i_Q d\omega - i_Q d i_X\omega \end{aligned}$$

Questo dimostra la formula nel caso $p = 1$; ora supponiamola vera per $p > 1$ e dimostriamola per $p + 1$. Si tratta di osservare che (per le (*) e (**) del teorema precedente)

$$\begin{aligned} i_{[P\wedge X,Q]}\omega &= (-1)^{(p+1)q} i_{[Q,P\wedge X]}\omega \\ &= (-1)^{(p+1)q} i_{[Q,P]\wedge X}\omega + (-1)^{(p+1)q}(-1)^{p(q+1)} i_{P\wedge[Q,X]}\omega \\ &= (-1)^{(p+1)q} i_{[Q,P]} i_X\omega + (-1)^{q+p} i_P i_{[Q,X]}\omega \end{aligned}$$

Ora ai due addendi in quest'ultimo termine si possono applicare rispettivamente l'ipotesi induttiva e il caso $p = 1$ precedentemente trattato: combinandoli si ottiene la tesi.

QED

Non ci siamo spinti nei dettagli di questo risultato ben noto (cfr. [102] e [10]): una dimostrazione alternativa, che utilizza le connessioni e gli operatori differenziali, si può trovare in [57].

Ora possiamo riformulare il teorema di caratterizzazione in termini del tensore di Poisson:

Teorema 2.4.4 *Un'algebra associativa $(A, \cdot)$ è un'algebra di Poisson rispetto a certe parentesi $\{\,\}$ se e solo se esiste un tensore $\pi : \Omega_A \otimes \Omega_A \longrightarrow A$ tale che*

(1) $\{a, b\} = \pi(da, db)$ *per ogni* $a, b \in A$*;*

(2) π *è antisimmetrico:* $\pi(da, db) + \pi(db, da) = 0$*;*

(3) $[\pi, \pi] = 0$*.*

Dimostrazione: La dimostrazione è essenzialmente la stessa del teorema 2.4.1: dimostriamo quindi che la (3) equivale all'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson, per tramite della (1): intanto notiamo che, dato che $\pi \in \bigwedge^2 \operatorname{Der} A$, il corollario precedente applicato a π diviene

$$i_{[\pi,\pi]}\omega = -i_\pi d i_\pi\omega + i_\pi d i_\pi\omega - i_{\pi\wedge\pi} d\omega$$

e quindi abbiamo che

$$
\begin{aligned}
i_{[\pi,\pi]} da \wedge db \wedge dc &= -\sum_{a,b,c} \pi(da, d\pi(db, dc)) \\
&= -\sum_{a,b,c} \pi(da, d\{b,c\}) = -\sum_{a,b,c} \{a, \{b, c\}\}
\end{aligned}
$$

QED

Non è difficile ricavare la condizione di integrabilità locale di Lie che abbiamo dato sulle varietà di Poisson dalla $[\pi, \pi] = 0$.

Il calcolo differenziale che abbiamo delineato sui moduli per le algebre associative ammette, nel caso delle algebre di Poisson, una perfetta dualità fra differenziali e derivazioni che manca nel caso associativo, dualità che ora vogliamo discutere. In particolare possiamo utilizzare la struttura di Poisson e le sue caratterizzazioni in termini dell'operatore $\mu = \pi^{\#}$ e del tensore di Poisson π per definire un differenziale sulle derivazioni e una parentesi di Lie sulle 1-forme.

Per prima cosa definiamo delle parentesi di Lie su Ω_A legate alla presenza di una struttura di Poisson su A per mezzo del seguente

Teorema 2.4.5 *Esiste un'unica struttura di $\mathbb{K}$-algebra di Lie $\{\,\} : \Omega_A \times \Omega_A \longrightarrow \Omega_A$ sullo spazio dei differenziali Ω_A tale che valgano le seguenti condizioni:*

(1) *Se $a, b \in A$ allora $d\{a, b\} = \{da, db\}$*

(2) *Se $a \in A$, $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_A$ allora $\{\omega_1, a\omega_2\} = a\{\omega_1, \omega_2\} + \langle \pi^{\#}\omega_1, da\rangle \omega_2$*

ove $\pi^{\#} : \Omega_A \longrightarrow \operatorname{Der} A$ è l'operatore che caratterizza la struttura di Poisson.
DIMOSTRAZIONE: Intanto notiamo che se una tale struttura di algebra di Lie esiste allora è univocamente determinata dal valore che assume sui differenziali esatti, in virtù della (2). Consideriamo ora la seguente definizione:

$$
\begin{aligned}
\{\omega_1, \omega_2\} &= \mathcal{L}_{\pi^{\#}\omega_1}\omega_2 - \mathcal{L}_{\pi^{\#}\omega_2}\omega_1 - d\pi(\omega_1, \omega_2) \\
&= \mathcal{L}_{\pi^{\#}\omega_1}\omega_2 - \mathcal{L}_{\pi^{\#}\omega_2}\omega_1 - di_{\pi^{\#}\omega_1}\omega_2
\end{aligned}
$$

e verifichiamo che si tratta di una struttura di algebra di Lie che soddisfa alle (1) e (2) dell'enunciato (come abbiamo osservato basta verificarlo sui differenziali esatti). La (1) segue da

$$
\begin{aligned}
\{da, db\} &= \mathcal{L}_{\pi^{\#}da} db - \mathcal{L}_{\pi^{\#}da} db - d\pi(da, db) \\
&= d\mathcal{L}_{X_a} b - d\mathcal{L}_{X_b} a - d\{a, b\} \\
&= d\{a, b\} - d\{b, a\} - d\{a, b\} = d\{a, b\}
\end{aligned}
$$

Per la (2) basta notare che

$$\begin{aligned}\{\omega_1, a\omega_2\} &= \mathcal{L}_{\pi^\#\omega_1} a\omega_2 - \mathcal{L}_{\pi^\# a\omega_2}\omega_1 - d\pi(a\omega_1,\omega_2)\\ &= \langle \pi^\#\omega_1, da\rangle\omega_2 + a\mathcal{L}_{\pi^\#\omega_1}\omega_2 - a\mathcal{L}_{\pi^\#\omega_2}\omega_1 -\\ &- da\wedge i_{\pi^\#\omega_2}\omega_1 - da\wedge\pi(\omega_1,\omega_2) - ad\pi(\omega_1,\omega_2)\\ &= \langle \pi^\#\omega_1, da\rangle\omega_2 + a\{\omega_1,\omega_2\}\end{aligned}$$

Che si tratti di una operazione $\mathbb{R}$-bilineare antisimmetrica è ovvio; l'identità di Jacobi si dimostra, dato che basta verificarla su combinazioni A-lineari di differenziali esatti, combinando le (1), (2) e l'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson.

QED

Anche questo teorema è ben noto (cfr. [102], [9], [10]). Osserviamo che il differenziale d diviene un morfismo di algebre di Lie: anche l'operatore $\pi^\#$ lo è, come segue dal

Corollario 2.4.6 $\pi^\#\{\omega_1,\omega_2\} = [\pi^\#\omega_1, \pi^\#\omega_2]$

Dimostrazione: Dato che l'A-modulo Ω_A è generato dai differenziali esatti ci basta mostrare l'identità per $\omega_1 = adb$ e $\omega_2 = cde$: per questo usiamo le proprietà delle parentesi $\{\,\}$ fra 1-forme espresse dal teorema precedente e la A-linearità di $\pi^\#$:

$$\begin{aligned}\pi^\#\{adb, cde\} &= \pi^\# c\{adb, de\} + \pi^\#\langle\pi^\#(adb), dc\rangle de\\ &= c\pi^\# a\{db, de\} - c\pi^\#\langle \pi^\# de, da\rangle db + \langle\pi^\#(adb), dc\rangle X_e\\ &= acX_{\{b,e\}} - c\{e,a\}X_b + a\{b,c\}X_e\\ &= ac[X_b, X_e] + a(X_b c)X_e - c(X_e a)X_b\\ &= aX_b(cX_e) - cX_e(aX_b) = [aX_b, cX_e]\\ &= [\pi^\#(adb), \pi^\#(cde)]\end{aligned}$$

QED

Abbiamo osservato nel § precedente come la coppia $(\mathcal{H}_A, X)$ sia un modulo differenziale; possiamo quindi estendere questo differenziale $X : A \longrightarrow \operatorname{Der} A$ in grado qualsiasi, definendo perciò un *differenziale hamiltoniano* $d_\pi : D^k_A \longrightarrow D^{k+1}A$ come, se $P \in D^p_A$ e $\omega_i \in \Omega_A$:

$$\begin{aligned}\langle d_\pi P, \omega_0\wedge\ldots\wedge\omega_p\rangle = &\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\pi(\omega_i, di_P\omega_1\wedge\ldots\wedge\widehat{\omega_i}\wedge\ldots\wedge\omega_p) +\\ &+\sum_{i<j}^{0\ldots p}(-1)^{i+j} i_P\{\omega_i,\omega_j\}\wedge\ldots\wedge\widehat{\omega_i}\wedge\ldots\widehat{\omega_j}\wedge\ldots\wedge\omega_p\end{aligned}$$

Le verifiche delle

(1) $d_\pi \circ d_\pi = 0$
(2) $d_\pi(P \wedge Q) = d_\pi P \wedge Q + (-1)^p P \wedge d_\pi Q$
(3) d_π è $\mathbb{K}$-lineare.

sono del tutto analoghe al caso del differenziale esterno fra forme differenziali su una varietà. Osserviamo che l'algebra esterna sul modulo Der A

$$D_A := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigwedge\nolimits_A^n \operatorname{Der} A$$

è un'algebra associativa differenziale graduata.

Potremmo anche definire un operatore di contrazione di una forma su un multi-vettore e una derivata di Lie lungo una forma differenziale, in analogia a quanto fatto nel caso covariante. Abbiamo cioè sui tensori controvarianti un calcolo differenziale hamiltoniano duale del calcolo differenziale di de Rham sulle forme differenziali; in particolare rispetto al differenziale d_π otteniamo un complesso di cocatene (D_A^k, d_π) la cui coomologia $H_\pi(A)$ si dice *coomologia di Poisson* di A (qui è stata definita in modo concreto, a partire cioè da un complesso che la calcola, sebbene sia possibile una definizione più astratta in termini di funtori derivati, cfr. [44]). Torneremo in séguito su questa coomologia, nel caso delle varietà, mentre per ora ci limitiamo a notare che il modulo di coomologia di Poisson sia dotato di un prodotto *cap* in virtù della proprietà (2) del differenziale hamiltoniano:

$$[P] \cap [Q] = [P \wedge Q]$$

Possiamo estendere il morfismo di moduli $\pi^\# : \Omega_A \longrightarrow D_A$ in grado qualsiasi, tenendo conto del segno, come

$$\langle \pi^\# \omega, \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k \rangle = (-1)^k \omega(\pi^\# \omega_1 \wedge \ldots \wedge \pi^\# \omega_k)$$

(così che $\{f, g\} = \langle \pi^\# df, dg \rangle = -df(\pi^\# dg) = -\{g, f\}$). Usando questa definizione possiamo dimostrare il

Lemma 2.4.7 $d_\pi \circ \pi^\# + \pi^\# \circ d = 0$

DIMOSTRAZIONE: Se $\omega \in \Omega_A^n$ e $\varphi_1, .., \varphi_k \in \Omega_A$:

$$\begin{aligned}\langle \pi^\# d\omega, \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k \rangle &= (-1)^k \langle d\omega, \pi^\# \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \pi^\# \varphi_k \rangle \\ &= (-1)^k \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} (\pi^\# \varphi_i) \omega(\pi^\# \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\pi^\# \varphi_i} \wedge \ldots \wedge \pi^\# \varphi_k) +\end{aligned}$$

$$+(-1)^k \sum_{i<j}^{1...k} (-1)^{i+j} \omega([\pi^\# \varphi_i, \pi^\# \varphi_j], \pi^\# \varphi_1 \wedge ... \wedge \widehat{\pi^\# \varphi_i} \wedge ... \wedge \widehat{\pi^\# \varphi_j} \wedge ... \wedge \pi^\# \varphi_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+k+1} (\pi^\# \varphi_i) \omega(\pi^\# \varphi_1 \wedge ... \wedge \widehat{\pi^\# \varphi_i} \wedge ... \wedge \pi^\# \varphi_k) +$$

$$+ \sum_{i<j}^{1...k} (-1)^{i+j+k} \omega(\pi^\# \{\varphi_i, \varphi_j\}, \pi^\# \varphi_1 \wedge ... \wedge \widehat{\pi^\# \varphi_i} \wedge ... \wedge \widehat{\pi^\# \varphi_j} \wedge ... \wedge \pi^\# \varphi_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+k+1} (-1)^{k-1} (\pi^\# \varphi_i) \langle \pi^\# \omega, \varphi_1 \wedge ... \wedge \widehat{\varphi_i} \wedge ... \wedge \varphi_k \rangle +$$

$$+ \sum_{i<j}^{1...k} (-1)^{i+j+k} (-1)^{k-2} \langle \pi^\# \omega, \{\varphi_i, \varphi_j\}, \varphi_1 \wedge ... \wedge \widehat{\varphi_i} \wedge ... \wedge \widehat{\varphi_j} \wedge ... \wedge \varphi_k \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \pi(\varphi_i, di_{\pi^\# \omega} \varphi_1 \wedge ... \wedge \widehat{\varphi_i} \wedge ... \wedge \varphi_k) +$$

$$+ \sum_{i<j}^{1...k} (-1)^{i+j} \langle \pi^\# \omega, \{\varphi_i, \varphi_j\}, \varphi_1 \wedge ... \wedge \widehat{\varphi_i} \wedge ... \wedge \widehat{\varphi_j} \wedge ... \wedge \varphi_k \rangle$$

$$= -\langle d_\pi \pi^\# \omega, \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_k \rangle$$

QED

Teorema 2.4.8 *Se $P \in D_A^p$ allora $d_\pi P = -[\pi, P]$*

DIMOSTRAZIONE: Si procede per induzione sul grado del tensore P: se $P \in D_A^0 = A$ e $\omega \in \Omega_A$ allora

$$\begin{aligned} \langle [\pi, P], \omega \rangle &= \langle \pi, d(P\omega) \rangle - P\langle \pi, d\omega \rangle = \pi(dP, \omega) + P\langle \pi, d\omega \rangle - P\langle \pi, d\omega \rangle \\ &= -\pi(\omega, dP) = -\langle d_\pi P, \omega \rangle \end{aligned}$$

Se $P \in D_A^1 = \mathrm{Der}\, A$ e $a, b \in A$ allora:

$$\begin{aligned} \langle [\pi, P], da \wedge db \rangle &= -i_\pi di_P(da \wedge db) + i_P d\{a, b\} \\ &= -\langle \pi, d(P(a)db - P(b)da) \rangle + \langle P, d\{a, b\} \rangle \\ &= -\pi(dP(a), db) + \pi(dP(b), da\rangle + \langle P, d\{a, b\} \rangle \\ &= -\pi(da, di_P db) + \pi(db, di_P da) + \langle P, d\{a, b\} \rangle \\ &= -\langle d_\pi P, da \wedge db \rangle \end{aligned}$$

Nel caso generale, supponendo $P = Q \wedge X$ con $Q \in D_A^q$ e $X \in D_A^1$, abbiamo $[\pi, P] = [\pi, Q] \wedge X + (-1)^q Q \wedge [\pi, X] = -d_\pi Q \wedge X - (-1)^q Q \wedge d_\pi X = -d_\pi P$ per il caso $q = 1$ e l'ipotesi induttiva.

QED

Questo teorema consente in particolare di interpretare la condizione $[\pi, \pi] = 0$ come una condizione di cociclo: il tensore di Poisson definisce quindi una classe nel secondo modulo di coomologia di Poisson dell'algebra.

Inoltre, per il lemma, il morfismo di moduli $\pi^\#$ induce un morfismo di complessi di cocatene, e quindi una mappa

$$H_{dR}(A) \longrightarrow H_\pi(A)$$

dall'algebra di coomologia di de Rham all'algebra di coomologia di Poisson di A.

Identifichiamo i primi tre gruppi di coomologia di un'algebra di Poisson:

Teorema 2.4.9 *Se A è un'algebra di Poisson allora*

(*a*) $H^0_\pi(A) = \operatorname{Cas} A$.

(*b*) $H^1_\pi(A) = \operatorname{Can} A / \operatorname{Ham} A$.

DIMOSTRAZIONE: Per la (a) si tratta di osservare che $D^0_A = A$ e che l'essere $a \in D^0_A$ un cociclo significa significa che $d_\pi a = 0$ cioè che $X_a = 0$ e quindi, per ogni $b \in A$: $\{a, b\} = 0$. Dunque $H^0_\pi(A) = Z^0_\pi(A) = \operatorname{Cas} A$. Per la (b) basta notare che un 1-cociclo è un elemento D di $D^1_A = \operatorname{Der} A$ tale che $d_\pi D = 0$, cioè, per ogni $a \in a$:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle d_\pi D, da \wedge db\rangle = \pi(da, dD(b)) - \pi(db, dD(a)) - \langle D, \{da, db\}\rangle \\ &= \{D(a), b\} + \{a, D(b)\} - D\{a, b\} \end{aligned}$$

Quindi gli 1-cocicli sono i campi canonici. Gli 1-cobordi sono invece gli elementi di $\operatorname{Der} A$ della forma $d_\pi a = X_a$ per qualche $a \in A$, cioè i campi hamiltoniani, e quindi $H^1_\pi(A) = \operatorname{Can} A / \operatorname{Ham} A$.

QED

Possiamo dare una interpretazione anche per $H^2_\pi(A)$ che, almeno in questa formulazione algebrica, non sembra essere presente in letteratura[6].

Definizione 2.4.10 *Una* deformazione *di un'algebra di Poisson A è una sequenza esatta di $\mathbb{K}$-spazi vettoriali*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} \Omega_A \longrightarrow 0$$

[6]Nel caso $A = C^\infty(M)$ esistono dei calcoli particolari, dovuti a Lu, Ginzburg e Nakhanishi che presentano $H^2_\pi(A)$ in modo concreto come spazio di deformazioni del tensore di Poisson.

ove E è una $\mathbb{K}$-algebra di Poisson, p un morfismo di $\mathbb{K}$-algebre di Lie e i un morfismo di $\mathbb{K}$-algebre associative, tali che

$$i\{p(e), b\} = [e, i(b)]$$

Due deformazioni si dicono equivalenti *se esiste un morfismo di $\mathbb{K}$-algebre di Lie $h : E \longrightarrow E'$ in modo che il diagramma*

$$\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[dd] \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Omega_A \arrow[r] & 0 \\
 & & E' \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

sia commutativo

Il motivo della terminologia si può spiegare come segue: consideriamo il tensore di Poisson $\pi : \Omega_A \wedge \Omega_A \longrightarrow A$ e supponiamo che

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} \Omega_A \longrightarrow 0$$

sia una deformazione di A: allora possiamo comporre π con p e ottenere il tensore

$$\tilde{\pi}(e_1, e_2) = \pi(p(e_1), p(e_2))$$

su E: questa struttura di Lie è la deformazione del tensore di Poisson associata a E. Ad esempio, il tensore di Poisson stesso definisce una tale deformazione (banale) su Ω_A con $i = 0$ e p l'identità; la deformazione corrispondente a $p = 0$ e i l'identità (con $E = A$) è quella nulla, che deforma cioè la struttura di Poisson in una identicamente nulla.

Teorema 2.4.11 *$H^2_\pi(A)$ è il modulo delle deformazioni delle strutture di Poisson su A modulo equivalenza.*

La dimostrazione è classica, e ripete ad esempio quella data in [19, §XIV-5] per le estensioni di algebre di Lie (cfr. pure [41, §1.4]).

Negli esempi principali di algebre di Poisson che abbiamo introdotto (le algebre delle varietà simplettiche e dei duali delle algebre di Lie) la coomologia di Poisson coincide con oggetti ben noti:

Teorema (Lichnerowicz) **2.4.12** *La coomologia di Poisson dell'algebra $A = C^\infty(S)$ ove S è una varietà simplettica coincide con la coomologia di de Rham della varietà.*

Questo segue immediatamente dall'essere l'isomorfismo $\pi^\#$ un isomorfismo dei rispettivi complessi di coomologia (cfr. [64] per una dimostrazione diretta).

Teorema (GINZBURG–LU–WEINSTEIN) **2.4.13** *La coomologia di Poisson dell'algebra $A = C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ della varietà di Poisson lineare duale di un'algebra di Lie coincide con la coomologia dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ a coefficienti nella rappresentazione A.*

Si tratta di un risultato noto che non ridimostreremo qui (cfr. [43]).

A titolo di esempio della difficoltà del calcolo della coomologia di Poisson in generale, anche per la mancanza di reali strumenti computazionali (ad esempio questa coomologia, malgrado il nome, non è funtoriale!), diamo la coomologia di alcune strutture di Poisson quadratiche nel piano, determinate da V. Ginzburg [42] e N. Nakanishi [?]: ad esempio la struttura di Poisson $\mathbb{R}^2_0$

$$\{f,g\}(x,y) = (x^2+y^2)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)$$

ha i seguenti gruppi di coomologia di Poisson:

$$H^0_\pi(\mathbb{R}^2_0) = \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad H^1_\pi(\mathbb{R}^2_0) = \mathbb{R}^2 \qquad \text{e} \qquad H^2_\pi(\mathbb{R}^2_0) = \mathbb{R}^2$$

ove i generatori in grado uno sono

$$x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \qquad \text{e} \qquad x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

e i generatori in grado due sono

$$\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad (x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$$

Invece, per la struttura di Poisson $\mathbb{R}^2_y$

$$\{f,g\} = y^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)$$

il primo gruppo di coomologia è di dimensione infinita, come pure il secondo, che è isomorfo a $C^\infty(\mathbb{R})$ (cfr. [?]).

In ambedue i casi la dimostrazione è non banale (ancora mentre Vaisman scriveva il suo libro [102] non era chiaro quali fossero questi gruppi di coomologia).

Concludiamo introducendo un'altra nozione omologica sulle varietà di Poisson, vale a dire l'*omologia di Poisson* (cfr. [57], [13], [44], [102, §5]). Per introdurla consideriamo l'operatore $\Delta : \Omega_A^n \longrightarrow \Omega_A^{n-1}$ definito come

$$\Delta\omega = [i_\pi, d] = i_\pi d\omega - di_\pi\omega$$

Si tratta di un operatore differenziale di ordine minore di due. Inoltre

$$\Delta d + d\Delta = i_\pi d^2 - di_\pi d + di_\pi d - d^2 i_\pi = 0$$

Possiamo dare anche per questo operatore una espressione differenziale:

Proposizione 2.4.14

$$\begin{aligned}\Delta(a_0 da_1 \wedge ... \wedge a_n) = & \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\{a_0, a_i\}da_1 \wedge ... \wedge \widehat{da_i} \wedge ... \wedge da_n \\ & + \sum_{i<j}^{1...n}(-1)^{i+j}a_0 d\{a_i, a_j\} \wedge da_1 \wedge ... \wedge \widehat{da_i} \wedge ... \wedge \widehat{da_j} \wedge ... \wedge da_n\end{aligned}$$

Dimostrazione: Applichiamo la definizione e le proprietà del simbolo di sommatoria:

$$\begin{aligned}\Delta(a_0 da_1 \wedge ... \wedge a_n) &= i_\pi(da_0 \wedge da_1 \wedge ... \wedge da_n) - di_\pi(a_0 da_1 \wedge ... \wedge a_n) \\ &= \sum_{i<j}^{0...n}(-1)^{i+j+1}\pi(da_i \wedge da_j)da_0 \wedge ... \wedge \widehat{da_i} \wedge ... \wedge \widehat{da_j} \wedge ... \wedge da_n \\ &- d\sum_{i<j}^{1...n}(-1)^{i+j+1}a_0\pi(da_i \wedge da_j)da_1 \wedge ... \wedge \widehat{da_i} \wedge ... \wedge \widehat{da_j} \wedge ... \wedge da_n \\ &= \sum_{i<j}^{0...n}(-1)^{i+j+1}\pi(da_i \wedge da_j)da_0 \wedge ... \wedge \widehat{da_i} \wedge ... \wedge \widehat{da_j} \wedge ... \wedge da_n \\ &- \sum_{i<j}^{1...n}(-1)^{i+j+1}\pi(da_i \wedge da_j)da_0 \wedge da_1 \wedge ... \wedge \widehat{da_i} \wedge ... \wedge \widehat{da_j} \wedge ... \wedge da_n \\ &- \sum_{i<j}^{1...n}(-1)^{i+j+1}a_0 d\pi(da_i \wedge da_j) \wedge da_1 \wedge ... \wedge \widehat{da_i} \wedge ... \wedge \widehat{da_j} \wedge ... \wedge da_n \\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\pi(da_0 \wedge da_j)da_0 \wedge ... \wedge \widehat{da_i} \wedge ... \wedge \widehat{da_j} \wedge ... \wedge da_n \\ &- \sum_{i<j}^{1...n}(-1)^{i+j+1}a_0 d\pi(da_i \wedge da_j) \wedge da_1 \wedge ... \wedge \widehat{da_i} \wedge ... \wedge \widehat{da_j} \wedge ... \wedge da_n\end{aligned}$$

Tenendo conto del fatto che $\pi(da \wedge db) = \{a, b\}$ si ha la tesi.

QED

Corollario 2.4.15 $\Delta(adb) = \{a, b\}$.

Ora è facile verificare che $\Delta^2 = 0$: si tratta di un calcolo formale del tutto simile a quello per il differenziale esterno (cfr. [102, §4.2]). Abbiamo quindi una mappa di bordo che chiamiamo *differenziale di Koszul*, che dà luogo ad un complesso di catene

$$\cdots \longrightarrow \Omega_A^{n+1} \longrightarrow \Omega_A^n \longrightarrow \Omega_A^{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega_A^1 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

la cui omologia è l'*omologia di Poisson* dell'algebra A, e i cui gruppi si denotano con $H_n^\pi(A)$.

In generale questa omologia non è la duale della coomologia di Poisson, anche se esiste un legame: il calcolo è proibitivo quanto per la coomologia; comunque, come ci si aspetta (cfr. [13]):

Teorema (BRYLINSKI) **2.4.16** *Se S è una varietà simplettica allora l'omologia di Poisson dell'algebra $A = C^\infty(S)$ è isomorfa all'omologia di de Rham.*

Anche nel caso della varietà di Lie–Poisson vale un risultato analogo a quello della coomologia (cfr. [57]):

Teorema (KOSZUL) **2.4.17** *Se $\mathfrak{g}^*$ è una varietà di Lie–Poisson allora la sua omologia di Poisson è l'omologia dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ a coefficienti nella rappresentazione $A = C^\infty(\mathfrak{g}^*)$.*

Come esempio diamo qualche calcolo relativo al caso del piano simplettico con una singolarità nell'origine $\mathbb{R}_0^2$: cominciamo con il secondo gruppo di omologia, e consideriamo una 2-forma

$$\omega = f(x, y)dx \wedge dy$$

per la quale si ha

$$\Delta\omega = i_\pi d\omega - di_\pi\omega = -d(f(x, y)(x^2 + y^2))$$

Dunque l'essere un ciclo equivale a

$$f(x, y) = \frac{c}{x^2 + y^2}$$

con $c \in \mathbb{R}$ (per $x, y) \neq (0,0)$; ovviamente una tale funzione si estende in modo continuo su tutto $\mathbb{R}^2$ solo se $c = 0$, quindi lo spazio dei 2-cicli di Poisson è nullo, col che $H_2^\pi(\mathbb{R}_0^2) = 0$: in particolare non coincide né con $H_0(\mathbb{R}^2)$ (omologia di de Rham).

In grado zero abbiamo

$$H_0^\pi(\mathbb{R}_0^2) = \frac{C^\infty(\mathbb{R}^2)}{\operatorname{im}\Delta} = \frac{C^\infty(\mathbb{R}^2)}{\{(x^2+y^2)\operatorname{div} f \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)\}}$$

Infatti

$$\Delta(adx + bdy) = \{a, x\} + \{b, y\} = (x^2+y^2)\,(\partial_x b - \partial_y a)$$

Si noti che questo spazio di omologia non è nullo: infatti la funzione

$$f(x, y) = (x - y)\sqrt{x^2 + y^2}$$

non può in alcun modo appartenere allo spazio che figura a denominatore: dovremmo infatti, in quel caso, avere

$$(\partial_x b - \partial_y a) = \frac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

il che, in tutto il piano (compresa l'origine), è impossibile.

Lo spazio H_1^π è, per definizione, il quoziente

$$H_1^\pi(\mathbb{R}_0^2) = \frac{\{\omega \in \Omega \mid d\omega = 0\}}{\{\Delta(f dx \wedge dy)\}}$$

Infatti abbiamo già calcolato $\Delta(adx + bdy)$, e il suo annullarsi equivale all'annullarsi di $\partial_y a - \partial_y b$, cioè di $d\omega = d(adx + bdy)$; il denominatore coincide con $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, dato che

$$\Delta(f dx \wedge dy) = -d(f\{x, y\}) = -d(f(x^2 + y^2))$$

e la mappa $\alpha : C^\infty(\mathbb{R}^2) \longrightarrow B_1^\pi(\mathbb{R}_0^2)$ definita come

$$\alpha(f) = -d(f(x^2 + y^2))$$

è iniettiva, avendosi

$$-d(f(x^2 + y^2)) = 0 \implies f = 0$$

(come abbiamo già notato nel calcolo di $H_0^\pi(\mathbb{R}^2)$) ed è suriettiva in modo ovvio.

2.5 Fibrazione sullo spettro di un'algebra di Poisson

Diamo qui un piccolo contributo alla questione generale, che si inquadra nel contesto della geometria non commutativa ([26]), della formulazione algebrica di nozioni geometriche sulle varietà di Poisson, in vista di analoghi non commutativi (e quindi dei cosiddetti procedimenti di quantizzazione).

Consideriamo un'algebra di Poisson A: ad essa possiamo associare un insieme "geometrico, vale a dire la famiglia degli ideali massimali dell'algebra associativa A, che denoteremo con $\mathrm{Spec}(A)$ (questa terminologia collide con quella usuale in Geometria Algebrica, ma è espressiva: volendo potremmo prendere il termine "spec come abbreviazione di "speculum piuttosto che di "spectrum, il che sembra più adeguato visto che le proprietà dell'algebra A si riflettono nel suo $\mathrm{Spec}(A)$).

Dato che A è un'algebra commutativa potremmo ripetere le usuali considerazioni che si svolgono in Geometria Algebrica per gli schemi, e in Analisi Funzionale per le C*-algebre commutative, tuttavia limitiamoci all'essenziale: consideriamo cioè $X = \mathrm{Spec}(A)$ e mostriamo come possieda una struttura naturale di spazio topologico indotta dalla struttura associativa di A.

Basti considerare gli elementi $a \in A$ come funzioni sui "punti $\chi \in \mathrm{Spec}(A)$, nell'ovvio modo seguente:

$$a(\chi) = \chi(a)$$

ove identifichiamo ideali massimali e funzionali moltiplicativi sull'algebra. Allora possiamo considerare la topologia su A più debole rispetto alla quale le funzioni $a \in A$ sono continue (topologia spettrale).

Esempio. Se $A = C^\infty(M)$ ove M è una varietà differenziabile allora è facile vedere che, come insieme, $\mathrm{Spec}(A) = M$. Inoltre la topologia spettrale coincide con la topologia della varietà, dato che un insieme è chiuso se e solo se è l'insieme degli zeri di una funzione differenziabile (teorema di Whithney).

Esempio. Se $A = C(X)$ (funzioni continue complesse su uno spazio topologico compatto di Hausdorff) allora $\mathrm{Spec}(A)$ è omeomorfo a X, come segue dalla teoria di Gel'fand-Naijmark.

L'altra classe ben nota di esempi è quella degli anelli commutativi noetheriani, per i quali gli spettri sono gli schemi algebrici (o meglio i loro modelli locali).

Ora consideriamo l'algebra associativa $\mathrm{Cas}\, A$ degli elementi di Casimir di un'algebra di Poisson A: possiamo considerarne lo spettro $\mathrm{Spec}\,\mathrm{Cas}\, A$, con la sua topologia spettrale.

Evidentemente esiste una suriezione

$$\Pi : \mathrm{Spec}\, A \longrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathrm{Cas}\, A \longrightarrow 0$$

che corrisponde all'inclusione $\operatorname{Cas} A \subset A$: cioè, in qualche senso, lo spazio topologico $\operatorname{Spec} A$ definisce una fibrazione sullo spazio $\operatorname{Spec}\operatorname{Cas} A$.

Notiamo che lo spazio $\operatorname{Spec}\operatorname{Cas} A$ può avere una struttura topologica bizzarra; i due casi limite sono quelli di un'algebra di Poisson simplettica, vale a dire $\operatorname{Cas} A = \mathbb{K}$, nel qual caso $\operatorname{Spec}\operatorname{Cas} A$ è ridotto ad un sol punto, e, all'estremo opposto, di un'algebra di Poisson nulla, vale a dire $\operatorname{Cas} A = A$, nel qual caso la fibrazione precedente è l'identità.

Teorema 2.5.1 *Le fibre della mappa* Π *sono spettri di algebre di Poisson non degeneri.*

Dimostrazione: Consideriamo $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}\operatorname{Cas} A$ e $\Pi^{-1}(\mathfrak{m})$: si tratta dell'insieme degli ideali massimali di A che contengono l'ideale massimale $\mathfrak{m}$ ovvero, se si vuole, dei caratteri dell'algebra A che, ristretti a $\operatorname{Cas} A$, sono lo stesso carattere. Ora consideriamo, per ciascun $\mathfrak{M} \in \Pi^{-1}(\mathfrak{m})$ il quoziente $A_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}/\mathfrak{m}$: è un'algebra associativa, sulla quale esiste una struttura di Poisson definita come segue:

$$\{a + \mathfrak{m}, b + \mathfrak{m}\} = \{a, b\} + \mathfrak{m}$$

(ove $a, b \in \mathfrak{M}$). Questa definizione è ben posta dato che $\mathfrak{m} \subset \operatorname{Cas} A$, e inoltre definisce delle parentesi di Poisson dato che lo sono $\{\,\}$ su A; ora calcoliamo gli elementi di Casimir per queste parentesi: se $c+\mathfrak{m}$ è un tale elemento allora, per ogni $a \in \mathfrak{M}$:

$$\{a + \mathfrak{m}, c + \mathfrak{m}\} = \{a, c\} + \mathfrak{m}$$

deve appartenere a $\mathfrak{m}$, il che significa che $c + \mathfrak{m}$ definisce un elemento in $\operatorname{Cas} A/\mathfrak{m} \cong \mathbb{K}$, da cui otteniamo che c è una costante. Dunque le parentesi definite su $A_{\mathfrak{M}}$ sono simplettiche.

QED

Notiamo che la mappa Π è continua per definizione: rispetto alla topologia di $\operatorname{Spec} A$ gli elementi di Casimir sono funzioni continue! Notiamo inoltre che esiste una topologia più fine su $\operatorname{Spec} A$, che possiamo definire prendendo come base dei suoi aperti le intersezioni degli aperti della topologia spettrale di $\operatorname{Spec} A$ con le fibre della mappa Π, e rispetto alla quale le fibre sono le componenti connesse.

Osserviamo inoltre che questo teorema è la versione formale del teorema di stratificazione simplettica: chiaramente quest'ultimo è più profondo in quanto coinvolge la definizione della struttura differenziabile sulle foglie simplettiche e la differenziabilità della fogliazione singolare da esse determinata.

2.6 Appendice: Spazi Vettoriali di Poisson

Diamo in questa appendice al capitolo un contributo alla definizione del concetto di “spazio vettoriale di Poisson”: una tale trattazione manca in letteratura (se si eccettua [63] che però danno una definizione inadeguata che non riesce a catturare l'esempio principale delle parentesi di Lie–Poisson, solo Weinstein accenna brevemente il caso lineare nel suo fondamentale lavoro [104]).

La discussione che qui si propone è parzialmente un caso particolare della teoria delle varietà di Poisson: comunque qui supponiamo di considerare spazi vettoriali qualsiasi; la nostra idea è che si possa edificare una teoria di Poisson per gli spazi vettoriali topologici che intervengono nella teoria delle equazioni differenziali, nella teoria dei campi ed in meccanica quantistica (cfr. e.g. [20]); in altri termini mentre la teoria che abbiamo già esposto va bene anche nel caso non lineare purché di dimensione finita, qui vogliamo dare qualche idea che si estenda, nell'àmbito del caso lineare, a spazi di dimensione infinita; notiamo infine che gli spazi vettoriali considerati saranno su un campo qualsiasi.

2.6.1 Strutture di Poisson lineari

Qui considereremo spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$ qualsiasi. Se $\mathbb{K}$ è un campo valutato non discreto (ad esempio $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) gli spazi vettoriali potranno essere topologici.

Definizione 2.6.1 *Uno spazio vettoriale V si dice* spazio vettoriale di Poisson *se l'algebra simmetrica* $\mathrm{Sym}(V^*)$ *ha una struttura di Poisson.*

La richiesta sull'algebra simmetrica si può motivare in questo modo: un oggetto geometrico è di Poisson se la sua algebra delle funzioni è di Poisson, e la scelta più naturale per uno spazio vettoriale sono i funzionali lineari (e continui nel caso di spazi vettoriali topologici): ovviamente questi non costituiscono un'algebra, ed è naturale considerare l'algebra generata da essi, che è proprio l'algebra simmetrica in V^*, o, equivalentemente, l'algebra dei polinomi in V^*. L'algebra simmetrica ha inoltre il vantaggio di essere un oggetto universale intrinsecamente associato ad ogni spazio vettoriale: se lo spazio vettoriale è topologico, ad esempio uno spazio di Banach, l'algebra simmetrica considerata sarà quella dei tensori simmetrici continui costruita sullo spazio duale topologico.

La definizione precedente non pone alcuna restrizione sulla natura delle parentesi di Poisson, se non che si tratta di funzioni polinomiali: in realtà, per restare nell'algebra lineare e non sconfinare nella geometria algebrica, è necessario imporre la linearità alle funzioni considerate[7]. Prima di limitarci al caso lineare, facciamo però qualche osservazione di carattere generale.

Intanto fissiamo la notazione per l'algebra simmetrica: denoteremo i tensori simmetrici omogenei di grado d su V^* con $\mathrm{Sym}^d(V^*)$, in modo che:

$$\mathrm{Sym}(V^*) = \bigoplus_{d\geq 0} \mathrm{Sym}^d(V^*)$$

e denotiamo i tensori simmetrici di grado d su V^* con $\mathrm{Sym}^{(d)}(V^*)$, in modo che

$$\mathrm{Sym}^{(d)}(V^*) = \bigoplus_{i=0}^{d} \mathrm{Sym}^d(V^*)$$

Questi oggetti corrispondono, fissata una base in V^*, ai polinomi omogenei di grado d ed a tutti i polinomi di grado d in V^*.

Osserviamo che le parentesi di Poisson su $\mathrm{Sym}(V^*)$ sono completamente determinate dai valori che assumono su V^*. Intanto è ovvio che le costanti stiano nel centro dell'algebra di Poisson:

$$\{\mathbb{K}, \mathrm{Sym}(V^*)\} = (0)$$

infatti, se $k \in \mathbb{K}$ e $p \in \mathrm{Sym}(V^*)$, allora

$$\{k,p\} = \{1\cdot k, p\} = 1\{k,p\} + k\{1,p\} = \{k,p\} + k\{1,p\}$$

e quindi $\{1,p\} = 0$ da cui $\{k,p\} = 0$ per ogni $k \in \mathbb{K}$.

Le parentesi di Poisson sono completamente determinate una volta che siano definite su V^* perché, se per $h+\varphi, k+\psi \in \mathrm{Sym}^{(1)}(V^*) = \mathbb{K}\oplus V^*$, si ha

$$\{h+\varphi, k+\psi\} = \{\varphi,\psi\}$$

e c'è un solo modo di estendere una mappa bilineare antisimmetrica definita su $\mathrm{Sym}^1(V^*)$ a tutto $\mathrm{Sym}(V^*)$ in modo che soddisfi alla bilinearità, antisimmetria e regola di Leibniz. Esplicitamente, un elemento p di $\mathrm{Sym}(V^*)$ è una somma $p_0 + ... + p_d$, ove $p_k \in \mathrm{Sym}^k(V^*)$, cioè $p_k = \sum_{i_0+...+i_r=k} a_{i_0...i_r} v_{i_0}...v_{i_r}$ (per

[7] Questo vuol dire che escludo da questa trattazione le parentesi di Poisson quadratiche o di grado maggiore, che non possono essere trattate con metodi lineari ma che presumibilmente richiedono una teoria delle varietà algebriche di Poisson (teoria che, a quanto mi consta) non è stata ancora considerata.

$v_{i_j} \in V^*$ e $a_{i_0 \ldots i_r} \in \mathbb{K}$), e quindi

$$\begin{aligned}
\{p, q\} &= \{\sum_k p_k, \sum_h q_h\} \\
&= \sum_{h,k} \{ \sum_{i_0+\ldots+i_r=k} a_{i_0\ldots i_r} v_{i_0} \ldots v_{i_r}, \sum_{j_0+\ldots+j_s=h} b_{j_0\ldots j_s} w_{j_0} \ldots w_{j_s} \} \\
&= \sum_{k,h} \sum_{i_0+\ldots+i_r=k} \sum_{j_0+\ldots+j_s=h} \sum_{t,u} v_{i_0} \ldots \widehat{v_{i_t}} \ldots v_{i_r} w_{j_0} \ldots \widehat{w_{j_u}} \ldots w_{j_s} \{v_{i_t}, w_{j_u}\}
\end{aligned}$$

(per bilinearità ed identità di Leibniz).

Il fatto che le parentesi di Poisson su uno spazio vettoriale siano completamente determinate dai valori che assumono sulle funzioni lineari è in pieno accordo col ruolo giocato da queste funzioni, che in questo modo si rivelano essere le uniche delle quali la struttura di Poisson tiene conto.

Quindi, in generale, le parentesi di Poisson su uno spazio vettoriale V saranno determinate da

$$\{p, q\} = \sum_{i=0}^{k} \pi_i(p, q)$$

ove $\pi_i : V^* \wedge V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}^i(V^*)$ sono tensori che determinano il valore delle parentesi grado per grado.

Definizione 2.6.2

(1) *Le parentesi di Poisson su uno spazio vettoriale V si dicono* omogenee di grado d *se verificano la*

$$\{\mathrm{Sym}^1(V^*), \mathrm{Sym}^1(V^*)\} \subset \mathrm{Sym}^d(V^*)$$

(2) *Le parentesi di Poisson su uno spazio vettoriale V si dicono* graduate *verificano la*

$$\{\mathrm{Sym}^{(i)}(V^*), \mathrm{Sym}^{(j)}(V^*)\} \subset \mathrm{Sym}^{(i+j-1)}(V)$$

Evidentemente uno spazio vettoriale di Poisson graduato può essere omogeneo di grado al più uno, e questo sarà il caso lineare, in cui

$$\{\mathrm{Sym}^i(V^*), \mathrm{Sym}^j(V^*)\} \subset \mathrm{Sym}^{i+j-1}(V^*)$$

Il motivo per il quale si considerano queste restrizioni è semplice: le funzioni alle quali siamo interessati sono i funzionali lineari su V, cioè gli elementi di

V^*, e quello che vogliamo è che la parentesi di Poisson di due funzionali lineari sia al più un funzionale lineare, e non, ad esempio, una funzione quadratica o polinomiale. Dato che $V^* = \mathrm{Sym}^1(V^*)$ deve aversi

$$\{\mathrm{Sym}^1(V^*), \mathrm{Sym}^1(V^*)\} \subset \mathrm{Sym}^1(V^*)$$

e quindi l'imposizione sui tensori simmetrici di grado maggiore è per forza quella considerata nella definizione precedente.

Naturalmente la teoria di Poisson costituisce una generalizzazione della teoria simplettica, quindi il primo (e più semplice) esempio di spazio vettoriale di Poisson devono essere gli spazi vettoriali simplettici.

Gli esempi fondamentali di spazi vettoriali di Poisson li abbiamo già dati come esempi di algebre di Poisson: riformuliamoli brevemente nel contesto puramente lineare, cominciando dagli spazi simplettici.

Esempio 2.6.3 Consideriamo uno spazio vettoriale fortemente simplettico (S, ω) (se $\dim S < \infty$ forme deboli e forti coincidono: cfr. [20]): allora la forma simplettica è un tensore fortemente non degenere

$$\omega\ S \wedge S \longrightarrow \mathbb{K}$$

Per definizione, la mappa lineare indotta

$$\omega^b\ S \longrightarrow S^*$$

è un isomorfismo[8]. Quindi resta indotta una mappa bilineare

$$\begin{aligned} \omega'\ S^* \wedge S^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \varphi \wedge \psi &\mapsto \omega(\omega^{b-1}(\varphi), \omega^{b-1}(\psi)) \end{aligned}$$

che è ovviamente antisimmetrica e fortemente non degenere. Ponendo

$$\forall k + \varphi, h + \psi \in \mathrm{Sym}^{(1)}(S^*) \qquad \{k + \varphi, h + \psi\} := \omega'(\varphi, \psi)$$

abbiamo delle parentesi di Poisson che si estendono in modo unico, per bilinearità ed identità di Leibniz, a tutta l'algebra $\mathrm{Sym}(S^*)$ e che rendono quindi S uno spazio vettoriale di Poisson. Notiamo che queste parentesi sono *degeneri* nel senso che

$$\{\mathrm{Sym}(S^*), \mathrm{Sym}(S^*)\} \subset \mathrm{Sym}^0(S^*) = \mathbb{K}$$

S risulta quindi uno spazio vettoriale di Poisson non omogeneo.

[8] Se la mappa è solo iniettiva lo spazio è debolmente simplettico e la costruzione che segue si può effettuare solo su un suo sottospazio chiuso (l'immagine isomorfa di S in S^{**}); lo spazio è quindi riflessivo se e solo se una forma debolmente non degenere è fortemente non degenere.

Osserviamo che nell'esempio precedente non è necessario che la forma simplettica sia non degenere: seguendo Souriau definiamo *spazio vettoriale pre-simplettico* uno spazio vettoriale sul quale è fissata una 2-forma, con la struttura di Poisson dell'esempio precedente.

L'altro esempio è, come ci si attende, la struttura di Lie–Poisson:

Esempio 2.6.4 Consideriamo uno spazio vettoriale V il cui duale sia un'algebra di Lie $\mathfrak{g} = V^*$ (ad esempio, se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie il cui spazio vettoriale supporto è riflessivo si può considerare $V = \mathfrak{g}^*$). Evidentemente le parentesi di Lie su V^* sono definite da una mappa bilineare antisimmetrica

$$\begin{aligned} \lambda : V^* \wedge V^* &\longrightarrow V^* \\ \varphi \wedge \psi &\mapsto [\varphi, \psi] \end{aligned}$$

Questa mappa, al solito modo, si estende in modo unico a $\mathrm{Sym}(V^*)$ per bilinearità, antisimmetricità ed identità di Leibniz, in modo da rendere V uno spazio di Poisson graduato omogeneo. Cioè le parentesi di Poisson su $\mathfrak{g}^*$ sono le uniche che coincidono, in grado uno, con quelle di Lie

$$\forall \varphi, \psi \in V^* \qquad \{\varphi, \psi\} := [\varphi, \psi]$$

Osserviamo che l'identità di Jacobi per le parentesi di Lie si può riformulare dicendo che l'algebra $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g})$ è un $\mathfrak{g}$-modulo se si pone

$$\forall p \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{g})\ \forall \varphi \in \mathfrak{g} \qquad p \cdot \varphi = \{p, \varphi\}$$

Se $char(\mathbb{K}) = 0$ una delle formulazioni del Teorema di Poincaré–Birkhoff–Witt è che il morfismo di $\mathbb{K}$-moduli

$$\begin{aligned} \eta : \mathrm{Sym}(\mathfrak{g}) &\longrightarrow U(\mathfrak{g}) \\ \varphi_1 ... \varphi_n &\mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \varphi\sigma(1) ... \varphi_{\sigma(n)} \end{aligned}$$

è $\mathfrak{g}$-equivariante (rispetto alla struttura di $\mathfrak{g}$-modulo su $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g})$):

$$\eta(\{p, \varphi\}) = [\eta(p), \varphi]$$

Otteniamo così, di nuovo, le parentesi di Lie–Poisson.

Qui chiamerò uno spazio vettoriale V dotato delle parentesi di Lie–Poisson, *spazio vettoriale di Lie–Poisson.*

Osserviamo che fra gli spazi vettoriali di Lie–Poisson rientra quello banale: cioè la struttura di Lie–Poisson associata ad un'algebra di Lie V^* abeliana, nella quale le parentesi di Poisson su $\mathrm{Sym}(V^*)$ (che diviene essa stessa algebra inviluppante universale di V^*) sono identicamente nulle.

Naturalmente le parentesi di Lie–Poisson esauriscono gli esempi di spazi vettoriali di Poisson graduati omogenei.

Esempi di parentesi omogenee quadratiche o cubiche sono importanti in certe applicazioni fisiche ed emergono nel contesto delle equazioni di Yang–Baxter (cfr. [49]).

2.6.2 Il tensore di Poisson.

Torniamo agli spazi vettoriali di Poisson in generale, e cerchiamo di caratterizzare la struttura di Poisson in termini di V piuttosto che di $\mathrm{Sym}(V^*)$. Intanto ricordiamo che le parentesi di Poisson si scrivono in termini di un tensore $\pi : V^* \wedge V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}(V^*)$ come

$$\{\varphi, \psi\} = \pi(\varphi, \psi)$$

(per $\varphi, \psi \in V^*$) con

$$\pi = \sum_{k=0}^{d} \pi_k$$

(ove $\pi_k : V^* \wedge V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}^k(V^*)$). È naturale chiedersi quando un tensore $\pi : V^* \wedge V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}(V^*)$ che si decomponga in questo modo dia luogo a delle parentesi di Poisson su V, ed ovviamente l'unica condizione che deve verificare a questo scopo è una caratterizzazione dell'identità di Jacobi per $\{.\}$ in termini di π.

Introduciamo una notazione: intanto richiamiamo che l'algebra simmetrica su uno spazio vettoriale possiede in modo naturale un modulo di differenziali, cioè i differenziali di Kähler Ω^1 che, in virtù della sua proprietà universale (di rappresentare il funtore $Der(--)$) si può identificare nel nostro caso allo spazio $V^* \otimes \mathrm{Sym}(V^*)$. La mappa di differenziazione è

$$\begin{gathered} d : \mathrm{Sym}(V^*) \longrightarrow \Omega^1 \cong V^* \otimes \mathrm{Sym}(V^*) \\ \varphi_1 ... \varphi_n \mapsto \sum_k \varphi_k \otimes \varphi_1 ... \widehat{\varphi_k} ... \varphi_n \end{gathered}$$

Usiamo ora questa notazione per denotare l'estensione di $\pi : V^* \wedge V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}(V^*)$ all'algebra simmetrica:

$$\pi(d(\varphi_1 ... \varphi_n), \psi) := \sum_k \varphi_1 ... \widehat{\varphi_k} ... \varphi_n \pi(\varphi_k, \psi)$$

Osserviamo esplicitamente che se $\varphi \in V^*$ allora $d\varphi = \varphi \otimes 1$ che identifichiamo con φ stesso. Ne segue che possiamo considerare l'estensione di π definita su Ω^1: in altre parole avremo

$$\{p, q\} = \pi(dp, dq)$$

Ora torniamo all'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson su $\mathrm{Sym}(V^*)$. Nella notazione fissata si ha che

$$\{\{\varphi, \psi\}, \chi\} = \pi(d\pi(\varphi, \psi), \chi)$$

L'espressione $[\pi, \pi]_s(\varphi, \psi, \chi) = 2\pi(d\pi(\varphi, \psi), \chi) + c.p.(\varphi, \psi, \chi)$ è esattamente la parentesi di Schouten di π con se stesso che, come noto, caratterizza i tensori di Poisson sulle varietà, e quindi anche nel nostro contesto, ove però non sembra una caratterizzazione molto significativa.

Quello che possiamo osservare in generale su uno spazio di Poisson qualsiasi è questo

Proposizione 2.6.5 *Le componenti omogenee π_k della mappa π sono 2-cocicli per la rappresentazione banale dell'algebra di Lie* $(\mathrm{Sym}(V^*), \{.\})$.

DIMOSTRAZIONE: Si tratta di una ovvia osservazione: ricordiamo che il complesso standard delle cocatene per un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ a coefficienti in un suo modulo M è definito come

$$C^k(\mathfrak{g}, M) = \{f : \wedge^k \mathfrak{g} \longrightarrow M|\ f \text{ è multilineare}\}$$

mentre l'operatore di cobordo è, per $c \in C^k(\mathfrak{g}, M)$ e $X_0, ..., X_k \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}\delta c(X_0, ..., X_k) = & \sum_{i=0}^{k} (-1)^i X_i \cdot c(X_0, ..., \widehat{X_i}, ..., X_k) + \\ & + \sum_{i<j}^{0...k} (-1)^{i+j+1} c([X_i, X_j], X_0, ..., \widehat{X_i}, ..., \widehat{X_j}, ..., X_k)\end{aligned}$$

Allora abbiamo

$$\sum_k \delta\pi_k(\varphi, \psi, \chi) = \pi(d\{\varphi, \psi\}, \chi) + c.p.(\varphi, \psi, \chi) = \{\{\varphi, \psi\}, \chi\} = 0$$

che, grado per grado, ci dà la condizione di cociclo.

QED

Naturalmente questa condizione è ben lungi dall'essere una caratterizzazione della struttura di Poisson su V. Per rendersene conto basta scrivere grado per grado l'identità di Jacobi in termini delle π_k: per brevità poniamo

$$A_{ij} := \pi_i(d\pi_j(\varphi,\psi),\chi)$$

Allora

$$\{\{\varphi,\psi\},\chi\} =$$

Pertanto le parentesi indotte da π sono di Poisson se e solo se

$$\sum_{i+j=n\, j>0} A_{ij} = 0 \qquad\qquad n = 1,2,...,d$$

Un caso particolare è quello in cui gli elementi A_{ij} con $j \neq 1$ sono tutti nulli. Questo significa che le uniche relazioni da imporre saranno

$$\pi_n(d\pi_1(\varphi,\psi),\chi) + c.p.(\psi,\varphi,\chi) = 0 \qquad\qquad n = 1,2,...,d$$

Queste relazioni significano esattamente che il tensore $\pi_1 : V^* \wedge V^* \longrightarrow V^*$ definisce su V^* una struttura di algebra di Lie (equazione precedente per $n = 1$), mentre le altre relazioni significano esattamente che π_n sono 2-cocicli per la rappresentazione banale dell'algebra di Lie V^* definita da π_1. Quindi queste strutture di Poisson su V sono parametrizzate dalle possibili estensioni delle strutture di algebre di Lie su V^*.

Come esempio di questa situazione, consideriamo le parentesi graduate, cioè le parentesi indotte dalla mappa $\pi = \pi_0 + \pi_1$. In questo caso l'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson si riduce a due sole identità in V^*:

$$\begin{aligned} 0 &= \{\{\varphi,\psi\},\chi\} + c.p.(\varphi,\psi,\chi) \\ &= \{\pi_1(\varphi,\psi) + \pi_0(\varphi,\psi),\chi\} + c.p.(\varphi,\psi,\chi) \\ &= \{\pi_1(\varphi,\psi),\chi\} + c.p.(\varphi,\psi,\chi) \\ &= \pi_1(\pi_1(\varphi,\psi),\chi) + \pi_0(\pi_1(\varphi,\psi),\chi) + c.p.(\varphi,\psi,\chi) \end{aligned}$$

cioè, ponendo $[\varphi,\psi] := \pi_1(\varphi,\psi)$:

$$[[\varphi,\psi],\chi] + c.p.(\varphi,\psi,\chi) = 0$$

e

$$\pi_0([\varphi,\psi],\chi) + c.p.(\varphi,\psi,\chi) = 0$$

La prima equazione ci dice che π_1 induce su V una struttura di algebra di Lie, la seconda che π_0 è un 2-cociclo per la coomologia di quest'algebra. Come noto, il gruppo di coomologia $H^2(\mathfrak{g})$ di un'algebra di Lie parametrizza le classi di equivalenza di estensioni

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow \mathfrak{g} \oplus \mathbb{K} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

e quindi l'algebra di Lie $\mathrm{Sym}^{(1)}(V^*)$ rispetto alle parentesi di Poisson è estensione centrale dell'algebra di Lie V^* rispetto alle parentesi di Lie $[.]$ indotte da π_1 per mezzo del cociclo π_0. Queste parentesi di Poisson sono note in letteratura e chiamate *parentesi di Lie–Poisson affini*: nel nostro linguaggio, costituiscono il caso più generale di parentesi di Poisson graduate su uno spazio vettoriale; notiamo che il caso $\pi_1 = 0$ è quello degli spazi simplettici, ove π_0 è la versione controvariante della forma simplettica (quella che nell'esempio 2.6.3 è denotata ω'), mentre nel caso di uno spazio di Lie–Poisson $\pi_0 = 0$ e π_1 è il tensore $\pi_1(\varphi, \psi) = [\varphi, \psi]$.

Osserviamo che l'esempio precedente si può formulare in modo generale nei termini seguenti: se V è uno spazio di Poisson rispetto alle mappe π e π' allora la mappa $\pi + \pi'$ pure induce una struttura di Poisson su V se e solo se

$$\pi'(d\pi(\varphi, \psi), \chi) + c.p.(\varphi, \psi, \chi) = 0$$

Infatti come abbiamo visto l'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson indotte da π equivale all'annullarsi delle parentesi di Schouten $[\pi, \pi]_s$, e quindi $\pi + \pi'$ induce una struttura di Poisson se e solo se

$$0 = [\pi + \pi', \pi + \pi']_s = [\pi, \pi']_s + [\pi', \pi]_s = 2[\pi', \pi]_s$$

dato che, come è ovvio constatare, $[\pi, \pi']_s = [\pi', \pi]_s$ (in generale le parentesi di Schouten sono definite sull'algebra completa dei tensori antisimmetrici, e la rendono un'algebra di lie graduata, così nel caso di tensori di rango due sono simmetriche). Questa condizione è esattamente quella precedente e, se è verificata, diciamo che le strutture di Poisson π e π' sono *compatibili*.

Osserviamo inoltre che, se $\rho : \wedge^k V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}\ V^*$ è un tensore allora possiamo definire il tensore $\delta\rho : \wedge^{k+1} V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}\ V^*$ come

$$\begin{aligned}\delta\rho(\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_k) = &\sum_i \pi(d\rho(\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{\varphi}_i \wedge \ldots \wedge \varphi_k), \varphi_i) + \\ &+ \sum_{i<j} \rho(d\pi(\varphi_i, \varphi_j), (\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{\varphi}_i \wedge \ldots \wedge \widehat{\varphi}_j \wedge \ldots \wedge \varphi_k))\end{aligned}$$

In questo modo, l'operatore δ soddisfa alla condizione $\delta\delta = 0$ e quindi induce una coomologia che si dice *coomologia di Poisson* dello spazio V rispetto alla struttura di Poisson π. L'ostruzione a che il tensore $\pi+\pi'$ sia ancora di Poisson è quindi di natura coomologica, ed anzi ogni struttura di Poisson compatibile con π dà luogo ad una classe di coomologia (di grado due) di Poisson.

Dall'analisi precedente possiamo concludere che una famiglia di strutture di Poisson $\{\pi_k\}$ su uno stesso spazio vettoriale V tale che, per ogni h e per ogni k: $[\pi_h, \pi_k] = 0$ dà luogo ad una nuova struttura di Poisson $\sum_k \pi_k$ su V che chiamerò *sovrapposizione* delle $[\pi_k\}$. L'esempio più semplice è proprio quello delle parentesi di grado uno, i.e. affini, che abbiamo considerato più sopra.

Notazione 2.6.6 *Converremo d'ora innanzi di identificare gli spazi vettoriali di Poisson con le coppie* (V, π) *ove* $\pi : V^* \wedge V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}\ V^*$ *è la mappa che determina la struttura di Poisson di* V.

La mappa di Poisson π è determinata dalle sue componenti omogenee $\pi_0, ..., \pi_d$: cerchiamo allora di vedere come la struttura di Poisson si comporta grado per grado. Raffiniamo la nostra notazione differenziale, introducendo le mappe

$$\begin{aligned} d^k : \mathrm{Sym}\ V^* &\longrightarrow \bigwedge^k V^* \otimes \mathrm{Sym}\ V^* \\ \varphi_1 ... \varphi_n &\mapsto \sum_{i_1 ... i_k} \varphi_{i_1} \wedge ... \wedge \varphi_{i_k} \otimes \varphi_1 ... \widehat{\varphi}_{i_1} ... \widehat{\varphi}_{i_k} ... \varphi_n \end{aligned}$$

(notiamo che $d^1 = d$ secondo la notazione precedente, e che se $n < k$ allora $d^k(\varphi_1 ... \varphi_n) = 0$).

Proposizione 2.6.7 *Se* (V, π) *è uno spazio di Poisson allora il duale* V^* *è un'algebra di Lie rispetto alle parentesi*

$$[\varphi, \psi] = d^1\pi(\varphi, \psi)$$

DIMOSTRAZIONE: Infatti $[[\varphi, \psi], \chi] = d^1\pi(d^1\pi(\varphi, \psi), \chi) = d^1\{\{\varphi, \psi\}, \chi\}$ e quindi l'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson implica quella per le parentesi $[.]$.

QED

Ovviamente la mappa d^1 risulta un morfismo fra le algebre di Lie Sym V^* e V^*:

$$d^1\{p, q\} = [d^1p, d^1q]$$

e la struttura di Lie $[.]$ è abeliana se e solo se le parentesi di Poisson sono degeneri (i.e. l'immagine di π è contenuta in $\mathbb{K}$).

2.6.3 Sottospazi caratteristici

Torniamo ora agli spazi vettoriali di Poisson generali, sui quali faremo l'ipotesi che siano spazi vettoriali topologici riflessivi (ad esempio di dimensione finita).

Definizione 2.6.8 *Se V è uno spazio di Poisson le cui parentesi siano indotte dalla mappa π, e se $v \in V$ allora la* mappa di Poisson *in v è*

$$\begin{aligned} \pi_v : V^* \wedge V^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \varphi \wedge \psi &\mapsto \pi(\varphi, \psi)(v) \end{aligned}$$

*mentre l'*operatore di Poisson *in v è la mappa indotta*

$$\begin{aligned} \pi_v^\# : V^* &\longrightarrow V^{**} \cong V \\ \varphi &\mapsto (\psi \mapsto \pi(\varphi, \psi)(v)) \end{aligned}$$

Definizione 2.6.9 *Il* sottospazio caratteristico *di V in $v \in V$ è lo spazio vettoriale $Im\ \pi_v^\#$.*

Si rammenti che il rango di V in v è la dimensione $\text{rango}_V v$ del sottospazio caratteristico in v (scriveremo semplicemente $\text{rango}\, v$).

Definizione 2.6.10 *Se per ogni $v \in V$* $\text{rango}(v) < \infty$ *allora lo spazio si dice* localmente di rango finito*, e se esiste un intero r tale che per ogni $v \in V$ $rk(v) \leq r$ lo spazio si dice* di rango finito *ed il suo rango è il minimo degli r che soddisfano la relazione precedente per ogni $v \in V$.*

Ovviamente in dimensione finita queste nozioni coincidono.

Sappiamo che il rango è una funzione semicontinua inferiormente (non può cioè decrescere in un intorno di $v \in V$), come pure sappiamo che non è detto che sia costante in un intorno aperto di v, e se lo è il punto si dice regolare. Se lo spazio è di rango finito allora abbiamo visto che l'insieme dei punti regolari è denso. In particolare, nel caso di spazi di rango finito, la struttura di Poisson è determinata sui punti regolari.

Rammentiamo inoltre che uno spazio è regolare se ogni suo punto lo è: ad esempio lo spazio di Lie–Poisson $V = \mathfrak{g}^*$ associato all'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ non lo è mai: il punto $0 \in \mathfrak{g}^*$ ha infatti addirittura rango nullo, dato che se $\varphi, \psi \in V$ allora $\pi(\varphi, \psi)(0) = [\varphi, \psi](0) = 0$ (un funzionale lineare è sempre nullo in 0).

Più in generale, l'origine di un qualsiasi spazio di Poisson omogeneo di grado ≥ 1 ha rango nullo. Un punto di rango nullo lo chiamiamo *singolare*.

Il seguente teorema determina la struttura di ogni spazio vettoriale di Poisson, ed è una versione lineare del teorema di Weinstein sulla struttura locale delle varietà di Poisson (cfr. [104]).

Teorema 2.6.11 *Se V è uno spazio vettoriale di Poisson allora per ogni $v \in V$ esistono due sottospazi vettoriali S_v e N_v di V tali che:*

(1) $V = S_v \oplus N_v$.

(2) *Lo spazio S_v è simplettico rispetto alle parentesi di Poisson indotte da V, mentre lo spazio N_v ha rango nullo in v (e quindi le parentesi di Poisson indotte da V su N_v sono identicamente nulle in v).*

(3) *I sottospazi S_v e N_v sono univocamente determinati dalle* (1)-(2).

DIMOSTRAZIONE: Per $v \in V$, consideriamo il sottospazio vettoriale di V $S_v := \operatorname{im} \pi_v^\#$: se $V = S_v$ (i.e. se la mappa $\pi_v^\#$ è un isomorfismo) allora l'inversa $\omega_v^b : V \longrightarrow V^*$ di $\pi_v^\#$ corrisponde ad una forma simplettica (fortemente non degenere) $\omega_v : V \wedge V \longrightarrow \mathbb{K}$ che rende V uno spazio simplettico. Per il teorema di Darboux, se $v \neq v'$ si ha comunque $\omega_v \cong \omega_{v'}$ su $S_v = S_{v'}$. Prendendo $N_v = 0$ si ha quindi la tesi, dato che la struttura di Poisson indotta da ω su V coincide con quella associata a π.

Se $S_v := \operatorname{im} \pi_v^\#$ è un sottospazio proprio di V, allora il ragionamento precedente implica che S_v è simplettico rispetto alla struttura di Poisson indotta da π. Infatti $S_v = \operatorname{im} \pi_v^\# = V^*/ \ker \pi_v^\#$ e quindi π_v induce sul quoziente una forma bilineare antisimmetrica

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_v : S_v \wedge S_v &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \overline{\varphi} \wedge \overline{\psi} &\mapsto \pi_v(\varphi, \psi) \end{aligned}$$

Questa forma è ben definita e non degenere in quanto, se esiste $\overline{\varphi}$ tale che per ogni $\overline{\psi}$ si abbia $\tilde{\pi}_v(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = 0$ allora

$$\forall \psi \in V^* \ \forall \chi \in Ker\ \pi_v^\# \quad 0 = \pi_v(\varphi, \psi + \chi) = \pi_v(\varphi, \psi)$$

cioè $\varphi \in Ker\ \pi_v$ e quindi $\overline{\varphi} = 0$.

Allora V/S_v è isomorfo ad un sottospazio N_v di V tale che valga la (1): evidentemente il tensore di Poisson $\pi_v|_{N_v}$ è zero.

QED

Un chiarimento importante che merita il teorema, è che i sottospazi S_v si immergono in V, al variare di $v \in V$ come sottovarietà affini e che solo S_0 è propriamente un sottospazio vettoriale di V: per questo motivo la decomposizione $V \cong S_v \oplus N_v$ è solo a meno di isomorfismi (precisamente della traslazione che porta v in 0).

Dato che intorno ad un punto regolare il rango è costante, una immediata conseguenza del teorema è che

Corollario 2.6.12 *Se il punto v è regolare allora nella decomposizione del teorema precedente lo spazio N_v ha parentesi di Poisson identicamente nulle.*

Anche se è implicito nella dimostrazione del teorema, osserviamo che se V è regolare allora nella decomposizione $V = S \oplus N$, la restrizione di π a S è simplettica mentre, dato che N è il nucleo di $\pi_v^\#$ per ogni $v \in V$ le parentesi di Poisson sono identicamente nulle su V, e quindi l'immagine di π è $\mathbb{K}$, cioè $\pi : V^* \wedge V^* \longrightarrow \mathbb{K}$ determina (ed è determinato da) una forma presimplettica $\omega : V \wedge V \longrightarrow \mathbb{K}$. In altri termini, se la mappa $\pi : V^* \wedge V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}\ V^*$ è non degenere, nel senso che se per ogni $\psi \in V^*$ si ha $\pi(\varphi, \psi) = 0$ allora $\varphi = 0$, l'immagine di π è tutta contenuta in $\mathrm{Sym}^0(V^*) = \mathbb{K}$. Infatti $\pi(\varphi, \psi)$ è una funzione polinomiale, e quindi invertibile se e solo se priva di termini di grado positivo. Così

Corollario 2.6.13 *Uno spazio di Poisson regolare è presimplettico.*

Dalla dimostrazione del teorema segue pure il

Corollario 2.6.14 *Se esiste un punto $v \in V$ nel quale il rango è massimo (i.e. $\mathrm{rango}(v) = \dim V$) allora la struttura di Poisson su V è simplettica. Se lo spazio V ha dimensione finita, allora il teorema 5 implica che esistono delle coordinate (dipendenti da v) $(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n, z_1, ..., z_r)$ in V^* tali che*

$$\begin{gathered}\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = \{z_i, \varphi\} = 0 \\ \{p_i, q_j\} = \delta_{ij} \\ \{z_i, z_j\}(v) = 0\end{gathered}$$

(per ogni $\varphi \in V^*$).

Nel caso degli spazi regolari, le funzioni $\{z_i\}$ generano il centro dell'algebra di Lie $(\mathrm{Sym}\ V^*, \{.\})$, e nella base fissata la matrice associata a π si scrive

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In generale, fissata una qualsiasi base $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ di V, le entrate $((\pi_{ij}))$ della matrice $d\pi$ sono $\pi_{ij} = \{\varphi_i, \varphi_j\}$.

2.6.4 Il Gruppo di Poisson

Un fatto fondamentale che non abbiamo menzionato è che gli spazi vettoriali di Poisson formano una categoria: naturalmente dobbiamo specificarne i morfismi, e giè sappiamo quali sono: le mappe di Poisson, cioè le applicazioni

$A : V \longrightarrow W$ che inducono un morfismo di algebre associative e algebre di Lie fra Sym W^* e Sym V^*.

Questo significa che la mappa

$$\begin{aligned} A^* : \text{Sym } W^* &\longrightarrow \text{Sym } V^* \\ p &\mapsto p \circ A \end{aligned}$$

deve soddisfare alle

$$\{A^*p, A^*q\}_V = A^*\{p, q\}_W \qquad \text{e} \qquad A^*(p \cdot q) = (A^*p)(A^*q)$$

Quindi, per l'identità di Leibniz, A^* è determinata su W^*, nel senso che i morfismi fra due spazi di Poisson (V, π) e (W, ρ) sono esattamente le mappe $A : V \longrightarrow W$ tali che

$$\forall \varphi, \psi \in W^* \quad \{\varphi \circ A, \psi \circ A\}_V = \{\varphi, \psi\}_W \circ A$$

ovvero,

$$\rho^{\#}_{Av} = A^* \pi^{\#}_v A^*$$

dato che, per ogni $v \in V$ e $\varphi, \psi \in W^*$:

$$\begin{aligned} (\rho^{\#}_{Av}\varphi)(\psi) &= \rho(\varphi, \psi)(Av) = \pi(A^*\varphi, A^*\psi)(v) \\ &= (\pi^{\#}_v A^*\varphi)(A^*\psi) = A^*(\pi^{\#}_v A^*\varphi)(\psi) \end{aligned}$$

Introduciamo le altre nozioni fondamentali nella categoria degli spazi di Poisson.

Definizione 2.6.15 *Un sottospazio vettoriale W di uno spazio di Poisson (V, π) si dice* sottospazio di Poisson *se è uno spazio di Poisson, diciamo rispetto ad una mappa ρ, e se l'immersione $W \hookrightarrow V$ è una mappa di Poisson.*

In modo equivalente, W è un sottospazio di Poisson di V se la suriezione Sym $V^* \longrightarrow$ Sym W^* è un morfismo di algebre di Lie oppure, ancora, se il sottospazio $Ann_V(W)$ di V^* è un ideale dell'algebra di Lie $(V^*, [.])$.

I prodotti nella categoria degli spazi di Poisson sono facilmente identificabili grazie alle proprietà funtoriali dell'algebra simmetrica: se V_1 e V_2 sono spazi di Poisson, allora le algebre simmetriche sono algebre di Lie e le parentesi di Lie

$$\{\varphi_1 \otimes \varphi_2, \psi_1 \otimes \psi_2\}_{12} := \{\varphi_1, \psi_1\}_1 \otimes \varphi_2\psi_2 + \varphi_1\psi_1 \otimes \{\varphi_2, \psi_2\}_2$$

sono le uniche a rendere il prodotto tensoriale Sym $V_1^* \otimes$Sym $V_2^* = \text{Sym}(V_1^* \times V_2^*)$ un'algebra di Poisson tale che la restrizione delle parentesi $\{.\}_{12}$ a V_i

coincida con $\{.\}_i$ $(i = 1, 2)$ e tale che le funzioni definite su un singolo fattore commutino con quelle definite sull'altro: se φ dipende solo da V_1 e ψ dipende solo da V_2 allora $\{\varphi, \psi\}_{12} = 0$.

Evidentemente i fattori V_1 e V_2 si immergono in $V_1 \oplus V_2$ come sottospazi di Poisson e, per definizione, le proiezioni da $V_1 \oplus V_2$ su fattori V_1 e V_2 sono pure mappe di Poisson.

Ad esempio possiamo formare il prodotto degli spazi di Poisson che meglio conosciamo: quelli simplettici e quelli di Lie–Poisson. Così $S \otimes \mathfrak{g}^*$ sarà uno spazio di Poisson le cui parentesi sono completamente determinate da quelle simplettiche di S e da quelle lineari omogenee di $\mathfrak{g}^*$: questo spazio *non è regolare*: infatti non lo è $\mathfrak{g}^*$, dato che, ad esempio, ha un punto singolare nell'origine, e quindi per ogni $s \in S$, il punto $s \oplus 0 \in S \oplus \mathfrak{g}^*$ non è regolare.

Concentriamoci ora sui morfismi di Poisson fra due spazi V e W. Una ulteriore (ed ovvia) caratterizzazione è la seguente: $A : V \longrightarrow W$ è di Poisson se e solo se per ogni campo hamiltoniano X_φ si ha

$$A^* X_{\varphi\circ A} = X_\varphi$$

Questo implica che $S_{Av} = A(S_v)$ e quindi

$$\text{rango}_V(v) \geq \text{rango}_W(Av)$$

In particolare

Corollario 2.6.16 *Un morfismo di Poisson $A : V \longrightarrow W$ fra uno spazio di Poisson V ed uno spazio simplettico W è sempre suriettivo.*

Proposizione 2.6.17

(1) *Se $A : V \longrightarrow W$ è un morfismo di Poisson invertibile, allora anche A^{-1} è di Poisson.*

(2) *Se $A : V \longrightarrow W$ e $B : W \longrightarrow Z$ sono morfismi di Poisson anche $B \circ A$ lo è. Se A è di Poisson ed è suriettivo e se $B \circ A$ è di Poisson, allora B è di Poisson.*

DIMOSTRAZIONE: (1) Per ogni $w \in W$ esiste per ipotesi un $v \in V$ tale che $Av = w$ e quindi, per ogni $w \in W$:

$$\begin{aligned}
\rho(\varphi A^{-1}, \psi A^{-1})(w) &= \rho(\varphi A^{-1}, \psi A^{-1})(Av) \\
&= \pi(\varphi A^{-1} A, \psi A^{-1} A)(v) \\
&= \pi(\varphi, \psi)(A^{-1} v)
\end{aligned}$$

(2) Il primo enunciato è ovvio. Per quel che concerne il secondo, per ogni $w \in W$ esiste un $v \in V$ tale che $w = Av$ (suriettività di A) e quindi

$$\begin{aligned}\pi_W(\varphi B, \psi B)(w) &= \pi_W(\varphi B, \psi B)(Av) = \pi_V(\varphi BA, \psi BA)(v)\\ &= \pi_V(\varphi, \psi)(B(Av)) = \pi(\varphi, \psi)(Bw)\end{aligned}$$

QED

Definizione 2.6.18 *Se (V, π) è uno spazio vettoriale di Poisson allora il* gruppo (lineare) di Poisson $Ps(V)$ *è il gruppo delle applicazioni lineari invertibili (e continue) di Poisson.*

In generale una mappa di Poisson non è necessariamente lineare (né continua): infatti il gruppo degli isomorfismi di Poisson di uno spazio è in generale un "gruppo algebrico" di dimensione infinita. Invece il gruppo lineare di Poisson è evidentemente un sottogruppo chiuso (algebrico) di $GL(V)$.

Se V è uno spazio simplettico, allora $Ps(V) = Sp(V)$, mentre se $V = \mathfrak{g}^*$ è uno spazio di Lie–Poisson $Ps(V) = Aut(\mathfrak{g})$ è il gruppo degli automorfismi dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$.

Teorema 2.6.19 *La categoria degli spazi vettoriali simplettici è una sottocategoria piena della categoria degli spazi di Poisson.*

Dimostrazione: Se $A : V \longrightarrow W$ è un morfismo fra spazi di Poisson allora

$$\pi_V(A^*\varphi, A^*\psi) = A^*\pi(\varphi, \psi)$$

Ma dato che V e W sono simplettici, le loro mappe di Poisson π_V e π_W sono invertibili e danno luogo a due forme simplettiche ω_V e ω_W che in virtù della condizione precedente soddisfano alla

$$\omega_V(Av, Aw) = \omega_W(v, w)$$

Cioè A è simplettico.

QED

Proposizione 2.6.20 *Uno spazio vettoriale simplettico non ha sottospazi di Poisson propri.*

Dimostrazione: Infatti se $\iota : W \hookrightarrow V$ è una mappa di Poisson, per il corollario 3. deve essere suriettiva e quindi è la mappa id_V.

QED

Consideriamo ora i sottospazi di uno spazio di Lie–Poisson $V = \mathfrak{g}^*$: devono essere sottospazi di V la cui iniezione canonica $\iota : W \hookrightarrow V$ sia una mappa di Poisson, i.e.

$$\forall w \in W \quad \pi_W(\varphi\iota, \psi\iota)(w) = [d\varphi, d\psi](w)$$

quindi W è un sottospazio di Poisson se e solo se $Ann_V(W)$ è un ideale dell'algebra di Lie $\mathfrak{g} = V^*$. In questo caso la struttura di Lie–Poisson che l'algebra di Lie $\mathfrak{g}/Ann_V(W)$ induce sul suo duale (che è isomorfo a W) è esattamente la struttura di Poisson di W, cioè un sottospazio di Poisson di uno spazio di Lie–Poisson V è sempre della forma $(\mathfrak{g}/\mathfrak{i})^*$ ove $\mathfrak{i}$ è un ideale dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$.

Ad esempio, se l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è semisemplice, lo spazio di Lie–Poisson associato non ha sottospazi di Poisson[9].

2.6.5 Struttura del Gruppo di Poisson

Vogliamo ora affrontare l'analisi della struttura del gruppo di Poisson $Ps(V)$ di uno spazio (V, π). Per prima cosa considereremo il caso di uno spazio regolare: cioè V sarà uno spazio di Poisson che si decompone come $V = S \oplus N$. Naturalmente, *a priori*, i sottospazi S e N non sono di Poisson, ma nel caso regolare questo è vero: infatti N lo è banalmente, dato che la sua struttura di Poisson è zero, (sappiamo che uno spazio regolare è presimplettico) e quindi se $\iota : N \hookrightarrow V$ è la sua immersione in V allora

$$\{\varphi\iota, \psi\iota\}_N = 0 = \{\varphi, \psi\}_V \iota$$

dato che le parentesi di Poisson di V sono nulle su N. Che S sia un sottospazio di Poisson di V segue dal fatto che la mappa $\iota : S \hookrightarrow V$ è simplettica e quindi

$$\{\varphi\iota, \psi\iota\}_S = \omega(\iota^* X_\varphi, \iota^* X_\psi) = \omega(X_\varphi, X_\psi) = \{\varphi, \psi\}_V \iota$$

così la decomposizione $V = S \oplus N$ è una somma diretta di spazi di Poisson (ovviamente pensiamo a S come a S_0, dato che per $v \neq 0$ S_v è solo un sottospazio affine di V, il cui spazio vettoriale è isomorfo a S_0 tramite la traslazione di v in 0).

Dato che V è regolare, il tensore π ha solo elementi di grado zero e quindi è completamente determinato da una forma bilineare antisimmetrica

$$\omega : V \wedge V \longrightarrow \mathbb{K}$$

[9] È questo il caso di $\mathfrak{so}(3)$, la cui struttura di Poisson è implicita nei lavori di Euler sulla meccanica dei corpi rigidi.

Il gruppo di Poisson è quindi in questo caso il gruppo degli elementi $A \in GL(V)$ tali che
$$\omega(Av, Aw) = \omega(v, w)$$
(pensando ω e A come matrici: $A^T\omega A = \omega$, ovvero, $A^*\omega^b A = \omega^b$).

Osserviamo ora che il sottospazio N è stabile per l'azione del gruppo di Poisson:
$$Ps(V) \cdot N \subset N$$
infatti, se $n \in N$ si ha che per ogni $v \in V$ $\omega(An, v) = \omega(n, A^{-1}v) = 0$ i.e. $An \in N$. Quindi se $A \in PS(v)$ restano definite due applicazioni lineari $A|_N \in GL(N)$ e
$$\begin{aligned} \tilde{A} : V/N &\longrightarrow V/N \\ v + N &\mapsto Av + N \end{aligned}$$
che ovviamente è un simplettomorfismo di $V/N \cong S$.

Non è però in generale vero che $Ps(V)$ stabilizzi S: ad esempio, se $N = \mathbb{K}$ (con la coordinata z) e $S = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}$ munito delle coordinate simplettiche (p, q) allora la trasformazione
$$\begin{aligned} A : S \oplus N &\longrightarrow S \oplus N \\ (p + q, z) &\mapsto (p - q, p + q + z) \end{aligned}$$
è in $Ps(V)$ dato che $A^T\omega A = \omega$ (infatti $A^T\omega A(p+q, z) = A^T\omega p-q, p+q+z) = A^T(-q-p, 0) = (q-p, 0) = \omega(p+q, z))$ mentre $A(p+q, 0) = (p-q, p+q) \notin S$).

Ovviamente sia $GL(N)$ che $Sp(S)$ sono sottogruppi di $Ps(V)$: se $A \in Ps(V)$, scriviamo $Av = A_sv + A_nv$ secondo la decomposizione di $V = S \oplus N$.

Se $A \in Ps(V)$ allora per ogni elemento $v = s + n \in V$:
$$A(s + n) = As + An = A_ss \oplus (A_ns + A_nn)$$
e si ha
$$\begin{aligned} \omega^b(s + n) &= A^*\omega^b A(s + n) \\ &= A^*(\omega^b(A_ss) + \omega^b(A_ns) + \omega^b(A_nn) \\ &= A^*\omega^b A_s(s) * A^*\omega^b A_n(s) \end{aligned}$$
quindi
$$\omega^b(s) = A^*\omega^b A_s(s) \qquad \text{e} \qquad \omega^b A_n(s) = 0$$
Dunque $A \in Ps(V)$ se e solo se $A_s|_S \in Sp(S)$, $A_n|_S = 0$ e $A|_N \in GL(N)$. Nel séguito scriveremo $A = A_s + A_n + A_m$ ove $A_s \in Sp(S)$, $A_n \in GL(N)$ e

$A_m : S \longrightarrow N$. Osserviamo che non esiste alcuna imposizione su A_m, che è quindi una qualsiasi applicazione lineare fra S e N.

Questa decomposizione per un elemento di $Ps(V)$ è evidentemente unica, i.e.

$$Ps(V) = Sp(S) \cdot GL(N) \cdot Hom(S,N)$$

È pure ovvio che questo prodotto non è diretto.

Ad esempio, se $\dim V < \infty$, possiamo fissare una base $(p_1, ..., p_r, q_1, ..., q_r, z_1, ..., z_k)$ standard nella quale

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora un elemento di $Ps(r,k) = Ps(V)$ è una matrice invertibile A tale che $\omega = A^T \omega A$ i.e.

$$A = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{X}} & 0 \\ & & 0 \\ y & z & c \end{pmatrix}$$

ove $X \in Sp(S)$, $c \in GL(N)$ e y e z sono matrici $k \times r$. Infatti, se

$$A = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{X}} & a \\ & & b \\ y & z & c \end{pmatrix}$$

deve aversi $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n' \end{pmatrix}$ e quindi $a = b = 0$. Inoltre la relazione $A^T \omega A = \omega$ si scrive:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X^T & y^T \\ & z^T \\ 0\ 0 & c^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & 0 \\ & 0 \\ 0\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & 0 \\ & 0 \\ y\ z & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X^T J & 0 \\ & 0 \\ 0\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & 0 \\ & 0 \\ y\ z & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X^T J X & 0 \\ & 0 \\ 0\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ove $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$) i.e. $X \in Sp(S)$. Che, infine debba essere $c \in GL(N)$ segue ovviamente dal fatto che A è invertibile e $\det(A) = \det(X)\det(c) = \det(c)$.

Dalla decomposizione precedente è chiaro che c'è solo una immersione (che sia un omomorfismo di gruppi) del gruppo additivo $Hom(S,N)$ in $Ps(V)$:

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ & 0 \\ a & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & 0 \\ & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^2 & 0 \\ & 0 \\ aX+cb & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ & 0 \\ a+b & c \end{pmatrix}$$

se e solo se $X^2 = X$ e $c^2 = c$ e per ogni a, b $aX + c = a + b$, i.e. se e solo se $X = I$ e $c = I$.

Scriviamo ora la formula del prodotto di due morfismi di Poisson in termini della decomposizione $A = A_s + A_n + A_m$:

$$\begin{aligned}(A_s + A_n + A_m)(B_s + B_n + B_m) &= (A_sB_s) + (A_n + A_m)(B_s + B_n + B_m) \\ &= A_sB_s + (A_n(B_n + B_m) + A_mB_s) \\ &= A_sB_s + A_nB_n + (A_nB_m + A_mB_n)\end{aligned}$$

Ora, dato che c'è solo un'immagine omomorfa di $Hom(S,N)$ in $Ps(V)$, deve essere

$$Hom(S,N) \lhd Ps(V)$$

e quindi

$$Ps(V)/Hom(S,N) \cong Sp(S) \times GL(N)$$

Questo però non significa che $Ps(V)$ è prodotto semidiretto di $Sp(S) \times GL(N)$ con $Hom(S,N)$: certamente ne è una estensione centrale, e corrisponde ad un tipo più generale di prodotto fra gruppi, che possiamo assiomatizzare come segue:

Definizione 2.6.21 *Se G, H e K sono gruppi, con K abeliano, e se ci sono i morfismi*

$$\alpha\, G \longrightarrow Aut(K) \qquad\qquad \beta\, H \longrightarrow Aut(K)^{op}$$

(i.e. $\alpha(gg') = \alpha(g)\alpha(g')$ e $\beta(hh') = \beta(h')\beta(h)$) allora sull'insieme $G \times H \times K$ l'operazione

$$(g,h,k)(g',h',k') := (gg', hh', \alpha(g')k + \beta(h)k')$$

indice una struttura di gruppo che denotiamo $G \overset{K}{\longrightarrow}\!\bowtie H$.

Si può dimostrare che $K \lhd G \overset{K}{\longrightarrow}\!\bowtie H$ e che se $H = \{e\}$ allora questa nozione coincide con quella di prodotto semidiretto $G \ltimes K$.

Osserviamo che, se $2r = dim\ S$ e $k = dim\ N$ allora $dim\ Ps(V) = dim\ Sp(S) + dim\ GL(N) + dim\ Hom(S,N) = r(2r+2) + k(k+r)$.

Determiniamo ora l'algebra di Lie del gruppo algebrico $Ps(V)$: sia $\{A_t\}_{t\in\mathbb{K}}$ una famiglia ad un parametro di elementi di $Ps(V)$ (tale che cioè $A_o = Id_V$). La mappa

$$P_A := \left(\frac{dA_t}{dt}\right)_{t=0}$$

si dice *trasformazione di Poisson infinitesima* di A_t. Dato che $\omega(A_t v, A_t w) = \omega(v, w)$, derivando si ha la proprietà caratteristica di queste trasformazioni:

$$\omega(Pv, w) + \omega(v, Pw) = 0$$

Lo spazio vettoriale

$$\mathfrak{ps}(V) := \{P \in End(V) | \forall v, w \in V \quad \omega(Pv, w) + \omega(v, Pw) = 0\}$$

è un'algebra di Lie rispetto al commutatore $[P, Q] = PQ - QP$: infatti, se $P, Q \in \mathfrak{ps}(V)$,

$$\begin{aligned}\omega([P, Q]v, w) &= \omega(PQv, w) - \omega(QPv, w)\\ &= \omega(Pw, Qv) - \omega(Qw, Pv)\\ &= \omega(v, QPw) - \omega(QPw, v)\\ &= \omega([P, q]w, v)\end{aligned}$$

L'algebra di Lie $\mathfrak{ps}(V)$ si dice *algebra di Poisson* dello spazio V ed è, per definizione, l'algebra di Lie del gruppo di Poisson di V.

Osserviamo che se $P \in \mathfrak{ps}(V)$ è definita la forma quadratica $Q_P : V \longrightarrow \mathbb{K}$:

$$Q_P(v) := \frac{1}{2}\omega(Pv, v)$$

che si dice *hamiltoniana*. Ovviamente è non degenere se e solo se lo è ω. Dato che Q_P può vedersi come un elemento di $\mathrm{Sym}^2 V^*$, possiamo calcolarne le parentesi di Poisson, ottenendo

$$\{Q_P, Q'_P\}(v) = \pi(dQ_P, dQ'_P)(v) = [P, P'](v) = \omega(Pv, P'v)$$

Vediamo ora come si scrivono nelle coordinate standard le matrici dell'algebra di Poisson di V: naturalmente $P \in \mathfrak{ps}(V)$ se e solo se $P^T\omega + \omega P = 0$, cioè, scrivendo $P = \begin{pmatrix} \begin{matrix} X \end{matrix} & \begin{matrix} c \\ d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a & b \end{matrix} & e \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} X^T J & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ c^T \; d^T & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} JX & J\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\ 0 \; 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi P deve essere della forma $\begin{pmatrix} X & & 0 \\ & & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}$ con $X \in \mathfrak{ps}(S)$.

In termini intrinseci, scriviamo una formula per il commutatore in $\mathfrak{ps}(V)$, utilizzando la decomposizione $P = P_s + P_n + P_m$ (desunta da quella degli elementi di $Ps(V)$), con $P_s \in \mathfrak{sp}(S)$, $P_n \in \mathfrak{gl}(N)$ e $P_m \in \mathfrak{Hom}(S, N)$ (algebra di Lie abeliana). Allora

$$[P_S + P_n + P_m, P'_s + P'_n + P'_m] = [P_s, P'_s] + [P_n, P'_n] + ([P_n, P'_m] + [P_m, P'_n])$$

Quindi P sta nel centro dell'algebra $\mathfrak{ps}(V)$ se e solo se, per ogni P': $[P_s, P'_s] = 0$, $[P_n, P'_n] = 0$ e $[P_n, P'_m] + [P_m, P'_n] = 0$ il che, ovviamente equivale a $P_n \in Z(\mathfrak{gl}(N) = \{\text{matrici diagonali}\} \cong \mathbb{K}$.

Osserviamo inoltre che la sottoalgebra abeliana $\mathfrak{Hom}(S, N)$ è in realtà un ideale (perché il sottogruppo corrispondente è normale) e quindi il radicale di $\mathfrak{ps}(V)$ è $Rad(\mathfrak{ps}(V)) = \mathfrak{Hom}(S, N) \oplus \mathbb{K}$. La decomposizione di Levi di $\mathfrak{ps}(V)$ è quindi

$$\mathfrak{ps}(V) = Rad(\mathfrak{ps}(V)) \rtimes (\mathfrak{sp}(V) \oplus \mathfrak{sl}(N))$$

Da queste considerazioni segue che $\mathfrak{ps}(V)$ non è riduttiva (il suo centro non coincide col radicale), ma è estensione abeliana dell'algebra di Lie semisemplice $\mathfrak{sp}(V) \oplus \mathfrak{sl}(N)$.

Per concludere notiamo che

Proposizione 2.6.22 *Una varietà è una varietà di Poisson regolare se il gruppo strutturale del suo fibrato tangente si riduce al gruppo di Poisson.*

Il ragionamento è il medesimo che si effettua nel mostrare che una riduzione al gruppo ortogonale equivale alla scelta di una metrica riemanniana (cfr. [53, Vol.I, esempio 5.7]).