Capitolo 2

TOPOLOGIE

Ogni spazio che si considera in gran parte della matematica e delle sue applicazioni è uno spazio topologico di qualche tipo: qui introduciamo in generale le nozioni di base della topologia, facendo perno sugli esempi che il lettore certamente già conosce (spazi euclidei, spazi di funzioni, superficie). In particolare l'esempio guida sarà la retta reale: discuteremo anche il concetto di omotopia, nelle sue linee fondamentali.

2.1 Spazi topologici

2.1.1 Definizione *Una coppia* $(X, \mathcal{T})$ *si dice* spazio topologico *se* X *è un insieme e* $\mathcal{T}$ *è una famiglia di suoi sottoinsiemi (detta* topologia *su* X*) tale che*

(1) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.

(2) $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_\alpha X_\alpha \in \mathcal{T}$.

(3) $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$.

Gli elementi di una topologia si dicono *aperti* ed i loro complementari in X *chiusi*. Se $Y \subset X$, la *chiusura* $\overline{Y}$ di Y è l'intersezione di tutti i chiusi che contengono Y, e l'*interno* $\overset{o}{Y}$ di Y è l'unione di tutti gli aperti contenuti in Y. Ovviamente Y è chiuso (risp. aperto) se e solo se $Y = \overline{Y}$ (risp. $Y = \overset{o}{Y}$).

I chiusi di uno spazio topologico soddisfano le seguenti proprietà, dedotte dagli assiomi di topologia passando ai complementari, che ovviamente caratterizzano una topologia:

(1) $X, \emptyset$ sono chiusi.

(2) Se $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sono chiusi allora $\bigcap_\alpha X_\alpha$ è chiuso.

(3) Se A, B sono chiusi allora $A \cup B$ è chiuso.

Gli esempi fondamentali sono ovviamente gli spazi cartesiani $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ della geometria elementare, dotati delle topologie naturali, cioè quelle per le quali un aperto è un sottoinsieme A che, con ogni suo punto x, contiene una palla aperta $\{y \mid |x - y| < \varepsilon\}$ di raggio $\varepsilon > 0$.

Se $(X, \mathcal{T})$ è uno spazio topologico ogni suo sottoinsieme è uno spazio topologico con la *topologia relativa* $\mathcal{T}_A$ definita come segue:

$$U \in \mathcal{T}_A \iff \exists V \in \mathcal{T} \quad U = A \cap V$$

Gli assiomi sono così generali che ogni insieme può considerarsi in svariati modi uno spazio topologico: anche l'insieme vuoto. Infatti se X è un insieme qualsiasi, la collezione $\mathcal{P}(X)$ di tutte le sue parti è una topologia, che si dice *topologia discreta*, come pure lo è la collezione $\{\emptyset, X\}$, che si dice topologia *banale*. Nella topologia discreta ogni sottoinsieme è aperto: ad esempio ogni punto. Inoltre ogni sottoinsieme è anche chiuso.

2.1.2 Definizione *Sia X uno spazio topologico.*

(1) *Un insieme $Y \subset X$ è* denso *se $\overline{Y} = X$.*

(2) *La* frontiera *di un insieme $Y \subset X$ è l'insieme $\partial Y = \overline{Y} \setminus \overset{o}{Y}$.*

(3) *Un insieme $Y \subset X$ è* raro *se $\overset{o}{\overline{Y}} = \emptyset$.*

Un insieme Y è raro se e solo se il complementare della sua chiusura è denso, se e solo se $\overline{Y} = \partial\overline{Y}$. L'esempio più familiare di insieme denso è il sottoinsieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali nei numeri reali $\mathbb{R}$.

L'insieme delle topologie su un insieme X è ordinato dalla relazione di inclusione fra famiglie di sottoinsiemi di X, e se $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ si dice che $\mathcal{T}$ è *meno fine* o *più debole* di $\mathcal{T}'$. L'insieme delle topologie su uno spazio X forma manifestamente un reticolo; gli elementi 0 e 1 di questo reticolo sono la topologia *banale* formata dal solo elemento $\emptyset$ e la topologia *discreta* che coincide con l'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ di X.

Una famiglia di sottoinsiemi di uno spazio X genera una topologia, che è la più piccola topologia su X contenente gli elementi della famiglia, ed è la più debole delle topologie che ammettono gli insiemi appartenenti agli elementi della famiglia come aperti.

2.1.3 Definizione *Se X è uno spazio topologico per la topologia $\mathcal{T}$, un sottoinsieme $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ è una* base *se ogni aperto in $\mathcal{T}$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$, mentre si dice una* sottobase *se le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{B}$ sono una base.*

2.1.4 Esempio *Una base per la topologia di* $\mathbb{R}^n$ *è data dalle palle aperte* $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x-y| < r\}$ *di raggio* r *e centro* x. *Infatti un aperto* A *di* $\mathbb{R}^n$, *per definizione, possiede con ogni suo punto* x *una palla* $B_{r_x}(x)$ *di centro quel punto completamente contenuta in* A*: allora*

$$A = \bigcup_{x \in A} B_{r_x}(x)$$

e quindi A *è unione di palle aperte. In* $\mathbb{R}$ *una palla aperta è semplicemente un intervallo* $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$*; gli intervalli della forma* (x, ∞) *e* $(-\infty, x)$ *formano una sottobase.*

2.1.5 Definizione *Una topologia* $\mathcal{T}$ *su un insieme* X *si dice* a base numerabile *se esiste una base numerabile di aperti.*

2.1.6 Esempio $\mathbb{R}^n$ *ha base numerabile: possiamo infatti scegliere le palle aperte* $B_r(x)$ *in cui* $r \in \mathbb{Q}$ *e* $x \in \mathbb{Q}^n$ *per densità dei razionali nei reali.*

Se $Y \subset X$ è un sottoinsieme di uno spazio topologico con topologia $\mathcal{T}$, allora è a sua volta uno spazio topologico rispetto alla *topologia indotta* da $\mathcal{T}$ su Y, i cui aperti sono intersezioni di aperti di X con Y.

2.1.7 Definizione *Un* intorno *di un punto* x *in uno spazio topologico* X *è un aperto di* X *contenente* x. *Una* base di intorni *di* $x \in X$ *è una famiglia di intorni di* x *tale che ogni intorno di* x *contenga un intorno di questa famiglia.*

2.1.8 Definizione *Uno spazio topologico* X *si dice*

(1) T_1 *se per ogni coppia* $x, y \in X$ *esiste un aperto contenente* x *ma non* y.

(2) T_2 *(o* di Hausdorff*) se per ogni coppia* $x, y \in X$ *esistono un aperto contenente* x *ma non* y *e un aperto contenente* y *ma non* x *disgiunti.*

(3) regolare *(*T_3 *se è anche* T_1*) se per ogni chiuso* F *di* X *ed ogni punto* $x \in X \setminus F$ *esistono un aperto contenente* x *ma non* F *ed un aperto contenente* F *ma non* x *disgiunti.*

(4) normale *(*T_4 *se è anche* T_1*) se per ogni coppia di chiusi* F_1, F_2 *disgiunti di* X *esistono un aperto contenente* F_1 *ma non* F_2 *ed un aperto contenente* F_2 *ma non* F_1 *disgiunti.*

Con degli esempi potrebbe mostrarsi che queste classi di spazi sono contenute propriamente le une dentro le altre nel seguente modo: $T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_1$: per una discussione più approfondita rimandiamo ai testi specialistici (dove si definiscono anche altre classi di spazi, come i T_0 e $\mathrm{T}_{\frac{3}{2}}$); qui ci limitiamo a segnalare alcuni semplici controesempi.

2.1.9 Esempio *Uno spazio T_1 ma non T_2 è ad esempio il seguente: consideriamo nello spazio $\mathbb{R}^n$ gli insiemi della forma*

$$V(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$$

(ove $f \in \mathbb{R}[x]$ è un polinomio). È un semplice esercizio verificare che generano una topologia come insiemi chiusi: gli aperti sono effettivamente i complementari delle curve algebriche piane[1]*; è facile constatare che in questa topologia ogni aperto è denso, quindi non può essere di Hausdorff. Tuttavia i punti sono insiemi chiusi, della forma $V(x - c_0)$ con c_0 costante, quindi la topologia è T_1 in virtù della semplice*

2.1.10 Proposizione *Uno spazio topologico X è T_1 se e solo se per ogni suo punto x l'insieme $\{x\}$ è chiuso.*

Dimostrazione: Se $x \in X$ preso un altro punto $y \in X$ gli insiemi $U_x := \complement\{x\} = X \setminus \{x\}$ contenente x e $U_y := \complement\{y\} = X \setminus \{y\}$ contenente y sono aperti e $x \notin U_x$ e $y \notin U_y$. Viceversa, se lo spazio è T_1 e $X \in X$ non fosse chiuso allora $\overline{\{x\}}$ conterrebbe almeno un altro punto y. Ma allora dovrebbero esistere due intorni $x \in U_x$ e $y \in U_y$ con $x \notin U_y$ e $y \notin U_x$, il che è assurdo.

QED

2.1.11 Esempio *Uno spazio T_2 non T_3 è dato dall'intervallo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ con la topologia una cui base di intorni, in ogni punto che non sia lo zero, è quella della topologia naturale (indotta da $\mathbb{R}$), mentre come intorni dello zero prendiamo gli insiemi $[0, r) \setminus \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cioè gli intervalli destri privati di una successione numerabile tendente a zero. Ovviamente lo spazio è di Hausdorff, ma non è possibile separare un punto ed un insieme chiuso con due suoi aperti disgiunti.*

La classe degli spazi di Hausdorff è, come si vede, sensibilmente più vasta di quella degli spazi regolari o, peggio ancora, normali.

2.1.12 Definizione *Una* successione generalizzata *o* rete *in uno spazio topologico X è una famiglia $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ di elementi di X indicizzata da un insieme parzialmente ordinato e diretto A.*

Evidentemente, se A è numerabile otteniamo il classico concetto di successione considerato in Analisi. Se lo spazio ha base numerabile in quel che segue ci si può limitare a queste successioni senza considerare quelle generalizzate.

[1] Si tratta della *topologia di Zariski*.

2.1.13 Definizione *Una successione generalizzata* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *si dice* convergente *ad un elemento* $x \in X$ *se per ogni intorno* $U \ni x$ *esiste un elemento* $\alpha_x \in A$ *tale che per ogni* $\alpha > \alpha_x$ $x_\alpha \in U$*, e si scrive*

$$\lim_{\alpha\in A} x_\alpha = x$$

L'elemento x *si dice* limite *della successione.*

In uno spazio di Hausdorff, il limite di una successione generalizzata, se esiste, è unico, il che si vede esattamente come nel caso delle successioni: se una successione generalizzata converge a due punti limite, questi non potranno in alcun modo essere separati con intorni disgiunti (due tali intorni conterranno sempre ambedue i punti), e viceversa.

Ora vogliamo caratterizzare la topologia di uno spazio in termini di convergenza di successioni generalizzate. Se x è limite della successione $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ allora

$$x \in \overline{\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}}$$

Se Y è un sottoinsieme di X e $x \in \overline{Y}$, allora per ogni intorno U di x esiste un elemento $x_U \in U \cap Y$; l'insieme $\mathcal{U}_x$ degli intorni di x munito della relazione di ordine parziale

$$U < U' \iff U \supset U'$$

è diretto e

$$x = \lim_{U\in\mathcal{U}_x} x_U$$

Ogni punto di $\overline{Y}$ è limite di una successione generalizzata di elementi di Y: così abbiamo una caratterizzazione dei chiusi (e quindi della topologia su X) in termini di convergenza generalizzata.

2.1.14 Definizione *Un* punto limite *per una successione* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *è un* $x \in X$ *tale che per ogni intorno* $U \ni x$ *e per ogni* $\alpha \in A$ *esiste un* $\alpha_U > \alpha$ *in* A *tale che* $x_{\alpha_U} \in U$*.*

In altri termini, se

$$E_\alpha := \overline{\{x_{\alpha'}\}_{\alpha'>\alpha}}$$

allora l'insieme dei punti limite è $\bigcap_\alpha E_\alpha$: si tratta ovviamente di un chiuso.

2.1.15 Definizione *Una* sottosuccessione *di una successione generalizzata* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *è una famiglia* $\{x_\beta\}_{\beta\in B}$ *di elementi di* X *tale che l'insieme* B *sia parzialmente ordinato e diretto, ed esista una funzione* $i : B \longrightarrow A$ *tale che*

$$\forall\alpha \in A\ \exists\beta_\alpha \in B\ \forall\beta \in B \quad \beta > \beta_\alpha \Rightarrow i(\beta) > \alpha$$

Come nel caso della retta reale, le sottosuccessioni giocano un ruolo importante nella topologia generale:

2.1.16 Proposizione *Se $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è una successione generalizzata e se l'insieme $E := \bigcap_\alpha E_\alpha$ è non vuoto allora esiste una sottosuccessione generalizzata che converge ad ogni elemento di E. In altri termini l'insieme dei punti limite è non vuoto se e solo se esistono sottosuccessioni convergenti.*

DIMOSTRAZIONE: Se x è un punto limite della successione generalizzata $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ in X e $\mathcal{U}_x$ una base di intorni di x, tali che

$$\forall U \in \mathcal{U}_x\ \forall\alpha \in A \quad U \cap E_\alpha \neq \emptyset$$

allora (gli elementi di $\mathcal{U}_x$ sono aperti): $U \cap \{x_{\alpha'}\}_{\alpha'>\alpha} \neq \emptyset$ e quindi per ogni $\alpha \in A$ esiste $\alpha' > \alpha$ tale che $x_{\alpha'} \in U$.

La relazione

$$(\alpha, U) > (\alpha', U') \iff \alpha > \alpha' \text{ e } U \subset U'$$

rende l'insieme $A \times \mathcal{U}_x$ parzialmente ordinato e diretto (dato che $\mathcal{U}_x$ è un sistema fondamentale di intorni); per ogni $\beta = (\alpha, U) \in A \times \mathcal{U}_x$ sia $i(\beta) \in A$ tale che $i(\beta) > \alpha$ e $x_{i(\beta)} \in U$ (l'esistenza di questo elemento $i(\beta)$ è garantita dall'assioma di scelta). Allora, dato che B è parzialmente ordinato e diretto, $\{x_{i(\beta)}\}_{\beta\in B}$ è una sottosuccessione della $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$, tale che

$$x = \lim_\beta x_{i(\beta)}$$

i.e. convergente a x.

QED

Quindi una successione generalizzata in uno spazio topologico ammette sottosuccessioni convergenti se e solo se l'insieme dei suoi punti limite non è vuoto.

Ovviamente se la cardinalità dell'insieme dei punti limite è uno, di certo la successione converge all'unico elemento di questo insieme.

Si noti che, se nessun punto di X ammette una base numerabile di intorni, può succedere che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia densa in X ma che nessuna sottosuccessione (numerabile) sia convergente.

2.1.17 Definizione *Una successione* universale *è una successione generalizzata $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ tale che per ogni $S \subset X$, la successione $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ appartiene definitivamente all'insieme S ovvero all'insieme $X \setminus S$.*

Osserviamo che se $\{x_\alpha\}$ è una successione universale allora $\bigcap E_\alpha = \emptyset$ oppure (se lo spazio è di Hausdorff) $\bigcap E_\alpha = \{x\}$.

2.1.18 Definizione *Una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ di un insieme X possiede la* proprietà dell'intersezione finita *se per ogni sottofamiglia $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ finita:*

$$\bigcap \mathcal{F}' \neq \emptyset$$

Questa definizione è duale a quella di *ricoprimento finito*: una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{U}$ ricopre uno spazio topologico se $X = \bigcup \mathcal{U}$; se ogni sottofamiglia finita $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ ricopre X allora la famiglia formata dai complementari di $\mathcal{U}$ possiede la proprietà dell'intersezione finita e viceversa.

2.1.19 Teorema *Se $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è una successione generalizzata nello spazio topologico X e possiede la proprietà dell'intersezione finita, possiede una sottosuccessione universale.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo l'insieme delle famiglie $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X con la proprietà dell'intersezione finita che contengano la successione generalizzata $\{x_\alpha\}$: evidentemente si tratta di un insieme parzialmente ordinato rispetto all'inclusione. Verifichiamo che soddisfa alle ipotesi del lemma di Zorn.

Se $\mathcal{L}$ è una catena di famiglie con la proprietà dell'intersezione finita che contengano la successione generalizzata $\{x_\alpha\}$, la famiglia $\bigcup \mathcal{L}$ è un confine superiore rispetto all'ordinamento dato dall'inclusione. è facile rendersi conto che $\bigcup \mathcal{L}$ ha ancora la proprietà dell'intersezione finita. Possiamo quindi applicare il Lemma di Zorn e dedurre l'esistenza di un massimale $\mathcal{F}$; questa famiglia, vista come insieme parzialmente ordinato rispetto all'inclusione di sottoinsiemi di X fornisce un sistema di indici per $\{x_\alpha\}$ che determina una sottosuccessione in $\{E_\alpha\}$ universale.

QED

Il classico concetto di funzione reale continua si estende agli spazi topologici qualsiasi

2.1.20 Definizione *Se $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ sono spazi topologici, una funzione*

$$f : X \longrightarrow Y$$

si dice continua *se per ogni $A \in \mathcal{S}$ $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$, si dice* aperta *se per ogni $A \in \mathcal{T}$ $f(A) \in \mathcal{S}$ e si dice* omeomorfismo *se è biunivoca, continua e aperta.*

Ad esempio è chiaro che una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua nel senso dell'Analisi se e solo se lo è nel senso della definizione precedente.

Se $(X, \mathcal{T})$ è uno spazio topologico e Y un insieme qualsiasi, e se $f : X \longrightarrow Y$ è una applicazione suriettiva, possiamo definire su Y una topologia, che si dice *topologia quoziente* come segue:

$$\mathcal{Q} = \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$$

In questo modo la mappa f diviene continua per definizione. Lo spazio Y si dice *spazio topologico quoziente*. Fare il quoziente di uno spazio topologico equivale ad identificare fra loro i punti di un suo sottospazio: in effetti se $y \in Y$, i punti dell'insieme $f^{-1}(y) \subset X$ vengono, tramite f, tutti identificati in y.

2.1.21 Esempio *Consideriamo* $\mathbb{R}$ *con la sua topologia naturale e l'insieme*

$$S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

(si tratta della circonferenza in $\mathbb{R}^2$*). La funzione* $f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$

$$f(t) := e^{2\pi it}$$

è ovviamente suriettiva; inoltre se $f(t) = (x, y)$ *allora, per ogni* $n \in \mathbb{Z}$, $f(t+n) = (x, y)$*; cioè* f *identifica i punti che abbiano distanza intera fra loro, e quindi possiamo scrivere*

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

intendendo che lo spazio quoziente S^1 *è ottenuto identificando fra loro i punti del sottospazio* $\mathbb{Z}$ *in* $\mathbb{R}$. S^1 *si dice anche* toro di dimensione 1 *e si denota pure* $\mathbb{T}$.

La categoria Top degli spazi topologici ha per oggetti gli spazi topologici e per morfismi le applicazioni continue: evidentemente due spazi vanno considerati equivalenti dal punto di vista topologico se sono omeomorfi, i.e. se esiste un omeomorfismo fra essi.

Vogliamo definire i prodotti nella categoria degli spazi topologici. Sia X un insieme, A un insieme di indici e per ogni $\alpha \in A$ sia $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uno spazio topologico con una funzione $f_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$.

2.1.22 Definizione *La* topologia debole $\mathcal{T}$ *su* X *definita dalla famiglia di funzioni* $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *è la più debole delle topologie* $\mathcal{T}'$ *per le quali* $f_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ *sia continua per ogni* $\alpha \in A$.

Una sottobase per la topologia debole è

$$\bigcup_{\alpha\in A} f_\alpha^{-1}(\mathcal{T}_\alpha)$$

Un esempio di topologia debole si ha proprio considerando i prodotti: siano $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ spazi topologici e X l'insieme prodotto cartesiano[2]

$$X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$$

La *topologia prodotto* (o di Tichonov) è la topologia debole rispetto alla famiglia di proiezioni $\{p_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Una successione generalizzata $\{x_\xi\}_{\xi\in I}$ converge ad x in X se e solo se per ogni $\alpha \in A$ la successione $\{p_\alpha(x_\xi)\}_{\xi\in I}$ converge a $p_\alpha(x)$ (non necessariamente in modo uniforme da α).

[2]Ricordiamo che si tratta di un insieme non vuoto in virtù dell'assioma di scelta.

Se U è un intorno di $x \in X$, la condizione $y \in U$ pone restrizioni solo un numero finito di proiezioni $p_{\alpha_1}(y), ..., p_{\alpha_n}(y)$: ad esempio per definire U basta assegnare un sottoinsieme A' finito di A e, per ogni suo elemento α' dare un intorno $U_{\alpha'}$ di $p_{\alpha'}(x)$ mediante le condizioni

$$y \in U \text{ se } p_{\alpha'}(y) \in U_{\alpha'}$$

Al variare di A' e α' si ottiene una base di intorni per la topologia prodotto su X.

2.2 Spazi compatti

2.2.1 Definizione *Una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{U}$ di uno spazio topologico X si dice* ricoprimento *di X se*

$$\bigcup \mathcal{U} = X$$

$\mathcal{U}$ si dice ricoprimento aperto *(risp.* chiuso*) se è formato da sottoinsiemi aperti (risp. chiusi).*

La seguente definizione è fra le principali della Topologia:

2.2.2 Definizione *Uno spazio topologico si dice* compatto *se da ogni suo ricoprimento aperto se ne può estrarre uno finito.*

2.2.3 Esempio *Il classico teorema di Heine–Borel afferma che i sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^n$ sono esattamente quelli chiusi e limitati.*

2.2.4 Proposizione *Se X è uno spazio topologico allora sono equivalenti le:*

(1) *X è compatto.*

(2) *Da ogni famiglia di chiusi con l'intersezione vuota se ne può estrarre una finita con l'intersezione vuota.*

(3) *Ogni famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota.*

(4) *Ogni successione generalizzata in X ammette una sottosuccessione convergente.*

(5) *Ogni successione universale in X è convergente.*

Dimostrazione: L'equivalenza delle (1)-(3) è basata sulle leggi di de Morgan[3].

(1) implica (2): se $\mathcal{F}$ è una famiglia di chiusi con l'intersezione vuota, allora, passando ai complementari,

$$\complement \bigcap_{C\in\mathcal{F}} C = \complement\emptyset \implies \bigcup_{C\in\mathcal{F}} \complement C = X$$

il che vuol dire che la famiglia di aperti $\mathcal{U} = \{\complement C \mid C \in \mathcal{F}\}$ è un ricoprimento: per compattezza possiamo allora estrarne uno finito $\{\complement C_1, ..., \complement C_n\}$, cioè

$$\bigcup_{i=1}^{n} \complement C_i = X \implies \complement \bigcap_{i=1}^{n} C_i = \complement\emptyset \implies \bigcap_{i=1}^{n} C_i = \emptyset$$

dunque abbiamo la famiglia finita di chiusi che volevamo. Lo stesso ragionamento, scambiando i chiusi con gli aperti, dimostra che (2) implica (1).

L'equivalenza di (1) con (3) è un fatto puramente logico: dire che X è compatto vuol dire che

$$\forall \mathcal{U} \subset \mathcal{T} \left(X = \bigcup \mathcal{U} \implies \exists U_1, ..., U_n \in \mathcal{U} \quad X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i \right)$$

Dato che $P \Rightarrow Q$ è la stessa cosa che non $Q \Rightarrow$ non P, possiamo scrivere questa definizione come

$$\forall \mathcal{U} \subset \mathcal{T} \left(\forall U_1, ..., U_n \in \mathcal{U} \quad X \neq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \implies X \neq \bigcup \mathcal{U} \right)$$

o anche, prendendo i complementari degli insiemi, come (con $\mathcal{C}$ indichiamo la famiglia di tutti gli insiemi chiusi di X)

$$\forall \mathcal{F} \subset \mathcal{C} \left(\forall C_1, ..., C_n \in \mathcal{F} \quad \emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{n} C_i \implies \emptyset \neq \bigcap \mathcal{F} \right)$$

Quest'ultima è esattamente la (3).

Per quel che riguarda l'equivalenza fra la (3) e le (4)-(5) si procede nel seguente modo: se X è compatto e $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una successione generalizzata in X, i chiusi

$$F_\alpha ;= \overline{\{x_{\alpha'}\}_{\alpha'>\alpha}}$$

[3]Il complementare di una unione è l'intersezione dei complementari e il complementare di una intersezione è l'unione dei complementari.

hanno la proprietà dell'intersezione finita (essendo A un insieme diretto). Dunque per la (3)

$$\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \neq \emptyset$$

Questo insieme è esattamente l'insieme dei punti limite di $\{x_\alpha\}$ e quindi, essendo non vuoto, esistono delle sottosuccessioni convergenti; inoltre, dato che gode della proprietà dell'intersezione finita, esiste una sottosuccessione universale.

Viceversa, sia $\mathcal{F}$ è una famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita in uno spazio topologico X, $\widetilde{\mathcal{G}}$ la famiglia delle sottofamiglie finite di $\mathcal{F}$ e, per ogni $\mathcal{G} \in \widetilde{\mathcal{G}}$, sia dato un $x_{\mathcal{G}} \in \bigcap \mathcal{F}$ (possiamo supporre che ciò sia possibile grazie all'assioma di scelta).

Allora, se la successione $\{x_{\mathcal{G}}\}_{\mathcal{G} \in \widetilde{\mathcal{G}}}$ ha un punto limite x, deve aversi $x \in \bigcap \mathcal{F}$.

QED

2.2.5 Esempio $\mathbb{R}$ *non è compatto: ci sono svariati e facili modi per vederlo: ad esempio, per la (4) della proposizione precedente: la successione* $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *non possiede alcuna sottosuccessione convergente.*

Per determinare la compattezza esistono alcuni potenti criteri, il più importante dei quali è il teorema di Tichonov:

2.2.6 Teorema (TICHONOV) *Se* $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *è una famiglia di spazi compatti allora il prodotto topologico*

$$X := \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

è compatto.

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamo la compattezza verificando la (4) della proposizione precedente. Sia dunque $\{x_\beta\}_{\beta \in B}$ una successione generalizzata in X: costruiremo una sottosuccessione tale che, se il suo insieme di punti limite è non vuoto, sia convergente. Sia

$$E_\beta := \{x_{\beta'}\}_{\beta' > \beta}$$

La famiglia $\{E_\beta\}$ gode per definizione della proprietà dell'intersezione finita e soddisfa alle ipotesi del lemma di Zorn: ne segue che esiste una famiglia $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ massimale rispetto alla proprietà dell'intersezione finita ed alla

$$\{E_\beta\}_{\beta \in B} \subset \mathcal{G}$$

Se $\beta \in B$ e $M \in \mathcal{G}$ sono tali che $M \cap E_\beta \neq \emptyset$ e se $f_{\beta,M} \in B$ è tale che $f_{\beta,M} > \beta$ e $x_{f_{\beta,M}} \in M$ allora l'insieme $B \times \mathcal{G}$ è parzialmente ordinato dalla relazione

$$(\beta, M) > (\beta', M') \iff \beta > \beta' \text{ e } M \subset M'$$

e la sottosuccessione

$$\{x_{f_\eta}\}_{\eta\in B\times\mathcal{G}} \subset \{x_\beta\}_{\beta\in B}$$

converge oppure non ha punti limite.

Dato che X_α è compatto, la successione

$$\{p_\alpha(x_{f_{\eta,M}})\}_{\eta\in B\times\mathcal{G}}$$

(ove $p_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ sono le proiezioni canoniche) ha un punto limite x_α: definiamo allora

$$x = (x_\alpha)_{\alpha\in A} \in X$$

Dimostriamo che si tratta di un punto limite per $\{x_\beta\}_{\beta\in B}$: se $A' \subset A$ è un sottoinsieme finito, e, per $\alpha \in A'$: U_α un intorno di x_α, se

$$U := \bigcap_{\alpha\in A'} p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$$

Evidentemente, al variare di $\alpha \in A'$ e degli U_α, U descrive una base di intorni di x in X. Quindi per dimostrare che x è un punto limite per $\{x_\beta\}_{\beta\in B}$, basta dimostrare che

$$\forall\beta \in B \quad E_\beta \cap U \neq \emptyset$$

i.e. che se $\alpha \in A'$ allora $p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{G}$ (dato che $\mathcal{G}$ ha la proprietà dell'intersezione finita, ed $E_\beta \in \mathcal{G}$). Ma questo equivale a dimostrare che

$$\forall\alpha \in A \quad M \cap p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \neq \emptyset$$

ovvero, essendo $M \in \mathcal{G}$ e $\mathcal{G}$ massimale, che

$$\forall\alpha \in A \quad p_\alpha(M) \cap U_\alpha \neq \emptyset$$

Ma x_α è un punto limite per la successione $\{p_\alpha(x_{f_{\eta,M}})\}_{\eta\in B\times\mathcal{G}}$ e U_α è un intorno di x_α: quindi, per ogni $\eta = (\beta, M) \in B \times \mathcal{G}$ esiste un $\eta' > \eta$ tale che

$$p_\alpha(x_{f_{\eta'}}) \in U_\alpha$$

Dunque $p_\alpha(M) \cap U_\alpha \neq \emptyset$.

QED

2.2.7 Proposizione *Se X è uno spazio topologico compatto e $F \subset X$ un sottospazio chiuso allora F è compatto. Se inoltre X è di Hausdorff, un sottospazio $F \subset X$ compatto è necessariamente chiuso.*

DIMOSTRAZIONE: La prima asserzione è ovvia: se F non fosse compatto esisterebbe una famiglia $\mathcal{G}$ di chiusi in F con la proprietà dell'intersezione finita tale che $\bigcap \mathcal{G} = \emptyset$; ma un sottoinsieme chiuso di un sottoinsieme chiuso è chiuso, quindi la famiglia $\mathcal{G}$ è una famiglia di chiusi di X che ne contraddice la compattezza.

Viceversa, se F è compatto in X e $x \in \overline{F}$ esiste una successione generalizzata $\{x_\alpha\} \subset F$ convergente a x: dato che F è compatto la successione ammette un limite $x' \in F$ e, essendo X di Hausdorff, deve aversi $x = x'$.

QED

2.2.8 Proposizione *Se K è compatto e $f : K \longrightarrow X$ è continua a valori nello spazio topologico X allora l'immagine $f(K)$ di K tramite la f è un sottospazio compatto di X.*

DIMOSTRAZIONE: Se $\mathcal{A}$ è un ricoprimento aperto di $f(K)$ allora $\{f^{-1}(U)\}_{U \in \mathcal{A}}$ è un ricoprimento aperto di K, dal quale possiamo estrarne uno $\{f^{-1}(U_{\alpha_1}), ..., f^{-1}(U_{\alpha_n})\}$ finito: è ovvio che allora $\{U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n}\}$ è un ricoprimento finito estratto da $\mathcal{A}$.

QED

2.2.9 Corollario *Siano K uno spazio topologico compatto e X uno spazio di Hausdorff:*

(1) *Una funzione continua $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ sulla retta reale (con la topologia naturale) ammette massimo e minimo.*

(2) *Una funzione continua ed iniettiva $f : K \longrightarrow X$ è chiusa.*

(3) *Una funzione continua e biunivoca $f : K \longrightarrow X$ è un omeomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE:

(1) Dato che $f(K)$ è compatto è chiuso e limitato in $\mathbb{R}$, quindi ammette massimo e minimo per il classico teorema di Weierstrass.

(2) Se $F \subset K$ è chiuso è pure compatto, quindi lo è $f(F)$ che risulta essere chiuso, perché X è di Hausdorff.

(3) Segue immediatamente da (2).

QED

Il terzo punto del corollario fornisce un criterio utilissimo per determinare se due spazi topologici sono omeomorfi e quindi, dal punto di vista topologico, equivalenti: ad esempio

2.2.10 Corollario *Se X è un insieme ed è uno spazio topologico rispetto a due diverse topologie $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ e se rispetto alla topologia $\mathcal{T}$ è uno spazio compatto e rispetto alla topologia $\mathcal{T}'$ è uno spazio di Hausdorff allora la mappa identica* $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X, \mathcal{T}')$ *è continua se e solo se $\mathcal{T}' < \mathcal{T}$.*

In altri termini: *la topologia che rende uno spazio X compatto è minima nel reticolo delle topologie di Hausdorff su X.*

2.2.11 Definizione *Uno spazio topologico è* localmente compatto *se ogni suo punto possiede un intorno la cui chiusura è compatta.*

2.2.12 Esempio $\mathbb{R}^n$ *è localmente compatto, perché se $x \in \mathbb{R}^n$ basta considerare l'intorno $\{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| \leq 1\}$, che è compatto, essendo una sfera (chiuso e limitato in $\mathbb{R}^n$).*

2.2.13 Teorema *Uno spazio localmente compatto è regolare.*

Dimostrazione: Se $x \in X$ e $F \subset X$ è un chiuso (non contenente x), allora x appartiene all'aperto $X \setminus F$ e, per locale compattezza, esiste un intorno V_x di x a tale che $\overline{V_x} \subset X \setminus F$, quindi $\overline{V_x} \cap F = \emptyset$. Ora costruiamo un aperto che contenga F e sia disgiunto da V_x: se $y \in F$ esiste certamente un intorno U_y di y disgiunto da $\overline{V_x}$ (dato che X è in particolare T_2 e $\overline{V_x}$ è compatto) e $U_F := \bigcup_{y \in F} U_y$ è l'aperto richiesto.

QED

2.2.14 Definizione *Se X è uno spazio topologico, una* compattificazione *per X è uno spazio compatto CX dotato di una immersione continua $i : X \hookrightarrow CX$ tale che $\overline{i(X)} = CX$.*

Lo spazio $\mathbb{R}^n$ non è compatto, mentre lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ sì: lo spazio proiettivo si può ottenere quozientando la sfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ identificandone i punti antipodali: questa è una mappa continua e la sfera è compatta, quindi, per la proposizione 2.2.8, il quoziente è compatto; dato che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ può vedersi come $\mathbb{R}^n$ con aggiunto un "piano improprio", vediamo che si tratta di una sua compattificazione.

2.2.15 Definizione *Se X è uno spazio topologico, una sua* compattificazione di Alexandroff *(o* compattificazione a un punto*) è una compattificazione $X' = X \cup \{\xi\}$ ottenuta aggiungendo un punto ξ all'insieme X e dotando l'unione $X \cup \{\xi\}$ di una topologia per la quale ξ non sia un punto isolato.*

L'esempio più elementare è la sfera S^n, che è la compattificazione a un punto dello spazio $\mathbb{R}^n$.

2.2.16 Teorema (ALEXANDROFF) *Uno spazio topologico X ammette una compattificazione di Alexandroff se e solo se è localmente compatto. In questo caso la topologia di X determina univocamente la topologia di X' e, come sottospazio di X', X ha la topologia relativa.*

DIMOSTRAZIONE: Se $X' = X \cup \{\xi\}$ è una compattificazione di Alexandroff di X, X è aperto in X' (ovviamente ogni suo punto contiene un intorno interamente contenuto in X): in particolare, per ogni $x \in X$ esiste un intorno U_x nella topologia di X'; essendo X' compatto, anche $\overline{U_x}$ lo è, quindi ogni punto di x ha un intorno a chiusura compatta.

Viceversa, sia X è localmente compatto (diciamo $\mathcal{T}$ la sua topologia) e consideriamo sull'insieme $X' = X \cup \{\xi\}$ la topologia

$$\mathcal{T}' := \mathcal{T} \cup \{A \cup \{\xi\} \mid A \in \mathcal{T} \text{ e } X \setminus A \text{ compatto}\}$$

(la famiglia degli aperti il cui complementare sia compatto è non vuota per locale compattezza di X). Che si tratti di una topologia su X' è immediato. Verifichiamo che è compatta: se $\{U_\alpha\}$ è un ricoprimento di X', deve esistere un U_{α_0} contenente ξ e quindi $U_{\alpha_0} = A \cup \{\xi\}$ per un certo aperto di X a complementare compatto. Ma allora il ricoprimento $\{U_\alpha\} \setminus \{U_{\alpha_0}\}$ ricopre $X \setminus A$, che è compatto, quindi se ne può estrarre un ricoprimento finito: aggiungendo a questo ricoprimento finito l'insieme $\{U_{\alpha_0}\}$ si ottiene un sottoricoprimento finito di $\{U_\alpha\}$. Quindi X' è compatto.

QED

Evidentemente la compattificazione di Alexandroff di uno spazio localmente compatto è unica a meno di omeomorfismi: si tratta effettivamente di un funtore:

2.2.17 Definizione *Una funzione $f : X \longrightarrow Y$ fra spazi topologici si dice* propria *se per ogni compatto $K \subset Y$, $f^{-1}(K)$ è compatto.*

Le funzioni proprie sono esattamente quelle estendibili da uno spazio compatto alla sua compattificazione di Alexandroff in modo che i punti aggiunti nella compattificazione si corrispondano: quindi la compattificazione di Alexandroff è un funtore dalla categoria i cui oggetti sono gli spazi di Hausdorff localmente compatti ed i cui morfismi le funzioni proprie nella categoria i cui oggetti sono gli spazi compatti ed i morfismi le funzioni continue.

Osserviamo che X è Hausdorff se e solo se X' lo è.

2.3 Spazi normali e generalizzazioni della compattezza

Ricordiamo che uno spazio topologico X è normale se è T_1 ed è possibile separare due chiusi disgiunti in X con aperti disgiunti.

2.3.1 Proposizione *Uno spazio di Hausdorff X compatto è normale.*

Dimostrazione: Se $F_1, F_2 \subset X$ sono chiusi e disgiunti e sia $y_2 \in F_2$. Allora, essendo X di Hausdorff, per ogni $x \in F_1$ esistono intorni disgiunti $U_x(y)$ di y e $U_y(x)$ di x: per compattezza di F_1 (è un chiuso in un compatto), dal ricoprimento $\{U_y(x)\}_{x\in F_1}$ se ne può estrarre uno finito $\{U_y(x_1), ..., U_y(x_n)\}$. Poniamo

$$\begin{aligned} A_y &:= U_y(x_1) \cup ... \cup U_y(x_n) \supset F_1 \\ W_y &:= U_{x_1}(y) \cup ... \cup U_{x_n}(y) \end{aligned}$$

Per definizione W_y è un intorno di y e per compattezza di F_2 dal ricoprimento $\{W_y\}_{y\in F_2}$ possiamo estrarne uno finito $\{W_{y_1}, ..., W_{y_m}\}$. Poniamo allora

$$A_1 := A_{y_1} \cap ... \cap A_{y_m} A_2 \qquad := W_{y_1} \cup ... \cup W_{y_m}$$

A_1 e A_2 sono ovviamente aperti disgiunti, tali che $F_1 \subset A_1$ e $F_2 \subset A_2$.

QED

2.3.2 Lemma (Urysohn) *Se X è uno spazio normale e $F_0, F_1 \subset X$ chiusi disgiunti in X allora esiste una funzione continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tale che $f|_{F_1} = 0$ e $f|_{F_2} = 1$.*

Dimostrazione: Notiamo intanto il

2.3.3 Sublemma *Se F è un chiuso e A è un aperto in X tali che $F \subset A$ allora esiste un aperto $B \subset X$ tale che*

$$F \subset B \subset \overline{B} \subset A$$

Infatti i chiusi F e $\complement A$ sono disgiunti e quindi per normalità di X esistono due aperti disgiunti $B \supset F$ e $B' \supset \complement A$ che li separano. Dunque $\overline{B} \cap B' = \emptyset$ e $F \subset \overline{B} \subset \complement B' \subset A$.

Usiamo questo fatto nel caso in cui $F = F_0$ e $A = A_1 = \complement F_1$: esiste allora un aperto A_0 tale che

$$F_0 \subset A_0 \subset \overline{A_0} \subset A_1 = \complement F_0$$

Applichiamo nuovamente il sublemma con $F = \complement A_0$ e $A = A_1$ ottenendo un aperto $A_{\frac{1}{2}}$. Iterando il procedimento, possiamo costruire per ogni numero razionale diadico $r \in [0,1]$ (i.e. della forma $k/2^n$ con $k = 0, ..., 2^n$) un aperto A_r tale che

$$\forall s > r \quad \overline{A_r} \subset A_s$$

Poniamo quindi per ogni numero reale $t \in [0,1]$:

$$A_y := \bigcup_{\substack{r \leq t \\ r \text{ razionale diadico}}} A_r$$

Evidentemente si ha ancora la proprietà

$$(M) \qquad \forall u > t \quad \overline{A_t} \subset A_u$$

Se $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ e r_1, r_2 sono razionali diadici tali che $t_1 < r_1 < r_2 < t_2$ allora $A_{t_1} \subset A_{r_1}$ e $A_{r_2} \subset A_{t_2}$ per definizione, mentre per la proprietà (M):

$$\overline{A_{r_1}} \subset A_{r_2} \qquad \text{e} \qquad \overline{A_{t_1}} \subset A_{t_2}$$

Se poniamo

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in F_1 \\ \inf_{x \in \overline{A_t}} t & \text{se } x \in \overline{A_1} \end{cases}$$

allora $f : X \longrightarrow [0,1]$ è una funzione che, ristretta a F_0 vale identicamente 0 (dato che $F_0 \subset A_0$) e che ristretta a F_1 vale identicamente 1. Resta da provare che è continua.

Dimostriamo quindi che la controimmagine $f^{-1}(t_1, t_2)$ di un intervallo aperto di $[0,1]$ è un aperto di X. Intanto, se $t, t' \in [0,1]$:

$$f^{-1}(t', t) \subset A_t \setminus \overline{A_{t'}} \subset f^{-1}[t', t]$$

Infatti se $x \in A_t \subset \overline{A_t}$ allora $f(x) \leq t$ e, viceversa, se $f(x) < t'$ deve aversi $x \in \overline{A_{t'}}$. Se quindi $t < f(x)$ e $t' \leq f(x)$ si ha che $x \notin \overline{A_t} \cup A_{t'}$ e, per la (M) si hanno le inclusione volute.

A questo punto non resta che osservare che

$$f^{-1}(t_1, t_2) = \bigcup_{t_2 < t' < t < t_1} A_t \setminus \overline{A_{t'}}$$

e che $A_t \setminus \overline{A_{t'}}$ è ovviamente aperto.

QED

Ovviamente non è necessario che il codominio della funzione sia l'intervallo $[0,1]$: se consideriamo un intervallo $[a,b]$ evidentemente la funzione $g_{a,b}(x) := (b-a)f(x) + a$ ha valori in $[a,b]$ ed è tale che $g|_{F_0} = a$ e $g|_{F_1} = b$.

2.3.4 Teorema (TIETZE) *Se X è uno spazio normale, A un chiuso in X e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata allora esiste una funzione continua $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $F|_A = f$ e $\sup_{a \in A} |f(a)| = \sup_{x \in X} |F(x)|$.*

Dimostrazione: Costruiremo la funzione F come limite di una opportuna successione; poniamo $f_0 := f$ e, per $a_0 := \sup_{a\in A} |f(a)|$:

$$A_0 := \left\{a \in A \mid f_0(a) \le -\frac{a_0}{3}\right\} \qquad \text{e} \qquad B_0 := \left\{a \in A \mid f_0(a) \ge \frac{a_0}{3}\right\}$$

Evidentemente A_0 e B_0 sono chiusi e disgiunti: per il lemma di Urysohn esiste quindi una funzione continua $g_0 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $|g_0(x)| \le \frac{a_0}{3}$ e

$$g_0(x) = \begin{cases} -\frac{a_0}{3} & \text{se } x \in A_0 \\ \frac{a_0}{3} & \text{se } x \in B_0 \end{cases}$$

Poniamo ora $f_1 := f_0 - g_0$: si tratta di una funzione continua a valori reali tale che $a_1 := \sup_{a\in A} |f_1(a)| \le \frac{2}{3} a_0$. Iterando allora il procedimento possiamo costruire degli insiemi chiusi e disgiunti A_1 e B_1 ed una funzione g_1 con $|g_1| \le \frac{a_1}{3}$ che valga $-a_1/3$ su A_1 e $a_1/3$ su B_1, e così via.

Quello che si ottiene è una successione $\{f_n\}$ di funzioni reali e continue su A ed una successione $\{g_n\}$ di funzioni reali e continue su X tali che

$$f_{n+1} = f_n - g_n \qquad \text{e} \qquad |g_n(x)| \le \frac{a_n}{3}$$

con $a_{n+1} \le \frac{2}{3} a_n$ e $a_n := \sup_{a\in A} |f_n(a)|$. Quindi

$$|f_n(a)| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n a_0 \qquad \text{e} \qquad |g_n(x)| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{a_0}{3}$$

Ne segue che la serie $\sum_{n\ge 0} g_n(x) =$ converge assolutamente ed uniformemente ad una funzione F perciò continua e reale su X. Ovviamente

$$|F(x)| \le \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{a_0}{3} = a_0$$

Si noti che, se $x \in A$, per definizione si ha $F(x) = f_0(x) = f(x)$.

QED

In particolare, per la proposizione data in precedenza, il teorema di Tietze si applica agli spazi compatti di Hausdorff: in questo caso non è necessario assumere che f sia limitata, visto che, essendo continua e definita in un compatto, deve esserlo necessariamente.

Consideriamo ora collezioni di funzioni su uno spazio X localmente compatto di Hausdorff: ricordiamo che, se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, il *supporto* si f è l'insieme chiuso

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in X \mid f(x) \ne 0\}}$$

Diciamo che una collezione $\{\varphi_\alpha\}$ di funzioni continue reali su X è *subordinata* ad un ricoprimento $\{A_\beta\}$ di aperti di X se per ogni α esiste un β tale che $\operatorname{supp} \varphi_\alpha \subset A_\beta$.

2.3.5 Teorema (PARTIZIONE DELL'UNITÀ) *Sia X uno spazio localmente compatto di Hausdorff, K in sottoinsieme compatto e $\{A_\alpha\}$ un ricoprimento aperto di K; allora esiste una collezione finita $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ di funzioni continue reali non negative subordinate alla collezione $\{A_\alpha\}$ e tali che*

$$\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n = 1$$

su K.

DIMOSTRAZIONE: Sia A un aperto tale che $K \subset A$ e $\overline{A}$ sia compatto; allora per ogni $k \in K$ esiste una funzione continua reale f_k tale che

(1) per ogni $x \in X$: $0 \leq f(x) \leq 1$;

(2) $f_k(k) = 1$

(3) esiste β tale che $\operatorname{supp} f_k \subset A \cap A_\beta$.

Per ciascun $k \in \overline{A} \setminus K$ sia g_k la funzione reale continua tale che

(1) per ogni $x \in X$: $0 \leq g(x) \leq 1$;

(2) $g_k(k) = 1$

(3) $\operatorname{supp} g_k \subset \complement K$

Ma $\overline{A}$ è compatto, quindi esiste un numero finito di funzioni f_1,...,f_n,g_1,...,g_m tali che gli insiemi sui quali assumano valori positivi ricoprano $\overline{A}$. Poniamo allora

$$f := \sum_{i=1}^{n} f_i \qquad \text{e} \qquad g := \sum_{j=1}^{m} g_j$$

Si ha ovviamente che, su K, $f > 0$, $\operatorname{supp} f \subset A$ e su $\overline{A}$: $f + g > 0$ e $g|_K = 0$. Quindi

$$\frac{f}{f+g}$$

è continua e ristretta a K è identicamente 1: basta prendere allora

$$\varphi_i := \frac{f_i}{f+g}$$

per avere la tesi

QED

La costruzione effettuata in questa proposizione può farsi, ad esempio in $\mathbb{R}^n$, considerando funzioni differenziabili e non semplicemente continue. In questo caso la possibilità di definire una partizione dell'unità differenziabile[4] è legata ad un'altra proprietà di $\mathbb{R}^n$ che si può assiomatizzare per uno spazio topologico qualunque:

2.3.6 Definizione *Una famiglia $\mathcal{U}$ di sottoinsiemi di uno spazio topologico X si dice* localmente finita *se per ogni $x\in$ esiste un intorno $U \ni x$ la cui intersezione con gli elementi di $\mathcal{U}$ sia non vuota solo per un numero finito di essi. Uno spazio topologico si dice* paracompatto *se ogni ricoprimento aperto possiede un raffinamento localmente finito.*

Ricordiamo che un *raffinamento* di un ricoprimento $\mathcal{U}$ è un ricoprimento $\mathcal{V}$ tale che ogni elemento di $\mathcal{V}$ è contenuto in qualche elemento di $\mathcal{U}$: in questo modo la relazione di raffinamento introduce un ordine parziale fra i ricoprimenti di uno spazio.

Ovviamente uno spazio compatto è paracompatto; uno spazio localmente compatto non è necessariamente paracompatto, ma lo è se possiede un'altra proprietà che generalizza la compattezza:

2.3.7 Definizione *Uno spazio topologico è σ-compatto se è unione numerabile di sottospazi compatti.*

Vale allora il

2.3.8 Lemma *Se X è uno spazio di Hausdorff localmente compatto allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(1) *Da ogni ricoprimento aperto di X se ne può estrarre uno numerabile (uno spazio con questa proprietà si dice* di Lindelöf*).*

(2) *X è σ-compatto.*

(3) *Esiste una successione $\{A_n\}$ di aperti a chiusura compatta tali che:*

$$\overline{A_n} \subset A_{n+1} \qquad e \qquad X = \bigcup_n A_n$$

(4) *Esiste una funzione continua e propria $\varphi : X \longrightarrow (0, \infty)$.*

[4] Cosa per la quale si rimanda ai testi specialistici di Geometria Differenziale, ad esempio [17], pp. 272–274.

DIMOSTRAZIONE: (1) implica (2) dato che se X si può ricoprire con una famiglia di aperti a chiusura compatta (essendo localmente compatto) allora possiamo estrarne un sottoricoprimento numerabile le chiusure dei cui elementi forniscono la famiglia numerabile desiderata.

(2) implica (3) perché se $X = \bigcup_n K_n$ con K_n compatti, possiamo prendere come A_1 un aperto a chiusura compatta tale che $K \subset A_1$ e procedere induttivamente, prendendo come A_n un aperto a chiusura compatta contenuto in $K_n \cup \overline{A_{n-1}}$ ottenendo così la successione voluta.

(3) implica (4) ovviamente: basti prendere una famiglia $\{\varphi_n\}$ di funzioni reali a supporti contenuti in A_n e tali che $\varphi_n|_{\overline{A_{n-1}}} = 1$ e porre

$$\varphi := \sum_{n=1}^{\infty}(1 - \varphi_n)$$

Infine (4) implica (1) perché se $\varphi : X \longrightarrow (0, \infty)$ è una mappa propria continua allora $X = \bigcup_n K_n$ con $K_n = \varphi^{-1}([0, n])$: si tratta di compatti perché φ è propria. Dunque ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di X ammette un sottoricoprimento finito $\mathcal{U}_n$ che ricopre K_n e quindi $\bigcup_n \mathcal{U}_n$ è il ricoprimento numerabile richiesto.

QED

2.3.9 Teorema *Se X è uno spazio localmente compatto e σ-compatto allora è paracompatto.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X e $\{A_n\}$ una famiglia come nella (3) del teorema precedente. Se $\mathcal{U}_n$ è la famiglia degli insiemi

$$\mathcal{U}_n = \{U \cap (A_{n+1} \setminus \overline{A_{n-2}})\}_{U \in \mathcal{U}}$$

allora ogni $\mathcal{U}_n$ è un raffinamento di $\mathcal{U}$ ed è un ricoprimento degli insiemi compatti $\overline{A - n} \setminus A_{n-1}$: quindi, per compattezza, possiede un sottoricoprimento finito $\widetilde{\mathcal{U}_n}$ di K_n. Ma $X = \bigcup_n K_n$, quindi $\mathcal{V} := \bigcup_n \widetilde{\mathcal{U}_n}$ è un ricoprimento numerabile di X ed è un raffinamento di $\mathcal{U}$.

Ora, dato che per ogni $x \in X$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $x \in A_n \setminus \overline{A_{n-2}}$ e dato che questi aperti possono intersecare soltanto quattro elementi della famiglia $\widetilde{\mathcal{U}_k}$ (che è una famiglia finita) ne segue che $A_n \setminus \overline{A_{n-2}}$ interseca solo un numero finito di elementi di $\mathcal{V}$. In altre parole, $\mathcal{V}$ è localmente finito.

QED

2.4 Spazi connessi e localmente connessi

Una nozione fondamentale che abbiamo trascurato fin qui è quella di *spazio connesso*.

2.4.1 Definizione *Uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ si dice* connesso *non è unione di due suoi aperti $A, B \in \mathcal{T}$ disgiunti ($A \cap B = \emptyset$) non banali.*

In altri termini, se $X = A \cup B$ con $A, B \in \mathcal{T}$ e $A \cap B = \emptyset$ allora A e B devono essere $\emptyset$ o X.

2.4.2 Proposizione *Uno spazio è connesso se e solo se non esistono sottoinsiemi S propri ($S \neq X, \emptyset$) tali che S sia aperto e chiuso allo stesso tempo.*

Dimostrazione: In effetti se S è chiuso e aperto allora $X = S \cup \complement S$ è unione di aperti propri disgiunti e quindi non è connesso. Se X non è connesso allora esistono $A, B \in \mathcal{T}$ con $A \cap B = \emptyset$ e $X = A \cup B$: ma allora $A = \complement B$ è chiuso (essendo il complementare di un aperto) e aperto (per ipotesi).

QED

2.4.3 Esempio *Un insieme X non ridotto ad un sol punto (e.g. $X = \mathbb{N}$) con la topologia discreta non è connesso.*

Diamo qualche altro esempio di di insieme connesso.

2.4.4 Teorema *Un segmento $[a, b] \subset \mathbb{R}$ è connesso.*

Dimostrazione: Sia per assurdo[5] $[a, b] = A \cup B$ con $A \cap B = \emptyset$ aperti e supponiamo ad esempio $a \in A$; allora, si ricordi che A è aperto, i segmenti $[a, \varepsilon)$ per ε abbastanza piccolo sono contenuti in A; possiamo allora considerare il sup di questi ε: sia esso a'. Ovviamente $a' \neq b$ (altrimenti $[a, b) \subset A$ e quindi $A = [a, b]$ dato che B deve essere aperto e quindi non può essere $\{b\}$).

Dunque: $a' \notin B$ (perché A e B sono aperti disgiunti); quindi deve essere $a' \in A$. Ma allora esiste un intorno di a' contenuto in $[a, b)$ ($a \neq b$) e quindi deve esistere un $a'' > a'$ tale che $[a, a'') \subset A$, il che è assurdo per definizione di a'.

Ne segue che $a' \in A$ e quindi $A = [a, b]$ e $B = \emptyset$.

QED

Dalla seguente combinazione di proposizione e teorema segue in particolare la connessione degli spazi $\mathbb{R}^n$:

2.4.5 Proposizione *Se $f : X \longrightarrow Y$ è continua fra spazi topologici e X è connesso allora $f(X)$ è connesso.*

[5] Quasi tutte le dimostrazioni sugli spazi connessi si fanno per assurdo...

DIMOSTRAZIONE: Sia $f(X) = A \cup B$ con A, B aperti disgiunti in $f(X)$ (con la topologia relativa di X); allora $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ sono aperti in X (dato che f è continua) tali che

$$X = f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \qquad \text{e} \qquad f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = \emptyset$$

Ne segue che X non è connesso.

QED

Questa proposizione implica che la connessione è una proprietà topologica: se X e Y sono omeomorfi allora X è connesso se e solo se Y è connesso.

2.4.6 Teorema *Un sottoinsieme convesso $X \subset \mathbb{R}^n$ è connesso.*

DIMOSTRAZIONE: Per assurdo, sia $X = A \cup B$ e siano $a \in A$ e $b \in B$; allora, dato che X è convesso, il segmento $\overline{ab}$ è contenuto in X e quindi $\overline{ab} = (\overline{ab} \cap A) \cup (\overline{ab} \cap B)$ contraddice la connessione del segmento $\overline{ab}$ (per la proposizione e la connessione di un segmento in $\mathbb{R}$).

QED

In particolare $\mathbb{R}^n$ è convesso, quindi è connesso. Inoltre il classico teorema di Bolzano del valor medio ammette una generalizzazione agli spazi connessi:

2.4.7 Teorema *Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua da uno spazio topologico connesso alla retta reale, e se $x, y \in X$ e $c \in \mathbb{R}$ sono tali che*

$$f(x) < c < f(y)$$

allora esiste $z \in X$ tale che $f(z) = c$.

DIMOSTRAZIONE: Se un tale z non esistesse, gli insiemi $f^{-1}((-\infty, c))$ e $f^{-1}((c, \infty))$ sarebbero aperti disgiunti in X e X ne risulterebbe unione, il che è assurdo perché è connesso.

QED

Il seguente criterio è utile per verificare la connessione di uno spazio:

2.4.8 Proposizione *Uno spazio X è connesso se per ogni $x, y \in X$ esiste un sottospazio $C \subset X$ connesso tale che $x, y \in C$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia X non è connesso per mezzo della decomposizione in aperti $X = A \cup B$ $(A \cap B)\emptyset)$, e siano $a \in A$ e $b \in B$; allora esiste per ipotesi un connesso C contenente sia a che b. Gli insiemi $A - 1 = A \cap C$ e $B_1 = B \cap C$ sono aperti e non vuoti in C (rispetto alla topologia relativa di C) ed ovviamente $C = C \cap X = C \cap (A \cup B) = A_1 \cup B_1$. Quindi C non è connesso, dato che $A_1 \cap B_1 \subset A \cap B = \emptyset$, il che è assurdo.

QED

Possiamo limitare la scelta di C, nella proposizione precedente, alle curve:

2.4.9 Definizione *Un* cammino *fra x e y in uno spazio topologico X è una funzione continua $c : [0,1] \longrightarrow X$ tale che $c(0) = x$ e $c(1) = y$.*

2.4.10 Esempio *Una curva nel piano è un esempio di cammino: dato che $[0,1]$ è connesso l'immagine di un cammino è connessa, e quindi soddisfa le ipotesi della proposizione precedente.*

2.4.11 Definizione *Uno spazio topologico X è* connesso per archi *se per ogni $x, y \in X$ esiste un cammino fra x e y.*

Possiamo allora riformulare il criterio precedente come

2.4.12 Teorema *Uno spazio connesso per archi è connesso.*

Si danno tuttavia esempi di insiemi connessi ma non connessi per archi:

2.4.13 Esempio *Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$*

$$X = \overline{(0,0)(1,0)} \cup \bigcup_{n\geq 1} \overline{\left(\frac{1}{n}, 0\right)\left(\frac{1}{n}, 1\right)} \cup (0,1)$$

(il lettore dovrebbe provare a disegnarlo) ove $\overline{PQ}$ denota il segmento che unisce i punti P e Q: allora X è connesso, ma il punto $(0,1)$ non può essere connesso da alcun cammino agli altri punti di X.

2.4.14 Teorema *Il prodotto di due spazi connessi è connesso.*

Dimostrazione: Siano X e Y gli spazi connessi in questione e supponiamo che $X \times Y = A \cup B$ con A, B aperti disgiunti (propri). Possiamo supporre che A sia connesso (se $A = A_1 \cup A_2$ consideriamo $A = A_1$ e $B = A_2 \cup B$, e così via fino ad ottenere A connesso).

Ora, se $(x, y) \in A \subset X \times Y$ i sottoinsiemi di $X \times Y$ dati da $\{x\} \times Y$ e $X \times \{y\}$ sono connessi (perché omeomorfi a Y e X rispettivamente); quindi $\{x\} \times Y \cap A \subset A$ e $X \times \{y\} \cap A \subset A$ (dato che A è connesso). Dunque, avendosi

$$X \times Y = \bigcup_{y_0 \in Y} X \times \{y_0\}$$

esprimiamo $X \times Y$ come unione di sottoinsiemi di A, per cui $B = \emptyset$, il che è assurdo.

QED

Questo teorema si estende, col medesimo ragionamento, al prodotto di insiemi qualsiasi.

Ora osserviamo che se uno spazio è connesso, è naturale tentare di decomporlo in sottospazi connessi, come si è fatto nella dimostrazione del teorema precedente. Se $x \in X$ possiamo considerare la famiglia di tutti i sottoinsiemi connessi di X che contengono x: dato che, per la proposizione 2.4.8, l'unione di due insiemi connessi è connessa, l'insieme unione C_x della famiglia dei connessi che contengono x è un insieme connesso "massimale" contenente x: ogni insieme più grande che contenga x non può essere connesso.

Chiamiamo C_x *componente connessa* di X contenente y; ovviamente

$$\forall y \in C_x \quad C_y = C_x$$

Inoltre la relazione $x \sim y \iff C_x = C_y$ è di equivalenza, e le componenti connesse ne sono le classi. Si noti che, se $x, y \in X$ allora o $C_x = C_y$ oppure $C_x \cap C_y = \emptyset$.

Evidentemente una componente connessa è chiusa, dato che $\overline{C_x}$ è un connesso contenente C_x e quindi deve coincidere con esso. Quindi

2.4.15 Teorema *Uno spazio topologico è unione disgiunta delle sue componenti connesse.*

Osserviamo che una componente connessa C_x non è necessariamente un aperto: tuttavia se lo spazio X ha un numero finito di componenti connesse, allora $X = C_x \cup \bigcup_{y \notin C_x} C_y$ e quindi il complementare di C_x è una unione finita di chiusi, quindi un chiuso, quindi C_x è aperto.

Si osservi inoltre che il numero di componenti connesse (in generale un numero cardinale) è un invariante topologico dello spazio.

2.4.16 Definizione *Uno spazio topologico si dice* localmente connesso *se possiede una base formata da connessi.*

(In modo equivalente, ogni suo punto contiene un sistema di intorni connessi). Non è affatto detto che uno spazio connesso sia localmente connesso: vale infatti il

2.4.17 Teorema *Uno spazio topologico X è localmente connesso se e solo se, per ogni A aperto in X le componenti connesse di A sono aperti.*

Questo segue dalla definizione: ogni aperto è unione di elementi di una base, che può supporsi connessa.

2.4.18 Esempio *Lo spazio connesso ma non connesso per archi*

$$X = \overline{(0,0)(1,0)} \cup \overline{\bigcup_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n},0\right)\left(\frac{1}{n},1\right)} \cup (0,1)$$

visto in precedenza, non è neanche localmente connesso: infatti il punto $(1,0)$ *non possiede nessun sistema di intorni connessi.*

I concetti di connessione e locale connessione sono quindi indipendenti: è infatti facile esibire spazi localmente connessi ma non connessi, non connessi e non localmente connessi e connessi e localmente connessi.

2.5 Spazi semplicemente connessi

Abbiamo visto come considerare cammini su uno spazio topologico sia utile, ad esempio nel dimostrarne la connessione: è naturale chiedersi se la scelta di un cammino possa essere arbitraria e, altrimenti, come distinguere fra cammini che uniscano gli stessi punti. Una nozione utile per questo è la seguente

2.5.1 Definizione *Due cammini* $c, c' : [0,1] \longrightarrow X$ *che congiungano due stessi punti* x *e* y *(i.e.* $c(0) = c'(0) = x$ *e* $c(1) = c'(1) = y$*) si dicono* omotopi *se esiste una funzione continua*

$$F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$$

tale che

$$\forall t \in [0,1] \quad F(t,0) = c(t) \text{ e } F(t,1) = c'(t)$$

e

$$\forall s \in [0,1] \quad F(0,s) = x \text{ e } F(1,s) = y$$

Si scrive $c \approx c'$ *e si dice che* F *è una* omotopia *fra i due cammini* x *e* y*.*

Intuitivamente due cammini sono omotopi se è possibile deformare (in modo continuo) l'uno sull'altro. Questa nozione è particolarmente significativa se i cammini sono *cicli* i.e. se $x = y$: allora li immaginiamo come due "cappi" che abbiano un punto in comune.

In particolare, se $c'(t) := x$ è il *cammino costante* cioè il cappio "degenere" che coincide con x, un cammino è omotopo a c' se è possibile "contrarlo" fino a farlo sparire nel punto x: ad esempio questo non è possibile se il cammino c racchiude un "buco" dello spazio:

Ovviamente l'omotopia è una relazione di equivalenza, e l'insieme delle classi di equivalenza di cammini chiusi su un punto x_0 si denota con $\pi_1(X, x_0)$, e si dice *gruppo fondamentale*. Infatti vale il

2.5.2 Teorema *Rispetto alla composizione di cammini*

$$cc'(t) = \begin{cases} c(2t) & se\ 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ c'(2t-1) & se\ \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

le classi di omotopia di cammini su un punto fissato formano un gruppo (potrebbe essere un interessante esercizio per il lettore) con inverso

$$c^{-1}(t) = c(1-t)$$

e con identità data dal cammino costante x_0*.*

DIMOSTRAZIONE: Scriviamo esplicitamente le omotopie per dei cammini nelle classi di equivalenza di $\pi_1(X, x_0)$: per dimostrare l'associatività del prodotto di cammini c, c', c'' definiamo

$$F(t,s) := \begin{cases} c\left(\frac{4t}{s+1}\right) & \text{se } 0 \le t \le \frac{1}{4}(s+1) \\ c'(4t-s-1) & \text{se } \frac{1}{4}(s+1) \le t \le \frac{1}{4}(s+2) \\ c''\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right) & \text{se } \frac{1}{4}(s+2) \le t \le 1 \end{cases}$$

che stabilisce una omotopia fra $(cc')c''$ e $c(c'c'')$. Per dimostrare che il cammino costante x_0 è l'elemento neutro definiamo

$$F(t,s) = \begin{cases} c\left(\frac{2t}{s+1}\right) & \text{se } 0 \le t \le \frac{s+1}{2} \\ x_0 & \text{se } \frac{s+1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Infine il fatto che $[c^{-1}]$ è l'inverso di $[c]$ segue definendo

$$F(t,s) = \begin{cases} c(2t) & \text{se } 0 \le 2t \le s \\ c(s) & \text{se } s \le 2t \le 2-s \\ c^{-1}(2t-1) & \text{se } 2-s \le 2t \le 2 \end{cases}$$

QED

Si verifica facilmente che, *se lo spazio* X *è connesso per archi*, al variare del punto x_0, i gruppi fondamentali $\pi_1(X, x_0)$ sono isomorfi, e che quindi si può parlare del gruppo fondamentale di uno spazio topologico connesso per archi: in effetti se $x-1$ è un altro punto e γ un cammino che connetta x_0 con x_1 allora la mappa

$$\gamma_* : [c] \longmapsto [\gamma c \gamma^{-1}]$$

è un isomorfismo fra i gruppi fondamentali $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ (il suo inverso è infatti $(\gamma^{-1})_*$).

Osserviamo che, se $f : X \longrightarrow Y$ è una mappa continua fra spazi connessi per archi tale che $f(x_0) = y_0$ allora esiste un morfismo di gruppi

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

dato semplicemente da

$$f_*([c]) := [f \circ c]$$

La mappa non dipende che dalla classe di omotopia: se $c' \approx c$ allora esiste una omotopia F fra c e c' allora $f \circ F$ è una omotopia fra $f \circ c$ e $f \circ c'$.

Evidentemente, se $X = Y$ allora

$$(id_X)_* = id_{\pi_1(X,x_0)}$$

e se $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ sono continue e $f(x_0) = y_0$ e $g(y_0) = z_0$ allora

$$(g \circ f)_* = g_* f_*$$

Dunque $\pi_1(-, x_0)$ è un funtore covariante dalla categoria degli spazi topologici con un punto fissato (i cui oggetti sono le coppie (X, x_0) e i cui morfismi le mappe continue $f : X \longrightarrow Y$ tali che $f(x_0) = y_0$) nella categoria dei gruppi.

2.5.3 Definizione *Uno spazio topologico si dice* semplicemente connesso *se è connesso per archi ed il suo gruppo fondamentale è banale (i.e. è ridotto all'identità $\{e\}$).*

Vedremo fra breve come gli spazi $\mathbb{R}^n$ siano semplicemente connessi; prima introduciamo il concetto di omotopia fra mappe.

2.5.4 Definizione *Due mappe continue $f, g : X \longrightarrow Y$ fra spazi topologici sono* omotope *se esiste una mappa continua $F : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$ tale che*

$$\forall x \in X \quad F(x, 0) = f(x) \qquad e \qquad F(x, 1) = g(x)$$

e si scrive $f \approx g$.

Se $X = [0, 1]$ otteniamo il concetto di omotopia fra cammini: quindi due mappe sono omotope se le loro immagini possono essere "deformate" l'una sull'altra.

Di nuovo l'omotopia fra mappe è una relazione di equivalenza sull'insieme delle funzioni continue da X in Y. Questa nozione può generalizzarsi ulteriormente come segue:

2.5.5 Definizione *Due mappe continue $f, g : X \longrightarrow Y$ fra spazi topologici sono* omotope relativamente *ad un sottoinsieme $A \subset X$ fissato se esiste una mappa continua $F : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$ tale che*

$$\forall x \in X \quad F(x, 0) = f(x) \qquad e \qquad F(x, 1) = g(x)$$

e

$$\forall a \in A \ \forall t \in [0, 1] \quad F(a, t) = f(a) = g(a)$$

e si scrive $f \approx_A g$.

In particolare due mappe omotope relativamente a A coincidono su A. Se $A = \emptyset$ ritroviamo la definizione di omotopia precedente.

Il seguente risultato è immediata conseguenza della definizione:

2.5.6 Teorema *Se $f, g : X \longrightarrow Y$ sono omotope relativamente all'insieme $\{x_0\} \subset X$ allora $f_* = g_*$.*

Cioè f e g inducono lo stesso omomorfismo di gruppi $\pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y.y_0)$ ove $y_0 = f(x_0) = g(x_0)$.

2.5.7 Definizione *Un sottoinsieme $A \subset X$ di uno spazio topologico si dice* retratto *di X se esiste una mappa continua $r : X \longrightarrow A$ tale che pre ogni $a \in A$ $r(a) = a$. r si dice* ritrazione.

Si tratta di una nozione molto forte: ad esempio il cerchio $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ è un retratto del piano "bucato" $\mathbb{R}^2 \setminus 0$: basta considerare

$$r(x, y) := \frac{1}{x^2 + y^2}(x, y)$$

Le ritrazioni sono interessanti in omotopia per il seguente motivo: se $r : X \longrightarrow A$ è una ritrazione e $i : A \longrightarrow X$ è l'inclusione ($A \subset X$) allora possiamo considerare, fissato un $a \in A$, i morfismi di gruppi:

$$r_* : \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(A, a)$$
$$i_* : \pi_1(A, a) \longrightarrow \pi_1(X, a)$$

Dato che $r \circ i = id_A$ allora $r_* i_* = id_{\pi_1(A,a)}$ e da questo segue che i_* è iniettivo e r_* suriettivo[6].

[6] Se $i_*([c]) = i_*([c'])$ allora $[c] = r_*(i_*([c])) = r_*(i([c'])) = [c']$; se $[c] \in \pi_1(A, a)$ allora $[c'] = i_*([c]) \in \pi_1(X, a)$ è tale che $r_*([c']) = r_*(i_*([c])) = [c]$.

2.5.8 Definizione *Un sottoinsieme $A \subset X$ è un* retratto di deformazione *di X se esistono una ritrazione $r : X \longrightarrow A$ ed una omotopia $F : X \times [0,1] \longrightarrow X$ tali che*

$$\forall x \in X \quad F(x,0) = x \qquad e \qquad F(x,1) = r(x)$$

e

$$\forall a \in A\ \forall t \in [0,1] \quad F(a,t) = a$$

In altre parole, A è un retratto di deformazione se esiste una ritrazione $r : X \longrightarrow A$ che sia omotopa all'identità $X \longrightarrow X$.

2.5.9 Teorema *Se A è un retratto di deformazione di X allora, per ogni $a \in A$, l'inclusione $i : A \longrightarrow X$ induce un isomorfismo fra i gruppi fondamentali $\pi_1(A,a)$ e $\pi_1(X,a)$.*

DIMOSTRAZIONE: Sappiamo che $r_* i_*$ è l'identità: basta mostrare quindi che anche $i_* r_*$ è l'identità per concludere che $i_* = r_*^{-1}$ è l'isomorfismo cercato. Ma $i \circ r$ è omotopo alla mappa identità per ipotesi e quindi induce l'identità in omotopia per il teorema 2.5.6.

QED

Questo semplice risultato è utilissimo per dimostrare che due spazi hanno lo stesso gruppo fondamentale o per contraddire questo fatto.

2.5.10 Definizione *Uno spazio topologico X è* contraibile *se esiste un punto $x \in X$ tale che $\{x\}$ è un retratto di deformazione di X.*

Se uno spazio è contraibile, dal punto di vista dell'omotopia è sostanzialmente banale, come mostra la seguente immediata conseguenza del teorema precedente:

2.5.11 Corollario *Se X è contraibile allora è semplicemente connesso.*

2.5.12 Esempio *Dimostriamo che ogni insieme convesso K in $\mathbb{R}^n$ è contraibile, e quindi che è semplicemente connesso: questo in particolare si applica a $\mathbb{R}^n$ stesso. Sia $k_0 \in K$ e definiamo una $F : K \times [0,1] \longrightarrow K$ come*

$$F(k,t) = (1-t)k + tk_0$$

(k e k_0 sono elementi di $\mathbb{R}^n$ e con tk si intende la moltiplicazione di uno scalare per un vettore). In altri termini, fissato k, $F(k,t)$ descrive, al variare di $t \in [0,1]$ il segmento $\overline{kk_0}$ che è contenuto in K (per convessità). È immediato che F è continua e che $F(k,0) = k$ e $F(k,1) = k_0$. Si tratta cioè dell'omotopia richiesta[7]

[7]Si noti che il ragionamento funziona non solo con i convessi ma con i sottoinsiemi stellati, cioè tali che *esista* un punto k_0 tale che per ogni altro punto k il segmento $\overline{kk_0}$ è completamente contenuto in K.

2.5.13 Esempio *La sfera S^n è un retratto di deformazione di $\mathbb{R}^{n+1}$: basta considerare la palla piena bucata*

$$P := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, 0 < |x| \leq 1\}$$

e definire l'omotopia $F : P \times [0,1] \longrightarrow P$ come

$$F(p,t) = (1-t)p + t\frac{p}{|p|}$$

Ora dimostriamo un risultato fondamentale:

2.5.14 Teorema *Il gruppo fondamentale del cerchio è infinito ciclico: $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo il cerchio come immerso nel piano complesso $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$:

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$$

Allora esiste una funzione continua $f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$

$$f(t) := e^{2\pi i t}$$

che è aperta: in effetti si tratta della proiezione di $\mathbb{R}$ sul quoziente $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (il nucleo di f è esattamente $\mathbb{Z}$ ed è suriettiva). Ora necessitiamo di un lemma

Lemma (DEL SOLLEVAMENTO). *Se $c : [0,1] \longrightarrow S^1$ è un cammino tale che $c(0) = 1 \in S^1 \subset \mathbb{C}$ allora*

(1) *Esiste un unico cammino $\widetilde{c} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\widetilde{c}(0) = 0$ e che $f \circ \widetilde{c} = c$ ($\widetilde{c}$ si dice* sollevamento *di c).*

(2) *Se $c' : [0,1] \longrightarrow S^1$ è un altro cammino con $c'(0) = 1$ omotopo a c relativamente all'insieme $\{0,1\} \subset \mathbb{C}$ per mezzo dell'omotopia F allora esiste un'unica omotopia $\widetilde{F}$ fra $\widetilde{c}$ e $\widetilde{c'}$ relativamente all'insieme $\{0,1\}$ tale che $f \circ \widetilde{F} = F$ ($\widetilde{F}$ si dice* sollevamento *di F).*

Assumendo il lemma definiamo una mappa $\chi : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$ come

$$\chi([c]) := \widetilde{c}(1)$$

Per il lemma questa mappa è ben definita, infatti il punto $\widetilde{c}(1)$ non dipende da c ma dalla sua classe di omotopia $[c]$ (come affermato dalla (2)). Dimostriamo che si tratta di un morfismo di gruppi: siano $[c], [c'] \in \pi_1(S^1, 1)$ e $m = \widetilde{c}(1)$, $n = \widetilde{c'}(1)$; allora se $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ è il cammino da m a n dato da

$$\gamma(t) = \widetilde{c'}(t) + m$$

allora $f \circ \gamma = c'$ e quindi $\widetilde{cc'}$ è il sollevamento di cc' con punto iniziale 0 e punto terminale $m + n$. In altre parole:

$$\chi([c][c']) = \chi([c])\chi([c'])$$

χ è ovviamente suriettivo: se $n \in \mathbb{Z}$ allora per $c(t) := f(nt)$ si ha $\chi([c]) = n$; infine χ è iniettivo: se $\chi([c]) = 0$ allora $\widetilde{c}(1) = 0$ i.e. $\widetilde{c}$ è un cammino chiuso in $\mathbb{R}$; ma $\mathbb{R}$ è contraibile, quindi questo cammino è omotopo al cammino costante 0, sicché (per la (1) del lemma) $c(t) = f(0) = 1$ e quindi $[c]$ è l'identità di $\pi_1(S^1, 1)$.

Dunque χ è un isomorfismo di gruppi.

Dimostriamo infine il lemma: ne dimostreremo ambo gli enunciati allo stesso tempo. Scriveremo Y per $[0,1]$ oppure per $[0,1] \times [0,1]$, $\varphi : Y \longrightarrow S^1$ per c oppure per F e 0 per $0 \in [0,1]$ oppure per $(0,0) \in [0,1] \times [0,1]$.

Dato che Y è compatto e φ continua, è uniformemente continua (teorema di Heine–Cantor) i.e. esiste $\delta > 0$ tale che, se $|y - y'| < \delta$ allora

$$|\varphi(y) - \varphi(y')| < 1$$

In particolare $\varphi(y) \neq -\varphi(y')$ e quindi è ben definita la funzione

$$\lambda\left(\frac{\varphi(y)}{\varphi(y')}\right)$$

ove $\lambda : S^1 \setminus \{1\} \longrightarrow (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è la funzione che inverte f (determinazione del logaritmo naturale). Possiamo dunque trovare $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall y \in Y \quad |y| < N\delta$$

Poniamo allora

$$\widetilde{\varphi}(y) := \lambda\left(\frac{\varphi(y)}{\varphi\left(\frac{N-1}{N}y\right)}\right) + \lambda\left(\frac{\varphi\left(\frac{N-1}{N}y\right)}{\varphi\left(\frac{N-2}{N}y\right)}\right) + ... + \lambda\left(\frac{\varphi\left(\frac{1}{N}y\right)}{\varphi(0)}\right)$$

La funzione $\widetilde{\varphi} : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ è ovviamente continua e tale che

$$\widetilde{\varphi}(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad f \circ \widetilde{\varphi} = \varphi$$

Dimostriamone ora l'unicità: nel caso $\varphi = c$, se esistesse $\widetilde{c'} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\widetilde{c'}(0) = 0$ e $f \circ \widetilde{c'} = c$ allora $\widetilde{c} - \widetilde{c'}$ sarebbe una funzione continua da Y nel nucleo di f i.e. in $\mathbb{Z}$; ma Y è connesso, quindi anche la sua immagine per una mappa continua lo è, e se ne deduce che $\widetilde{c} - \widetilde{c'}$ è costante, i.e. $\widetilde{c} = \widetilde{c'}$.

Nel caso $\varphi = F$, $\widetilde{F}$ è una omotopia fra c e c': lo è infatti relativamente al sottoinsieme $\{0,1\}$ e, su $0 \times [0,1]$: $f \circ \widetilde{F} = F = 1$, quindi $\widetilde{F}(0 \times [0,1]) \subset \mathbb{Z}$ e quindi, di nuovo per connessione di, $\widetilde{F}(0 \times [0,1]) = 0$. In modo analogo anche $\widetilde{F}(1 \times [0,1])$ è costante.

QED

Come corollario diamo uno dei più famosi teoremi della topologia generale, una cui dimostrazione elementare si rivelerebbe sorprendentemente complicata.

2.5.15 Teorema (DEL PUNTO FISSO DI BROUWER) *Se* $E^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ *è la palla piena di centro l'origine e raggio 1 in* $\mathbb{R}^n$ *allora ogni mappa continua* $f : E^n \longrightarrow E^n$ *ha un punto fisso, i.e. esiste* $x \in E^n$ *tale che* $f(x) = x$*.*

Dimostreremo questo teorema solo per $n = 2$: il caso generale richiede (seppure nei suoi sviluppi elementari) la nozione di omologia.

Quello che ci serve è il seguente

2.5.16 Lemma *Il cerchio* S^1 *non è retratto di deformazione di* E^1*.*

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo che esista una ritrazione $r : E^2 \longrightarrow S^1$ tale che $R|_{S^1} = id_{S^1}$; allora, se $i : S^1 \longrightarrow E^2$ è l'inclusione, la mappa in omotopia $r_* i_*$ è l'identità del gruppo $\mathbb{Z}$. Ma è

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^1) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, equal] & \pi_1(E^2) \arrow[r, "r_*"] \arrow[d, equal] & \pi_1(S^1) \arrow[d, equal] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "i_*"] & 0 \arrow[r, "r_*"] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

e quindi $r_* = i_* = 0$, il che è assurdo.

QED

Il teorema di Brouwer si dimostra ora in modo agevolissimo: supponiamo che $f : E^2 \longrightarrow E^2$ non abbia nessun punto fisso: quindi per ogni $x \in E^2$, $f(x) \neq x$. Possiamo dunque considerare la retta che passa pe i punti $f(x)$ e x: questa retta incontrerà il cerchio S^1 (che è il bordo di E^2) in due punti; consideriamo fra questi due punti quello più vicino a x (stiamo su un segmento: basta prendere il punto di S^1 che è dall'altra parte di $f(x)$ rispetto a x) e chiamiamolo $r(x)$. Abbiamo così definito una funzione $r : E^2 \longrightarrow S^1$ che è continua (lo è f) e che ristretta a S^1 è l'identità, cioè una ritrazione di E^2 su S^1, che non può esistere per il teorema precedente.

QED