

# Note sulle ondicelle (aka wavelets)

PAOLO CARESSA

Roma, luglio 2007

Queste brevi note costituiscono un tentativo di riassumere alcune nozioni di base sulle ondicelle: si tratta dei miei appunti di studio sull'argomento, ragion per cui vi figurano poche nozioni ed esempi ma lavorati in dettaglio, usando il formalismo ed il linguaggio della teoria elementare di Fourier piuttosto che i dialetti della teoria dei segnali, delle serie storiche, etc.



# Indice

1	Notazioni e motivazioni dalla teoria di Fourier . . . . .	1
2	La trasformata di Fourier discreta . . . . .	5
3	Teoria di Fourier e teoria dei segnali . . . . .	6
4	Trasformata delle ondicelle . . . . .	12
5	Analisi di multirisoluzione . . . . .	16
6	Ondicelle indotte da multirisoluzioni . . . . .	25
7	Ondicelle ortogonali di Daubechies . . . . .	31
8	Trasformata discreta delle ondicelle . . . . .	37
	Bibliografia . . . . .	43

# 1 Notazioni e motivazioni dalla teoria di Fourier

La teoria di Fourier è stata iniziata nel 1807 da Joseph Fourier con l'intento di studiare la propagazione del calore e risolvere le equazioni a derivate parziali che la modellizzano<sup>1</sup>: matematicamente è stato con l'avvento della teoria dell'integrazione di Lebesgue, agli inizi del Novecento, e degli spazi di Hilbert, negli anni '20 del Novecento, che si è avuta una formalizzazione soddisfacente. A partire dagli anni '30, specie per opera di Norbert Wiener, la teoria di Fourier si è diffusa nel mondo ingegneristico e nelle altre scienze applicate. A tutto ciò corrisponde una gran confusione di terminologia: nella figura 1 riporto un piccolo dizionario, ispirato al glossario di Palle Jorgensen [6].

Matematica	Statistica	Fisica	Ingegneria
successione	paseggiata aleatoria	misurazione	serie storica
funzione $L^2$	variabile aleatoria	stato	segnale
operatore	processo	osservabile	scatola nera
$f$ vs. $\hat{f}$	variabile aleatoria vs. funzione caratteristica	posizione vs. momento	tempo vs. frequenza
sviluppo di Fourier	disintegrazione	decomposizione in frequenze	analisi
antitrasformata di Fourier	ricostruzione	sovrapposizione	sintesi
convoluzione	filtro	filtro	filtro
prodotto scalare	correlazione	matrice di transizione	transizione
sottospazio	sottospazio	banda	risoluzione
catena di sottospazi	filtrazione	scale di risoluzione	multirisoluzione

Figura 1: Alcuni sinonimi relativi alle ondicelle

In questo paragrafo vorrei fissare qualche notazione di teoria di Fourier, dandone per buone le nozioni di base (cfr. [7], [1], [2, §7, §8, §14]).

<sup>1</sup>In realtà già Eulero e d'Alembert avevano considerato la decomposizione di Fourier per l'equazione delle onde, sul finire del XVIII secolo.

La classica decomposizione in *serie di Fourier* di una funzione periodica  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  è data dalla serie, dipendente dalla variabile  $t \in [-\pi, \pi]$ ,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{int}$$

dove i *coefficienti di Fourier* sono definiti come

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds$$

(si tratta dei prodotti scalari  $\langle f, e^{-int} \rangle$  nello spazio di Hilbert  $L^2[-\pi, \pi]$ ). Una serie di Fourier, per tramite della formula di Eulero  $e^{it} = \cos t + i \sin t$ , si scrive come serie trigonometrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

dove  $a_n = 2\widehat{f}(n)$  e  $b_n = 2i\widehat{f}(n)$ .

La convergenza (quasi ovunque) della serie ha luogo per funzioni  $f$  a quadrato integrabile qualsiasi, il che è il contenuto di un difficile teorema di Carleson del 1965: per una discussione elementare sulle serie di Fourier (ma non sul teorema di Carleson) rimando a [7], [1], [2, §7.3].

Scomporre una funzione periodica in questo modo risulta utile in molte applicazioni: in particolare, se immaginiamo  $f$  come un qualche tipo di segnale dipendente dal tempo, possiamo esprimerla come sovrapposizione di segnali sinusoidali,  $e^{int} = \cos nt + i \sin nt$ , più semplici da analizzare. Il problema di questa decomposizione è che questi segnali elementari non sono localizzati, cioè le funzioni coseno e seno non hanno supporto compatto, il che in molte applicazioni rende difficoltoso, se non inutile, lo sviluppo in serie: le ondicelle sono una proposta alternativa alle funzioni  $e^{int}$  per scomporre una funzione in serie di segnali elementari.

Immaginando di estendere l'intervallo  $[-\pi, \pi]$  all'infinito, la serie di Fourier associata ad una funzione tende ad un integrale di Fourier: discutiamo brevemente alcune proprietà di quest'ultimo, cui faremo riferimento in queste note.

Data una funzione complessa  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , la sua trasformata di Fourier  $\widehat{f} : \widehat{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}$  è definita sullo spazio vettoriale duale<sup>2</sup>  $\widehat{\mathbb{R}}$  di  $\mathbb{R}$  come

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi(x)} dx$$

---

<sup>2</sup>Cioè lo spazio delle funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  lineari, vale a dire quelle della forma  $\xi(x) = ax$ : ovviamente  $\mathbb{R} \cong \widehat{\mathbb{R}}$ , ma la distinzione è importante.

La *formula di inversione di Fourier* ([7, §6.1.12], [1, §5.10], [2, §7.4])

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\widehat{\mathbb{R}}} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi(x)} d\xi$$

mostra che se  $\widehat{f} \in L^1(\widehat{\mathbb{R}})$  allora  $f$  deve essere limitata

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\widehat{\mathbb{R}}} |\widehat{f}(\xi)| |e^{i\xi(x)}| d\xi = \frac{1}{2\pi} \|\widehat{f}\|_1 < \infty$$

e continua

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\widehat{\mathbb{R}}} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi(x_1)} d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_{\widehat{\mathbb{R}}} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi(x_0)} d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\widehat{\mathbb{R}}} |\widehat{f}(\xi)| |e^{i\xi(x_1)} - e^{i\xi(x_0)}| d\xi \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\widehat{\mathbb{R}}} |\widehat{f}(\xi)| K |x_1 - x_0| d\xi \end{aligned}$$

(dato che  $\xi \rightarrow |e^{i\xi(x_1)} - e^{i\xi(x_0)}|$  è una funzione continua e limitata)

$$\leq \frac{K \|f\|_1}{2\pi} |x_1 - x_0|$$

In generale, la regolarità di  $f$  dipende da come  $|\widehat{f}(\xi)|$  va a zero all'infinito (che ci vada segue dal lemma di Riemann–Lebesgue): ad esempio

**Teorema 1.1** *Se  $f \in L^1(\mathbb{R})$  ed inoltre, se  $p \in \mathbb{N}$*

$$\int_{\widehat{\mathbb{R}}} |\widehat{f}(\xi)| (1 + |\xi|^p) d\xi < \infty$$

*allora  $f$  è limitata e  $p$  volte differenziabile con derivate limitate.*

**DIMOSTRAZIONE:** Abbiamo infatti che

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\widehat{\mathbb{R}}} |\widehat{f}(\xi)| \left| \frac{e^{i\xi(x+h)} - e^{i\xi(x)}}{h} \right| d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\widehat{\mathbb{R}}} |\widehat{f}(\xi)| |e^{i\xi(x)}| \left| \frac{e^{i\xi(h)} - 1}{h} \right| d\xi \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\widehat{\mathbb{R}}} |\widehat{f}(\xi)| \left| i\xi + \frac{h(i\xi)^2}{2} + \dots \right| d\xi \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\widehat{\mathbb{R}}} |\widehat{f}(\xi)| |\xi| \left[ 1 + |h| \left( \frac{|\xi|}{2} + \dots \right) \right] d\xi \end{aligned}$$

e quindi, per  $|h| \rightarrow 0$  la derivata in  $x$  esiste in quanto

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\widehat{\mathbb{R}}} |\widehat{f}(\xi)| |\xi| d\xi < \infty$$

come implicato dall'ipotesi. Per induzione il teorema segue nel caso generale, applicando il caso  $p$  alla derivata  $(p-1)$ -esima di  $f$ , la cui trasformata di Fourier è  $(i\xi)^{p-1} \widehat{f}(\xi)$ .

QED

In particolare, se  $\widehat{f}$  ha supporto compatto, allora  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Come ci si attende da questi risultati, se  $f$  non è continua in qualche punto, la complessità delle sue singolarità si riverbera nel decadimento all'infinito di  $|\widehat{f}(\xi)|$ .

**Esempio 1.2** *Alcune trasformate di Fourier fondamentali:*

$$\begin{aligned} F(x) = f(x-a) & \iff \widehat{F}(\xi) = e^{-i\xi a} \widehat{f}(\xi) \\ F(x) = f(x/a) & \iff \widehat{F}(\xi) = |a| \widehat{f}(a\xi) \\ F(x) = \frac{d^k f(x)}{dx^k} & \iff \widehat{F}(\xi) = (i\xi)^k \widehat{f}(\xi) \\ F(x) = \overline{f(x)} & \iff \widehat{F}(\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)} \\ f \in \mathbb{R} & \iff \widehat{f(-\xi)} = \overline{\widehat{f}(\xi)} \end{aligned}$$

Sfruttando argomenti di densità, precisamente il fatto che  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  è denso in  $L^2(\mathbb{R})$ , possiamo estendere la trasformata di Fourier a  $L^2(\mathbb{R})$ , sul quale consideriamo l'usuale struttura di spazio di Hilbert con prodotto

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Sullo spazio  $L^2(\widehat{\mathbb{R}})$  consideriamo invece il seguente prodotto scalare

$$\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi$$

Ricordiamo inoltre che la *convoluzione*  $f * g$  è definita come

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g(y-x) dy$$

**Teorema 1.3** *Siano  $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ :*

- (1)  $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$
- (2)  $\langle f, g \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle$  (formula di Parseval)
- (3)  $\|f\|^2 = \|\widehat{f}\|^2$  (formula di Plancherel)

In particolare: *la trasformata di Fourier è una isometria  $L^2(\mathbb{R}) \cong L^2(\widehat{\mathbb{R}})$ .*

## 2 La trasformata di Fourier discreta

La trasformata di Fourier, essendo definita come una trasformazione integrale, è, teoricamente, ottenuta con un passaggio al limite: ovviamente, nelle applicazioni al calcolatore, il passaggio al limite si arresta ad un certo livello di approssimazione e, dato che un integrale è *grosso modo* il limite di una somma, è facile immaginare come la trasformata possa approssimarsi con delle somme finite.

Possiamo essere più precisi, definendo una trasformata di Fourier discreta (DFT, acrostico di *Discrete Fourier Transform*) per sé presa, e mostrare come si possa considerare una approssimazione della trasformata di Fourier sulla retta reale.

Consideriamo dunque un intervallo  $[0, T]$  della retta reale, ed in esso un certo numero finito  $N$  di punti  $t_1, \dots, t_N$ : per semplicità consideriamo una griglia uniforme di punti  $t_j$ , vale a dire poniamo  $t_j = Tj/N$ , cioè consideriamo  $t_j$  come i punti equidistanti  $0, T/N, 2T/N, \dots, T$  di passo  $\Delta T = T/N$ . Se  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione della quale conosciamo i valori  $y_0 = f(t_0), \dots, y_{N-1} = f(t_{N-1})$ , possiamo associarle il polinomio trigonometrico definito sui punti  $t_j$  come

$$p_f(t_j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2\pi i j t_k / T} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2\pi i j k / N}$$

dove i *coefficienti di Fourier* di  $f$  sono definiti come

$$c_k = \sum_{h=0}^{N-1} f(t_h) e^{-2\pi i h k / N} = \sum_{h=0}^{N-1} y_h e^{-2\pi i h k / N}$$

Questa definizione è l'unica possibile in virtù delle relazioni di ortogonalità fra le funzioni  $e^{2\pi i j k / N}$ : queste ultime sono le formule

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k(j-h)/N} = \delta_{j,h}$$

e seguono dal fatto che  $1 + a + a^2 + \dots + a^{N-1} = (1 - a^N)/(1 - a)$  e che, ponendo  $a = e^{2\pi i/N}$ , da cui  $a^N = (e^{2\pi i/N})^N = 1$ , troviamo, per  $j \neq h$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k(j-h)/N} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a^{k(j-h)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (a^{j-h})^k \\ &= \frac{1 - (a^{j-h})^N}{N(1 - a^{j-h})} = \frac{1 - (a^N)^{j-h}}{N(1 - a^{j-h})} = 0 \end{aligned}$$

Invece, per  $j = h$  abbiamo  $(a^{j-h})^N = 1$  sicché la somma fa  $N$  e quindi divisa per  $N$  dà 1.

Usando questa ortogonalità possiamo ora immediatamente notare che

$$\begin{aligned} p_f(t_j) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2\pi i j k/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{h=0}^{N-1} y_h e^{-2\pi i h k/N} e^{2\pi i j k/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{h=0}^{N-1} y_h e^{2\pi i k(j-h)/N} = \sum_{h=0}^{N-1} y_h \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k(j-h)/N} \\ &= \sum_{h=0}^{N-1} y_h \delta_{h,j} = y_j \end{aligned}$$

e quindi la nostra definizione dei coefficienti di Fourier rende invertibile la trasformata di Fourier discreta per come l'abbiamo definita.

Il passaggio dal vettore  $(y_0, \dots, y_{N-1})$  al vettore  $(c_0, \dots, c_{N-1})$  è la DFT, mentre la sua inversa è il passaggio da  $(c_0, \dots, c_{N-1})$  a  $(y_0, \dots, y_{N-1})$ : per realizzare entrambi questi passaggi, esiste un algoritmo molto efficiente, la *trasformata di Fourier veloce* (FFT, acrostico di *Fast Fourier Transform*), che consente di ridurre il numero di operazioni della DFT (che è proporzionale a  $N^2$ ) a  $N \log_2 N$ , rendendo estremamente efficaci i metodi di Fourier al calcolatore elettronico.

### 3 Teoria di Fourier e teoria dei segnali

In teoria dei segnali, una funzione  $f \in L^2(\mathbb{R})$  è vista come un segnale dipendente dal tempo  $x \in \mathbb{R}$  la cui trasformata di Fourier è una funzione delle frequenze possibili  $\xi \in \widehat{\mathbb{R}}$  del segnale stesso: il problema che si pone, negli ambiti applicativi della teoria, è di trovare dei segnali  $f$  che siano localizzati nel tempo (cioè abbiano supporto in un intervallo limitato di  $\mathbb{R}$ ) e le cui trasformate di Fourier siano localizzate in un piccolo intorno di frequenze.

Per questo motivo gli usuali sistemi trigonometrici non sono adatti in quanto, sebbene siano localizzati nelle frequenze, non lo sono nei tempi<sup>3</sup>.

In generale pretendere di avere entrambe le caratteristiche non è banale: la discussione precedente ci informa del fatto che se vogliamo che  $|\widehat{f}(\xi)|$  decada velocemente per alte frequenze  $|\xi| \rightarrow \infty$ , è necessario supporre che  $f(x)$  sia molto regolare nella variabile temporale. Il seguente classico *teorema di Heisenberg–Weyl* afferma che non è possibile rendere arbitrariamente piccola la localizzazione dei tempi e delle frequenze contemporaneamente: data  $f \in L^2(\mathbb{R})$  e la sua trasformata di Fourier  $\widehat{f} \in L^2(\widehat{\mathbb{R}})$ , consideriamo le loro medie

$$\mu_f = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} x |f(x)|^2 dx, \quad \mu_{\widehat{f}} = \frac{1}{2\pi\|f\|^2} \int_{\widehat{\mathbb{R}}} \xi |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

e le varianze attorno a queste medie

$$\sigma_f = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} (x - \mu_f)^2 |f(x)|^2 dx, \quad \sigma_{\widehat{f}} = \frac{1}{\|\widehat{f}\|^2} \int_{\widehat{\mathbb{R}}} (\xi - \mu_{\widehat{f}})^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Queste quantità rappresentano una misura dell'indeterminazione dei valori di  $x$  e  $\xi$  rispettivamente: il principio di Heisenberg afferma che non si possono rendere entrambi arbitrariamente piccole.

**Teorema 3.1** *Se  $f \in L^2(\mathbb{R})$  allora  $\sigma_f \cdot \sigma_{\widehat{f}} \geq \frac{1}{4}$ .*

DIMOSTRAZIONE: Supporremo che  $f$  sia una funzione almeno derivabile una volta: familiari argomenti di densità dovrebbero bastare al lettore per convincersi della validità del teorema nel caso generale.

Per prima cosa dimostriamo il teorema nel caso di medie nulle: supponiamo cioè  $\mu_f = \mu_{\widehat{f}} = 0$ ; per farlo calcoliamo in due modi differenti l'integrale

$$I = \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathbb{R}} x f(x) \overline{f'(x)} dx + \int_{\mathbb{R}} x \overline{f(x)} f'(x) dx \right]$$

Da un lato, integriamo per parti trovando (tenendo conto che  $f$  decresce all'infinito più rapidamente di qualsiasi polinomio)

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathbb{R}} x f(x) d\overline{f(x)} + \int_{\mathbb{R}} x \overline{f(x)} df(x) \right] \\ &= \frac{1}{2} x |f(x)|^2 \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (|f(x)|^2 + x f'(x) \overline{f(x)}) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} x |f(x)|^2 \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (|f(x)|^2 + x \overline{f'(x)} f(x)) dx = -\|f\|^2 - I \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Ad esempio la trasformata di Fourier di  $\sin ax$  è la misura  $i\pi(\delta_{\xi+a} - \delta_{\xi-a})$  concentrata in due punti!

cioè  $I = -\|f\|^2/2$ . D'altro canto, usando la disuguaglianza di Cauchy–Schwartz e l'identità di Plancherel

$$\begin{aligned} |I|^2 &\leq \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \|\widehat{f}'\|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \frac{1}{2\pi} \int_{\widehat{\mathbb{R}}} |i\xi \widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|f\|^4 \sigma_f \sigma_{\widehat{f}} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato che

$$\frac{1}{4} = \frac{|I|^2}{\|f\|^4} \leq \sigma_f \sigma_{\widehat{f}}$$

cioè la disuguaglianza di Heisenberg nel caso  $\mu_f = \mu_{\widehat{f}} = 0$ .

Nel caso generale, consideriamo la funzione ausiliaria  $g(x) = e^{-i\mu_{\widehat{f}}x} f(x + \mu_f)$ , la cui media è nulla, dato che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x |g(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} x |f(x + \mu_f)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} y |f(y)|^2 dy - \mu_f \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 dy \\ &= \|f\|^2 \mu_f - \mu_f \|f\|^2 = 0 \end{aligned}$$

Inoltre la trasformata di Fourier di  $g$  è

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x + \mu_f) e^{-ix(\xi + \mu_{\widehat{f}})} dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i(y - \mu_f)(\xi + \mu_{\widehat{f}})} dy \\ &= e^{i\mu_f(\xi + \mu_{\widehat{f}})} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-iy(\xi + \mu_{\widehat{f}})} dy = e^{i\mu_f(\xi + \mu_{\widehat{f}})} \widehat{f}(\xi + \mu_{\widehat{f}}) \end{aligned}$$

e quindi, come per  $g$ , abbiamo che anche  $\widehat{g}$  ha media nulla:

$$\int_{\widehat{\mathbb{R}}} \xi |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\widehat{\mathbb{R}}} \xi |\widehat{f}(\xi + \mu_{\widehat{f}})|^2 d\xi = \int_{\widehat{\mathbb{R}}} \rho |\widehat{f}(\rho)|^2 d\rho - \mu_{\widehat{f}} \|\widehat{f}\|^2 = 0$$

Dunque possiamo applicare il teorema a  $g$ :  $\frac{1}{4} \leq \sigma_g \sigma_{\widehat{g}}$ . A questo punto non resta che notare che

$$\|f\|^2 \sigma_f = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu_f) |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu_f) |g(x - \mu_f)|^2 dx = \|g\|^2 \sigma_g$$

e, analogamente,

$$\|\widehat{f}\|^2 \sigma_{\widehat{f}} = \|\widehat{g}\|^2 \sigma_{\widehat{g}}$$

per dedurre che (dopo aver notato come dai conti precedenti segua immediatamente che  $\|g\| = \|f\|$  e  $\|\widehat{g}\| = \|\widehat{f}\|$ )

$$\frac{1}{4} \leq \frac{\|\widehat{f}\|^2 \|f\|^2}{\|\widehat{g}\|^2 \|g\|^2} \sigma_f \sigma_{\widehat{f}} = \sigma_f \sigma_{\widehat{f}}$$

QED

Tuttavia, le funzioni utilizzate normalmente per sviluppare in serie una funzione periodica, ad esempio, sono ben lungi dal giungere ai limiti imposti da questo teorema: in particolare, trattandosi di funzioni trigonometriche, non sono localizzate nell'asse temporale in nessun intervallo. Le ondicelle costituiscono una proposta alternativa ai sistemi trigonometrici, sono cioè delle basi degli spazi funzionali che posseggono proprietà di localizzazione più stringenti.

Un primo passo è capire quando la disuguaglianza di Heisenberg–Weyl è in realtà un'uguaglianza: questo avviene se e solo se

$$f(x) = ce^{i\mu_f x} \exp\left(-\frac{(x - \mu_f)^2}{2h^2}\right)$$

dove  $c$  è una costante tale che  $|c| = h^{-1/2}\pi^{-1/4}$ . L'idea è quindi di costruire degli *atomi tempo-frequenza*, cioè delle funzioni

$$f(x) = e^{i\xi_0} u(x - x_0)$$

dove  $u$  è una funzione ben localizzata sia nella variabile temporale che nella variabile frequenza: questa idea, dovuta a John von Neumann e Dennis Gabor, consiste nel determinare basi di  $L^2(\mathbb{R})$  formate da atomi tempo-frequenza. Discuteremo nei prossimi paragrafi alcune costruzioni che permettono di ottenere queste basi, passando appunto per le ondicelle: è interessante tuttavia discutere una delle prime soluzioni a questo problema, fornita dalla teoria di Shannon.

L'obiettivo classico della teoria della comunicazione di Shannon è studiare la trasmissione di una informazione continua lungo un canale discreto (cfr. [11]): ad esempio la trasmissione di un suono richiede che il segnale sonoro continuo sia campionato in tempi discreti per essere trasmesso digitalmente. Per farlo, il segnale continuo viene campionato, cioè si fissa un intervallo temporale  $T$  e si rileva un valore di  $f(t)$  solo ai multipli interi di  $T$ , ottenendo così una successione che rappresenta la funzione di partenza tanto più precisamente quanto più  $T$  è piccolo. Dall'altra parte, nello spazio  $\widehat{\mathbb{R}}$  delle frequenze, si devono ignorare le frequenze che non fanno parte del segnale ma sono “rumore di fondo”: ad esempio, comunicando suoni udibili, si possono ignorare le frequenze superiori a 20000Hz che sono ultrasoniche (si rammenti che il tempo è inversamente proporzionale alla frequenza in Fisica).

Dal punto di vista matematico questo può farsi considerando segnali appartenenti allo spazio dei segnali che ignorano le frequenze maggiori di  $\nu$ :

$$\mathcal{H}_\nu = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{supp } \widehat{f} \subset [-\nu, \nu] \right\}$$

Questo spazio, assieme ad un segnale  $f$ , contiene tutte le sue traslazioni  $f_t(x) = f(x - t)$ , ed inoltre le sue funzioni presentano un carattere di regolarità stabilito dal celeberrimo *teorema di Paley–Wiener*, una cui versione recita (cfr. [7, §VI.7]):

**Teorema di Paley–Wiener 3.2**  $f \in \mathcal{H}_\nu$  se e solo se è la restrizione a  $\mathbb{R}$  di una funzione  $F$  olomorfa in una striscia  $S_\nu = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \nu\}$  del piano complesso e tale che esista una costante  $C$  in modo che

$$\forall y \in (-\nu, \nu) \quad \int_{\mathbb{R}} |F(x + iy)|^2 dx < C e^{2|y|\nu}$$

Questo teorema è un altro notevole esempio di come il modo di  $f$  di andare a zero all'infinito (in questo caso è zero fuori da un intervallo finito!) si riflette nella regolarità di  $\widehat{f}$ , che in questo caso è così regolare da essere la restrizione di una funzione olomorfa con proprietà di finitezza nella striscia dove è definita.

Si noti che  $\mathcal{H}_\nu$  è uno spazio di Hilbert separabile, ed è isomorfo a  $L^2[-\nu, \nu]$  per tramite della trasformata di Fourier; se  $\widehat{f} \in L^2[-\nu, \nu]$ , allora possiamo definire

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\nu}^{\nu} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi z} d\xi$$

per  $z \in S_\nu$ : se  $z \in \mathbb{R}$  otteniamo  $f$  in virtù della formula di inversione di Fourier, ed il teorema di Paley–Wiener afferma che  $F$  è in generale olomorfa sulla striscia  $S_\nu$ .

Una base di  $\mathcal{H}_\nu$  è fornita dal *teorema di campionamento*<sup>4</sup>: consideriamo la *funzione di campionamento di Shannon*

$$w_\nu(x) = \frac{\sin(\nu x)}{\nu x}$$

la cui trasformata di Fourier è<sup>5</sup>  $\widehat{w}_\nu(\xi) = (\pi/\nu) \mathbf{1}_{[-\nu, \nu]}$  dove, probabilisticamente, definiamo la *funzione indicatore* di un insieme  $X$  come  $\mathbf{1}_X(x) = 0$  se  $x \notin X$  e  $\mathbf{1}_X(x) = 1$  se  $x \in X$ .

<sup>4</sup>Questo teorema è enunciato nella forma che ci interessa da Claude Shannon [11]: questi riconosce esplicitamente che il teorema già era stato dimostrato dai matematici, citando E.T. Whittaker; in realtà lo si può attribuire anche a E. Borel, V.A. Kotel'nikov, S.K. Krishnan, H. Raabe, I. Someya, solo per citarne alcuni.

<sup>5</sup>Infatti l'antitrasformata di Fourier di  $\mathbf{1}_{[-\nu, \nu]}$  è  $(\sin \nu x)/(\pi x)$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-\nu, \nu]} e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\nu}^{\nu} e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin \xi x}{x} - i \frac{\cos \xi x}{x} \right]_{-\nu}^{\nu} = \frac{\sin \nu x}{\pi x}$$

**Teorema di campionamento 3.3** *La famiglia  $\{w_\nu(x - k\pi/\nu)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  è una base ortonormale di  $\mathcal{H}_\nu$ .*

DIMOSTRAZIONE: Cominciamo col notare che, definendo  $w_{\nu,k}(x) = w_\nu(x - k\pi/\nu)$ , si ha che  $\widehat{w_{\nu,k}} = (\pi/\nu)e^{-ik\pi\xi/\nu}\mathbf{1}_{[-1,1]}$ ; infatti

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} w_{\nu,k} e^{-i\xi x} dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\nu x - k\pi)}{\nu x - k\pi} e^{-i\xi x} dx = \frac{e^{-i\xi k\pi/\nu}}{\nu} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin y}{y} e^{-i\xi y/\nu} dy \\ &= \frac{e^{-i\xi k\pi/\nu}}{\nu} \widehat{w_1}(\xi/\nu) = \frac{\pi}{\nu} e^{-i\xi k\pi/\nu} \mathbf{1}_{[-1,1]} \end{aligned}$$

Dunque le antitrasformate di Fourier degli elementi  $\{(\pi/\nu)e^{-ikx\pi/\nu}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  (che sono una base ortonormale di  $L^2[-\nu, \nu]$ ) sono  $\{w_{\nu,k}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , e, dato che la trasformata di Fourier è una isometria, ne deduciamo che si tratta di una base ortonormale di  $\mathcal{H}_\nu$ .

QED

Questo teorema ci dice quindi che, se consideriamo una funzione  $f \in \mathcal{H}_\nu$ , possiamo scomporla come

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, w_{\nu,k} \rangle w_{\nu,k}$$

I coefficienti di Fourier  $\langle f, w_{\nu,k} \rangle$  sono, in virtù dell'identità di Parseval e della formula di inversione di Fourier,

$$\begin{aligned} \langle f, w_{\nu,k} \rangle &= \langle \widehat{f}, \widehat{w_{\nu,k}} \rangle = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{\nu} \int_{-1}^1 \widehat{f}(\xi) \overline{e^{-i\xi k\pi/\nu}} d\xi \\ &= \frac{\pi}{\nu} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \widehat{f}(\xi) e^{i\xi k\pi/\nu} d\xi = \frac{\pi}{\nu} f(k\pi/\nu) \end{aligned}$$

Possiamo pertanto riformulare il teorema di campionamento nella sua forma classica, quale figura nei lavori di Shannon e Kotel'nikov:

**Corollario 3.4**  $\forall f \in \mathcal{H}_\nu \quad f(x) = \frac{\pi}{\nu} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k\pi}{\nu}\right) \frac{\sin(\nu x - k\pi)}{\nu x - k\pi}$ .

Il teorema di campionamento afferma in sostanza che gli elementi di  $\mathcal{H}_\nu$  sono, come funzioni, completamente determinati una volta che i loro valori siano noti sulla successione  $k\pi/\nu$ , il che giustifica il termine “teorema di campionamento”: la funzione  $f$  è ricostruita completamente a partire da alcuni campioni dei suoi valori, campionati appunto ogni  $\pi/\nu$  volte.

Proviamo ora a costruire una base di atomi tempo frequenza usando le funzioni che compaiono nel teorema di campionamento nel caso  $\nu = \pi$ :

**Corollario 3.5** *La famiglia di atomi tempo-frequenza*

$$e^{2\pi i n x} w_{\pi, k}(x - k) = e^{2\pi i n x} \frac{\sin(\pi(x - k))}{\pi x(x - k)}$$

è una base di  $L^2(\mathbb{R})$ .

DIMOSTRAZIONE: Prendiamo  $f \in L^2(\mathbb{R})$  e definiamo la famiglia  $\{f_n(x)\}$  come

$$\widehat{f}_n(\xi) = \mathbf{1}_{[2\pi n - \pi, 2\pi n + \pi)} \widehat{f}(\xi)$$

In questo modo abbiamo che  $\widehat{f} = \sum_n \widehat{f}_n$ , quindi anche  $f = \sum_n f_n$ . Le funzioni  $f_n$  sono fra loro ortogonali: se infatti  $n \neq m$

$$\langle f_n, f_m \rangle = \langle \widehat{f}_n, \widehat{f}_m \rangle = \int_{2\pi n - \pi}^{2\pi n + \pi} \mathbf{1}_{[2\pi m - \pi, 2\pi m + \pi)} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = 0$$

Inoltre, prendendo l'antitrasformata di Fourier di  $\widehat{f}_n$ ,

$$f_n(x) = e^{2\pi i n x} g_n(x)$$

dove  $g_n \in \mathcal{H}_\pi$ , pertanto, per il teorema di campionamento,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n x} g_n(x) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n x} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_n(k) \frac{\sin(\pi x - k\pi)}{\pi x - k\pi} \\ &= \sum_{n, k \in \mathbb{Z}} g_n(k) e^{2\pi i n x} w_{\pi, k}(x - k) \end{aligned}$$

QED

Questo tipo di base presenta comunque degli inconvenienti: per prima cosa le funzioni  $w_{n, m}$  si comportano in modo molto irregolare intorno a zero; inoltre gli atomi tempo-frequenza così ottenuti hanno tutti le stesse durate. Le basi indotte dalle ondicelle, che definiremo nei prossimi paragrafi, risolvono questi inconvenienti delle funzioni di campionamento di Shannon.

## 4 Trasformata delle ondicelle

Come primo approccio alle ondicelle, definiamole con lo scopo di introdurre una trasformata analoga a quella di Fourier ma che consenta di decomporre una funzione in modo alternativo e più adatto agli obiettivi di ottenere trasformate più localizzate di quanto non avvenga nel caso di Fourier.

**Definizione 4.1** Una ondicella<sup>6</sup> è una funzione  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  tale che

$$(1) \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0.$$

$$(2) \|\psi\| = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |\psi(t)|^2 dt} = 1.$$

Si noti che la prima condizione può formularsi come  $\widehat{\psi}(0) = 0$ .

### Esempio 4.2

- (1) È relativamente semplice costruire delle ondicelle (se non si richiedono condizioni di regolarità): un esempio è il cosiddetto cappello francese, che è definito come la funzione

$$\psi(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{3} & \text{se } |x| < 1 \\ -1/(2\sqrt{3}) & \text{se } 1 \leq |x| < 3 \\ 0 & \text{se } 3 \leq |x| \end{cases}$$

Si tratta evidentemente di una ondicella, come si vede integrando questa funzione costante a tratti.

- (2) Una ondicella che, come funzione, sia differenziabile, è il cosiddetto cappello messicano: partiamo dalla funzione

$$\rho(t) = (t^2 - 1)e^{-t^2/2}$$

Intanto, dato che la derivata di  $-te^{-t^2/2}$  è proprio  $\rho(t)$  (che infatti è la derivata seconda della funzione gaussiana  $e^{-t^2/2}$ ), abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(t) dt = \left[ -te^{-t^2/2} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Tuttavia questa non è una funzione normalizzata, dato che<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} \|\rho\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} (t^2 - 1)^2 e^{-t^2} dt = \int_{\mathbb{R}} (t^4 - 2t^2 + 1) e^{-t^2} dt \\ &= \frac{3}{4}\sqrt{\pi} - 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \sqrt{\pi} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Questo strano termine è la traduzione del francese *ondelette*, coniato nel 1981 da Jean Morlet, un ingegnere geofisico che si occupava di estrazioni petrolifere, che notò come le onde sismiche si potessero scomporre in “ondicelle di forma piccola”. Una traduzione alternativa in italiano è “ondina”, termine dal buffo sapore arcadico.

<sup>7</sup>Ricordiamo che

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}, \quad \int_{\mathbb{R}} t^{2n} e^{-t^2} dt = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}$$

Per avere una funzione normalizzata poniamo dunque

$$\psi(t) = \frac{1}{\|\rho\|_2} \rho(t) = \frac{2}{\pi^{1/4} \sqrt{3}} (t^2 - 1) e^{-t^2/2}$$

Notiamo che  $\psi$  è una funzione reale.

(3) L'ondicella di Morlet si definisce come

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{i\omega_0 t} e^{-t^2/2}$$

ed è semplicemente un multiplo della funzione gaussiana. Si noti che questa è una funzione complessa.

A partire da una ondicella  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ , possiamo definire la famiglia di funzioni, per  $(r, s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ ,

$$\psi_{r,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{r}} \psi\left(\frac{t-s}{r}\right)$$

che chiamiamo *ondicelle figlie* dell'*ondicella madre*  $\psi$ . Un semplice cambiamento di variabile negli integrali mostra che

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{r,s}(t) dt = 0, \quad \|\psi_{r,s}\|_2^2 = 1$$

Al variare di  $(r, s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ , possiamo considerare i coefficienti di Fourier di una qualsiasi funzione in  $L^2$  rispetto alle ondicelle figlie:

$$\mathcal{W}f(r, s) = \langle f, \psi_{r,s} \rangle$$

L'identità di Parseval ci consente pure di scrivere

$$\mathcal{W}f(r, s) = \langle \widehat{f}, \widehat{\psi_{r,s}} \rangle$$

Chiamiamo *trasformata delle ondicelle* associata ad una ondicella  $\psi$  la funzione di due variabili

$$\mathcal{W}f(r, s) = \langle f, \psi_{r,s} \rangle = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-s}{r}\right)} dt$$

In qualche senso, la trasformata delle ondicelle dipende dalle coppie tempo/frequenza e quindi ha qualche chance di permettere una localizzazione simultanea di queste due variabili: ovviamente, per essere utile, una trasformata deve essere, almeno per qualche classe di funzioni, invertibile, e le condizioni di invertibilità della trasformata delle ondicelle sono date dal *teorema di Calderón–Grossmann–Morlet*:

**Teorema 4.3** *Se  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  ha valori reali e soddisfa il criterio di ammissibilità*

$$0 < C_\psi = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\widehat{\psi}(r)|^2}{r} dr < \infty$$

allora

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \mathcal{W}f(r, s) \frac{1}{\sqrt{r}} \psi\left(\frac{t-s}{r}\right) \frac{1}{r^2} dr \otimes ds$$

$$\|f\|^2 = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} |\mathcal{W}f(r, s)|^2 \frac{1}{r^2} dr \otimes ds$$

DIMOSTRAZIONE: Per dimostrare la (1) facciamo vedere che le trasformate di Fourier dei due membri coincidono: prima rielaboriamo l'integrale a destra in termini di convoluzione; ponendo  $\psi_r(t) = \psi(t/r)/\sqrt{r}$ , abbiamo che

$$f * \overline{\psi_r}(t) = \mathcal{W}f(r, s)$$

pertanto

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}f(r, s) \frac{1}{\sqrt{r}} \psi\left(\frac{t-s}{r}\right) ds = (f * \overline{\psi_r}) * \psi_r(t) = f * (\overline{\psi_r} * \psi_r)(t)$$

e quindi (usando il teorema di Fubini, come lecito per le ipotesi sulle nostre funzioni)

$$\frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \mathcal{W}f(r, s) \frac{1}{\sqrt{r}} \psi\left(\frac{t-s}{r}\right) \frac{1}{r^2} dr \otimes ds = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}_+} f * (\overline{\psi_r} * \psi_r)(t) \frac{dr}{r^2}$$

Passando ora alle trasformate di Fourier, tenendo conto che<sup>8</sup>  $\widehat{\psi_r}(t) = \sqrt{r} \widehat{\psi}(rt)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}_+} \widehat{f}(t) \cdot \widehat{\overline{\psi_r}}(t) \cdot \widehat{\psi_r}(t) \frac{dr}{r^2} &= \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}_+} r \widehat{f}(t) \cdot \widehat{\psi}(rt) \cdot \widehat{\psi}(rt) \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{\widehat{f}(t)}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}_+} |\widehat{\psi}(rt)|^2 \frac{dr}{r} = \frac{\widehat{f}(t)}{C_\psi} C_\psi = \widehat{f}(t) \end{aligned}$$

Poiché la trasformata di Fourier è un isomorfismo  $L^2(\mathbb{R}) \cong L^2(\widehat{\mathbb{R}})$ , ne segue l'equazione (1).

---

<sup>8</sup>Infatti

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_r(\xi) e^{-it\xi} d\xi = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{\xi}{r}\right) e^{-it\xi} d\xi = \frac{r}{\sqrt{r}} \int_{\mathbb{R}} \psi(\rho) e^{-itr\rho} d\rho = \sqrt{r} \widehat{\psi}(rt)$$

Dimostriamo ora la (2); utilizzeremo ancora il fatto che  $\mathcal{W}f(r, s) = f * \overline{\psi_r}$ , il teorema di Fubini e l'identità di Plancherel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} |\mathcal{W}f(r, s)|^2 \frac{1}{r^2} dr \otimes ds &= \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} |f * \overline{\psi_r}|^2 ds \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}_+} \|f * \overline{\psi_r}\|_2^2 \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(s)|^2 |\widehat{\psi_r}|^2 ds \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(s)|^2 \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\widehat{\psi_r}|^2}{r^2} dr ds = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(s)|^2 C_\psi ds \\ &= \|\widehat{f}\|^2 = \|f\|^2 \end{aligned}$$

QED

Notiamo che il criterio di ammissibilità implica che  $\widehat{\psi}(0) = 0$  (altrimenti l'integrale non potrebbe convergere per  $r \rightarrow 0^+$ ), cioè che la funzione ha media nulla: viceversa, se una funzione ha media nulla ed è almeno  $C^1(\mathbb{R})$  soddisfa certamente il criterio di ammissibilità.

Quindi, per garantire l'applicabilità del teorema precedente, basta considerare una ondicella  $\psi$  che verifichi una condizione di decrescenza all'infinito del tipo

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)| (1 + |x|^p) dx$$

con  $p \geq 1$ .

Nelle applicazioni, spesso si è costretti a considerare dei sottoinsiemi di  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  come valori sui quali considerare  $\mathcal{W}f(r, s)$ , e conseguentemente effettuare la “ricostruzione” del segnale usando il teorema di Calderón–Grossmann–Morlet: in particolare, ha interesse ottenere degli analoghi discreti della trasformata delle ondicelle, esattamente come, rispetto alla trasformata di Fourier, ha interesse anche considerare lo sviluppo in serie di Fourier delle funzioni periodiche.

## 5 Analisi di multirisoluzione

Abbiamo definito le ondicelle come funzioni soggette a certe condizioni che consentono di decomporre una funzione  $L^2$  per mezzo di una trasformata invertibile: tuttavia le ondicelle sono anche famose per fornire delle basi ortonormali di  $L^2(\mathbb{R})$ , e questo si ottiene discretizzando i parametri  $r$  e  $s$  da cui dipendono le ondicelle figlie di una fissata ondicella madre  $\psi$ . Questo secondo approccio, che riposa sul concetto di multirisoluzione introdotto da Yves

Meyer e Stephane Mallat, consiste nel formulare condizioni sufficienti affinché la famiglia

$$\{\psi_{n,m} = 2^{n/2}\psi(2^n x - m)\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$$

sia una base ortonormale di  $L^2(\mathbb{R})$  (questa famiglia è ottenuta dalle ondicelle figlie di  $\psi$  discretizzandone gli argomenti:  $r = 2^{-n}$ ,  $s = m2^n$ ).

L'idea consiste nel decomporre opportunamente lo spazio  $L^2(\mathbb{R})$  usando la funzione  $\psi$ , e quindi stabilire dei risultati generali di decomposizione di una funzione in "serie di ondicelle".

**Definizione 5.1** *Una base di Riesz di uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  separabile è una successione  $\{s_k\}$  di elementi di  $\mathcal{H}$  tali che per ogni  $f \in \mathcal{H}$  esistano unici  $\{c_k\} \subset \mathbb{C}$  in modo che*

$$f = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k s_k$$

e ci siano due costanti  $A, B > 0$  tali che

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |c_k|^2 \leq B\|f\|^2$$

Una base di Riesz è quindi una generalizzazione di una base ortonormale: si tratta di un insieme di generatori non più ortogonale, ma che può essere usato in modo simile; il vantaggio delle basi di Riesz è che sono più semplici da trovare.

**Definizione 5.2** *Una multirisoluzione<sup>9</sup> di  $L^2(\mathbb{R})$  è una coppia  $(\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \varphi)$  dove  $\{V_n\}$  è una famiglia di sottospazi chiusi di  $L^2(\mathbb{R})$  e  $\varphi \in V_0$  una funzione tali che:*

- (1)  $V_n \subset V_{n+1}$ ;
- (2)  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n$  è denso in  $L^2(\mathbb{R})$  e  $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} V_n = 0$ ;
- (3)  $[x \mapsto f(x)] \in V_n \iff [x \mapsto f(2x)] \in V_{n+1}$ ;
- (4)  $\varphi \in V_0$  è una funzione che non abbia media nulla e tale che la famiglia

$$\{\varphi(x - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$$

sia una base ortonormale di  $V_0$

$\varphi$  si dice la funzione di scala della multirisoluzione.

<sup>9</sup>La locuzione completa sarebbe *analisi (di) multirisoluzione*, AMR.

Seguendo [1] adottiamo la seguente terminologia per una generalizzazione talvolta indispensabile del concetto di multirisoluzione:

**Definizione 5.3** Una multirisoluzione di Riesz di  $L^2(\mathbb{R})$  è una coppia  $(\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \varphi)$  dove  $\{V_n\}$  è una famiglia di sottospazi chiusi di  $L^2(\mathbb{R})$  e  $\varphi \in V_0$  una funzione tali che le (1)-(3) della definizione di multirisoluzione siano soddisfatte e tale che

(4')  $\varphi \in V_0$  è una funzione che non abbia media nulla e tale che la famiglia

$$\{\varphi(x - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$$

sia una base di Riesz di  $V_0$

I sottospazi  $V_i$  vanno pensati come delle “griglie” di ingrandimento: intuitivamente, gli elementi di  $V_n$  sono utilizzati per stabilire un livello di granularità nel quale studiare un segnale, cioè una funzione  $L^2(\mathbb{R})$ , ad una risoluzione di al più  $2^{-n}$  (più  $n$  cresce e più la risoluzione è fine). Quindi la condizione (1) è una condizione di “causalità”: infittendo la griglia aumentiamo la nostra capacità risolutiva senza perdere quelle meno fini. La condizione (2) sancisce invece una sorta di completezza: dobbiamo immaginare un elemento  $V_n$  della successione di sottospazi come una “griglia” di risoluzione  $2^{-n}$ . Al crescere di  $n$ , la griglia  $V_n$  diviene sempre più “fine”, nel senso che le sue maglie dimezzano di spessore rispetto alla griglia precedente, questo in sostanza afferma la (3).

**Esempio 5.4** Gli spazi di funzioni costanti a tratti costituiscono gli esempi forse più elementari di multirisoluzioni: precisamente definiamo

$$V_n = \left\{ \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{n,m} \mathbf{1}_{[m2^{-n}, (m+1)2^{-n})} \right\}_{a_{n,m} \in \mathbb{C}}$$

Come funzione di scala possiamo prendere

$$\varphi = \mathbf{1}_{[0,1)}$$

Evidentemente, se  $g$  è costante su un intervallo lo è anche su tutti i suoi sottointervalli, quindi  $V_n \subset V_{n+1}$ ; che l'unione dei  $V_n$  sia densa in  $L^2(\mathbb{R})$  è un fatto generale della teoria dell'integrazione, mentre ovviamente l'unica funzione che è costante su ciascun intervallo è quella nulla. Inoltre abbiamo che

$$\mathbf{1}_{[0,1)}(x - m) = \mathbf{1}_{[m, m+1)}(x)$$

e quindi, dato che ogni funzione misurabile può esprimersi come (cfr. [2, §4])

$$f = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m \mathbf{1}_{[m, m+1)}$$

dove la successione  $\{a_m\}$  è in  $\ell^2(\mathbb{Z})$  se e solo se<sup>10</sup>  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , abbiamo che le  $\{\mathbf{1}_{[m, m+1)}\}$  formano una base ortonormale (e, a fortiori, di Riesz).

Naturalmente vorremmo delle classi di funzioni più regolari di quelle costanti a tratti: fra poco daremo degli altri esempi. Per il momento lavoriamo un po' sulla definizione di multirisoluzione.

Cominciamo col dare una caratterizzazione delle basi di Riesz:

**Teorema 5.5** *Se  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ , la famiglia  $\{\varphi(x - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$  è una base di Riesz di un sottospazio chiuso  $V \subset L^2(\mathbb{R})$  se e solo se:*

- (1)  $\overline{\{\varphi(x - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}} = V$
- (2)  $\exists A, B > 0 \forall \xi \in [-\pi, \pi] \quad \frac{1}{B} \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2m\pi)|^2 \leq \frac{1}{A}.$

**DIMOSTRAZIONE:** Notiamo per prima cosa che la (1) è richiesta anche dall'essere una base di Riesz, quindi è una ipotesi per entrambe le condizioni; in particolare questa ipotesi, per ogni  $f \in V$ , la (1) ci consente di scrivere

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m \varphi(x - m)$$

Prendendo la trasformata di Fourier troviamo

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m \int_{\mathbb{R}} \varphi(x - m) e^{-ix\xi} dx = \widehat{\varphi}(\xi) \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m e^{-im\xi}$$

Cioè  $\widehat{f}$  è prodotto di  $\widehat{\varphi}$  per una funzione  $\widehat{g}$  periodica espressa per tramite del suo sviluppo in serie di Fourier:

$$f_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{g}(x) e^{imx} dx$$

---

<sup>10</sup>Rammentiamo che una successione  $\{s_n\}$  è in  $\ell^p(\mathbb{Z})$  se e solo se la somma della serie  $\sum_n |s_n|^p$  è finita; in particolare, la norma  $\ell^2$  di una successione è il numero  $\|s\|_{\ell^2} = (\sum_n |s_n|^2)^{1/2}$ .

per cui possiamo calcolare la norma di  $f$  usando il teorema di Plancherel, e tenendo conto che  $\widehat{g}$  è periodica di periodo  $2\pi$ ,

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \|\widehat{f}\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\widehat{\mathbb{R}}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(\xi + 2m\pi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2m\pi)|^2 |\widehat{g}(\xi + 2m\pi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\widehat{g}(\xi)|^2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2m\pi)|^2 d\xi\end{aligned}$$

Torniamo ora alla dimostrazione del teorema: se  $\{\varphi(x - m)\}$  è una base di Riesz allora, oltre alla (1), soddisfa la

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} |f_m|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \leq B\|f\|^2$$

cioè, tenendo conto dell'espressione per  $\|f\|^2$  appena ricavata, la

$$A \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2m\pi)|^2 \leq 1 \leq B \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2m\pi)|^2$$

(per quasi ogni  $\xi$ ) vale a dire la (2). Il ragionamento inverso mostra che se vale la (2) allora  $\{\varphi(x - m)\}$  è una base di Riesz (che si tratti di una famiglia densa segue immediatamente dalla densità del sistema trigonometrico: infatti se  $f = 0$  allora  $\widehat{f} = 0$  e quindi  $f_m = 0$  per ogni  $m$ , stante le relazioni precedenti).

QED

Nel caso  $A = B = 1$  la base di Riesz è in realtà un sistema ortonormale, quindi ne deduciamo il

**Corollario 5.6**  $\{\varphi(x - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$  è un sistema ortonormale in  $L^2(\mathbb{R})$  se e solo se

$$\forall \xi \in \widehat{\mathbb{R}} \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2m\pi)|^2 = 1$$

(questo corollario potrebbe dimostrarsi direttamente usando la formula di sommazione di Poisson).

Concentriamoci ora sul ruolo delle funzioni di scala: se  $(\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \varphi)$  è una multirisoluzione di Riesz, dato che  $\varphi \in V_1$  (avendosi  $V_0 \subset V_1$ ), la funzione

$[x \mapsto \varphi(x/2)]$  sta in  $V_0$  per la (3), sicché, essendo  $\varphi(x - m)$  una base di Riesz, possiamo scrivere

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m \varphi(x - m)$$

Abbiamo quindi, ponendo  $h_m = a_m/2$ , l'equazione di raffinamento [5] o equazione di dilatazione [12] (il motivo di questa terminologia sarà chiaro fra breve):

**Teorema 5.7**  $\varphi(x) = 2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m \varphi(2x - m).$

Una semplice sostituzione  $y = 2^{n-1}x - m$  permette di verificare il

**Corollario 5.8** *Se poniamo  $\varphi_{n,m}(x) = 2^{n/2} \varphi(2^n x - m)$  allora*

$$\varphi_{n,m}(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2m} \varphi_{n+1,k}(x)$$

In particolare, possiamo scrivere l'equazione di raffinamento come

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_m h_m \varphi_{1,-m}(x)$$

L'equazione di raffinamento è importante nelle applicazioni perché la si può usare per stimare  $\varphi$  sui punti diadici  $m2^n$  senza conoscere effettivamente la  $\varphi$ .

Integrando l'equazione di raffinamento e dividendo ambo i membri per  $a = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx$  (che è supposto non nullo per definizione), troviamo

$$1 = \frac{2}{a} \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m \int_{\mathbb{R}} \varphi(2x - m) dx = \frac{2}{a} \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) dy = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m$$

La trasformata di Fourier di  $\varphi$  è

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(\xi) &= 2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m \int_{\mathbb{R}} \varphi(2x - m) e^{-i\xi(x)} dx \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) e^{-i\xi(y+m)/2} dy \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m e^{-i\xi(m)/2} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) e^{-i\xi(y)/2} dy \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m e^{-i\xi(m)/2} \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = H\left(\frac{\xi}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \end{aligned}$$

dove abbiamo definito una funzione che in teoria dei segnali si chiama *filtro passa-basso*<sup>11</sup>:

$$H(\xi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m e^{-i\xi(m)}$$

(si tratta ovviamente di una funzione  $2\pi$ -periodica la cui restrizione a  $[-\pi, \pi]$  è  $L^2$ , che scriviamo in termini della sua serie di Fourier). Notiamo che l'espressione appena dedotta per  $\widehat{\varphi}$  implica immediatamente che

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \widehat{\varphi}(0) = 1$$

La coppia di equazioni

$$\begin{cases} \widehat{\varphi}(0) = 1 \\ \widehat{\varphi}(\xi) = H\left(\frac{\xi}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \end{cases}$$

è interessante perché ci consente, almeno a livello formale, di scrivere  $\widehat{\varphi}$  in termini di un prodotto infinito come

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \prod_{m=1}^{\infty} H\left(\frac{\xi}{2^m}\right)$$

Non ci soffermeremo sulla convergenza di questo prodotto né sulle ipotesi di decrescenza all'infinito su  $\varphi$  che la implicano (cfr. [9], [12], [8, §7.1.3 sotto l'ipotesi di ortonormalità della base di Riesz]), ma ci limitiamo ad osservare come questa rappresentazione di  $\widehat{\varphi}$  renda possibile ricostruire questa funzione a partire dalla successione  $h_m$ .

**Esempio 5.9** *Una classe di funzioni più regolari che dà luogo a multirisoluzioni si ottiene considerando gli spazi*

$$\mathcal{H}_{\pi/2^n} = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{supp } \widehat{f} \subset \left[-\frac{\pi}{2^n}, \frac{\pi}{2^n}\right] \right\}$$

che abbiamo considerato discutendo il teorema di campionamento; come funzione di scala scegliamo la funzione di campionamento di Shannon

$$\varphi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

la cui trasformata di Fourier è, come ben sappiamo,

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \mathbf{1}_{[-\pi, \pi]}(\xi)$$

In questo caso abbiamo  $H(\xi) = \mathbf{1}_{[-\pi/2, \pi/2]}$ .

---

<sup>11</sup>Questo nome deriva dal fatto che moltiplicare per questa funzione “taglia” le frequenze alte: cfr. ad es. l'esempio 5.9 qui di seguito.

**Esempio 5.10** Un'altra classica famiglia di funzioni di scala è data da certe spline, le *B-spline* (box spline), definite ricorsivamente come

$$\begin{cases} N_1 = \mathbf{1}_{[0,1]} \\ N_m = N_{m-1} * N_1 \end{cases}$$

Si può dimostrare che

$$N_m(x) = 2^{m-1} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} N_m(2x - k)$$

La trasformata di Fourier di  $N_1$  è  $\widehat{N}_1(\xi) = (1 - e^{-i\xi})/i\xi$ , pertanto, in generale

$$\widehat{N}_m(\xi) = \left( \frac{1 - e^{-i\xi}}{i\xi} \right)^m$$

In questo caso la filtrazione è definita solo per  $n \geq 0$ : per  $n = 0$  abbiamo lo spazio delle funzioni continue e lineari a tratti; nel caso  $n > 0$ , lo spazio  $V_n$  è costituito dalle funzioni di classe  $C^{n-1}$  che, sugli intervalli  $[m2^n, (m+1)2^n]$  sono dei polinomi di grado  $n$ . La funzione di scala è in questo caso  $\varphi = N_1$ , e si può dimostrare che, effettivamente,  $\{\varphi(x - m)\}$  è una base di Riesz di  $V_0$ . Possiamo determinare il filtro passa-basso usando l'equazione  $\widehat{\varphi}(2\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)H(\xi)$  come segue:

$$\begin{aligned} \frac{2}{i\xi} (1 - e^{-i2\xi}) &= \frac{1 - e^{-i\xi}}{i\xi} H(\xi) \implies H(\xi) = 2 \frac{(1 - e^{-i\xi})(1 + e^{-i\xi})}{1 - e^{-i\xi}} \\ &\implies H(\xi) = 2(1 + e^{-i\xi}) \end{aligned}$$

In quest'ultimo esempio, la base di Riesz di  $V_0$  non è ortonormale, mentre nel caso dei primi due esempi lo era: abbiamo cioè un esempio di multirisoluzione di Riesz vera e propria.

Tuttavia, nel caso di una multirisoluzione (non di Riesz), la successione  $\{h_m\}$  dei coefficienti di Fourier del filtro passa-basso non solo è normalizzata in modo che  $\sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m = 1$ , ma soddisfa anche una relazione di ortogonalità: in effetti, dall'equazione di raffinamento, abbiamo che

$$\varphi(x) \overline{\varphi(x - k)} = 4 \sum_{m,p \in \mathbb{Z}} h_m \overline{h_p} \varphi(2x - m) \overline{\varphi(2(x - k) - p)}$$

e, integrando ed usando la supposta ortogonalità delle  $\varphi(x - m)$ ,

$$\begin{aligned}
\delta_{0,k} &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \overline{\varphi(x - k)} dx \\
&= 4 \sum_{m,p \in \mathbb{Z}} h_m \overline{h_p} \int_{\mathbb{R}} \varphi(2x - m) \overline{\varphi(2(x - k) - p)} dx \\
&= 4 \sum_{m,p \in \mathbb{Z}} h_m \overline{h_p} \int_{\mathbb{R}} \varphi(2x - m) \overline{\varphi(2(x - k) - p)} dx \\
&= 2 \sum_{m,p \in \mathbb{Z}} h_m \overline{h_p} \delta_{m,2k+p} = 2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m \overline{h_{m-2k}}
\end{aligned}$$

In particolare, la norma  $\ell^2$  della successione  $\{h_m\}$  è  $1/\sqrt{2}$ .

Inoltre, sempre nell'ipotesi che  $\{\varphi(x - m)\}$  sia ortonormale, il filtro passa-basso soddisfa una importante relazione: infatti è una funzione  $H$  periodica, sicché, per il corollario 5.6,

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(2\xi + 2k\pi)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + k\pi)|^2 |H(\xi + k\pi)|^2 \\
&= |H(\xi)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 + |H(\xi + \pi)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + \pi + 2k\pi)|^2 \\
&= |H(\xi)|^2 \cdot 1 + |H(\xi + \pi)|^2 \cdot 1
\end{aligned}$$

Abbiamo pertanto dimostrato la *condizione di Smith–Barnwell* [3].

**Teorema 5.11**  $|H(\xi)|^2 + |H(\xi + \pi)|^2 = 1$ .

È interessante notare come, con un cambiamento di variabile  $y = x - p$ ,

$$\langle \varphi(x - m), \varphi(x - p) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x - m) \overline{\varphi(x - p)} dx = \varphi * \overline{\varphi}(m - p)$$

e quindi  $\{\varphi(x - m)\}$  è ortonormale se e solo se  $\varphi * \overline{\varphi}(m) = \delta_m$ : prendendo la trasformata di Fourier di questa equazione troviamo

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2m\pi)|^2 = |\widehat{\varphi}|^2 = |\widehat{\varphi} \widehat{\varphi}| = |e^{-im\xi}| = 1$$

cioè nuovamente il corollario 5.6.

## 6 Ondicelle indotte da multirisoluzioni

Consideriamo una multirisoluzione  $(\{V_n\}, \varphi)$ : vogliamo usarla per costruire una ondicella; poniamo

$$W_n = V_{n+1}/V_n$$

in modo che  $V_{n+1} = V_n \oplus W_n$ : questo quoziente contiene l'informazione di "dettaglio" necessaria per aumentare la precisione nell'approssimazione della griglia codificata da  $V_n$ . Poiché la filtrazione  $\{V_n\}$  è tale che  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n$  è densa, la somma degli spazi  $W_i$  esaurisce l'intero  $L^2(\mathbb{R})$ , ed inoltre, dato che l'intersezione dei  $V_n$  è nulla, questa somma è diretta:

$$\bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} W_m = L^2(\mathbb{R})$$

Si noti che

$$V_n = V_0 \oplus \bigoplus_{k=0}^n W_k$$

**Definizione 6.1** *Se  $\mathcal{M} = (\{V_n\}, \varphi)$  è una multirisoluzione (risp. una multirisoluzione di Riesz), una ondicella rispetto alla multirisoluzione  $\mathcal{M}$  è una funzione  $\psi \in W_0$  tale che la famiglia  $\{\psi(x-m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$  sia una base ortonormale (risp. una base di Riesz) di  $W_0$ .*

Quello che spesso si sente dire è che le ondicelle "sono" particolari basi di  $L^2(\mathbb{R})$ : possiamo immediatamente giustificare questa affermazione.

**Teorema 6.2** *Se  $\psi$  è una ondicella rispetto ad una multirisoluzione (risp. una multirisoluzione di Riesz), la famiglia  $\{\psi_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$  i cui elementi sono definiti come*

$$\psi_{n,m} = 2^{n/2} \psi(2^n x - m)$$

*è una base ortonormale (risp. di Riesz) di  $L^2(\mathbb{R})$*

**DIMOSTRAZIONE:** Infatti la proprietà (3) nella definizione di multirisoluzione, cioè il fatto che  $[x \mapsto f(2x)] \in V_{n+1}$  se e solo se  $f \in V_n$ , implica immediatamente che, se  $\{\psi(x-m)\}$  è una base ortonormale (risp. di Riesz) di  $W_0$ , allora  $\{2^{n/2} \psi(2^{n/2} x - m)\}$  è una base ortonormale (risp. di Riesz) di  $W_n$  per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  e, dal fatto che  $L^2(\mathbb{R})$  è somma diretta dei  $W_n$ , segue quanto asserito. QED

A questo punto, data una multirisoluzione ed una ondicella  $\psi$  rispetto ad essa sappiamo determinare una base ortonormale (risp. di Riesz) di  $L^2(\mathbb{R})$ . Ora il problema è: c'è un modo generale per costruire questa  $\psi$ ? Stephane Mallat ha proposto una costruzione molto semplice di una tale ondicella nel caso in cui la multirisoluzione non sia di Riesz (caso nel quale d'ora in poi ci porremo), che, basandoci sulla discussione precedente, possiamo ora esporre.

Cominciamo con l'osservare come, data una funzione  $\psi \in V_0 \subset V_1$ , scrivendone lo sviluppo rispetto alla base  $\varphi(2x - k)$ ,

$$\psi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2x - k)$$

(per una opportuna  $\{g_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ ) e passando alle trasformate di Fourier, si ottenga, come nel caso della funzione di scala:

$$\widehat{\psi}(\xi) = G\left(\frac{\xi}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

dove  $G(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k e^{-ik\xi}$  è una funzione  $2\pi$ -periodica. L'idea di Mallat è di definire questa funzione come  $G(\xi) = e^{i\xi} \overline{H(\xi)}$ .

**Lemma 6.3** *Data una multirisoluzione  $(\{V_n\}, \varphi)$ , la funzione*

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2} \overline{H\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

*è un elemento di  $W_0 = V_1/V_0$*

**DIMOSTRAZIONE:** Infatti

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(\xi) &= e^{i\xi/2} \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \overline{H\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} = e^{i\xi/2} \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{h_m} e^{-im\xi/2} e^{im\pi} \\ &= \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m \overline{h_m} e^{-im\xi/2} \end{aligned}$$

col che possiamo scrivere, per  $g_m = (-1)^m \overline{h_{-m}}$ :

$$\widehat{\psi}(\xi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m e^{im\xi/2} \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

sicché, prendendo l'antitrasformata di Fourier,

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} g_m \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi} \left( \frac{\xi}{2} \right) e^{i\xi/2(m+2x)} d\xi = 2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m \varphi(2x + m)$$

troviamo che  $\psi \in V_1$ ; per avere  $\psi \in W_0$ , resta da mostrare che  $\psi \perp V_0$ : in effetti, per l'identità di Plancherel, dalla  $\widehat{\psi}(2\xi) = e^{i\xi} \widehat{\varphi}(\xi) H(\xi + \pi)$  (cfr. pagina 26) e dalla  $\widehat{\varphi}(2\xi) = H(\xi) \widehat{\varphi}(\xi)$  (cfr. pagina 21), possiamo dedurne che

$$\begin{aligned} \langle \psi, \varphi(x - m) \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \overline{\varphi(x - m)} dx = \int_{\widehat{\mathbb{R}}} \widehat{\psi}(\xi) e^{im\xi} \overline{\widehat{\varphi}(\xi)} d\xi \\ &= 2 \int_{\widehat{\mathbb{R}}} \widehat{\psi}(2\xi) e^{2im\xi} \overline{\widehat{\varphi}(2\xi)} d\xi \\ &= 2 \int_{\widehat{\mathbb{R}}} e^{2im\xi} e^{i\xi} \widehat{\varphi}(\xi) \overline{H(\xi + \pi) \widehat{\varphi}(2\xi)} d\xi \\ &= 2 \int_{\widehat{\mathbb{R}}} e^{2im\xi} e^{i\xi} \widehat{\varphi}(\xi) \overline{H(\xi + \pi) H(\xi) \widehat{\varphi}(\xi)} d\xi \end{aligned}$$

A questo punto consideriamo la scomposizione  $\widehat{\mathbb{R}} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, 2(k+1)\pi)$  nell'ultimo integrale che abbiamo scritto

$$2 \int_0^{2\pi} e^{2im\rho} e^{i\rho} \overline{H(\rho + \pi) H(\rho)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\rho + 2k\pi)|^2 d\rho$$

(abbiamo usato anche che  $H$  è periodica di periodo  $2\pi$  e che  $e^{2ik\pi} = 1$ , e quindi solo il modulo di  $\widehat{\varphi}$  contiene la  $k$ ). Ora, usiamo nuovamente il corollario 5.6 (ricordiamo che la nostra multirisoluzione è ortonormale per ipotesi),

$$2 \int_0^{2\pi} e^{2im\rho} e^{i\rho} \overline{H(\rho + \pi) H(\rho)} d\rho$$

spezziamo l'integrale in due, cambiamo variabile  $\omega = \rho + \pi$ , ed infine ci gioviamo del fatto che  $e^{-i\pi} = -1$  per ottenere:

$$2 \int_0^{\pi} e^{2im\rho} e^{i\rho} \overline{H(\rho + \pi) H(\rho)} d\rho - 2 \int_0^{\pi} e^{2im\omega} e^{i\omega} \overline{H(\omega) H(\omega - \pi)} d\omega$$

che, per periodicità di  $H$ , è zero. Abbiamo cioè dimostrato che  $\langle \psi, \varphi(x - m) \rangle = 0$ , e, dato che  $\{\varphi(x - m)\}$  è una base ortonormale di  $V_0$  per ipotesi, troviamo che  $\psi \perp V_0$  e quindi  $\psi \in W_0$ , visto come complementare di  $V_0$  in  $V_1 = V_0 \oplus W_0$ .

QED

Mostriamo ora che questo elemento  $\psi$  definito nel lemma precedente è un'ondicella nel senso della definizione di questo paragrafo.

**Teorema 6.4** *Se  $\psi$  è la funzione definita nel lemma precedente, allora  $\{\psi(x-m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$  è una base ortonormale di  $W_0$ .*

**DIMOSTRAZIONE:** Verifichiamo la condizione del corollario 5.6: per farlo usiamo il corollario 5.6 applicato a  $\varphi$ :  $|H(\xi)|^2 + |H(\xi + \pi)|^2 = 1$ . In effetti,

$$\begin{aligned}
\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(\xi + 2m\pi)|^2 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + m\pi\right) \right|^2 \left| \overline{H\left(\frac{\xi}{2} + (m+1)\pi\right)} \right|^2 \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + 2k\pi\right) \right|^2 \left| \overline{H\left(\frac{\xi}{2} + 2k\pi\right)} \right|^2 + \\
&\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + (2k+1)\pi\right) \right|^2 \left| \overline{H\left(\frac{\xi}{2} + (2k+1)\pi\right)} \right|^2 \\
&= \left| \overline{H\left(\frac{\xi}{2}\right)} \right|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + 2k\pi\right) \right|^2 + \\
&\quad + \left| \overline{H\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \right|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + (2k+1)\pi\right) \right|^2 \\
&= \left| \overline{H\left(\frac{\xi}{2}\right)} \right|^2 + \left| \overline{H\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \right|^2 = 1
\end{aligned}$$

L'ultimo passaggio segue dalla condizione di Smith–Barnwell, teorema 5.11.

Resta da dimostrare che lo spazio generato da  $\{\psi(x-m)\}$  è effettivamente  $W_0 = V_1/V_0$ : per farlo, cominciamo col notare che

$$\begin{aligned}
f \in V_0 &\iff f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m \varphi(x-m) \iff \widehat{f}(\xi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m e^{-i\xi m} \widehat{\varphi}(\xi) \\
f \in V_1 &\iff f(x) = 2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} \beta_m \varphi(2x-m) \iff \widehat{f}(\xi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \beta_m e^{-i\xi m/2} \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Cioè lo spazio  $\widehat{V}_0$  delle trasformate degli elementi di  $V_0$  è generato dalle funzioni della forma  $h(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)$ , con  $h \in L^2[-\pi, \pi]$ , mentre  $\widehat{V}_1$  è generato dalle funzioni della forma  $h(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2)$ .

Dato che  $\psi(x-m)$  sono ortogonali a  $\varphi(x-m)$ , per avere la tesi basta mostrare che un qualsiasi elemento di  $f$  si può scomporre come somma di un elemento (della chiusura) di  $\{\varphi(x-m)\}$  e di un elemento (della chiusura) di  $\{\psi(x-m)\}$ : facciamolo vedere per la trasformata di Fourier di  $f$ , usando il fatto che la trasformata di Fourier è un isomorfismo.

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \beta_m e^{-i\xi m/2} \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \beta_m e^{-i\xi m/2} \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \times \\
&\quad \times \left[ H\left(\frac{\xi}{2}\right) \overline{H\left(\frac{\xi}{2}\right)} + H\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \overline{H\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \right] \\
&= \overline{H\left(\frac{\xi}{2}\right)} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \beta_m e^{-i\xi m/2} \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) H\left(\frac{\xi}{2}\right) \\
&\quad + H\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \beta_m e^{-i\xi m/2} \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \overline{H\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \\
&= \overline{H\left(\frac{\xi}{2}\right)} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \beta_m e^{-i\xi m/2} \widehat{\varphi}(\xi) + H\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \beta_m \widehat{\psi}_m(\xi)
\end{aligned}$$

(dove  $\psi_m(x) = \psi(x - m)$ ). Passando alle antitrasformate otteniamo quindi

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha'_m \varphi(x - m) + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \beta'_m \psi(x - m)$$

(tenendo conto che  $H(\xi) = \sum_m h_m e^{-im\xi}$  è una funzione  $2\pi$ -periodica).

QED

In particolare, una base di  $V_1 = V_0 \oplus W_0$  è data da  $\{\varphi(x - m), \psi(x - m)\}$ .

**Esempio 6.5** Torniamo a considerare l'esempio 5.4 e determiniamone l'ondicella  $\psi$ : intanto osserviamo che

$$\varphi(x) = \mathbf{1}_{[0,1)}(x) = \mathbf{1}_{[0,1/2)}(x) + \mathbf{1}_{[1/2,1)}(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x - 1)$$

L'equazione di raffinamento è d'altra parte

$$\varphi(x) = 2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m \varphi(2x - m)$$

da cui deduciamo che gli unici  $h_m$  non nulli sono  $h_1 = h_0 = 1/2$ , da cui

$$H(\xi) = h_1 e^{-i\xi} + h_0 = \frac{1}{2} (1 + e^{-i\xi})$$

e, usando la definizione dell'ondicella  $\psi$  in termini di  $\varphi$  (cfr. formula a pagina 27)

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= 2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m h_{-m} \varphi(2x - m) = -\varphi(2x + 1) + \varphi(2x) \\
&= \mathbf{1}_{[-1/2,0)}(x) + \mathbf{1}_{[0,1/2)}(x)
\end{aligned}$$

Questa è la famosa *ondicella di Haar*, la cui base di Riesz associata (in questo caso una base ortonormale) fu definita dal matematico ungherese Alfréd Haar nel 1910!

**Esempio 6.6** Torniamo all'esempio 5.9 e determiniamone l'ondicella  $\psi$ : stavolta abbiamo  $\widehat{\varphi} = \mathbf{1}_{[-\pi, \pi]}$ , e, se scriviamo l'equazione  $\widehat{\varphi}(2\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)H(\xi)$ , troviamo

$$\mathbf{1}_{[-\pi/2, \pi/2]}(\xi) = \mathbf{1}_{[-\pi, \pi]}(\xi)H(\xi)$$

Poiché  $H(\xi)$  è  $2\pi$ -periodica ne viene che

$$H(\xi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \mathbf{1}_{[-\pi/2, \pi/2]}(\xi + 2m\pi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \mathbf{1}_{[-2m\pi - \pi/2, \pi/2 - 2m\pi]}(\xi)$$

e quindi la costruzione di Mallat dell'ondicella  $\psi$  fornisce in prima istanza

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(\xi) &= e^{i\xi/2} \mathbf{1}_{[-2\pi, 2\pi]}(\xi) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \mathbf{1}_{[-2m\pi - \pi/2, \pi/2 - 2m\pi]}(\xi/2 + \pi) \\ &= e^{i\xi/2} \mathbf{1}_{[-2\pi, 2\pi]}(\xi) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \mathbf{1}_{[-3\pi - 4m\pi, -\pi - 4m\pi]}(\xi) \end{aligned}$$

e, dato che gli unici addendi dell'unione  $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} [-3\pi - 4m\pi, -\pi - 4m\pi]$  che intersecano  $[-2\pi, 2\pi]$  sono  $[\pi, 3\pi)$  e  $[-3\pi, -\pi)$ , si ha

$$[-2\pi, 2\pi] \cap \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} [-3\pi - 4m\pi, -\pi - 4m\pi] = [\pi, 2\pi] \cup [-2\pi, -\pi)$$

ne viene

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2} \mathbf{1}_{[\pi, 2\pi] \cup [-2\pi, -\pi)}(\xi)$$

per cui, prendendo l'antitrasformata (poniamo  $I = [\pi, 2\pi] \cup [-2\pi, -\pi)$ )

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_I e^{i\xi/2} e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{\pi(1+2x)} \int_I e^{i\xi(1+2x)/2} d\left(\frac{\xi}{2}(1+2x)\right) \\ &= \frac{1}{i\pi(1+2x)} \left[ e^{i\xi(1+2x)/2} \right]_{-2\pi}^{-\pi} + \frac{1}{i\pi(1+2x)} \left[ e^{i\xi(1+2x)/2} \right]_{\pi}^{2\pi} \\ &= \frac{\sin 2\pi(1+2x) - \sin \pi(1+2x)}{\pi(1+2x)} \end{aligned}$$

troviamo l'ondicella di Shannon. Dato che  $\widehat{\psi}$  ha supporto compatto, questa funzione è infinitamente differenziabile. Notiamo inoltre che il coefficiente di Fourier  $h_m$  di  $H$  è, se  $m \neq 0$

$$\begin{aligned} h_m &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\xi) e^{im\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{im\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sin m\xi}{m} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \begin{cases} 0 & \text{se } m \text{ è pari} \\ (-1)^{(m-1)/2} / (m\pi) & \text{se } m \text{ è dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

(se  $m = 0$  allora  $h_0 = 1/2$  dato che  $\widehat{\varphi}(0) = 1$  e quindi  $H(0) = 2h_0 = 1$ ).

Si noti che le ondicelle di Haar e Shannon hanno proprietà duali: l'ondicella di Haar è localizzata nella variabile  $x$  dei tempi, ed ha un filtro passa-basso determinato da due soli coefficienti di Fourier, l'ondicella di Shannon è localizzata nelle frequenze  $\xi$  e il suo filtro ha infiniti coefficienti non nulli. Ai fini delle applicazioni computazionali, si preferiscono ovviamente le ondicelle i cui filtri hanno solo un numero finito di coefficienti di Fourier non nulli<sup>12</sup>.

Naturalmente, come abbiamo già sottolineato, l'ondicella di Haar, a fronte della semplicità del suo filtro passa-basso, è una funzione discontinua: Ingrid Daubechies ha determinato, verso la fine degli anni '80, esempi di ondicelle che presentano sia caratteristiche di localizzazione che di regolarità, e che discuteremo nel prossimo paragrafo.

## 7 Ondicelle ortogonali di Daubechies

L'ondicella  $\psi$  di Shannon è una funzione differenziabile: tuttavia l'andamento di  $|\psi(x)|$  all'infinito è lo stesso di  $|t|^{-1}$  (il che segue dal fatto che  $\widehat{\psi}$  è singolare nei punti  $\pm\pi, \pm 2\pi$ ), e questa circostanza è spiacevole per vari motivi, che si appalesano in modo particolare nelle applicazioni, dove, come vedremo nel prossimo paragrafo, le ondicelle sono utilizzate per approssimare, tramite i coefficienti  $\langle f, \psi_{k,m} \rangle$ , delle funzioni che rappresentano segnali da elaborare: risulta importante a questo fine avere pochi coefficienti non nulli (o almeno non troppo grandi) in modo da ottenere algoritmi efficienti.

La condizione da imporre, per ottenere un decadimento rapido all'infinito di  $|\psi|$ , è che l'ondicella sia ortogonale a qualsiasi polinomio di grado sufficientemente alto: precisamente diamo la

**Definizione 7.1** *Una funzione  $f \in L^2(\mathbb{R})$  ha i primi  $p$  momenti nulli se*

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, p\} \quad \int_{\mathbb{R}} x^k f(x) dx = 0$$

Cioè una funzione ha i primi  $p$  momenti nulli se è ortogonale a qualsiasi polinomio di grado  $p - 1$ : la motivazione di questa definizione è che, se una funzione è sufficientemente differenziabile ed ha i primi  $p$  momenti nulli, è ortogonale al suo sviluppo di Taylor di ordine  $p - 1$ .

**Lemma 7.2** *Se  $\psi$  è una ondicella indotta da una multirisoluzione  $(\{V_n\}, \varphi)$ , allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

<sup>12</sup>In teoria dei segnali si suole dire che questi filtri hanno risposta in frequenza finita.

- (1)  $\psi$  ha i primi  $p$  momenti nulli.
- (2)  $\widehat{\psi}(\xi)$  si annulla in  $\xi = 0$  assieme alle sue prime  $p - 1$  derivate.
- (3) il filtro passa-basso  $H(\xi)$  si annulla in  $\xi = \pi$  assieme alle sue prime  $p - 1$  derivate.

DIMOSTRAZIONE: Che la (1) e la (2) si equivalgano segue dall'identità

$$\left[ \frac{d\widehat{\psi}(\xi)}{d\xi^k} \right]_{\xi=0} = \int_{\mathbb{R}} (-ix)^k \psi(x) dx$$

Che la (3) e la (2) si equivalgano segue dalla definizione di  $\widehat{\psi}$ :

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{-i\xi/2} \widehat{\varphi}(\xi/2) \overline{H(\xi/2 + \pi)}$$

e dal fatto che  $\widehat{\varphi}(0) = 1$ , da cui segue che

$$\widehat{\psi}(0) = \overline{H(\pi)}$$

Differenziando la (\*) e valutando in  $\xi = 0$  troviamo che

$$0 = \left[ \frac{d\widehat{\psi}(\xi)}{d\xi^k} \right]_{\xi=0} = \frac{\widehat{\varphi}'(0) - i\overline{H(\pi)}}{2} + \frac{1}{2}\overline{H'(\pi)} = \frac{1}{2}\overline{H'(\pi)}$$

avendosi  $\overline{H(\pi)} = \widehat{\psi}(0) = 0$ . Dunque anche  $H'(\pi) = 0$ , ed in modo analogo si procede fino alla derivata  $(p - 1)$ -esima.

QED

L'idea della Daubechies è di partire dalla (3) di questo lemma, cioè di costruire  $H$  in modo da soddisfare questa condizione (e da continuare a soddisfare la condizione di Smith–Barnwell 5.11), ed utilizzare  $H$  per definire una ondicella a supporto compatto.

Poiché vogliamo che  $\psi$  abbia supporto compatto, l'idea è di prendere  $\varphi$  a supporto compatto e  $H$  come un polinomio trigonometrico a coefficienti reali<sup>13</sup>

$$H(\xi) = \sum_{k=0}^n h_k e^{-ik\xi}$$

<sup>13</sup>Infatti sotto queste ipotesi, dato che  $\widehat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2} \widehat{\varphi}(\xi/2) \overline{H(\xi/2 + \pi)}$ ,  $\psi$  diviene la convoluzione di  $\varphi$  con una combinazione lineare di delta di Dirac.

cui si impone di avere uno zero di ordine  $p$  in  $\xi = \pi$  (per garantire la (3) del lemma precedente): questo vuol dire<sup>14</sup> che il polinomio deve essere divisibile almeno per  $(1 + e^{-i\xi})^p$ , dunque

$$H(\xi) = (1 + e^{-i\xi})^p Q(e^{-i\xi})$$

dove  $Q(z)$  è un opportuno polinomio, che ovviamente vogliamo scegliere di grado il più piccolo possibile. Abbiamo dunque<sup>15</sup>

$$\begin{aligned} |H(\xi)|^2 &= (1 + e^{-i\xi})^p (1 + e^{i\xi})^p |Q(e^{-i\xi})|^2 \\ &= (2 + 2 \cos \xi)^p |Q(e^{-i\xi})|^2 = 2^{2p} \left( \cos^2 \frac{\xi}{2} \right)^p |Q(e^{-i\xi})|^2 \end{aligned}$$

Dato che i coefficienti  $h_k$  sono reali,  $H(\xi) = H(-\xi)$ , quindi  $|H|^2$  è una funzione pari, il che significa che il fattore  $|Q(e^{-i\xi})|^2$  che vi figura dipende in realtà solo da  $\cos \xi = 1 - 2 \sin^2 \xi/2$ , pertanto possiamo scrivere

$$|H(\xi)|^2 = \left( \cos^2 \frac{\xi}{2} \right)^p B \left( \sin^2 \frac{\xi}{2} \right)$$

per un opportuno polinomio  $B$  determinato univocamente da  $Q$  (si noti che inglobiamo in  $B$  il fattore  $2^{2p}$ ). Imponendo la condizione di Smith–Barnwell 5.11<sup>16</sup> troviamo

$$\begin{aligned} 1 &= \left( \cos \frac{\xi}{2} \right)^{2p} B \left( \sin^2 \frac{\xi}{2} \right) + \sin^{2p} \frac{\xi}{2} B \left( \cos^2 \frac{\xi}{2} \right) \\ &= \left( \cos^2 \frac{\xi}{2} \right)^p B \left( 1 - \cos^2 \frac{\xi}{2} \right) + \left( 1 - \cos^2 \frac{\xi}{2} \right)^p B \left( \cos^2 \frac{\xi}{2} \right) \end{aligned}$$

Il nostro obiettivo è quello di determinare un tale  $B$  col minimo numero di termini non nulli: per farlo invochiamo un classico risultato di algebra commutativa, il *teorema di Bézout*<sup>17</sup> che afferma: *dati due polinomi  $P_1(x)$  e  $P_2(x)$  di gradi  $n_1$  e  $n_2$  e privi di zeri in comune, esistono due unici polinomi  $B_1(x)$  e  $B_2(x)$  di gradi  $n_1 - 1$  e  $n_2 - 1$  in modo che*

$$B_1(x)P_1(x) + B_2(x)P_2(x) = 1$$

<sup>14</sup>Un polinomio trigonometrico è un polinomio  $P(z)$  calcolato in  $z = e^{-i\xi}$ : quindi se  $P$  si annulla con molteplicità  $p$  in  $z = e^{-i\pi} = -1$ , allora  $P(z) = (z + 1)^p Q(z)$ .

<sup>15</sup>Usiamo l'identità  $1 + \cos \xi = 2 \cos^2(\xi/2)$ .

<sup>16</sup>E tenendo conto che  $\cos(\xi/2 + \pi/2) = -\sin \xi/2$  e  $\sin(\xi/2 + \pi/2) = \cos \xi/2$ .

<sup>17</sup>Valido in ciascun dominio a ideali principali, quindi nell'anello dei polinomi a coefficienti in un campo.

Vogliamo applicarlo al caso  $x = \cos^2 \xi/2$ ,  $P_1(x) = (1-x)^p$  e  $P_2(x) = x^p$ : otteniamo quindi due polinomi  $B_1(x)$  e  $B_2(x)$  entrambi di grado  $p$  in modo che

$$x^p B_1(x) + (1-x)^p B_2(x) = 1$$

Per prima cosa notiamo che, se  $B_2(x) = \sum_h b_h x^h$ , l'equazione precedente diviene

$$\sum_{h=0}^{p-1} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k b_h x^{k+h} = 1 - x^p B_1(x)$$

e quindi il principio di identità dei polinomi ci informa che

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ \sum_{k=0}^h \binom{p}{k} (-1)^k b_{h-k} = 0 \quad 0 < h < p \end{cases}$$

Pertanto le  $(b_0, \dots, b_{p-1})$  possono essere pensate come l'unica soluzione del sistema lineare  $Ax = e_1$  in cui  $A$  è triangolare inferiore con 1 sulla diagonale (e quindi  $\det A = 1$ ) e  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ . Un calcolo ricorsivo mostra che, se  $0 \leq h < p$ :

$$b_h = \binom{p+h-1}{h} = \frac{p \cdot (p+1) \cdots (p+h-1)!}{h!}$$

Ora osserviamo che se prendiamo il polinomio  $B(x)$  di grado  $p-1$  e i cui coefficienti siano i  $b_h$  appena calcolati, si ha

$$x^p B(1-x) + (1-x)^p B(x) = 1$$

Questo mostra, in virtù del risultato di unicità affermato nel teorema di Bézout, che i polinomi offerti da questo teorema sono  $B_1(x) = B(1-x)$  e  $B_2(x) = B(x)$  dove

$$B(x) = \sum_{h=0}^{p-1} \binom{p+h-1}{h} x^h$$

In particolare,  $B(x) \geq 0$  non appena  $x \in [0, 1]$ , che è il nostro caso, dato che per noi  $x = \cos^2 \xi/2$ . Abbiamo quindi determinato il polinomio di grado minimo che stavamo cercando (il grado deve essere almeno  $p-1$ , altrimenti l'equazione  $x^p B_1(x) + (1-x)^p B_2(x)$  non può ovviamente essere soddisfatta per ogni  $x$ ).

Torniamo ora alla formula:

$$|H(\xi)|^2 = \left( \cos^2 \frac{\xi}{2} \right)^p B \left( \sin^2 \frac{\xi}{2} \right)$$

ed usiamola per costruire il polinomio  $Q$  che figura nella formula  $H(\xi) = (1 + e^{-i\xi})^p Q(e^{-i\xi})$ : per prima cosa scriviamo  $Q(z)$  come polinomio (poniamo  $z = e^{-i\xi}$ )

$$Q(z) = \sum_{h=0}^N q_h z^h$$

Abbiamo supposto reali i coefficienti di  $H$  (e quindi quelli di  $Q$ ), dunque  $q_h \in \mathbb{R}$  e, coniugando l'equazione precedente, troviamo

$$\overline{Q(e^{-i\xi})} = \sum_{h=0}^N q_h e^{i\xi h} = Q(e^{i\xi})$$

Possiamo quindi scrivere (ricordando il fattore  $2^{2p}$  inglobato in  $B$ )

$$\begin{aligned} Q(e^{-i\xi})Q(e^{i\xi}) &= |Q(e^{-i\xi})|^2 = 2^{-2p} B \left( \sin^2 \frac{\xi}{2} \right) \\ &= 2^{-2p} B \left( \left[ \frac{e^{i\xi/2} - e^{-i\xi/2}}{2i} \right]^2 \right) = 2^{-2p} B \left( \frac{2 - e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{4} \right) \end{aligned}$$

Il polinomio che figura nell'ultimo membro di questa equazione è definito per i numeri complessi di modulo 1, ma ovviamente possiamo considerarlo per qualsiasi numero complesso  $z$ ; la relazione

$$2^{-2p} B \left( \frac{2 - (z + z^{-1})}{4} \right) = Q(z)Q(z^{-1}) = \sum_{h,k=0}^N q_h q_k z^{h-k}$$

ci consente di determinare i coefficienti di  $Q$  a partire da quelli di  $B$ , ed anche il numero  $N$  di tali coefficienti, usando il principio di identità dei polinomi (di Laurent): nell'esempio più sotto mostriamo il caso  $p = 2$ .

**Definizione 7.3** *Una ondicella di Daubechies con  $p$  momenti nulli è l'ondicella indotta a partire da  $H$  secondo la costruzione precedente.*

Infatti, avendo  $H$ , possiamo ricostruire  $\psi$ , mercé la formula

$$\psi(\xi) = 2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m \varphi(2x + m)$$

dove  $g_m = (-1)^m \overline{h_{-m}}$  (cfr. pagina 27).

**Esempio 7.4** Consideriamo il caso più semplice  $p = 1$ : allora  $H(\xi) = (1 + e^{-i\xi})q_0$ , cioè in questo caso il polinomio  $Q$  è costante. Inoltre, dato che richiediamo  $H(0) = 1$  (in modo da ottenere  $\widehat{\varphi}(0) = 1$ ), è  $q_0 = 1/2$ , quindi  $h_0 = h_1 = 1/2$ , e ritroviamo l'ondicella di Haar (cfr. esempio 6.5).

La nostra convenzione di normalizzazione richiede che  $H(0) = 1$  e che la norma  $\ell^2$  della successione  $\{h_n\}$  sia invece  $1/\sqrt{2}$ : talora si richiede invece che questa norma sia 1, e allora, sia nell'esempio precedente che nel prossimo, i coefficienti  $h_n$  qui determinati vanno moltiplicati per  $\sqrt{2}$  (è questa ad esempio la convenzione di Mallat [8]).

**Esempio 7.5** Costruiamo l'ondicella di Daubechies nel caso  $p = 2$ : stavolta

$$H(\xi) = (1 + e^{-i\xi})^2(q_0 + q_1 e^{-i\xi})$$

quindi  $Q(z) = q_0 + q_1 z$  ha grado uno. Dato che

$$Q(z)Q(z^{-1}) = 2^{-4}B\left(\frac{2 - (z + z^{-1})}{4}\right)$$

e dato che  $B(x) = 1 + 2x$ , otteniamo

$$(q_0^2 + q_1^2) + q_0 q_1 (z + z^{-1}) = Q(z)Q(z^{-1}) = \frac{1}{8} - \frac{z + z^{-1}}{32}$$

Pertanto:  $q_0^2 + q_1^2 = \frac{1}{8}$ ,  $q_0 q_1 = -\frac{1}{32}$ . Ne viene

$$q_0 = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{32}}, \quad q_1 = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{32}}$$

A questo punto, dato che

$$H(\xi) = q_0 + (q_1 + 2q_0)e^{-i\xi} + (q_0 + 2q_1)e^{-2i\xi} + q_1 e^{-3i\xi}$$

abbiamo determinato gli  $h_k$  non nulli:

$$\begin{aligned} h_0 = q_0 &= \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{32}}, & h_1 = q_1 + 2q_0 &= \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{32}}, \\ h_2 = q_0 + 2q_1 &= \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{32}}, & h_3 = q_1 &= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{32}} \end{aligned}$$

## 8 Trasformata discreta delle ondicelle

Consideriamo una multirisoluzione  $\mathcal{M} = (\{V_n\}, \varphi)$ , e la decomposizione  $\bigoplus_k W_k$  di  $L^2(\mathbb{R})$  da essa indotta: questa ultima, ci consente di approssimare una funzione  $f \in L^2(\mathbb{R})$  con elementi di qualche  $W_k$ , proiettando la funzione su questo sottospazio. Se richiediamo che il quoziente  $V_n = V_{n-1} \oplus W_{n-1}$  sia un quoziente di spazi di Hilbert, ne viene che  $V_{n-1} \perp W_{n-1}$ , in particolare  $V_0 \perp W_0$ , cioè  $W_n$  sono i complementi ortogonali di  $V_n$  in  $V_{n+1}$ : in questo modo tutti i  $W_n$  sono mutuamente ortogonali fra loro, e, considerando le proiezioni ortogonali  $P_{V_n} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow V_n$  e  $P_{W_n} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow W_n$ , possiamo scrivere, quale che sia  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , la sua espansione ortogonale

$$f = \sum_n P_{W_n} f$$

Se  $\psi$  è l'ondicella indotta dalla multirisoluzione  $\mathcal{M}$ , a questo punto sappiamo che:

- (1)  $\varphi_{n,m}(x) = 2^{n/2} \varphi(2^n x - m)$  descrivono, al variare di  $n, m \in \mathbb{Z}$ , una base ortonormale di  $V_n$ .
- (2)  $\psi_{n,m}(x) = 2^{n/2} \psi(2^n x - m)$  descrivono, al variare di  $n, m \in \mathbb{Z}$ , una base ortonormale di  $W_n$ .

Queste due condizioni le abbiamo dimostrate nel caso  $n = 0$ , ma da tutta la discussione dei paragrafi precedenti dovrebbe essere chiara la loro validità nel caso  $n \in \mathbb{Z}$ , e possiamo quindi scrivere

$$P_{V_n} f = \sum_m \langle f, \varphi_{n,m} \rangle \varphi_{n,m}, \quad P_{W_n} f = \sum_m \langle f, \psi_{n,m} \rangle \psi_{n,m}$$

Poiché si tratta di proiezioni ortogonali, possiamo interpretare queste funzioni come le migliori approssimazioni di  $f$  con elementi di  $V_n$  e di  $W_n$ : in particolare, combinando con l'espansione precedente col fatto che  $L^2(\mathbb{R})$  è somma diretta dei  $W_n$ , troviamo

$$f = \sum_n \sum_m \langle f, \psi_{n,m} \rangle \psi_{n,m}$$

Questa decomposizione è l'analogo discreto della trasformata delle ondicelle che abbiamo discusso all'inizio di queste note: l'analogia è la stessa che intercorre fra serie ed integrale di Fourier. Si noti tuttavia che qui abbiamo due indici nella serie: i coefficienti di Fourier  $\langle f, \varphi_{n,m} \rangle$  al variare di  $m \in \mathbb{Z}$  possono vedersi come una descrizione del segnale  $f$  al livello di granularità espresso dalla griglia associata al sottospazio  $V_n$ .

Poiché possiamo scrivere un elemento  $f \in V_n = V_{n-1} \oplus W_{n-1}$  in modo unico come:

$$f = \sum_m \alpha_{n,m} \varphi_{n,m} = a_{n-1} + d_{n-1}$$

dove  $a_{n-1} \in V_{n-1}$  (l'approssimazione) e  $d_{n-1} \in W_{n-1}$  (il dettaglio) sono, a loro volta, decomponibili come

$$a_{n-1} = \sum_m \alpha_{n-1,m} \varphi_{n-1,m}, \quad d_{n-1} = \sum_m \beta_{n-1,m} \psi_{n-1,m}$$

per il corollario 5.8 abbiamo quindi

$$\alpha_{n-1,m} = \langle f, \varphi_{n-1,m} \rangle = \sqrt{2} \sum_k \overline{h_{k-2m}} \langle f, \varphi_{n,k} \rangle = \sqrt{2} \sum_k \overline{h_{k-2m}} \alpha_{n,k}$$

In modo del tutto analogo

$$\beta_{n-1,m} = \sqrt{2} \sum_k \overline{g_{k-2m}} \alpha_{n,k}$$

dove  $g_k$  sono i coefficienti di Fourier della funzione  $G(\xi) = e^{i\xi} \overline{H(\xi)}$  che figura nella definizione dell'ondicella di Mallat  $\psi$  (cfr. lemma 6.3): dalla dimostrazione del lemma segue infatti che i coefficienti di Fourier di  $G$  e quelli di  $H$  sono legati dalla relazione  $g_k = (-1)^k \overline{h_k}$ .

Svolgiamo due osservazioni importanti: la prima è che queste formule ricorsive si possono interpretare in termini di convoluzioni di serie numeriche; precisamente,  $\alpha_{n-1,m}$  risulta la convoluzione della serie  $\sum_k \alpha_k$  con la serie  $\sqrt{2} \sum_k \overline{h_{2k}}$ , cioè della serie ottenuta da  $\sum_k \overline{h_k}$  selezionando gli indici pari. Ne segue che le approssimazioni  $a_{n-1}$  contengono la metà dell'informazione delle approssimazioni  $a_n$ , (l'altra è contenuta nel dettaglio  $d_{n-1}$ ).

Inoltre queste equazioni ricorsive possono essere combinate iterativamente per scrivere un algoritmo di *trasformata veloce delle ondicelle*, che consente di passare dalla rappresentazione di  $f$  come elemento di  $V_n$  ad elemento di  $V_{n-1} \oplus W_{n-1}$ . La corrispondente trasformata inversa, che consente di passare dai coefficienti rispetto alla decomposizione  $V_{n-1} \oplus W_{n-1}$  a quelli rispetto a  $V_n$  si ottiene usando il corollario 5.8 alla formula di raffinamento e la sua versione

per  $\psi$ , che segue dalla relazione  $\widehat{\psi}(2\xi) = G(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)$ :

$$\begin{aligned} \sum_m \alpha_{n,m} \varphi_{n,m} &= \sum_m \alpha_{n-1,m} \varphi_{n-1,m} + \sum_m \beta_{n-1,m} \psi_{n-1,m} \\ &= \sum_m \alpha_{n-1,m} \left( \sqrt{2} \sum_k h_{k-2m} \varphi_{n,k} \right) \\ &\quad + \sum_m \beta_{n-1,m} \left( \sqrt{2} \sum_k g_{k-2m} \varphi_{n,k} \right) \\ &= \sqrt{2} \sum_k (h_{k-2m} \alpha_{n-1,m} + g_{2m-k} \beta_{n-1,m}) \varphi_{n,k} \end{aligned}$$

Riassumiamo in un teorema le formule che abbiamo dimostrato:

**Teorema 8.1** *Se  $a_n = \sum_m \alpha_{n,m} \varphi_{n,m}$ , e  $d_n = \sum_m \beta_{n,m} \varphi_{n,m}$ :*

- (1)  $\alpha_{n-1,m} = \sqrt{2} \sum_k \overline{h_{k-2m}} \alpha_{n,k}$ .
- (2)  $\beta_{n-1,m} = \sqrt{2} \sum_k \overline{g_{k-2m}} \alpha_{n,k}$ .
- (3)  $\alpha_{n,m} = \sqrt{2} \sum_k h_{m-2k} \alpha_{n-1,k} + \sqrt{2} \sum_k g_{m-2k} \beta_{n-1,k}$

Questi algoritmi di decomposizione di  $\alpha_{n,m}$  in termini di approssimazioni e dettagli meno fini, e di ricostruzioni di  $\alpha_{n,m}$  a partire dalle sue approssimazioni e dettagli si schematizzano come segue:

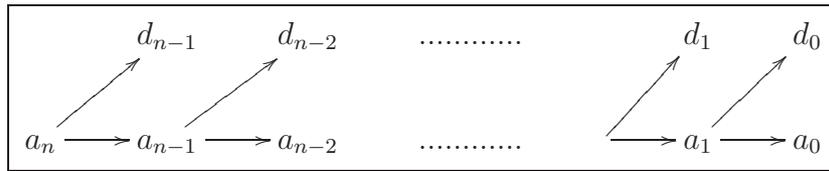


Figura 2: Algoritmo di trasformazione delle ondicelle diretto

Si noti che, nota l'approssimazione  $a_k$  ed i dettagli  $d_{n-1}, \dots, d_k$  è possibile ricostruire  $a_n$  in modo completo: cioè, l'algoritmo diretto, ad ogni passaggio da  $n$  a  $n - 1$ , preserva tutta l'informazione del segnale, distribuendola solo in modo diverso fra la componente di approssimazione e quella di dettaglio. Per questo motivo l'algoritmo inverso è capace di ricostruire completamente il segnale di partenza.



Figura 3: Algoritmo di trasformazione delle ondicelle inverso

Evidentemente, ai fini delle applicazioni pratiche, emerge in modo chiaro da questi algoritmi quanto siano utili i filtri  $H$  e  $G$  con solo un numero finito di coefficienti non nulli, e quindi quanto, ad esempio, la costruzione di Daubechies sia fondamentale per le applicazioni pratiche.

**Esempio 8.2** Consideriamo l'ondicella di Haar e la successione  $h$  che le è associata: dato che gli unici  $h_k$  non nulli sono  $h_0 = h_1 = 1/2$  (da cui, essendo  $g_m = (-1)^m \overline{h_{-m}}$ ,  $g_{-1} = g_0 = 1/2$ ), troviamo che, dato un segnale  $f$  rappresentato da  $N$  valori  $(a_{n,1}, \dots, a_{n,N})$ , possiamo decomporlo in approssimazioni  $(a_{n-1,1}, \dots, a_{n-1,N/2})$  e dettagli  $(d_{n-1,1}, \dots, d_{n-1,N/2})$  come

$$a_{n-1,m} = \frac{\sqrt{2}}{2} (a_{n,2m} + a_{n,2m+1}), \quad d_{n-1,m} = \frac{\sqrt{2}}{2} (a_{n,2m} - a_{n,2m+1})$$

Diamo qualche interpretazione di quanto detto nel linguaggio della teoria dei segnali.

### Definizione 8.3

- (1) Un filtro è una successione bilatera<sup>18</sup>  $h \in \ell^2(\mathbb{Z})$  la cui serie di Fourier associata

$$\widehat{h}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\xi}$$

ha come somma una funzione limitata  $H(\xi)$  (oltre che periodica, come ovvio).

- (2) Un filtro con risposta finita (FRF) è un filtro in cui solo un numero finito di coefficienti  $h_n$  è non nullo: la lunghezza di un FRF è la distanza  $k_1 - k_0$  fra gli indici tali che  $h_k = 0$  se  $k < k_1$  o se  $k > k_2$ .
- (3) Un filtro con risposta infinita (FRI) è un filtro in cui infiniti coefficienti  $h_n$  sono diversi da zero.

<sup>18</sup>Cioè una funzione  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Di solito, nella letteratura ingegneristica, i coefficienti  $h_n$  della successione sono denotati con  $h[n]$ , un retaggio dei tempi in cui i sistemi di scrittura computerizzata non consentivano indici e pedici<sup>19</sup> che, per comprensibili motivi di tradizione, sopravvive oggidi.

Abbiamo già incontrato un esempio di filtro, e precisamente il filtro passa-basso  $H(\xi)$  associato ad una multirisoluzione: come abbiamo visto, nel caso delle ondicelle di Daubechies, questo filtro è con risposta finita. Interpretato come funzione somma della corrispondente serie trigonometrica, un FRF corrisponde ad un polinomio trigonometrico.

Si noti che una condizione sufficiente affinché un filtro sia FRF è che  $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$ : in questo caso la somma della serie  $\widehat{h}$  è una funzione continua: questo è, di nuovo, il caso delle ondicelle alla Daubechies, mentre l'ondicella di Shannon ha un filtro  $H$  con infiniti coefficienti diversi da zero, quelli di indici dispari (cfr. esempio 6.6).

Poiché immaginiamo i nostri filtri come coefficienti di serie trigonometriche, la moltiplicazione delle serie corrisponde alla convoluzione delle successioni: in particolare, *applicare un filtro  $h$*  ad una successione  $s \in \ell^2$  vuol dire calcolarne la convoluzione, i cui coefficienti sono

$$(h * s)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{n-k} s_k$$

Come sappiamo dalla teoria di Fourier (cfr. e.g. [7], [1, §5.8], [2, Proposizione 7.3.4]), la trasformata della convoluzione è il prodotto delle trasformate:  $\widehat{h * s} = \widehat{h} \cdot \widehat{s}$ . Dato che  $\widehat{h}$  è una funzione limitata, abbiamo il

**Teorema 8.4** *Fissato un filtro  $h \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , la funzione  $s \mapsto h * s$  è un operatore lineare e limitato sullo spazio  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .*

Inoltre, la convoluzione di successioni possiede una identità, cioè il filtro  $\delta_0$  definito come la successione il cui unico coefficiente non nullo è lo 0-esimo, che vale 1: allora è ovvio che  $\delta_0 * s = s$  per ogni successione  $s \in \ell^2(\mathbb{Z})$ .

Consideriamo ora il filtro passa-basso  $H(\xi)$  indotto da una multirisoluzione  $(\{V_n\}, \varphi)$ : in realtà, in teoria dei segnali, si usa sovente una normalizzazione diversa da quella che abbiamo adottato in queste note, definendo il *filtro passa-basso* e il *filtro passa-alto* come

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} H(\xi), \quad m_1(\xi) = \overline{m_0(\xi + \pi)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{H(\xi + \pi)}$$

In questo modo, la relazione di Smith–Barnwell 5.11 si traduce nelle equazioni

<sup>19</sup>Come nel classico libro di David Gries *Compiler Construction for Digital Computers*, scritto con mezzi informatici nel lontano 1971.

- (1)  $|m_0(\xi)|^2 + |m_1(\xi)|^2 = 1$   
 (2)  $m_0(\xi)\overline{m_1(\xi)} + m_0(\xi + \pi)\overline{m_1(\xi + \pi)} = 0$

che possiamo esprimere anche sostenendo che la matrice

$$\begin{pmatrix} m_0(\xi) & m_1(\xi) \\ m_0(\xi + \pi) & m_1(\xi + \pi) \end{pmatrix}$$

è unitaria (per quasi ogni  $\xi \in [-\pi, \pi]$ ).

Notiamo che la relazione di ortogonalità fra i coefficienti del filtro  $H$  mostrata a pagina 24 si esprime concisamente in termini della successione dei suoi coefficienti come  $(h * \bar{h})_m = \delta_{0m}$ : essa equivale alla (1) appena scritta; inoltre la relazione dei coefficienti  $h_m$  con i  $g_m$  (che equivale alla relazione  $|m_0(\xi + \pi)|^2 = |m_1(\xi)|^2$  per filtri  $m_0$  e  $m_1$ ) si esprime come

$$(h * \bar{h})_m = (-1)^m (g * \bar{g})_m$$

mentre la relazione (2) precedente per i filtri  $m_0$  e  $m_1$  equivale alla

$$(h * \bar{g})_{2m} = 0$$

Le verifiche di queste affermazioni sono essenzialmente già state fatte nelle pagine precedenti, qui le abbiamo formulate semplicemente in questo linguaggio più compatto dei filtri.

# Bibliografia

**Nota:** questi riferimenti si limitano ai testi da me consultati nella redazione di queste note, e non costituiscono in alcun modo una bibliografia sull'argomento. Ho privilegiato ove possibile articoli e libri reperibili su Internet.

- [1] G. Bachman, L. Narici, E. Beckenstein, *Fourier and Wavelet Analysis*, Springer, 2000.
- [2] P. Caressa, *Metodi matematici della meccanica quantistica*, e-book alla URL: <http://www.caressa.it/>
- [3] E. Hernández, *Ondículas y tecnología*, Bol. de la Soc. Esp. de Mat. Apl 25, (2003), 39–54.
- [4] G. Grubb, *Notes on Wavelets*, preprint, Matematisk Institut, Københavns Universitet, 2001.
- [5] B. Javert, W. Sweldens, *An Overview of Wavelet Based Multiresolution Analyses*, preprint.
- [6] P.E.T. Jorgensen, *Analysis and probability, Wavelets, Signals, Fractals*, Springer, 2006.
- [7] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, Dover, 1976.
- [8] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, 1999.
- [9] Y. Meyer, *Wavelets and Operators, I*, Oxford UP, 1992.
- [10] Y. Meyer, *Le traitement du signal et l'analyse mathématique*, Ann. Inst. Fourier, 50 (2000), 593–632.
- [11] C. Shannon, *Communication in the Presence of Noise*, Proc. of the IRE 37 (1949), 10–21, reprinted in Proceedings of the IEEE, Vol. 86, (1998), 447–457.

- [12] G. Strang, *Wavelet Transform versus Fourier Transform*, Bull. A.M.S., 28 (1993), 288–305.

# Indice analitico

- analisi (di) multirisoluzione, 17
- applicare un filtro, 41
- atomi tempo-frequenza, 9
  
- base di Riesz, 17
- box spline, 23
  
- cappello francese, 13
- cappello messicano, 13
- coefficienti di Fourier, 2, 5
- condizione di Smith–Barnwell, 24
- convoluzione, 4
- criterio di ammissibilità, 15
  
- equazione di dilatazione, 21
- equazione di raffinamento, 21
  
- filtro, 40
- filtro con risposta finita, 40
- filtro con risposta infinita, 40
- filtro passa-alto, 41
- filtro passa-basso, 22, 41
- formula di inversione di Fourier, 3
- formula di Parseval, 5
- formula di Plancherel, 5
- funzione di campionamento di Shannon, 10
- funzione di scala, 17
- funzione indicatore, 10
  
- lunghezza, 40
  
- multirisoluzione, 17
- multirisoluzione di Riesz, 18
  
- ondicella, 13
  
- ondicella di Daubechies, 35
- ondicella di Haar, 30
- ondicella di Shannon, 30
- ondicella madre, 14
- ondicella rispetto alla multirisoluzione, 25
- ondicelle figlie, 14
  
- serie di Fourier, 2
  
- teorema di Bézout, 33
- teorema di Calderón–Grossmann–Morlet, 14
- teorema di campionamento, 10
- teorema di Heisenberg–Weyl, 7
- teorema di Paley–Wiener, 10
- trasformata delle ondicelle, 14
- trasformata di Fourier veloce, 6
- trasformata veloce delle ondicelle, 38



This work is licensed under a *Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License*.