Capitolo 3

Moduli e rappresentazioni di Poisson

In questo capitolo, seguendo l'approccio astratto alla teoria di Poisson delineato in precedenza, introduciamo alcuni nuovi concetti, assai naturali dal punto di vista algebrico, principalmente per mezzo di esempi che poi avranno interesse geometrico: l'idea è di gettare le basi di una "teoria delle rappresentazioni per le algebre di Poisson, a diversi livelli di generalità; questo si traduce, ovviamente, in una teoria dei moduli che qui per la prima volta viene presentata[1]. Dopo aver introdotto le categorie di moduli che ci interessano proviamo a definire alcuni invarianti "topologici (in vista delle applicazioni geometriche) considerando le coomologie a coefficienti in questi moduli.

3.1 Esempi di moduli di Poisson

Il calcolo differenziale che abbiamo delineato fin qui poggia interamente sul prodotto associativo dell'algebra A: nel caso di algebre di Poisson naturalmente possiamo arricchire la teoria facendo intervenire la struttura di algebra di Lie. Il primo passo è combinare i concetti di modulo su un'algebra associativa e modulo su un'algebra di Lie, cioè considerare moduli E sull'algebra associativa $(A,\cdot)$ che siano anche rappresentazioni della $\mathbb{K}$-algebra di Lie $(A,\{\,\})$: l'esempio più elementare è il modulo A stesso rispetto alle azioni aggiunte (associativa e di Lie). Naturalmente queste due strutture, su A, sono legate dall'identità di Leibniz; in generale possiamo definire un tale legame per un qualsiasi modulo come segue:

Definizione 3.1.1 *Un* modulo di Poisson *è una coppia* (E,λ) *ove* E *è un* A*-modulo e* $\lambda : A \times E \longrightarrow E$ *una mappa* $\mathbb{K}$*-lineare tale che*

$$\lambda(\{a,b\},e) = \lambda(a,\lambda(b,e)) - \lambda(b,\lambda(a,e))$$

$$\{a,b\}\cdot e = a\cdot\lambda(b,e) - \lambda(b,a\cdot e)$$

per $a,b \in A$ *ed* $e \in E$*. La* λ *si dice anche* struttura di Poisson *sul modulo* E*.*

Notiamo che le strutture di modulo associativa e di Lie non commutano se non sul centro $\operatorname{Cas} A$ dell'algebra di Poisson, dato che

$$a\lambda(b,e) = \lambda(a,be) + \{a,b\}e$$

Esempio. A è un modulo di Poisson rispetto alle azioni aggiunte in modo ovvio; anche il $\mathbb{K}$-spazio vettoriale duale A' rispetto alle azioni coaggiunte è un modulo di Poisson: l'identità di Leibniz si dimostra facilmente (abbiamo $\lambda(a,\varphi)(b) = \varphi\{a,b\}$)

$$\begin{aligned}(\{a,b\}\varphi)(c) &= \varphi(\{a,b\}c) = \varphi(\{a,bc\}) - \varphi(\{a,c\}b)\\ &= \lambda(a,\varphi)(bc) - (b\varphi)(\{a,c\})\\ &= \left(b\lambda(a,\varphi) - \lambda(a,b\varphi)\right)(c)\end{aligned}$$

Questi esempi suggeriscono di usare una notazione più espressiva per l'azione λ in un modulo di Poisson, cioè di scrivere $\{a,e\} := \lambda(a,e)$; allora gli assiomi di modulo di Poisson divengono:

$$(M1) \qquad (ab)e = a(be)$$

$$(M2) \qquad \{\{a,b\},e\} = \{a,\{b,e\}\} - \{b,\{a,e\}\}$$

$$(M3) \qquad \{a,b\}e = \{a,be\} - b\{a,e\}$$

Notiamo che esiste una asimmetria nella definizione di modulo di Poisson: infatti abbiamo scelto una identità di Leibniz fra due possibili; avremmo infatti anche potuto richiedere la seguente identità (che noi chiameremo *identità moltiplicativa*):

$$(M4) \qquad \{ab,e\} = a\{b,e\} + b\{a,e\}$$

Nei casi $E = A$, ed $E = A'$ la (M4) è ovviamente verificata: nel caso A' si nota che

$$\begin{aligned}\{ab,\varphi\}(c) &= \varphi(\{ab,c\}) = \varphi(a\{b,c\}) + \varphi(b\{a,c\})\\ &= (a\varphi)\{b,c\} + (b\varphi)\{a,c\}\\ &= \{a,b\varphi\}(c) + \{b,a\varphi\}(c)\end{aligned}$$

Definizione 3.1.2 *Un* modulo moltiplicativo *è una coppia* (E,λ) *ove* E *è un* A*-modulo e* $\lambda : A \times E \longrightarrow E$ *una mappa* $\mathbb{K}$*-lineare tale che*

$$\lambda(\{a,b\},e) = \lambda(a,\lambda(b,e)) - \lambda(b,\lambda(a,e))$$

$$\lambda(ab,e) = a\cdot\lambda(b,e) + b\cdot\lambda(a,e)$$

per $a,b \in A$ *ed* $e \in E$*. La* λ *si dice anche* struttura moltiplicativa *sul modulo* E*.*

Mostriamo con degli esempi che l'identità di Leibniz e quella moltiplicativa sono indipendenti.

Esempio. Consideriamo lo spazio degli operatori lineari $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)$ su A come modulo su A rispetto alla ($a, b \in A$, $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)$):

$$(aT)(b) = a(Tb)$$

Possiamo anche definire

$$\{a, T\}(b) = \{a, Tb\}$$

Che si tratti di una azione di Lie segue dall'identità di Jacobi per la parentesi di Poisson su A:

$$\begin{aligned}\{\{a, b\}, T\}(c) &= \{\{a, b\}, Tc\} = \{a, \{b, Tc\}\} - \{b, \{a, Tc\}\} \\ &= (\{a, \{b, T\}\} - \{b, \{a, T\}\})(c)\end{aligned}$$

Rispetto a queste parentesi $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)$ diviene un modulo moltiplicativo sull'algebra di Poisson A:

$$\{ab, T\}(c) = \{ab, Tc\} = a\{b, T\}(c) + b\{a, T\}(c)$$

ed è anche un modulo di Poisson:

$$\begin{aligned}(\{a, b\}T)(c) &= \{a, b\}T(c) = \{a, bT(c)\} - b\{a, T(c)\} \\ &= (\{a, bT\} - b\{a, T\})(c)\end{aligned}$$

Questa struttura di Poisson moltiplicativa è quella aggiunta di A su $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)$: si noti che la struttura di Lie coaggiunta

$$\{a, T\}'(b) = T\{b, a\}$$

che possiamo, usando la notazione per i campi hamiltoniani, più sinteticamente scrivere

$$\{a, T\}' = -T \circ X_a$$

è una azione di Lie

$$\begin{aligned}\{\{a, b\}, T\}' &= -T \circ X_{\{a,b\}} = -T \circ [X_a, X_b] \\ &= -T \circ X_a \circ X_b + T \circ X_b \circ X_a \\ &= \{b, T \circ X_a\}' - \{a, T \circ X_b\}' \\ &= -\{b, \{a, T\}'\}' + \{a, \{b, T\}'\}'\end{aligned}$$

che tuttavia non definisce né una struttura moltiplicativa né una struttura di Poisson: infatti

$$\{ab, T\}' = -T \circ aX_b - T \circ bX_a$$

(T è semplicemente un operatore $\mathbb{K}$-lineare) e

$$\{a, bT\}' = -bT \circ X_a = b\{a, T\}'$$

Se tuttavia consideriamo questa struttura di Lie e la struttura di modulo associativo coaggiunta:

$$(a \cdot' T)(b) = T(ab)$$

otteniamo un modulo di Poisson moltiplicativo: dato che

$$\begin{aligned}\{ab, T\}' &= -T \circ (aX_b) - T \circ (bX_c)\\ &= -(a \cdot' T) \circ X_b - (b \cdot' T) \circ X_a\\ &= \{b, a \cdot' T\}' + \{a, b \cdot' T\}'\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(\{a, b\} \cdot' T)(c) &= T(\{a, b\}c) = T(\{a, bc\}) - T(\{a, c\}b)\\ &= -b \cdot' \{a, T\}'(c) + \{a, b \cdot' T\}'(c)\end{aligned}$$

Invece considerando la struttura associativa coaggiunta e quella di Lie aggiunta non si ottiene né un modulo moltiplicativo né un modulo di Poisson.

Notiamo che esiste una terza azione di Lie che è naturale considerare su $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)$, e che è semplicemente la differenza fra le precedenti:

$$\{a, T\}'' = \{a, T\} - \{a, T\}' = [X_a, T]$$

In effetti

$$\begin{aligned}\{\{a, b\}, T\}'' &= [X_{\{a,b\}}, T] = [[X_a, X_b], T]\\ &= [X_a, [X_b, T]] - [X_b, [X_a, T]]\\ &= \{a, \{b, T\}''\}'' - \{b, \{a, T\}''\}''\end{aligned}$$

Inoltre

$$\{a, bT\}'' = [X_a, bT] = b[X_a, T] + \{a, b\}T = b\{a, T\}'' + \{a, b\}T$$

dunque la $\{\,\}''$ è una struttura di Poisson su $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)$: tuttavia

$$\begin{aligned}\{ab, T\}'' &= [X_{ab}, T] = [aX_b, T] + [bX_a, T]\\ &= a\{b, T\}'' - T(a)X_b + b\{a, T\}'' - T(b)X_a\end{aligned}$$

e quindi non si tratta di una struttura moltiplicativa.

Dunque un modulo di Poisson non è necessariamente moltiplicativo; in generale il legame fra l'identità di Leibniz e quella moltiplicativa è espresso dal

Lemma 3.1.3 *Se A è un'algebra di Poisson ed E è un A-modulo di Poisson allora*

$$\{a, be\} + \{b, ae\} = a\{b, e\} + b\{a, e\}$$

per $a, b \in A$ ed $e \in E$.

DIMOSTRAZIONE: Basta notare che

$$\{a, be\} + \{b, ae\} = b\{a, e\} + \{a, b\}e + a\{b, e\} + \{b, a\}e = a\{b, e\} + b\{a, e\}$$

QED

Esempio. Consideriamo il modulo $\operatorname{Der} A$ delle derivazioni della struttura associativa di A: si tratta di un sottomodulo di $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(A)$, ma delle tre azioni di Lie che abbiamo definito su $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(A)$ solo la $\{\,\}''$ porta derivazioni in derivazioni (essendo definita da un commutatore con un campo hamiltoniano che è una derivazione di A): scriviamo semplicemente

$$\{a, X\} = [X_a, X]$$

In questo modo $\operatorname{Der} A$ diviene un modulo di Poisson *non moltiplicativo.*

Esempio. Delle tre strutture di Lie che abbiamo considerato su $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(A)$ solo la terza si restringe al sottomodulo $\mathcal{H}_A \subset \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(A)$ generato dall'algebra di Lie dei campi hamiltoniani: infatti

$$[X_a, \sum_i b_i X_{h_i}] = \sum_i (b_i[X_a, X_{h_i}] + \{a, b_i\}X_{h_i}) = \sum_i \left(b_i X_{\{a,h_i\}} + \{a, b_i\}X_{h_i}\right)$$

Quindi abbiamo ancora un modulo di Poisson non moltiplicativo; lo stesso possiamo dire del modulo $\mathcal{C}_A$ generato dalle derivazioni canoniche: in effetti $\mathcal{H}_A$ è un ideale di Lie in questo modulo

$$[X_a, \sum_i b_i X_i] = \sum_i (b_i[X_a, X_i] + \{a, b_i\}X_i) = \sum_i \left(-b_i X_{X_i(a)} + \{a, b_i\}X_i\right)$$

(le X_i sono derivazioni canoniche, cioè $[X_a, X_i] = X_a X_i - X_i X_a = -X_{X_i a}$).

Esempio. Consideriamo due moduli E e F su A, e lo spazio $\hom_{\mathbb{K}}(E,F)$ degli operatori $\mathbb{K}$-lineari da E a F: si tratta di un A-modulo rispetto all'azione aggiunta $aA(e) = a(Ae)$; si noti che esiste anche un'altra struttura naturale di A-modulo su $\hom_{\mathbb{K}}(E,F)$, precisamente quella coaggiunta: $aA(e) = A(ae)$, e che queste due strutture rendono $\hom_{\mathbb{K}}(E,F)$ un bimodulo. Ora consideriamo il sottospazio $\hom_A(E,F)$ dei morfismi di A-moduli: $A \in \hom_A(E,F)$ se e solo se

$$A(ae) = aA(e)$$

($a \in A$ ed $e \in E$). Si tratta cioè del sottospazio sul quale le due azioni coincidono.

Se F è un modulo di Lie possiamo considerare la struttura

$$\{a, A\}_E(e) = \{a, Ae\}$$

che rende $\hom_{\mathbb{K}}(E,F)$ un modulo di Lie; se F è di Poisson (risp. moltiplicativo) rispetto all'azione associativa aggiunta allora anche $\hom_{\mathbb{K}}(E,F)$ diviene di Poisson (risp. moltiplicativo). Se E è un modulo di Lie possiamo considerare l'azione di Lie su $\hom_{\mathbb{K}}(E,F)$ data da

$$\{a, A\}_F(e) = A\{a, e\}$$

Se E è di Poisson (risp. moltiplicativo) rispetto all'azione associativa coaggiunta allora anche $\hom_{\mathbb{K}}(E,F)$ diviene di Poisson (risp. moltiplicativo).

Nel caso del modulo $\hom_A(E,F)$ abbiamo quindi due strutture di Lie, come pure la loro differenza

$$\{a, A\} = \{a, A\}_E - \{a, A\}_F$$

Quest'ultima rende $\hom_A(E,F)$ un modulo di Poisson se F lo è:

$$\begin{aligned}\{a, bA\}(e) &= \{a, bAe\} - bA\{a, e\}\\ &= b\{a, Ae\} - bA\{a, e\} + \{a, b\}Ae\\ &= b\{a, A\}(e) + \{a, b\}A(e)\end{aligned}$$

e un modulo moltiplicativo se lo sono sia E che F

$$\begin{aligned}\{ab, A\}(e) &= \{ab, Ae\} - A\{ab, e\}\\ &= a\{b, Ae\} + b\{a, Ae\} - aA\{b, e\} - bA\{a, e\}\\ &= a\{b, A\}(e) + b\{a, A\}(e)\end{aligned}$$

Esempio. Il modulo dei differenziali di Kähler è pure un modulo di Poisson rispetto all'azione

$$\{a, \omega\} = \mathcal{L}_{X_a}\omega$$

Di nuovo si tratta di semplici calcoli:

$$\begin{aligned}\{\{a,b\},\omega\} &= \mathcal{L}_{[X_a,X_b]}\omega = [\mathcal{L}_{X_a},\mathcal{L}_{X_b}]\omega\\ &= \mathcal{L}_{X_a}(\{b,\omega\}) - \mathcal{L}_{X_b}(\{a,\omega\})\\ &= \{a,\{b,\omega\}\} - \{b,\{a,\omega\}\}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}a\{b,\omega\} - \{b,a\omega\} &= a\mathcal{L}_{X_b}\omega - \mathcal{L}_{X_b}a\omega\\ &= a\mathcal{L}_{X_b}\omega - \{b,a\}\omega - a\mathcal{L}_{X_b}\omega\\ &= \{a,b\}\omega\end{aligned}$$

Osserviamo che questa struttura è compatibile con la struttura di Lie presente su Ω_A; infatti, se $\pi : \Omega_A \wedge \Omega_A \longrightarrow A$ è il tensore di Poisson di A, la struttura di Lie su Ω_A è definita come

$$\{\omega_1,\omega_2\} = \mathcal{L}_{\pi\#_{\omega_1}}\omega_2 - \mathcal{L}_{\pi\#_{\omega_2}}\omega_1 - d\pi(\omega_1,\omega_2)$$

e quindi

$$\begin{aligned}\{da,\omega\} &= \mathcal{L}_{X_a}\omega - \mathcal{L}_{\pi\#_\omega}da - d\pi(da,\omega)\\ &= \mathcal{L}_{X_a}\omega - d\pi(\omega,da) - d\pi(da,\omega)\\ &= \mathcal{L}_{X_a}\omega = \{a,\omega\}\end{aligned}$$

Infine notiamo che questa non è una struttura moltiplicativa

$$\{ab,\omega\} = \mathcal{L}_{X_{ab}}\omega = a\mathcal{L}_{X_b}\omega + b\mathcal{L}_{X_a}\omega + \omega(X_a)db + \omega(X_b)da$$

Un esempio di modulo di Poisson secondo la nostra terminologia, sono le algebre di Poisson filtrate piatte considerate da Reshetikin, Voronov e Weinstein nel loro studio algebrico della quantizzazione *à la* Fedosov delle varietà simplettiche e della coomologia quantistica delle varietà proiettive [86] (il loro uso del termine *Poisson module* è diverso dal nostro).

Diamo infine un esempio di modulo moltiplicativo non di Poisson: consideriamo una varietà di Lie–Poisson $\mathfrak{g}^*$; poiché, come spazio topologico, è contraibile, ogni fibrato vettoriale su di essa è (isomorfo al fibrato) banale ([97, §11]), cioè della forma $\mathfrak{g}^* \times V \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, e lo spazio delle sezioni è dunque lo spazio $C^\infty(\mathfrak{g}^*, V)$ delle funzioni differenziabili $s : \mathfrak{g}^* \longrightarrow V$. In altre parole i moduli proiettivi su $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ sono tutti della forma $C^\infty(\mathfrak{g}^*, V)$, e sono quelli che qui ci interessano.

Supponiamo ad esempio che V sia una rappresentazione dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$: esiste cioè un morfismo di algebre di Lie

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(V)$$

Ora definiamo, se $f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ e $s \in C^\infty(\mathfrak{g}^*, V)$, una nuova funzione $\{f,s\} \in C^\infty(\mathfrak{g}^*, V)$ come:

$$\{f,s\}(\varphi) = \rho(df_\varphi)(s(\varphi))$$

($df_\varphi \in T^*_\varphi\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^{**} = \mathfrak{g}$). Abbiamo così una mappa $\{\,\}$ $\mathbb{R}$-bilineare, tale che (per definizione delle parentesi di Lie–Poisson)

$$\begin{aligned}\{\{f,g\},s\}(\varphi) &= \rho(d\{f,g\}_\varphi)(s(\varphi))\\ &= \rho([df_\varphi, dg_\varphi])(s(\varphi)) = [\rho(df_\varphi), \rho(dg_\varphi)]s(\varphi)\\ &= \rho(df_\varphi)(\rho(dg_\varphi)(s(\varphi))) - \rho(dg_\varphi)(\rho(df_\varphi)(s(\varphi)))\\ &= \rho(df_\varphi)(\{g,s\}(\varphi)) - \rho(dg_\varphi)(\{f,s\}(\varphi))\\ &= \{f,\{g,s\}\}(\varphi) - \{g,\{f,s\}\}(\varphi)\end{aligned}$$

Dunque si tratta di un'azione dell'algebra di Lie $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ su $C^\infty(\mathfrak{g}^*, V)$; inoltre

$$\{f,gs\}(\varphi) = \rho(df_\varphi)(g(\varphi)s(\varphi)) = g(\varphi)\rho(df_\varphi)(s(\varphi)) = g(\varphi)\{f,s\}(\varphi)$$

Quindi non si tratta di una struttura di modulo di Poisson; tuttavia è moltiplicativa, dato che

$$\{fg,s\}(\varphi) = \rho(f(\varphi)dg_\varphi + g(\varphi)df_\varphi)(s(\varphi)) = f(\varphi)\{g,s\}(\varphi) + g(\varphi)\{f,s\}(\varphi)$$

3.2 La categoria dei moduli di Poisson

I moduli di Poisson formano ovviamente una categoria, che, nel caso delle algebre di Lie, deve ridursi alla categoria delle rappresentazioni:

Definizione 3.2.1 *Un morfismo $f : E \longrightarrow F$ fra moduli di Poisson è un* morfismo di Poisson *se*

$$f\{a,e\} = \{a, f(e)\}$$

per ogni $a \in A$, $e \in E$.

Notiamo che $f(ae) = af(e)$, quindi

$$f\{a,be\} = \{a, bf(e)\} = b\{a,f(e)\} + \{a,b\}f(e) = bf(\{a,e\}) + \{a,b\}f(e)$$

Lo spazio dei morfismi di Poisson è un A-sottomodulo di $\hom_A(E,F)$, quindi è di Poisson se lo è F ed è moltiplicativo se lo sono E e F.

Ad esempio se $E = A$ e $F = \operatorname{Der} A$ un morfismo di moduli di Poisson è dato dal passaggio ai campi hamiltoniani $X : A \longrightarrow \operatorname{Der} A$; infatti

$$X_{\{a,b\}} = [X_a, X_b] = \{a, X_b\}$$

(rispetto alla struttura di Poisson su $\operatorname{Der} A$).

Se $E = F = A$ allora un morfismo di Poisson è un morfismo $f \in \operatorname{End}_A(A)$ di A-moduli tale che[2]

$$f\{a,b\} = \{a, f(b)\} = \{a, bf(1)\} = \{a,b\}f(1) + \{a, f(1)\}b$$

Ma $f(1) = 1$ perché si tratta di un morfismo di algebre associative, e $\{a, 1\} = 0$, dunque f è l'identità sull'algebra di Lie derivata dell'algebra di Poisson, cioè è l'identità sugli elementi della forma $\{a, b\}$. Ad esempio se le parentesi di Poisson sono non degeneri allora $A/\{A, A\} = A/\operatorname{Ham} A = \mathbb{K}$ e quindi f può unicamente essere l'identità.

Notiamo che in questo caso un concetto più rilevante è quello di morfismo di algebre di Poisson: $f\{a, b\} = \{fa, fb\}$.

La categoria dei moduli di Poisson possiede i prodotti tensoriali: se E e F sono A-moduli di Poisson anche $E \otimes_A F$ possiede una struttura naturale di modulo di Poisson, definita come

$$\{a, e \otimes f\} = \{a, e\} \otimes f + e \otimes \{a, f\}$$

Questo rende ovviamente $E \otimes_A F$ una rappresentazione dell'algebra di Lie A, e inoltre

$$\begin{aligned}\{a, be \otimes f\} &= \{a, be\} \otimes f + be \otimes \{a, f\}\\ &= b\{a, e\} \otimes f + \{a, b\}e \otimes f + be \otimes \{a, f\}\\ &= b\{a, e \otimes f\} + \{a, b\}e \otimes f\end{aligned}$$

(si noti che basta che uno dei due moduli sia di Poisson perché il prodotto tensoriale lo sia). Se E e F sono ambedue moltiplicativi, anche $E \otimes_A F$ lo è:

$$\begin{aligned}\{ab, e \otimes f\} &= \{ab, e\} \otimes f + e \otimes \{ab, f\}\\ &= a\{b, e\} \otimes f + b\{a, e\} \otimes f + e \otimes a\{b, f\} + e \otimes b\{a, e\}\\ &= a\{b, e \otimes f\} + b\{a, e \otimes f\}\end{aligned}$$

Un'altra costruzione interessante che coinvolge i moduli di Poisson è l'estensione: se A è un'algebra di Poisson ed E un modulo di Poisson su A

[2] Le nostre algebre sono sempre commutative e dotate di unità: quest'ultima non è una restrizione eccessiva perché, a meno di sommare con l'algebra $\mathbb{K}$, possiamo sempre assumere che esista una unità 1 per un'algebra associativa.

allora possiamo definire sullo spazio vettoriale $A \oplus E$ la mappa bilineare antisimmetrica

$$\{a \oplus e, a' \oplus e'\}^{\oplus} = \{a, a'\} \oplus (\{a, e'\} - \{a', e\})$$

(le parentesi di Poisson nel secondo addendo sono quelle della struttura di modulo); possiamo anche considerare la mappa bilineare

$$(a \oplus e) \cdot (a' \oplus e') = (aa') \oplus (ae' + a'e)$$

Proposizione 3.2.2 *$(A \oplus E, \cdot, \{\,\}^{\oplus})$ è un'algebra di Poisson commutativa.*

Dimostrazione: La $\cdot$ è un prodotto associativo: infatti (si rammenti che le nostre algebre sono commutative)

$$\begin{aligned}((a \oplus e) \cdot (a' \oplus e')) \cdot (a'' \oplus e'') &= (aa' \oplus (ae' + a'e)) \cdot (a'' \oplus e'') \\ &= ((aa')a'') \oplus ((aa')e'' + a''(ae' + a'e)) \\ &= (a(a'a'')) \oplus ((aa')e'' + (aa'')e' + (a'a'')e) \\ &= (a(a'a'')) \oplus (a(a'e'' + a''e') + (a'a'')e) \\ &= (a \oplus e) \cdot (a'a'' \oplus (a'e'' + a''e')) \\ &= (a \oplus e) \cdot ((a' \oplus e') \cdot (a'' \oplus e''))\end{aligned}$$

Per assicurarci che $\{\,\}^{\oplus}$ renda $A \oplus E$ un'algebra di Lie basta verificare l'identità di Jacobi: intanto notiamo che

$$\begin{aligned}\{\{a \oplus e, a' \oplus e'\}^{\oplus}, a'' \oplus e''\}^{\oplus} &= \{\{a, a'\} \oplus (\{a, e'\} - \{a', e\}), a'' \oplus e''\}^{\oplus} \\ &= \{\{a, a'\}, a''\} \oplus (\{\{a, a'\}, e''\} - \{a'', \{a, e'\} - \{a', e\}\})\end{aligned}$$

Sommando le tre espressioni ottenute da questa permutando ciclicamente le variabile con apici, abbiamo:

$$\begin{aligned}(\{\{a, a'\}, a''\} + &\{\{a', a''\}, a\} + \{\{a'', a\}, a'\}) \oplus \\ &\big(\{\{a, a'\}, e''\} - \{a'', \{a, e'\} - \{a', e\}\} \\ &+ \{\{a', a''\}, e\} - \{a, \{a', e''\} - \{a'', e'\}\} \\ &+ \{\{a'', a\}, e'\} - \{a', \{a'', e\} - \{a, e''\}\}\big)\end{aligned}$$

Il primo addendo diretto è zero per l'identità di Jacobi in A, mentre il secondo è zero perché, ad esempio

$$\{\{a, a'\}, e''\} - \{a, \{a', e''\}\} + \{a', \{a, e''\}\} = 0$$

essendo E un modulo di Lie su A.

Resta da verificare l'identità di Leibniz:

$$\begin{aligned}
\{(a \oplus e) \cdot (a' \oplus e'), a'' \oplus e''\}^{\oplus} &= \{aa' \oplus (ae' + a'e), a'' \oplus e''\}^{\oplus} \\
&= \{aa', a''\} \oplus (\{aa', e''\} - \{a'', ae' + a'e\}) \\
&= \{aa', a''\} \oplus (a\{a', e''\} + a'\{a, e''\} \\
&\quad - \{a'', a\}e' - a\{a'', e'\} - \{a'', a'\}e - a'\{a'', e\}) \\
&= (a\{a', a''\}) \oplus (a(\{a', e''\} - \{a'', e'\}) + \{a', a''\}e) \\
&\quad + (a'\{a, a''\}) \oplus (a'(\{a, e''\} - \{a'', e\}) + \{a, a''\}e') \\
&= (a \oplus e)(\{a', a''\} \oplus (\{a', e''\} - \{a'', e'\}) \\
&\quad + (a' \oplus e')(\{a, a''\} \oplus (\{a, e''\} - \{a'', e\}) \\
&= (a \oplus e)\{a' \oplus e', a'' \oplus e''\}^{\oplus} + (a' \oplus e')\{a \oplus e, a'' \oplus e''\}^{\oplus}
\end{aligned}$$

Si noti che abbiamo usato sia l'identità di Leibniz per il modulo di Poisson E che quella moltiplicativa.

QED

Notiamo che sia A che E sono sottoalgebre di Poisson di $A \oplus E$, che la struttura di Poisson su $A \oplus E$ ristretta ad A coincide con quella originaria di A e che inoltre

$$\{E, E\}^{\oplus} = 0 \qquad \text{e} \qquad E \cdot E = 0$$

Teorema 3.2.3 *Una struttura di algebra di Poisson commutativa su $A \oplus E$ che estenda quella di A e che si restringa a zero su E induce una struttura di modulo di Poisson moltiplicativo su E.*

DIMOSTRAZIONE: Basterà definire

$$\{a, e\} = \{a \oplus 0, 0 \oplus e\}^{\oplus}$$

Gli assiomi di modulo di Poisson moltiplicativo si ottengono immediatamente dagli assiomi di algebra di Poisson per $A \oplus E$.

QED

Se E è un modulo di moltiplicativo possiamo considerare lo spazio delle derivazioni dell'algebra associativa A nel modulo E

$$\mathrm{Der}(A, E) = \{X \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A, E) \,|\, X(ab) = aX(b) + bX(a)\}$$

e lo spazio delle derivazioni dell'algebra di Lie A nella sua rappresentazione E:

$$\mathrm{Der}_L(A, E) = \{X \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A, E) \,|\, X(\{a, b\}) = \{a, X(b)\} - \{b, X(a)\}\}$$

Qui ci interessa la loro intersezione

$$\mathrm{Can}(A, E) = \mathrm{Der}(A, E) \cap \mathrm{Der}_L(A, E)$$

i cui elementi sono gli *operatori canonici a valori in* E. Nel caso $A = E$ con l'azione aggiunta otteniamo ovviamente gli operatori canonici della struttura di Poisson dell'algebra. Ad esempio, fissato $e \in E$, l'operatore

$$X_e(a) = \{a, e\}$$

è canonico: infatti

$$X_e(ab) = \{ab, e\} = a\{b, e\} + b\{a, e\} = aX_e(b) + bX_e(a)$$

dunque $X_e \in \mathrm{Der}(A, E)$ e

$$X_e\{a, b\} = \{\{a, b\}, e\} = \{a, \{b, e\}\} - \{b, \{a, e\}\} = \{a, X_e b\} - \{b, X_e a\}$$

Un operatore canonico della forma X_e si dice *operatore hamiltoniano* nel modulo E, e lo spazio da essi formato si denota con $\mathrm{Ham}(A, E)$.

Notiamo che

Proposizione 3.2.4 *Un modulo E su un'algebra di Poisson è moltiplicativo se e solo se esiste un operatore $\mathbb{K}$-lineare $X : E \longrightarrow \mathrm{Der}(A, E)$ tale che*

$$X_e\{a, b\} = X_{X_e a} b + X_{X_e b} a$$

Un modulo di Lie E su un'algebra di Poisson è di Poisson se e solo se esiste un operatore $\mathbb{K}$-lineare $X : E \longrightarrow \mathrm{Der}_L(A, E)$ tale che

$$X_{ae} = aX_e + eX_a$$

Rammentiamo ora che i differenziali di Kähler Ω_A godono della proprietà universale

$$\hom_A(\Omega_A, E) = \mathrm{Der}(A, E)$$

per ogni A-modulo E (cfr. [68, §1.3]); dunque la nostra mappa X può interpretarsi come una mappa $\mathbb{K}$-lineare

$$\tilde{X} : E \longrightarrow \hom_A(\Omega_A, E)$$

nel senso seguente

$$(\tilde{X}e)(da) = X_e a$$

Se il modulo è moltiplicativo, abbiamo che

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{d\{a,b\}}e &= X_e\{a,b\} = X_{X_e a}b + X_{X_e b}a\\ &= \tilde{X}_{db}X_a e + \tilde{X}_{da}X_b e\\ &= \tilde{X}_{db}\tilde{X}_{da}e + \tilde{X}_{da}\tilde{X}_{db}e\end{aligned}$$

L'identità di Leibniz

$$\tilde{X}_{db}ae = X_{ae}b = a\tilde{X}_{db}e + \{a,b\}e$$

ricorda quella che definisce le connessioni: in effetti la $\tilde{X}$ è una specie di "connessione rispetto al funtore hom; una connessione è infatti una mappa del tipo $E \longrightarrow \Omega_A \otimes E$, mentre qui abbiamo $E \longrightarrow \hom(\Omega_A, E)$. Vedremo in séguito un legame fra moduli di Poisson e connessioni nel senso usuale del termine (cioè secondo la teoria esposta nel §II-3).

Se A è un'algebra di Poisson ed E un modulo di Poisson su di essa, possiamo considerare gli spazi vettoriali $C_n(E) = E \otimes_{\mathbb{K}} A^{\wedge n}$, che costituiscono un complesso di catene rispetto agli operatori di bordo $\flat : C_n(E) \longrightarrow C_{n-1}(E)$ seguenti:

$$\begin{aligned}\flat(e \otimes a_1 \wedge ... \wedge a_n) = &\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \{a_i, e\} \otimes a_1 \wedge ... \wedge \widehat{a_i} \wedge ... \wedge a_n\\ &+ \sum_{i<j}^{1...n} (-1)^{i+j-1} e \otimes \{a_i, a_j\} \wedge a_1 \wedge ... \wedge \widehat{a_i} \wedge ... \wedge \widehat{a_i} \wedge ... \wedge a_n\end{aligned}$$

Otteniamo in questo modo una omologia che è l'omologia di Chevalley–Eilenberg dell'algebra di Lie A rispetto alle parentesi di Poisson a coefficienti nel modulo E. In modo analogo abbiamo la coomoologia, che è calcolata dal complesso di spazi $C^n(E) = \hom_{\mathbb{K}}(A^{\wedge n}, E)$ rispetto agli operatori di cobordo

$$\begin{aligned}\delta P(a_0 \wedge ... \wedge a_n) = &\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \{a_i, P(a_0 \wedge ... \wedge \widehat{a_i} \wedge ... \wedge a_n)\} +\\ &+ \sum_{i<j}^{0...n} (-1)^{i+j} P(\{a_i, a_j\}, a_0 \wedge ... \wedge \widehat{a_i} \wedge ... \wedge \widehat{a_j} \wedge ... \wedge a_n)\end{aligned}$$

Esempio. Il primo gruppo di coomologia $H^1(A, E)$ di questo complesso è esattamente il quoziente $\mathrm{Can}(A,E)/\mathrm{Ham}(A,E)$ dei moduli definiti alla fine del paragrafo precedente: infatti un 1-cociclo è una mappa $P : A \longrightarrow E$ tale che

$$0 = \delta P(a \wedge b) = \{a, P(b)\} - \{b, P(a)\} - P\{a, b\}$$

mentre un 1-cobordo è una mappa $P : A \longrightarrow E$ della forma

$$P(a) = \delta b(a) = \{b, a\}$$

per qualche $b \in A$, cioè un elemento di $\mathrm{Ham}(A, E)$.

3.3 Coomologia a coefficienti in una rappresentazione

La coomologia a coefficienti in un modulo di Poisson da noi appena considerata non dà come caso particolare la coomologia di Poisson da noi definita considerando il calcolo differenziale. Piuttosto quest'ultima è una coomologia dell'algebra di Lie Ω_A: consideriamo infatti il modulo di Poisson Ω_A su un'algebra di Poisson A e notiamo che lo spazio A è una rappresentazione dell'algebra di Lie Ω_A, rispetto all'azione data dalla mappa di Poisson

$$\pi^{\#} : \Omega_A \longrightarrow \mathrm{Der}\, A$$

Possiamo allora considerare lo spazio delle catene di Chevalley–Eilenberg (cfr. [19, §XIII-7], [41, §1.3], [68, §10]) dell'algebra di Lie Ω_A a coefficienti nel modulo A

$$C_n(\Omega_A, A) = A \otimes \Omega_A^{\wedge n}$$

e la mappa di bordo

$$\begin{aligned}\flat(a \otimes \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n) = &\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \pi^{\#}\omega_i(a) \otimes \omega_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \ldots \wedge \omega_n \\ &+ \sum_{i<j}^{1\ldots n} (-1)^{i+j-1} a \otimes \{\omega_i, \omega_j\} \wedge \omega_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \ldots \wedge \omega_n\end{aligned}$$

L'omologia calcolata da questo complesso è esattamente l'omologia dell'algebra di Lie Ω_A a coefficienti nella rappresentazione A che può definirsi nel modo usuale con i funtori derivati del prodotto tensoriale (cfr. [19, §XIII-8]): osserviamo che si tratta esattamente dell'omologia di Poisson che abbiamo definito nel §II-4: infatti basta comporre la mappa di bordo con la struttura di A-modulo associativo $A \otimes \Omega_A \longrightarrow \Omega_A$ per ottenere la mappa Δ di Koszul.

In modo del tutto analogo possiamo constatare che la coomologia di Poisson è la coomologia dell'algebra di Lie Ω_A a coefficienti nella rappresentazione A; questa è infatti calcolata dal complesso

$$C^n(\Omega_A, A) = \hom_{\mathbb{K}}(\Omega_A^{\wedge n}, A)$$

rispetto alla mappa di cobordo

$$\begin{aligned}\delta P(\omega_0\wedge ...\wedge\omega_n) = &\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\pi^{\#}\omega_i P(\omega_0\wedge ...\wedge\widehat{\omega_i}\wedge ...\wedge\omega_n)+\\ &+\sum_{i<j}^{0...n}(-1)^{i+j}P(\{\omega_i,\omega_j\},\omega_0\wedge ...\wedge\widehat{\omega_i}\wedge ...\wedge\widehat{\omega_j}\wedge ...\wedge\omega_n)\end{aligned}$$

Abbiamo dunque una interpretazione puramente algebrica per l'omologia e la coomologia di Poisson che mostra come queste sono essenzialmente omologie di Chevalley–Eilenberg, così come la coomologia di de Rham di A è la coomologia dell'algebra di Lie $\operatorname{Der} A$ a coefficienti nella rappresentazione A (cfr. [41, §2.4]).

Si noti che, se $H^A_\bullet(A)$ e $H^\bullet_A(A)$ denotano l'omologia e la coomologia dell'algebra di Lie A (definita al principio di questo §) a coefficienti nel modulo aggiunto, abbiamo due mappe

$$d_* : H^A_\bullet(A)\longrightarrow H^\pi_\bullet(A) \qquad \text{e} \qquad d^* : H^\bullet_\pi(A)\longrightarrow H^\bullet_A(A)$$

Infatti il morfismo di algebre di Lie $d : A\longrightarrow\Omega_A$, o meglio la sua estensione

$$d\,(a_1\wedge ...\wedge a_n) = da_1\wedge ...\wedge da_n$$

induce due mappe $d_* : C_n(A)\longrightarrow C_n(\Omega_A, A)$ e $d^* : C^n(\Omega_A, A)\longrightarrow C^n(A)$ come

$$\begin{aligned}d_*(a\otimes a_1\wedge ...\wedge a_n) &= a\otimes da_1\wedge ...\wedge da_n\\ d^*P(a_1\wedge ...\wedge a_n) &= P(da_1\wedge ...\wedge da_n)\end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned}\flat d_*(a\otimes a_1\wedge ...\wedge a_n) &= \flat(a\otimes da_1\wedge ...\wedge da_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\{a_i,a\}\otimes da_1\wedge ...\wedge\widehat{da_i}\wedge ...\wedge da_n\\ &\quad+\sum_{i<j}^{1...n} a\otimes\{da_i,da_j\}\wedge da_1\wedge ...\wedge\widehat{da_i}\wedge ...\wedge\widehat{da_i}\wedge ...\wedge da_n\\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\{a_i,a\}\otimes da_1\wedge ...\wedge\widehat{da_i}\wedge ...\wedge da_n\\ &\quad+\sum_{i<j}^{1...n} a\otimes d\{a_i,a_j\}\wedge da_1\wedge ...\wedge\widehat{da_i}\wedge ...\wedge\widehat{da_i}\wedge ...\wedge da_n\\ &= d_*\flat(a\otimes a_1\wedge ...\wedge a_n)\end{aligned}$$

e, in modo analogo,

$$\delta d^* = d^* \delta$$

Questo vuol dire che d_* e d^* inducono mappe in omologia e coomologia.

Poiché siamo qui interessati alla coomologia di Poisson a coefficienti in un modulo, e poiché la generalizzazione giusta, come abbiamo visto, coinvolge l'algebra di Lie Ω_A piuttosto che A, siamo costretti, in vista delle applicazioni coomologiche, a modificare il concetto di modulo di Poisson (in qualche senso a linearizzarlo) secondo la seguente

Definizione 3.3.1 *Una* rappresentazione *di un'algebra di Poisson A è uno spazio vettoriale E su $\mathbb{K}$ tale che*

(1) *E sia un A-modulo;*

(2) *E sia una rappresentazione dell'algebra di Lie Ω_A;*

(3) *Valga la seguente identità di Leibniz*

$$[\omega, ae] = a[\omega, e] - i_{X_a}\omega e$$

ove $[\omega, e]$ è l'azione della forma ω sull'elemento $e \in E$.

Se E è una rappresentazione allora, ponendo

$$\{a, e\} = [da, e]$$

otteniamo una azione dell'algebra di Lie A su E:

$$\begin{aligned} \{\{a, b\}, e\} &= [d\{a, b\}, e] = [\{da, db\}, e] \\ &= [da, [db, e]] - [db, [da, e]] \\ &= \{a, \{b, e\}\} - \{b, \{a, e\}\} \end{aligned}$$

che rende E un modulo di Poisson:

$$\{a, be\} = [da, be] = b[da, e] - \{b, a\}e = b\{a, e\} + \{a, b\}e$$

Si noti inoltre che se una stessa struttura di modulo di Poisson $\{\,\}$ su E è indotta da due rappresentazioni $[\,]$ e $[\,]'$ di A allora

$$[da, e] = \{a, e\} = [da, e]'$$

cioè le rappresentazioni coincidono sui differenziali esatti; questo ovviamente non implica che debbano coincidere su tutto Ω_A (che è generato dai differenziali esatti come A-modulo e non come $\mathbb{K}$-spazio), a meno che non sia verificata la seguente condizione

Definizione 3.3.2 *Una* rappresentazione moltiplicativa *di un'algebra di Poisson è una rappresentazione tale che*

$$[a\omega, e] = a[\omega, e]$$

Se E è moltiplicativa, la struttura di modulo di Poisson che induce è pure moltiplicativa:

$$\{ab, e\} = [adb, e] + [bda, e] = a[db, e] + b[da, e] = a\{b, e\} + b\{a, e\}$$

e la rappresentazione determina una sola struttura di modulo.

Abbiamo quindi una mappa

$$\mathbf{d} : \{\text{Rappresentazioni}\} \longrightarrow \{\text{Moduli di Poisson}\}$$

che tuttavia non è suriettiva in generale. È infatti chiaro che una struttura di modulo di Poisson su E induce sui differenziali esatti una azione ben definita

$$[db, e] = \{b, e\}$$

che non è tuttavia possibile estendere in generale a tutto Ω_A per ottenere una rappresentazione: una definizione naturale sarebbe ovviamente

$$[adb, e] = a\{b, e\}$$

Questa posizione definisce una rappresentazione dell'algebra di Lie Ω_A: infatti riesce (si rammenti il teorema II-4.5)

$$\begin{aligned}
[\{adb, cde\}, m] &= [c\{adb, de\} + a\{b, c\}de, m] \\
&= [ac\{db, de\} - c\{e, a\}db + a\{b, c\}de, m] \\
&= ac\{\{b, e\}, m\} - c\{e, a\}\{b, m\} + a\{b, c\}\{e, m\} \\
&= ac\{b, \{e, m\}\} + a\{b, c\}\{e, m\} - ac\{e, \{b, m\}\} - c\{e, a\}\{b, m\} \\
&= a\{b, c\{e, m\}\} - c\{e, a\{b, m\}\} \\
&= [adb, [cde, m]] - [cde, [adb, m]]
\end{aligned}$$

Inoltre

$$[adb, ce] = a\{b, ce\} = ac\{b, e\} + a\{b, c\}e = c[adb, e] - (X_c adb)e$$

Si noti che una tale rappresentazione sarebbe moltiplicativa per definizione:

$$[adb, e] = a\{b, e\} = a[db, e]$$

Il problema è che, in generale, se Ω_A non è libero, potremmo avere

$$\omega = \sum_i a_i db_i = \sum_j c_j de_j$$

col che

$$\sum_i a_i\{b_i, e\} = [\omega, e] = \sum_j c_j\{e_i, e\}$$

mentre non è detto che il primo e il terzo membro coincidano. Cioè la rappresentazione indotta dalla struttura di Poisson non è ben definita in generale. Dato che, inoltre, è sempre moltiplicativa, può essere definita solo a partire da strutture di Poisson moltiplicative su E. Così della mappa

$$\mathbf{d} : \{\text{Rappresentazioni}\} \longrightarrow \{\text{Moduli di Poisson}\}$$

possiamo dire che:

Proposizione 3.3.3

(1) $\mathbf{d}$ *induce per restrizione una mappa iniettiva*

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Rappresentazioni}\\ \text{moltiplicative}\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Moduli di Poisson}\\ \text{moltiplicativi}\end{array}\right\}$$

(2) *Se* Ω_A *è libero allora* $\mathbf{d}$ *è biunivoca.*

Se E è una rappresentazione dell'algebra di Poisson A possiamo definire la *coomologia* $H^\bullet_\pi(A, E)$ e l'*omologia* $H^\pi_\bullet(A, E)$ di A a coefficienti in E come la coomologia e l'omologia dell'algebra di Lie Ω_A a coefficienti nella rappresentazione E. Ovviamente nel caso $E = A$ rispetto alla rappresentazione aggiunta

$$[\omega, a] = \pi^\#\omega(a)$$

otteniamo le omologie di Poisson già discusse, che continuiamo a denotare semplicemente con $H^\bullet_\pi(A)$ e $H^\pi_\bullet(A)$. Si noti che la coomologia a coefficienti nella rappresentazione banale $\mathbb{K}$ ha come complesso semplicemente $(\Omega_A^{\wedge n})'$ e come differenziale

$$dP(\omega_0 \wedge ... \wedge \omega_n) = \sum_{i<j}^{0...n} (-1)^{i+j+1} P(\{\omega_i, \omega_j\} \wedge \omega_1 \wedge ... \wedge \widehat{\omega_i} \wedge ... \wedge \widehat{\omega_j} \wedge ... \wedge \omega_n)$$

Le rappresentazioni di un'algebra di Poisson formano ovviamente una categoria, i cui i morfismi sono gli operatori lineari

$$f : E \longrightarrow F$$

fra gli spazi delle rappresentazioni che siano mappe di A-moduli e morfismi di rappresentazioni dell'algebre di Lie Ω_A:

$$f(ae) = af(e) \qquad \text{e} \qquad f[\omega, e] = [\omega, f(e)]$$

Con questa definizione la mappa **d** precedente diviene un funtore covariante: infatti se $f : E \longrightarrow F$ è un morfismo di rappresentazioni, induce un morfismo di moduli dato che

$$f\{a, e\} = f[da, e] = [da, f(e)] = \{a, f(e)\}$$

Le proprietà funtoriali dell'omologia e della coomologia qui introdotte sono quelle usuali: se $f : A \longrightarrow B$ è un morfismo di algebre di Poisson allora induce un morfismo

$$\Omega f : \Omega_A \longrightarrow \Omega_B$$

come

$$\Omega f(adb) = f(a)df(b)$$

in modo che

$$\begin{aligned}
\Omega f\{adb, cde\} &= \Omega f(acd\{b, e\} + a\{b, c\}de - c\{e, a\}db) \\
&= f(ac)df\{b, e\} + f(a\{b, c\})df(e) - f(c\{e, a\})df(b) \\
&= f(a)f(c)\{df(b), df(e)\} + f(a)\{f(b), f(c)\}df(e) \\
&\qquad\qquad - f(c)\{f(e), f(a)\}df(b) \\
&= f(c)\{f(a)df(b), df(e)\} + f(a)\{f(b), f(c)\}df(e) \\
&= \{f(a)df(b), f(c)df(e)\} \\
&= \{\Omega f(adb), \Omega f(cde)\}
\end{aligned}$$

Se dunque E è una rappresentazione di B allora il morfismo $f : A \longrightarrow B$ di algebre di Poisson induce una rappresentazione f^*E di A che, come spazio vettoriale è lo stesso, dotata delle azioni

$$a \cdot e = f(a) \cdot e \qquad \text{e} \qquad [\omega, e] = [\Omega f(\omega), e]$$

Questo morfismo induce a sua volta i morfismi di algebre

$$H^\pi_\bullet(A, f^*E) \longrightarrow H^\pi_\bullet(B, E) \qquad \text{e} \qquad H^\bullet_\pi(B, E) \longrightarrow H^\bullet_\pi(A, f^*E)$$

Osserviamo comunque che nel caso geometrico, che ci interessa, questa funtorialità non è quella "giusta: se $A = C^\infty(M)$ e $B = C^\infty(N)$ sono le algebre di Poisson relative alle varietà M e N, una mappa di Poisson $F : M \longrightarrow N$ *non definisce un morfismo di rappresentazioni*: infatti A è una rappresentazione di $\Omega^1(M)$ e B una rappresentazione di $\Omega^1(N)$; ma non si ha $F^*B = A$.

Diamo qualche esempio non banale di rappresentazione.

Esempio. Der A è una rappresentazione rispetto alla

$$[\omega, X] = [\pi^{\#}\omega, X]$$

In effetti

$$\begin{aligned}[\{\omega_1, \omega_2\}, X] &= [\pi^{\#}\{\omega_1, \omega_2\}, X] = [[\pi^{\#}\omega_1, \pi^{\#}\omega_2], X] \\ &= [\pi^{\#}\omega_1, [\pi^{\#}\omega_2, X]] - [\pi^{\#}\omega_2, [\pi^{\#}\omega_1, X]] \\ &= [\omega_1, [\omega_2, X]] - [\omega_2, [\omega_1, X]]\end{aligned}$$

L'identità di Leibniz è ovvia:

$$[\omega, aX] = [\pi^{\#}\omega, aX] = a[\pi^{\#}\omega, X] + \pi(\omega \wedge da)X = a[\omega, X] - i_{X_a}\omega X$$

Si noti che non si tratta di una rappresentazione moltiplicativa:

$$[a\omega, X] = [a\pi^{\#}\omega, X] = a[\omega, X] - X(a)\pi^{\#}\omega$$

Esempio. Ω_A è una rappresentazione rispetto alle azioni associativa

$$a \cdot \omega = a\omega$$

e di Lie

$$[\omega_1, \omega_2]' = \{\omega_1, \omega_2\}$$

In effetti $[\,]$ è una parentesi di Lie e

$$[\omega_1, a\omega_2]' = \{\omega_1, a\omega_2\} = a\{\omega_1, \omega_2\} + \pi(\omega_1 \wedge da)\omega_2 = a\{\omega_1, \omega_2\} - X_a\omega_1\omega_2$$

Di nuovo non si tratta di una rappresentazione moltiplicativa, poiché

$$[a\omega_1, \omega_2]' = -[\omega_2, a\omega_1]' = a[\omega_1, \omega_2]' + X_a\omega_2\omega_1$$

Esempio. Sempre su Ω_A consideriamo una differente rappresentazione

$$[\omega_1, \omega_2]'' = \mathcal{L}_{\pi^{\#}\omega_1}\omega_2$$

Che si tratti di una azione di Lie è ovvio:

$$\begin{aligned}[\{\omega_1, \omega_2\}, \omega_3]'' &= \mathcal{L}_{[\pi^{\#}\omega_1, \pi^{\#}\omega_2]}\omega_3 = [\mathcal{L}_{\pi^{\#}\omega_1}, \mathcal{L}_{\pi^{\#}\omega_2}]\omega_3 \\ &= [\omega_1, [\omega_2, \omega_3]'']'' - [\omega_2, [\omega_1, \omega_3]'']''\end{aligned}$$

Inoltre vale l'identità di Leibniz

$$[\omega_1, a\omega_2]'' = \mathcal{L}_{\pi^{\#}\omega_1}a\omega_2 = \pi(\omega_1 \wedge da)\omega_2 + a[\omega_1, \omega_2]'' = a[\omega_1, \omega_2]'' - X_a\omega_1\omega_2$$

mentre

$$\begin{aligned}[a\omega_1, \omega_2]'' &= \mathcal{L}_{a\pi^{\#}\omega_1}\omega_2 = \pi(\omega_1 \wedge \omega_2)da + ad\pi(\omega_1 \wedge \omega_2) + ai_{\pi^{\#}\omega_1}d\omega_2 \\ &= a\mathcal{L}_{\pi^{\#}\omega_1}\omega_2 + \pi(\omega_1 \wedge \omega_2)da \\ &= a[\omega_1, \omega_2]'' + \pi(\omega_1 \wedge \omega_2)da\end{aligned}$$

e quindi non è moltiplicativa.

Si noti che questi esempi soddisfano alla seguente

Definizione 3.3.4 *Una rappresentazione E di un'algebra di Poisson si dice* regolare *se, per ogni elemento $c \in \operatorname{Cas} A$ si ha che $[dc, e] = 0$ per ogni $e \in E$.*

Ovviamente $\operatorname{Der} A$ è regolare perché $\pi^{\#} dc = X_c = 0$, e Ω_A lo è (sia rispetto a $[\,]'$ che a $[\,]''$) in quanto

$$\{dc, \omega\} = \mathcal{L}_{X_c}\omega - d\pi^{\#}\omega(c) - d\pi(dc \wedge \omega) = -d\pi(\omega \wedge dc) + d\pi(\omega \wedge dc) = 0$$

Naturalmente questi esempi corrispondono alle già note strutture di modulo di Poisson su $\operatorname{Der} A$ e Ω_A:

$$[da, X] = [X_a, X] = \{a, X\}$$

mentre sia $[\,]'$ che $[\,]''$ danno luogo alla medesima struttura di Poisson:

$$\begin{aligned}
[da, \omega]' = \{da, \omega\} &= \mathcal{L}_{X_a}\omega - \mathcal{L}_{\pi^{\#}\omega} da - d\pi(da \wedge \omega) \\
&= \{a, \omega\} - d\pi^{\#}\omega(da) - d\pi^{\#} da(\omega) \\
&= \{a, \omega\}
\end{aligned}$$

e

$$[da, \omega]'' = \mathcal{L}_{X_a}\omega$$

Tuttavia non ogni modulo da noi incontrato è indotto da qualche rappresentazione: ad esempio A' non è una rappresentazione rispetto all'azione coaggiunta come A-modulo e rispetto all'azione coaggiunta su Ω_A:

$$[\omega, \varphi] = \varphi \circ \pi^{\#}\omega$$

Infatti è solo una antirappresentazione dell'algebra di Lie Ω_A

$$\begin{aligned}
[\{\omega_1, \omega_2\}, \varphi] &= \varphi(\pi^{\#}\{\omega_1, \omega_2\})) = \varphi([\pi^{\#}\omega_1, \pi^{\#}\omega_2]) \\
&= \varphi(\pi^{\#}\omega_1(\pi^{\#}\omega_2)) - \varphi(\pi^{\#}\omega_2(\pi^{\#}\omega_1)) \\
&= [\omega_1, \varphi](\pi^{\#}\omega_2) - [\omega_2, \varphi](\pi^{\#}\omega_1) \\
&= [\omega_2, [\omega_1, \varphi]] - [\omega_1, [\omega_2, \varphi]]
\end{aligned}$$

e soprattutto non soddisfa l'identità di Leibniz:

$$[\omega, a\varphi] = a[\omega, \varphi]$$

Ora rammentiamo dal §II-3 che un modulo differenziale (D, δ) possiede in modo naturale un complesso di de Rham, i cui spazi di cocatene sono $\bigwedge^k D$

e il cui differenziale estene δ; abbiamo visto come calcolare δ in termini della contrazione $i : D_\delta \times D \longrightarrow A$:

$$i_{X_0\wedge\ldots\wedge X_n}\delta\omega = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i i_{X_i} i_{X_0\wedge\ldots\widehat{X_i}\ldots\wedge X_n}\omega + \\ + \sum_{i<j}(-1)^{i+j} i_{[X_i,X_j]\wedge X_0\wedge\ldots\widehat{X_i}\ldots\widehat{X_j}\ldots\wedge X_n}\omega$$

Se consideriamo ad esempio il modulo differenziale universale (Ω_A, d), la coomologia di questo complesso e la coomologia di Poisson sono collegate dalla mappa $\mu : \Omega_A \longrightarrow \operatorname{Der} A$ che induce un morfismo di algebre

$$\mu^* : H_\pi(A) \longrightarrow H_{dR}(\Omega_A)$$

Più in generale, se E è un modulo di Poisson e $\nabla : E \longrightarrow E \otimes \Omega_A$ una connessione piatta (cfr. §II-3) allora gli spazi $E \otimes \bigwedge \Omega_A$ definiscono un complesso la cui mappa di cobordo è ∇, e la mappa $1 \otimes \mu$ induce un morfismo in coomologia

$$(1 \otimes \mu)^* : H_\pi(A, E) \longrightarrow H_\nabla(\Omega_A, E)$$

Consideriamo ad esempio $E = \operatorname{Der} A$: allora un cociclo è una mappa

$$P : \Omega_A \wedge \ldots \wedge \Omega_A \longrightarrow \operatorname{Der} A = \hom_A(\Omega_A, A)$$

e il cobordo possiamo scriverlo come

$$dP(\omega_0 \wedge \ldots \wedge \omega_k) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i[\pi^\#\omega_i, P(\omega_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \ldots \wedge \omega_k)] \\ - \sum_{i<j}^{0\ldots k}(-1)^{i+j} P(\{\omega_i, \omega_j\} \wedge \omega_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega_j} \wedge \ldots \wedge \omega_k)$$

Ad esempio un 1-cociclo è una mappa $P : \Omega_A \longrightarrow \operatorname{Der} A$ tale che

$$P\{\omega_0, \omega_1\} = [\pi^\#\omega_0, P(\omega_1)] + [P(\omega_0), \pi^\#\omega_1]$$

cioè è una derivazione dell'algebra di Lie Ω_A a coefficienti nella rappresentazione $\operatorname{Der} A$. Si noti che $\pi^\#$ non soddisfa questa equazione, essendo un morfismo di algebre di Lie piuttosto che una derivazione.

Nel caso $E = \Omega_A$ i cocicli sono le mappe lineari $\Omega_A^n \longrightarrow \Omega$ e il cobordo è

$$dP(\omega_0 \wedge \ldots \wedge \omega_k) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\{\omega_i, P(\omega_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \ldots \wedge \omega_k)\} \\ - \sum_{i<j}^{0\ldots k}(-1)^{i+j} P(\{\omega_i, \omega_j\} \wedge \omega_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega_j} \wedge \ldots \wedge \omega_k)$$

Ad esempio un 1-cociclo è una mappa $P : \Omega_A \longrightarrow \Omega_A$ tale che

$$P\{\omega_0, \omega_1\} = [P(\omega_0), \omega_1] + [\omega_0, P(\omega_1)]$$

cioè una derivazione dell'algebra di Lie Ω_A; un 2-cociclo è una mappa $P : \Omega_A^2 \longrightarrow \Omega_A$ tale che

$$\begin{aligned} 0 = \{\omega_0, P(\omega_1, \omega_2)\} &+ \{\omega_1, P(\omega_2, \omega_0)\} + \{\omega_2, P(\omega_0, \omega_1)\} + \\ &- P(\{\omega_0, \omega_1\}, \omega_2) - P(\{\omega_1, \omega_2\}, \omega_0) - P(\{\omega_2, \omega_0\}, \omega_1) \end{aligned}$$

Un immediato esempio è proprio il commutatore $\{\,\}$ dell'algebra di Lie Ω_A.

Fin qui le coomologie che abbiamo considerato sono essenzialmente due: la coomologia di de Rham, cioè dell'algebra di Lie $\operatorname{Der} A$, e la coomologia di Poisson, cioè dell'algebra di Lie Ω_A, a coefficienti in una qualsiasi rappresentazione.

Esiste comunque un'altra algebra di Lie (oltre ad A stessa) che gioca un ruolo importante nel nostro contesto, e che non abbiamo finora considerato: l'algebra $\mathcal{H}_A$ del modulo generato dai campi hamiltoniani. Questo modulo per certi aspetti ricorda $\operatorname{Der} A$, trattandosi in effetti di un suo sottomodulo, per altri Ω_A, essendo ad esempio un modulo differenziale.

Supponiamo ora che E sia una rappresentazione di A: possiamo definire allora

$$[X, e] = [\omega, e]$$

ove $\pi^\# \omega = X$, utilizzando l'azione di Ω_A su E. Se E è una rappresentazione regolare allora questa definizione è ben posta: infatti da $\pi^\#\omega_1 = \pi^\#\omega_2 = X$ segue che $\omega_2 = \omega_1 + \varphi$, ove $\varphi \in \ker \pi^\#$ e quindi

$$[\omega_2, e] = [\omega_1, e] + [\varphi, e] = [\omega_1, e]$$

dato che, per una rappresentazione regolare, $[dc, e] = 0$ per $c \in \mathrm{CasA}$, e questa sottoalgebra genera il modulo $\ker \pi^\#$.

Dunque una rappresentazione regolare induce una azione di Lie di $\mathcal{H}_A$ su E: che si tratti di una azione di Lie è ovvio:

$$\begin{aligned} [[X_1, X_2], e] &= [[\pi^\#\omega_1, \pi^\#\omega_2], e] = [\pi^\#\{\omega_1, \omega_2\}, e] \\ &= [\{\omega_1, \omega_2\}, e] = [\omega_1, [\omega_2, e]] - [\omega_2, [\omega_1, e]] \\ &= [X_1, [X_2, e]] - [X_2, [X_1, e]] \end{aligned}$$

L'identità di Leibniz per la rappresentazione diviene

$$\begin{aligned} [X, ae] &= [\pi^\#\omega, ae] = [\omega, ae] = a[\omega, e] - i_{X_a}\omega e \\ &= a[X, e] + \pi(\omega \wedge a)e = a[X, e] + i_{\pi^\#\omega} dae \\ &= a[X, e] + (Xa)e \end{aligned}$$

Proposizione 3.3.5 *Se E è una rappresentazione dell'algebra di Lie $\mathcal{H}_A$ che soddisfa l'identità di Leibniz*

$$[X, ae] = a[X, e] + (Xa)e$$

e che è anche un modulo su A allora E è indotta da una rappresentazione regolare di A.

DIMOSTRAZIONE: Definiamo ovviamente, per $\omega \in \Omega_A$ ed $e \in E$

$$[\omega, e] = [\pi^{\#}\omega, e]$$

In questo modo otteniamo, per i calcoli appena svolti, una rappresentazione dell'algebra di Lie Ω_A, che soddisfa l'identità di Leibniz. La sua regolarità segue dall'essere

$$[dc, e] = [\pi^{\#}dc, e] = [X_c, e] = 0$$

QED

Cioè le rappresentazioni regolari possono considerarsi come oggetti definiti su $\mathcal{H}_A$.

Ad esempio la rappresentazione Der A, che è regolare, dà luogo alla rappresentazione aggiunta dell'algebra di Lie $\mathcal{H}_A$, cioè l'azione di Lie è esattamente il commutatore di un campo in $\mathcal{H}_A$ con una derivazione qualsiasi.

Nel caso Ω_A rispetto alla rappresentazione

$$[\omega_1, \omega_2] = \{\omega_1, \omega_2\}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}[X, \omega] &= \mathcal{L}_X\omega - \mathcal{L}_{\pi^{\#}\omega}\pi^{\#-1}X - di_{\pi^{\#}\pi^{\#-1}X}\omega \\ &= \mathcal{L}_X\omega - \mathcal{L}_{\pi^{\#}\omega}\pi^{\#-1}X - di_X\omega \\ &= i_X d\omega - di_{\pi^{\#}\omega}\pi^{\#-1}X - i_{\pi^{\#}\omega}d\pi^{\#-1}X\end{aligned}$$

Nel caso della rappresentazione

$$[\omega_1, \omega_2] = \mathcal{L}_{\pi^{\#}\omega_1}\omega_2$$

otteniamo

$$[X, \omega] = \mathcal{L}_X\omega$$

Passiamo ora alla coomologia: se E è una rappresentazione regolare di A possiamo considerare il complesso $C^n(\mathcal{H}_A, E) = \hom_{\mathbb{K}}(\mathcal{H}_A^n, E)$ rispetto alle mappe di cobordo

$$\begin{aligned} dP(X_0, ..., X_k) = &\sum_{i=0}^{k}(-1)^i[X_i, P(X_0, ..., \widehat{X_i}, ..., X_k)]+ \\ &+\sum_{i<j}^{0...k}(-1)^{i+j}P([X_i, X_j], X_0, ..., \widehat{X_i}, ..., \widehat{X_j}, ..., X_k) \end{aligned}$$

La coomologia $H(\mathcal{H}_A, E)$ di questo complesso, che discuteremo più oltre in veste geometrica, è legata anche all'algebra delle parentesi di Poisson su A; si noti che la mappa $\Omega_A \longrightarrow \mathcal{H}_A$ induce una mappa in coomologia

$$\pi^* : H(\mathcal{H}_A, E) \longrightarrow H_\nabla(A, E)$$

Se la struttura di Poisson è simplettica allora π è un isomorfismo e, *a fortiori*, anche π^* lo è; se la struttura di Poisson è nulla allora $H_\pi(A, E)$ coincide con l'intero spazio, mentre $H(\mathcal{H}_A, E)$ è nullo in grado positivo; questa coomologia è quindi “ridotta rispetto a quella di Poisson usuale, ma più semplice da calcolare.

Ovviamente per ogni A-modulo differenziale (D, δ) che sia anche un'algebra di Lie e per ogni modulo di Poisson E su A possiamo effettuare una simile costruzione: in particolare possiamo considerare il caso $D = \mathcal{H}_A$. Si rammenti che in questo caso il differenziale è $X : A \longrightarrow \mathrm{Ham}(A)$ esteso come

$$X(aX(b)) = X(a) \wedge X(b)$$

e che abbiamo una contrazione $i : \mathrm{Ham}\, A \times \mathcal{H}_A \longrightarrow A$ per mezzo della quale possiamo calcolare il differenziale come

$$\begin{aligned} i_{X_0\wedge...\wedge X_n}X(P) = &\sum_{i=0}^{n}(-1)^i i_{X_i} i_{X_0\wedge...\widehat{X_i}...\wedge X_n}P+ \\ &+\sum_{i<j}(-1)^{i+j} i_{[X_i,X_j]\wedge X_0\wedge...\widehat{X_i}...\widehat{X_j}...\wedge X_n}P \end{aligned}$$

ove $P \in \bigwedge^n \mathrm{Ham}\, A$, $X_i = X_{a_i} \in \mathrm{Ham}\, A$. Ad esempio

$$i_{X_a\wedge X_b}X(P) = i_{X_a}i_{X_b}P - i_{X_b}i_{X_a}P - i_{X_{\{a,b\}}}P$$

(si ricordi che $i_{X_a}X_b = \{a, b\}$).

Naturalmente queste coomologie sono connesse da un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} H_{dr}(\Omega_A) \arrow[r] \arrow[d] & H_\pi(A) \arrow[d] \\ H_{dr}(\mathcal{H}_A) \arrow[r] & H_\pi(\mathcal{H}_A, A) \end{tikzcd}$$

ove le frecce verticali sono indotte da $\pi^\# : \Omega_A \longrightarrow \mathcal{H}_A$.

Se ora E è un A-modulo e $\nabla : E \longrightarrow E \otimes \mathcal{H}_A$ una $\mathcal{H}_A$-connessione piatta, gli spazi $E \otimes \bigwedge \mathcal{H}_A$ definiscono un complesso la cui coomologia denotiamo con $H_\nabla(\mathcal{H}_A, E)$. Allora possiamo tracciare un altro diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} H_\nabla(\Omega_A, E) \arrow[r] \arrow[d] & H_\pi(E) \arrow[d] \\ H_\nabla(\mathcal{H}_A, E) \arrow[r] & H_\pi(\mathcal{H}_A, E) \end{tikzcd}$$

3.4 Connessioni e moduli di Poisson

Consideriamo ora un'algebra di Poisson A, il suo spazio dei campi hamiltoniani $\mathrm{Ham}(A)$ e il modulo $\mathcal{H}_A$ da essi generato; sappiamo che $(\mathcal{H}_A, X)$ è un modulo differenziale (X_a è il campo hamiltoniano generato da $a \in A$), e quindi possiamo considerare $\mathcal{H}_A$-connessioni in A-moduli:

$$\nabla(as) = a\nabla s + s \otimes X_a$$

Definizione 3.4.1 *Una $\mathcal{H}_A$-connessione in un A-modulo E si dice* connessione hamiltoniana.

Una tale connessione determina (ed è determinata da) una *derivata covariante hamiltoniana*

$$\mathbf{D} : \mathcal{H}_A \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$$

che soddisfa alla

$$\mathbf{D}_X(ae) = a\mathbf{D}_X e + X(a)e$$

Supponiamo che l'A-modulo E possegga una tale connessione: allora se poniamo

$$\{a, e\} := \mathbf{D}_{X_a} e$$

otteniamo una applicazione $\mathbb{K}$-bilineare $\{\,\} : A \times E \longrightarrow E$ tale che

$$\{a, be\} = \mathbf{D}_{X_a}(be) = b\mathbf{D}_{X_a} e + X_a(b)e = b\{a, e\} + \{a, b\}e$$

Inoltre

$$\{ab, e\} = \mathbf{D}_{X_{ab}}e = \mathbf{D}_{aX_b}e + \mathbf{D}_{bX_a}e = a\mathbf{D}_{X_b}e + b\mathbf{D}_{X_a}e = a\{b, e\} + b\{a, e\}$$

Dunque, affinché le parentesi $\{\,\}$ rendano E un modulo di Poisson moltiplicativo, basta che definiscano una azione di Lie: l'ostruzione a che ciò si avveri è che la seguente funzione

$$R(a, b)(e) = \{a, \{b, e\}\} - \{b, \{a, e\}\} - \{\{a, b\}, e\}$$

sia identicamente nulla. Ma

$$\{a, \{b, e\}\} = \mathbf{D}_{X_a}\mathbf{D}_{X_b}e$$

e

$$\{\{a, b\}, e\} = \mathbf{D}_{X_{\{a,b\}}}e = \mathbf{D}_{[X_a,X_b]}e$$

sicché

$$R(a, b) = [\mathbf{D}_{X_a}, \mathbf{D}_{X_b}] - \mathbf{D}_{[X_a,X_b]} = R_{\mathbf{D}}(X_a, X_b)$$

il che vuol dire che le parentesi $\{\,\}$ definiscono un modulo di Lie se e solo se la connessione ∇ è piatta.

Ora, se due connessioni hamiltoniane ∇ e ∇' determinano la stessa struttura di Poisson $\{\,\}$ su E allora la mappa A-lineare $\nabla - \nabla' \in \mathrm{End}(E)$ è tale che, per ogni $a \in A$:

$$i_{X_a}(\nabla e - \nabla' e) = 0$$

e quindi, poiché la contrazione $i : \mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_A \longrightarrow A$ è non degenere, $\nabla = \nabla'$. Dunque esiste una mappa iniettiva

$$\{\mathcal{H}_A\text{-connessioni piatte}\} \longrightarrow \{\text{strutture moltiplicative su } E\}$$

In generale questa mappa non è suriettiva, il che vuol dire che non ogni struttura di modulo di Poisson moltiplicativo viene da una connessione piatta. Ad esempio basta considerare moduli non proiettivi che quindi non possono avere connessioni, come il modulo delle distribuzioni $\mathcal{D}(M)'$ (cioè dei funzionali lineari e continui su $C_c^\infty(M)$, cfr. [89], [101]) rispetto all'azione di Poisson coaggiunta: se $f \in C^\infty(M)$, $\varphi \in C_c^\infty(M)$ e $T \in \mathcal{D}(M)'$

$$\{f, T\}(\varphi) = T\{f, \varphi\}$$

Si tratta di una struttura di Poisson moltiplicativa, come abbiamo già osservato, ma il modulo $\mathcal{D}(M)'$ non è proiettivo: le distribuzioni non sono le sezioni di alcun fibrato vettoriale.

Inoltre non è detto che una connessione hamiltoniana esista sempre; l'esempio più semplice è probabilmente il seguente: consideriamo la sfera S^2 rispetto alla forma simplettica data dall'elemento d'area; in questo caso, poiché la struttura è non degenere, il modulo $\mathcal{H}_A$ coincide con quello dei campi vettoriali sulla sfera, e una connessione hamiltoniana è una connessione nel senso usuale del termine: dato che S^2 è semplicemente connessa ma non parallelizzabile non esistono connessioni piatte sul modulo $E = \Omega^1(S^2)$ delle 1-forme differenziali (cfr. [53, Vol.I, §II-9]).

Affinché si possa indurre una connessione da una struttura di Poisson moltiplicativa è sufficiente ad esempio che il modulo $\mathcal{H}_A$ generato dai campi hamiltoniani sia libero su A: infatti se $\mathcal{H}_A = A^n$ allora possiamo scrivere ogni suo elemento X come $X = \sum_i a_i X_{h_i}$ ove $a_i, h_i \in A$ sono univocamente determinate. Allora, se $\{\,\}$ è una struttura di modulo di Poisson moltiplicativa su un modulo E possiamo definire una derivata covariante hamiltoniana $\mathbf{D}$ come

$$\mathbf{D}_{\sum_i a_i X_{h_i}} e = \sum_i a_i \{h_i, e\}$$

Questa definizione è ben posta proprio perché il modulo $\mathcal{H}_A$ è libero, e definisce una mappa $\mathbb{K}$-bilineare; inoltre, se $X \in \mathcal{H}_A$

$$\mathbf{D}_{aX} e = \mathbf{D}_{a\sum_i a_i X_{h_i}} e = \mathbf{D}_{\sum_i a a_i X_{h_i}} e = \sum_i a a_i \{h_i, e\} = a \sum_i a_i \{h_i, e\}$$

L'identità di Leibniz per la derivata covariante segue immediatamente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_X ae &= \mathbf{D}_{\sum_i a_i X_{h_i}} ae = \sum_i a_i \{h_i, ae\} \\
&= \sum_i a_i (\{h_i, a\} e + a\{h_i, e\}) = a \sum_i a_i \{h_i, e\} + \sum_i a_i X_{h_i}(a) e \\
&= a\mathbf{D}_X e + X(a) e
\end{aligned}$$

Infine mostriamo che la connessione indotta dalla struttura di Poisson è piatta:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{[aX_h, bX_k]} &= \mathbf{D}_{ab[X_h, X_k]} + \mathbf{D}_{aX_h(b)X_k} - \mathbf{D}_{bX_k(a)X_h} \\
&= ab\mathbf{D}_{X_{\{h,k\}}} + aX_h(b)\mathbf{D}_{X_k} - bX_k(a)\mathbf{D}_{X_h} \\
&= ab\mathbf{D}_{[X_h, X_k]} + aX_h(b)\mathbf{D}_{X_k} - bX_k(a)\mathbf{D}_{X_h} \\
&= ab[\mathbf{D}_{X_h}, \mathbf{D}_{X_k}] + aX_h(b)\mathbf{D}_{X_k} - bX_k(a)\mathbf{D}_{X_h} \\
&= ab\mathbf{D}_{X_h}\mathbf{D}_{X_k} + aX_h(b)\mathbf{D}_{X_k} - ab\mathbf{D}_{X_k}\mathbf{D}_{X_h} - bX_k(a)\mathbf{D}_{X_h} \\
&= a\mathbf{D}_{X_h} b\mathbf{D}X_k - b\mathbf{D}_{X_k} a\mathbf{D}X_h \\
&= \mathbf{D}_{aX_h}\mathbf{D}_{bX_k} - \mathbf{D}_{bX_k}\mathbf{D}_{aX_h}
\end{aligned}$$

Per linearità il risultato è valido in generale; abbiamo usato la $[\mathbf{D}_{X_h}, \mathbf{D}_{X_k}] = \mathbf{D}_{[X_h,X_k]}$ che equivale ovviamente all'essere l'azione del modulo di Poisson un'azione di Lie:

$$\mathbf{D}_{X_{\{h,k\}}}e = \{\{h,k\},e\} = \{h,\{k,e\}\} - \{k,\{h,e\}\} = \mathbf{D}_{X_h}\mathbf{D}_{X_k}e - \mathbf{D}_{X_k}\mathbf{D}_{X_h}e$$

Dunque

Teorema 3.4.2 *Se il modulo $\mathcal{H}_A$ indotto da un'algebra di Poisson A è libero allora esiste una corrispondenza biunivoca fra $\mathcal{H}_A$-connessioni piatte e strutture di modulo di Poisson moltiplicative su un A-modulo.*

In ogni caso, la mappa

$$\{\mathcal{H}_A\text{-connessioni piatte}\} \longrightarrow \{\text{strutture moltiplicative su } E\}$$

si fattorizza come

$$\begin{tikzcd}
\left\{\begin{matrix}\mathcal{H}_A\text{-connessioni}\\ \text{piatte}\end{matrix}\right\} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \left\{\begin{matrix}\text{moduli di Poisson}\\ \text{moltiplicativi}\end{matrix}\right\} \\
& \left\{\begin{matrix}\text{Rappresentazioni}\\ \text{moltiplicative}\end{matrix}\right\} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Infatti una $\mathcal{H}_A$-connessione $\nabla : E \longrightarrow E \otimes \mathcal{H}_A$ (o meglio la sua derivata covariante) determina una rappresentazione E come

$$[\omega, e] = \mathbf{D}_{\pi^\#\omega}e$$

dato che ($\pi^\#$ è antisimmetrico)

$$[\omega, ae] = \mathbf{D}_{\pi^\#\omega}ae = a[\omega, e] + i_{\pi^\#\omega}da \otimes e = a[\omega, e] - i_{X_a}\omega \otimes e$$

Evidentemente si tratta di una rappresentazione moltiplicativa

$$[a\omega, e] = \mathbf{D}_{a\pi^\#\omega}e = a\mathbf{D}_{\pi^\#\omega}e = a[\omega, e]$$

Notiamo che la mappa che porta una $\mathcal{H}_A$-connessione in una rappresentazione è iniettiva, mentre non è suriettiva in generale: possiamo comunque caratterizzare la sua immagine come lo spazio delle rappresentazioni moltiplicative regolari, cioè tali che $[\omega, e] = 0$ se $\omega \in \ker \pi^\#$. Infatti se $[\,]$ è una tale rappresentazione allora la definizione

$$\mathbf{D}_X e = [\pi^{\#-1}X, e]$$

è ben posta, dato che se $\omega \in \pi^{\#-1}X$ allora $\omega = \pi^{\#-1}X + \gamma$ ove γ è una forma che si annulla su qualsiasi elemento dello spazio $\mathcal{H}_A$: ne segue che, per regolarità della rappresentazione,

$$\mathbf{D}_X e = [\pi^{\#-1}X, e] = [\pi^{\#-1}X + \gamma, e] = \mathbf{D}_{\pi^\#\omega} e$$

In séguito discuteremo geometricamente le differenze fra connessioni hamiltoniane piatte, rappresentazioni e moduli di Poisson.

Diamo un ulteriore approccio alle D-connessioni che ha interesse nel caso delle algebre di Poisson: sia A una $\mathbb{K}$-algebra associativa e commutativa, e sia B una sottoalgebra che contiene l'unità. Possiamo allora considerare i differenziali Ω_B sull'algebra B, ma anche il B-modulo $\Omega_{A/B}$ dei differenziali di A su B, cioè dei differenziali di A B-lineari; questo può ottenersi ad esempio quozientando Ω_A per l'ideale generato dagli elementi $d(ab) - bda$ per $a \in A$ e $b \in B$. È ben noto il seguente

Lemma 3.4.3 *Esiste una successione esatta*

$$\Omega_B \otimes_B A \xrightarrow{m} \Omega_A \xrightarrow{p} \Omega_{A/B} \longrightarrow 0$$

di B-moduli differenziali.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo la proiezione p di Ω_A sul suo quoziente $\Omega_{A/B}$: se $adb \in \ker p$ allora $b \in B$ e quindi questo elemento sta nell'immagine della mappa $m : \Omega_B \otimes_B A \longrightarrow \Omega_A$ definita come

$$m(db \otimes a) = adb$$

Viceversa se $adb \in \operatorname{im} m$ allora $b \in B$ e quindi $p(adb) = abd1 = 0$.

QED

Definizione 3.4.4 *Una* connessione di tipo B *in un A-modulo E è un operatore B-lineare*

$$\nabla : E \longrightarrow E \otimes_A \Omega_{A/B}$$

che soddisfi alla identità di Leibniz

$$\nabla(ae) = a\nabla e + e \otimes da$$

per $a \in A$ ed $e \in E$.

Cioè chiediamo che gli elementi di B si comportino come costanti rispetto alla connessione.

Teorema 3.4.5 *Dato un A-modulo E esiste una corrispondenza biunivoca fra D-connessioni e connessioni di tipo B.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo una connessione ∇ di tipo B, e il modulo differenziale $(\Omega_{A/B}, d)$. Allora ∇ è una $\Omega_{A/B}$-connessione pre definizione. Se invece abbiamo un modulo differenziale (D, δ) e una D-connessione ∇ in E, allora consideriamo l'insieme degli 0-cocicli

$$Z^0(D) = \ker \delta = \{a \in A \mid \delta a = 0\}$$

Ovviamente se $c, c' \in Z^0(D)$ allora $\delta(cc') = c\delta c' + c'\delta c = 0$, quindi si tratta di una sottoalgebra associativa di A, e la D-connessione ∇ corrisponde ad una connessione di tipo $Z^0(D)$:

$$\nabla(ce) = c\nabla e + e \otimes \delta c = c\nabla e$$

QED

Corollario 3.4.6 *Su un modulo E su un'algebra di Poisson esiste una corrispondenza biunivoca fra connessioni hamiltoniane e connessioni di tipo* Cas A.