Capitolo 9

ALGEBRE DI BANACH E C*-ALGEBRE

In questo capitolo introduciamo le algebre di operatori: in realtà definiamo una classe più generale di oggetti, le algebre di Banach, che combinano una struttura di spazio vettoriale normato e di algebra associativa: gli esempi che ci interessano sono le C*-algebre di operatori, delle quali ci occuperemo nei capitoli seguenti; comunque nel caso commutativo, queste algebre sono algebre di funzioni, e come esempio chiave analizzeremo in dettaglio il caso dell'algebra delle funzioni continue su uno spazio di Hausdorff compatto, dimostrandone tutte le principali proprietà. In appendice al capitolo diamo dei rapidi cenni di analisi complessa, per rendere indipendente la nostra esposizione autosufficiente.

9.1 Algebre di Banach

Osserviamo che se $A : X \longrightarrow Y$ è un operatore lineare e $B \in \mathcal{B}(Y, Z)$ allora l'operatore composto

$$B \circ A(x) := B(Ax)$$

è lineare (ovvio) e limitato:

$$||B \circ A(x)|| \leq ||B||\ ||Ax|| \leq ||A||\ ||B||\ ||x||$$

cioè

$$||BA|| \leq ||A||\ ||B||$$

Se $X = Y = Z$ lo spazio vettoriale $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, X)$ è un'algebra rispetto al prodotto dato dalla composizione di operatori ed è normata nel senso della seguente

9.1.1 Definizione *Un'algebra (associativa sui complessi) $\mathcal{A}$ si dice* normata *se, come spazio vettoriale, è normato e la norma è compatibile col prodotto:*

$$\forall a, b \in \mathcal{A} \quad ||ab|| \leq ||a||\ ||b||$$

Se un'algebra normata $\mathcal{A}$ è uno spazio di Banach rispetto alla sua norma, si dice algebra di Banach.

Osserviamo che un'algebra di Banach, dal punto di vista algebrico, è semplicemente un'algebra associativa, non necessariamente commutativa e non necessariamente dotata di un elemento identità.

9.1.2 Esempio

(1) *Se X è uno spazio di Banach, allora $\mathcal{B}(X)$ è un'algebra di Banach.*

(2) *Ogni algebra di dimensione finita è un'algebra di Banach, dato che uno spazio di dimensione finita è di Banach rispetto a qualsiasi norma si possa immaginare.*

(3) *Se $\dim X < \infty$ allora $\mathcal{B}(X)$ è l'algebra degli endomorfismi di uno spazio vettoriale, cioè l'algebra completa delle matrici $M_n(\mathbb{C})$: una norma che tipicamente si considera sullo spazio delle matrici (reali o complesse) è*

$$||A|| = n \max_{i,j} |a_{ij}|$$

ove $((a_{ij})) = A$ sono le entrate della matrice. Ovviamente rispetto a $||.||$ $M_n(\mathbb{C})$ è uno spazio normato: è inoltre un'algebra di Banach, dato che

$$\begin{aligned} ||AB|| &= n \max_{i,j} \left| \sum_k a_{ik} b_{jk} \right| \leq n \max_{i,j} \sum_k |a_{ik}| \, |b_{kj}| \\ &\leq n \left(\underbrace{\frac{|A|}{n} \frac{|B|}{n} + \cdots + \frac{|A|}{n} \frac{|B|}{n}}_{n \text{ volte}} \right) = |A| \, |B| \end{aligned}$$

Introduciamo un po' di terminologia: ovviamente una *sottoalgebra* di un'algebra normata $\mathcal{A}$ è un sottospazio vettoriale che sia anche un'algebra rispetto al prodotto indotto da $\mathcal{A}$: avrà interesse particolare considerare sottoalgebre chiuse. Un *morfismo* $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ di algebre normate è un operatore lineare e continuo che sia anche un omomorfismo di algebre: $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Evidentemente le algebre normate formano una categoria.

Sia $\mathcal{A}$ un'algebra normata e $S \subset \mathcal{A}$; se $a(S)$ denota la sottoalgebra generata da S allora $\overline{a(S)}$ è una sottoalgebra normata di $\mathcal{A}$. Infatti la mappa

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (A, B) &\longmapsto AB \end{aligned}$$

è continua (su $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ si mette la topologia prodotto). Per vederlo basta osservare che

$$A_nB_n - A_nB + A_nB - AB = A_n(B_n - B) + (A_n - A)B$$

e quindi che

$$\begin{aligned} ||A_nB_n - AB|| &\leq ||A_n||\,||B_n - B|| + ||A_n - A||\,||B|| \\ &\leq c||B_n - B|| + ||A_n - A||\,||B|| \, x_n \underset{\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

(dato che $A_n \longrightarrow A$).

Quindi $\{A_n\}, \{B_n\} \subset \overline{a(S)}$ implica $AB \in \overline{a(S)}$: cioè la chiusura di una sottoalgebra è una sottoalgebra.

Un caso interessante è quando $X = \mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert: ad un elemento A dell'algebra di Banach $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si associa la funzione

$$\langle x, y\rangle := (x, Ay)$$

che è una forma sesquilineare limitata su $\mathcal{A}$:

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||A||\,||x||\,||y||$$

(per la diseguaglianza di Schwartz). Viceversa, se $\langle , \rangle$ è una forma sesquilineare limitata sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ allora, fissato $x \in \mathcal{H}$, la mappa $y \longmapsto \langle x, y\rangle$ è un funzionale lineare limitato di norma N tale che

$$||\langle x, -\rangle|| \leq N||x||$$

Ma allora, per il teorema di Riesz, esiste $x' \in \mathcal{H}$ tale che

$$\forall y \in \mathcal{H} \quad \langle x, y\rangle = (x', y)$$

In modo analogo, fissando y, si ottiene la forma antilineare $x \longmapsto \langle x, y\rangle$ e di nuovo, per il teorema di Riesz (o meglio per il complesso coniugato del teorema di Riesz...), deve esistere $y' \in \mathcal{H}$ tale che

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad \langle x, y\rangle = (x, y')$$

Dunque ogni forma sesquilineare limitata è del tipo $\langle , \rangle$ ed esiste un operatore $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tale che $y' = Ay$ e $\langle x, y\rangle = (x, Ay)$ con $||A|| \leq ||\langle , \rangle||$.

Si noti che in realtà $||\langle , \rangle|| = ||A||$: infatti

$$||\langle , \rangle|| = \sup_{x,y \in \mathcal{H}_1} |\langle x, y\rangle| = ||A||$$

dato che $M|(x, Ay)|\ ||y|| \leq 1$ (denotiamo con $\mathcal{H}_1$ l'insieme dei vettori di $\mathcal{H}$ di norma minore o uguale a 1).

Dalla discussione precedente si ha che la forma

$$\langle x, y\rangle^* := \overline{\langle x, y\rangle}$$

è sesquilineare limitata e si dice *forma aggiunta* di $\langle , \rangle$. Ovviamente

$$||\langle , \rangle|| = ||\langle , \rangle^*||$$

e l'operatore A^* tale che, per ogni $x, y \in \mathcal{H}$: $\langle x, y\rangle^* = (x, A^*y)$ si dice *operatore aggiunto* dell'operatore A.

Per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ esiste dunque un unico operatore aggiunto $A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tale che

$$(Ax, y) = \overline{(y, Ax)} = (x, A^*y)$$

La corrispondenza $A \longmapsto A^*$ è una involuzione di algebre in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$: cioè $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una *-algebra.

9.1.3 Proposizione *Se $\mathcal{A}$ è un'algebra normata con involuzione *:*

(1) $(aA + bB)^* = \overline{a}A^* + \overline{b}B^*$.

(2) $(A^*)^* = A$.

(3) $(AB)^* = B^*A^*$.

9.1.4 Definizione *Una* *-algebra normata *è un'algebra $\mathcal{A}$ normata che sia anche una *-algebra in modo che*

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad ||A|| = ||A^*||$$

Abbiamo appena visto che $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una *-algebra normata. In realtà la norma in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ possiede una proprietà ben più notevole. Infatti, dato che

$$||A||^2 = \sup_{||x||=1} ||Ax||^2$$

e

$$||Ax||^2 = (Ax, Ax) = (x, A^*Ax) \leq ||A^*Ax||$$

(per la disuguaglianza di Schwartz) allora

$$||A||^2 \leq \sup_{||x||\leq 1} ||A^*Ax|| = ||A^*A|| \leq ||A^*||\ ||A|| = ||A||\ ||A|| = ||A||^2$$

e quindi

$$||A^*A|| = ||A||^2$$

9.1.5 Definizione *Una *-algebra di Banach $\mathcal{A}$ tale che, per ogni $a \in \mathcal{A}$:*

$$(*) \qquad ||a^*a|| = ||a||^2$$

si dice C*-algebra *e la proprietà* $(*)$ *si dice identità-C*.*

In una C*-algebra $\mathcal{A}$ ogni *-sottoalgebra chiusa è una sotto-C*-algebra.

9.1.6 Esempio

(1) *La C*-algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ non è commutativa: infatti due operatori in generale non sono commutabili (a meno che $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ e quindi $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = M_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$).*

(2) *Consideriamo le funzioni continue (a valori complessi) $C(X)$ definite su uno spazio topologico compatto X. Si tratta di uno spazio vettoriale che, rispetto alla norma*
$$||f|| = \max_{x \in X} |f(x)|$$
è uno spazio di Banach. Se poi consideriamo le operazioni
$$(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$$
$$(f^*)(x) := \overline{f(x)}$$
allora $C(X)$ diviene una C-algebra commutativa.*
In seguito dimostreremo che, in un certo senso, si tratta del modello più generale di C-algebra commutativa. Osserviamo che la funzione 1 che vale identicamente 1 su X sta in $C(X)$ e ne costituisce l'identità:*
$$\forall f \in C(X) \quad f \cdot 1 = 1 \cdot f = f$$

(3) *Un altro esempio di C*-algebra commutativa strettamente imparentato con $C(X)$ è quello delle funzioni continue a supporto compatto definite su uno spazio topologico localmente compatto X: $C_c(X)$. La norma è la medesima di $C(X)$ (dato che il luogo dei punti ove un elemento di $C_c(X)$ è diverso da zero è compatto ha senso parlare di massimo su tutto X), come pure le operazioni di prodotto e *. Osserviamo che tuttavia $C_c(X)$ non possiede una identità, dato che la funzione identicamente 1 (unico candidato possibile) non ha supporto compatto.*

9.1.7 Definizione *Un elemento $a \in \mathcal{A}$ di una *-algebra si dice* normale *se $a^*a = aa^*$, e si dice* autoaggiunto *se $a^* = a$.*

Considereremo sempre algebre di Banach con unità I.

9.1.8 Definizione *Se $\mathcal{A}$ è un'algebra di Banach, un elemento $A \in \mathcal{A}$ si dice* invertibile *se esiste $B \in \mathcal{A}$ tale che*

$$AB = BA = I$$

Si scrive in tal caso $A^{-1} = B$.

Un'algebra di Banach possiede sempre elementi invertibili, come segue ad esempio dal

9.1.9 Lemma *Per ogni $B \in \mathcal{A}$ tale che $||I - B|| < 1$ si ha che $B \in \mathcal{A}^{-1}$.*

Dimostrazione: Scriviamo $A := I - B$. Allora l'ipotesi è che $||A|| < 1$ e possiamo prendere la serie formale

$$(I - A)^{-1} := \sum_{n \geq 0} A^n$$

Si tratta in realtà di una serie convergente, dato che converge assolutamente (cfr. proposizione 6.1.9): infatti la serie numerica

$$\sum_{n\geq 0} ||A^n|| = \sum_{n\geq 0} ||AA^{n-1}|| \leq \sum_{n\geq 0} ||A|| \, ||A^{n-1}|| \leq ... \leq \sum_{n\geq 0} ||A||^n$$

converge dato che $||A|| < 1$. Quindi la serie $\sum_{n\geq 0} A^n$ converge ad un elemento $C \in \mathcal{A}$, e si ha

$$\begin{aligned} CB &= \left(\lim_{N\longrightarrow\infty} \sum_{n=0}^{N} A^n \right) B = \lim_{N\longrightarrow\infty} \sum_{n=0}^{N} (A^n B) \\ &= \lim_{N\longrightarrow\infty} \sum_{n=0}^{N} A^n (I_A) = \lim_{N\longrightarrow\infty} (I - A^{N+1}) = I - 0 = I \end{aligned}$$

(abbiamo usato la continuità del prodotto in $\mathcal{A}$ ed il fatto che se una serie converge il suo termine generico tende a zero).

In modo analogo si trova $BC = I$.

QED

Osserviamo che

$$||(I - A)^{-1}|| = \left|\left| \sum_{n\geq 0} A^n \right|\right| \leq \sum_{n\geq 0} ||A^n|| \leq \sum_{n\geq 0} ||A||^n = \frac{1}{1 - ||A||}$$

ed in modo analogo

$$||(I-A)^{-1}-I|| = \left|\left|\sum_{n\geq 1} A^n\right|\right| \leq \frac{||A||}{1-||A||}$$

Da ciò segue la continuità della mappa $A \longmapsto A^{-1}$ nel punto $I \in \mathcal{A}$, e questo significa che se consideriamo l'insieme $\mathcal{A}^{-1}$ degli elementi invertibili di un'algebra di Banach, questo è un gruppo topologico (rispetto alla moltiplicazione in $\mathcal{A}$) per la topologia della norma (cfr. capitolo **??**: evidentemente è localmente compatto solo se l'algebra di Banach ha dimensione finita.

9.1.10 Esempio *Se $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ allora $\mathcal{A}^{-1}$ è il gruppo lineare generale $GL_n(\mathbb{C})$ formato dalle matrici invertibili a coefficienti complessi.*

9.1.11 Corollario *Se $\mathcal{A}$ è un'algebra di Banach e $B \in \mathcal{A}^{-1}$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno U_ε di B in $\mathcal{A}$ tale che*

$$\forall A \in U_\varepsilon \quad ||A^{-1}-B^{-1}|| < \varepsilon$$

DIMOSTRAZIONE: Infatti $A^{-1} = A^{-1}BB^{-1}$ e quindi $A^{-1}-B^{-1} = (A^{-1}B-I)B^{-1}$ i.e.

$$||A^{-1}-B^{-1}|| \leq ||A^{-1}B-I||\ ||B^{-1}||$$

Ma $A^{-1}B = (B^{-1}A)^{-1}$ e quindi basta esibire un intorno di B tale che, per ogni suo elemento A si abbia $||A^{-1}B-I|| < \varepsilon$.

Consideriamo $A = B(X-I)$ di modo che $B^{-1}A = I-X$ e quindi se $||X|| < 1$ allora $B^{-1}A$ è invertibile e quindi A è invertibile. Così scegliamo X in modo che soddisfi alla

$$||A^{-1}B-I|| = ||(I-X)^{-1}-I|| \leq \frac{||X||}{1-||X||} < \varepsilon ||B^{-1}||$$

ottenendo

$$||B^{-1}A-I|| = ||B^{-1}(A-B)|| \leq ||B^{-1}||\ ||A-B||$$

Ma allora, per $||A-B|| \leq ||B^{-1}||^{-1}\delta_\varepsilon$, abbiamo il risultato voluto.

QED

Consideriamo un esempio di algebra di Banach che può non essere una C*-algebra. Sia $L^1(\mathbb{R}^n)$ lo spazio di Banach delle funzioni integrabili rispetto alla misura di Lebesgue. I risultati del capitolo precedente sulle convoluzioni e le trasformate di Fourier possono riassumersi con il

9.1.12 Teorema *Lo spazio di Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ è un'algebra di Banach commutativa rispetto alla convoluzione.*

DIMOSTRAZIONE: Ricordiamo che la convoluzione di due elementi di $L^1(\mathbb{R}^n)$ come

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$$

Sappiamo (proposizione 7.4.3) che la convoluzione rende $L^1(\mathbb{R})$ un'algebra associativa; dimostriamo dunque che è un'algebra di Banach. Infatti

$$\begin{aligned} ||f * g||_1 &= \int \left| \int f(y)g(x-y)dy \right| dx \leq \int \int |f(y)|\,|g(x-y)|dydx \\ &= \int \int |g(x-y)|dx|f(h)dy = \int |g(x)|dx \int |f(y)|dy = ||f||_1\,||g||_1 \end{aligned}$$

QED

Lo stesso ragionamento potevamo farlo nel caso $L^1(\mathbb{T})$, per quello che sappiamo sulle serie di Fourier; osserviamo che sia $L^1(\mathbb{T})$ che $L^1(\mathbb{R}^n)$ non hanno un elemento neutro (tuttavia posseggono delle "identità approssimate, o "nuclei approssimanti: ne abbiamo costruite una famiglia, quando abbiamo considerato il nucleo di Fejér).

Notiamo infine che l'algebra di Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ (così come $L^1(\mathbb{T})$) possiede una involuzione:

$$f^*(x) := \overline{f(-x)}$$

Tuttavia $L^1(\mathbb{R}^n)$ è una *-algebra ma non una C*-algebra in generale.

9.2 L'algebra $C(X)$

In questo paragrafo ci concentriamo sulla C*-algebra commutativa $C(X)$ delle funzioni continue definite su uno spazio di Hausdorff compatto. Per essere precisi dovremmo specificare se le funzioni in $C(X)$ sono reali oppure complesse: i risultati che otterremo possono formularsi in ambedue i casi. Nel seguito, comunque, con $C(X)$ intenderemo sempre le funzioni continue complesse, denotando con $C_{\mathbb{R}}(X)$ quelle reali.

Consideriamo uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto X e l'algebra di Banach commutativa $C_c(X)$ delle funzioni reali continue a supporto compatto su X.

9.2.1 Definizione *Un funzionale $I : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ lineare si dice* positivo *se per ogni $f \in C_c(X)$: $f \geq 0 \Rightarrow I(f) \geq 0$.*

Il seguente teorema è stato anticipato quando abbiamo considerato le distribuzioni di ordine zero (cfr. esempio 8.4.4 e seguenti).

9.2.2 Teorema (RIESZ–MARKOV) *Se I è un funzionale lineare positivo sull'algebra $C_c(X)$ delle funzioni reali continue a supporto compatto definite su uno spazio di Hausdorff localmente compatto X allora esiste un'unica misura di Borel μ su X tale che*

$$\forall f \in C_c(X) \quad I(f) = \int_X f d\mu$$

DIMOSTRAZIONE: Dovremo usare alcune delle nozioni di teoria della misura (capitolo **??**). Precisamente, per costruire la nostra misura di Borel considereremo una misura esterna topologicamente regolare (definizione 4.5.5), usando il criterio 4.5.7.

Per ogni aperto $S \subset X$ definiamo l'insieme

$$M_S := \{f \in C_c(X) \mid f \in C_c(X, [0,1]),\ \operatorname{supp} f \subset S\}$$

e la funzione

$$\overline{\mu}S := \sup_{f \in M_S} I(f)$$

Si tratta di una funzione a valori in $[0, \infty]$ definita su tutti gli aperti di X, monotona, finita sugli insiemi limitati e che soddisfa l'ipotesi (5) del teorema 4.5.7. Dimostriamo che si tratta di una funzione numerabilmente subadditiva sugli aperti: sia $S = \cup S_i$ e sia $f \in C_c(X, [0,1])$ e $\operatorname{supp} f \subset S$; consideriamo ora una partizione dell'unità (teorema 2.3.5), cioè una famiglia di funzioni non-negative $\varphi_1, ..., \varphi_n \in M_{S_i}$ tali che

$$\forall x \in \operatorname{supp} f \quad \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) = 1$$

Allora $f = \sum_i \varphi_i f$ e quindi

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n} I(\varphi_i f) \leq \sum_{i=1}^{n} \overline{\mu}S_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}S_i$$

Passando al sup per ogni $f \in C_c(X)$ si trova

$$\overline{\mu}S \leq \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}S_i$$

cioè la subadditività numerabile di $\overline{\mu}$.

Ora dimostriamo che $\overline{\mu}$ soddisfa alle altre ipotesi del teorema 4.5.7 col che potremo dedurne che si estende ad una misura di Borel (quasi-regolare) su X. Se $S = S_1 \cup S_2$ con $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ e se $f_1 \in M_{S_1}$ e $f_2 \in M_{S_2}$, allora $f_1 + f_2 \in M_S$, cioè

$$I(f_1) + I(f_2) \leq \overline{\mu}(S)$$

Al variare di $f_1 \in M_{S_1}$ e di $f_2 \in M_{S_2}$ otteniamo dunque

$$\overline{\mu}S_1 + \overline{\mu}S_2 \leq \overline{\mu}S$$

quindi

$$\overline{\mu}S_1 + \overline{\mu}S_2 = \overline{\mu}S$$

Con ciò la funzione $\overline{\mu}$ soddisfa tutte le ipotesi necessarie perché possa estendersi ad una misura boreliana μ su X.

Ora mostriamo che

$$\forall f \in C_c(X) \quad I(f) = \int_X f d\mu$$

Dato che ogni $f \in C_c(X)$ è differenza di funzioni non negative, possiamo limitarci al caso $f \geq 0$ e, per linearità, possiamo anche assumere che $f \leq 1$.

Sia dunque S un aperto limitato tale che $\operatorname{supp} f \subset S$ e sia

$$S_k := \{x \in X \mid nf(x) > k - 1\}$$

(si noti che $S_0 = S$ e $S_k = \emptyset$ per $k > n$). Ovviamente

$$\overline{S_{k+1}} \subset S_k$$

e definiamo quindi

$$\varphi_k(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in S_{k+1} \\ nf(x) - k + 1 & \text{se } x \in S_k \setminus S_{k+1} \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus S_k \end{cases}$$

Allora

$$f = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi_k$$

e si ha $\operatorname{supp} \varphi_k \subset \overline{S}_k \subset S_{k-1}$ e $\varphi_k = 1$ su S_{k+1}. Quindi

$$\forall k \geq 1 \quad \overline{\mu}S_{k+1} \leq I(\varphi_k) \leq \overline{\mu}S_{k-1}$$

e

$$\forall k \geq 1 \quad \overline{\mu} S_{k+1} \leq \int_X \varphi_k d\overline{\mu} \leq \overline{\mu} S_k$$

Ne segue che

$$-\mu S_1 \leq \sum_{k=1}^n \left(I(\varphi_k) - \int_X \varphi_k \right) \leq \overline{\mu} S_0 + \overline{\mu} S_1$$

da cui

$$\left| I(f) - \int_X f d\mu \right| \leq \frac{2}{n} \overline{\mu} S$$

Ma n era arbitrario e quindi troviamo $I(f) = \int f d\overline{\mu}$.

QED

Questo teorema è di cruciale importanza perché ci fa vedere come le misure possano considerarsi funzionali lineari sullo spazio $C_c(X)$: in particolare ci fornisce una caratterizzazione dei funzionali lineari positivi su $C_{\mathbb{R}}(X)$ se X è uno spazio di Hausdorff compatto, cosa che ora torneremo a supporre.

Il risultato preliminare che ci occorre afferma che ogni funzionale lineare limitato su $C_{\mathbb{R}}(X)$ è differenza di due funzionali lineari positivi: in realtà questo risultato non dipende dalla natura dello spazio $C_{\mathbb{R}}(X)$, ma può formularsi in una maggiore generalità.

9.2.3 Definizione *Uno spazio vettoriale L di funzioni (qualsiasi!) a valori reali definite su X si dice* reticolo vettoriale *se per ogni $f, g \in L$ anche* $\max(f, g), \min(f, g) \in L$.

Imponendo la solita norma $||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ un reticolo vettoriale diviene uno spazio normato.

9.2.4 Lemma *Se L è un reticolo vettoriale di funzioni reali limitate definite su un insieme X e se $1 \in L$ allora per ogni funzionale lineare limitato F su L esistono due funzionali lineari positivi F_+ e F_- tali che $F = F_+ - F_-$ e*

$$||F|| = F_+(1) + F_-(1)$$

DIMOSTRAZIONE: Se $f \in L$ è non-negativa poniamo

$$F_+(f) := \sup_{0 \leq \varphi \leq f} F(\varphi)$$

Allora

(1) $F_+(f) \geq 0$.

(2) $F_+(f) \geq F(f)$.

(3) $\forall c \geq 0 \quad F_+(cf) = cF_+(f)$.

Se $f, g \in L$ sono non-negative e $0 \leq \varphi \leq f$ e $0 \leq \psi \leq g$ allora

$$F_+(f+g) \geq F(\varphi) + F(\psi)$$

e, passando al sup su tutte le φ e ψ:

$$F_+(f+g) \geq F_+(f) + F_+(g)$$

Ma, se $0 \leq \chi \leq f+g$ allora $0 \leq \max(chi, f) \leq f$ e quindi $0 \leq \chi - \max(\chi, f) \leq g$, sicché

$$F(\chi) = F(\max(\chi, f)) + F(\chi - \max(\chi, f)) \leq F_+(f) + F_+(g)$$

Passando ancora al sup su tutte le χ:

$$F_+(f+g) \leq F_+(f) + F_+(g)$$

cioè $F_+(f+g) = F_+(f) + F_+(g)$.

Ora sia $f \in L$ qualsiasi e $M, N \geq 0$ costanti tali che $f+M, f+N \geq 0$; allora

$$F_+(f+M+N) = F_+(f+M) + F_+(N) = F_+(f+N) + F_+(M)$$

cioè

$$F_+(f+M) - F_+(M) = F_+(f+N) - F_+(N)$$

Quindi il valore di $F_+(f+M) - F_+(M)$ non dipende dalla scelta di M: definiamo dunque $F_+(f) := F_+(f+M) - F_+(M)$ ed il funzionale F_+ è lineare[1].

Per le (1) e (2) sia F_+ che il funzionale lineare $F_- := F_+ - F$ sono positivi e si ha ovviamente $F = F_+ - F_-$.

Ora dimostriamo la relazione fra le norme: si ha sempre che

$$||F|| \leq ||F_+|| + ||F_-|| = F_+(1) + F_-(1)$$

Per avere la disuguaglianza nel verso opposto consideriamo una funziona $0 \leq \varphi \leq 1$ di L; allora $|2\varphi - 1| \leq 1$ e

$$||F|| \geq F(2\varphi - 1) = 2F(\varphi) - F(1)$$

passando al sup per ogni φ otteniamo

$$||F|| \geq 2F_+(1) - F(1) = F_+(1) + F_-(1)$$

QED

[1]Da $F_+(cf) = cF_+(f)$ per $c \geq 0$ e dato che $F_+(-f) + F_+(f) = F_+(0) = 0$ abbiamo che $F_+(cf) = cF_+(f)$ per ogni c.

9.2.5 Teorema (RIESZ) *Se X è uno spazio di Hausdorff compatto e $C_{\mathbb{R}}(X)$ lo spazio delle funzioni reali continue su X allora ad ogni funzionale limitato F su $C_{\mathbb{R}}(X)$ corrisponde un'unica misura di Radon finita con segno ν su X tale che*

$$\forall f \in C_{\mathbb{R}}(X) \quad F(f) = \int_X f d\nu$$

e $||F|| = |\nu|(X)$.

DIMOSTRAZIONE: Sia $F = F_+ - F_-$ come nel lemma. Allora per il teorema di Riesz–Markov 9.2.2 esistono delle misure finite μ_1 e μ_2 tali che

$$F_+(f) = \int_X f d\mu_1 \qquad\qquad F_-(f) = \int_X f d\mu_2$$

Ponendo $\nu := \mu_1 - \mu_2$ otteniamo una misura di Radon finita con segno tale che

$$F(f) = \int_X f d\nu$$

Ora calcoliamo la norma di F: si ha intanto che

$$|F(f)| \leq \int_X |f| d|\nu| \leq ||f|| \; |\nu|(X)$$

Quindi $||F|| \leq |\nu|(X)$. Ma

$$|\nu|(X) \leq \mu_1(X) + \mu_2(X) = F_+(1) + F_-(1) = ||F||$$

i.e. $||F|| = |\nu|(X)$.

L'unicità è ovvia.

QED

Possiamo riformulare il teorema di Riesz dicendo che *il duale topologico dello spazio di Banach $C_{\mathbb{R}}(X)$ è isomorfo allo spazio delle misure di Radon finite con segno su X con la norma $||\nu|| = |\nu|(X)$.*

Questo fatto rende immediate molte proprietà non banali dello spazio delle misure, ad esempio il fatto che sia uno spazio di Banach. Un risultato del tutto analogo vale per $C(X)$ relativamente allo spazio delle misure di Radon complesse.

Utilizziamo questi risultati per stabilire una proprietà fondamentale delle algebre $C(X)$ e $C_{\mathbb{R}}(X)$ (nel seguito con X denoteremo sempre uno spazio compatto di Hausdorff). Osserviamo per prima cosa che l'algebra $C(X)$ separa i punti di X, vale a dire:

$$\forall x_1 \neq x_2 \; \exists f \in C(X) \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

Questo segue immediatamente dal lemma di Urysohn 2.3.2.

9.2.6 Esempio *La proprietà di separare i punti di X è goduta da molte sottoalgebre di $C(X)$:*

(1) *L'algebra dei polinomi definiti sull'intervallo della retta reale $[0,1]$ ha certamente questa proprietà.*

(2) *Un esempio meno immediato è il seguente: consideriamo lo spazio*

$$X = \prod_{\alpha \in A} D_\alpha$$

ove

$$D_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r_\alpha\}$$

e gli r_α sono numeri positivi. Per il teorema di Tychonoff si tratta di uno spazio compatto, che è manifestamente di Hausdorff. Se consideriamo le proiezioni di X sui suoi fattori:

$$p_\alpha(x) := x_\alpha \in D_\alpha$$

si tratta di funzioni continue, cioè $p_\alpha \in C(X)$, che quindi generano una certa C-sottoalgebra (con unità) $\mathcal{P}$ in $C(X)$ (si tratta semplicemente dell'intersezione di tutte le C*-sottoalgebre (con unità) di $C(X)$ che contengono $\mathcal{P}$). Un generico elemento di $\mathcal{P}$ si scrive*

$$\sum C^{m_1\dots m_n, l_1\dots l_k}_{\alpha_1\dots\alpha_n,\beta_1\dots\beta_k} p_{\alpha_1}(x)^{m_1}\dots p_{\alpha_n}(x)^{m_n}\overline{p_{\beta_1}(x)}^{l_1}\dots\overline{p_{\beta_k}(x)}^{m_k}$$

(con $l_i, m_i \geq 0$ ed i coefficienti $C^{m_1\dots m_n, l_1\dots l_k}_{\alpha_1\dots\alpha_n,\beta_1\dots\beta_k}$ appartenenti a $\mathbb{C}$).
Questa sottoalgebra separa i punti: infatti se $x \neq y$ sono elementi di X allora esiste un α tale che $p_\alpha(x) \neq p_\alpha(y)$.

In ambedue gli esempi precedenti, le sottoalgebre in questione sono in realtà dense nelle rispettive algebre di funzioni continue, e questo segue dal teorema di Stone–Weiestrass che ora vogliamo dimostrare: daremo un elegante argomento di de Branges, sebbene il teorema possa dimostrarsi con tecniche essenzialmente elementari.

9.2.7 Lemma (DE BRANGES) *Se $\mathcal{R}$ è una sottoalgebra di $C_\mathbb{R}(X)$ e $K = \{\mu \in \mathcal{R}^\perp \mid ||\mu|| \leq 1\}$, per ogni punto μ estremale di K e per ogni funzione continua $f : \mathcal{R} \longrightarrow (0,1)$ f è costante sul supporto della misura μ.*

DIMOSTRAZIONE: Se $\mu = 0$ certamente $\operatorname{supp}\mu = \emptyset$ ed il lemma è banale. Così sia $\mu \neq 0$, quindi $||\mu|| = 1$; definiamo le misure (di Radon) con segno

$$\nu(E) := \int_E f d\mu \qquad \text{e} \qquad \lambda(E) := \int_E (1-f) d\mu$$

(E boreliano). Dato che $f\in\mathcal{R}$ segue che $\nu,\lambda\in\mathcal{R}^\perp$ e quindi non sono nulle (dato che $f\neq 0$). Dunque

$$\mu = ||\nu||\frac{\nu}{||\nu||} + ||\lambda||\frac{\lambda}{||\lambda||}$$

è una combinazione convessa di elementi di K, dato che

$$||\nu|| + ||\lambda|| = \int_X f d|\mu| + \int_X (1-f)d|\mu| = |\mu|(X) = ||\mu|| = 1$$

Ma μ è un punto estremale e quindi $\mu = \nu/||\nu||$, i.e. $\nu = ||\nu||\mu$:

$$\int_E f d\mu = \int_E ||\nu|| d\mu$$

per ogni boreliano E. Dunque $f = ||\nu||$ $|\mu|$-q.o. Ma f è continua, quindi $f = ||\nu||$ sul supporto di μ.

QED

9.2.8 Teorema (STONE–WEIERSTRASS) *Se X è uno spazio compatto di Hausdorff e $\mathcal{R}$ è una *-sottoalgebra di $C_\mathbb{R}(X)$ tale che*

(1) $I\in\mathcal{R}$.

(2) *$\mathcal{R}$ separa i punti di X.*

allora $\overline{\mathcal{R}} = C(X)$.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo $K = \{\mu\in\mathcal{R}^\perp \mid ||\mu|| \leq 1\}$: si tratta di un insieme non vuoto, convesso e *-debolmente compatto (teorema di Alaoglu 8.2.12), quindi, per il teorema di Krejn–Milman 8.3.10, contiene un estremale μ.

Supponiamo che il supporto di μ contenga almeno due punti distinti x, y: allora esiste $f\in\mathcal{R}$ con $0 < f < 1$ che separa i punti. Ma per il lemma di de Branges questo è impossibile; quindi $\operatorname{supp}\mu = \{x\}$, dunque

$$\int_X 1 d\mu = 0$$

(perché $\mathcal{R}$ contiene le costanti) i.e. $\mu = 0$. Ma allora $K = \{0\}$ e quindi $\mathcal{R}^\perp = \{0\}$. Per concludere la dimostrazione applichiamo infine il teorema di Hahn–Banach: se la chiusura di $\mathcal{R}$ non fosse tutta $C(X)$ dovrebbe esistere un funzionale lineare non nullo in $\mathcal{R}$, mentre abbiamo dedotto che $\mathcal{R}^\perp = \{0\}$.

QED

Il teorema di Stone–Weiestrass può formularsi anche per l'algebra $C(X)$ delle funzioni complesse:

9.2.9 Teorema (STONE–WEIERSTRASS COMPLESSO) *Se X è uno spazio compatto di Hausdorff e $\mathcal{R}$ è una *-sottoalgebra di $C(X)$ (cioè contiene, con ogni funzione f la coniugata $f^* := \overline{f}$) tale che*

(1) $I \in \mathcal{R}$.

(2) *$\mathcal{R}$ separa i punti di X.*

allora $\overline{\mathcal{R}} = C(X)$.

DIMOSTRAZIONE: Basta dimostrare che l'algebra reale

$$\mathcal{R}_0 := \{f \in \mathcal{R} \mid f = f^*\}$$

delle funzioni autoconiugate (cioè a valori reali!) è densa in $C_{\mathbb{R}}(X)$, e quindi che soddisfa le ipotesi del teorema di Stone–Weierstrass reale. Evidentemente $1 \in \mathcal{R}_0$, quindi $\mathcal{R}_0$ contiene le costanti reali; che separi i punti è immediato: se $x_1 \neq x_2$ sono punti di X, esiste una funzione complessa F che li separa, quindi delle due funzioni reali

$$f = \frac{F + \overline{F}}{2} \qquad \text{e} \qquad g = \frac{F - \overline{F}}{2i}$$

almeno una separa i punti x_1 e x_2.

QED

Come controesempio, vedremo in seguito che l'algebra $A(D)$ delle funzioni complesse continue nel disco chiuso $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ olomorfe al suo interno non soddisfa le ipotesi del teorema di Stone–Weierstrass (il coniugio non è olomorfo).

Dimostriamo infine che lo spazio $C(X)$ gode di una notevole proprietà universale, postulata da Urysohn e dimostrata da Banach e Mazur: questa proprietà si articola in due risultati estremamente interessanti.

9.2.10 Teorema *Ogni spazio di Banach B è isomorfo ad un sottospazio chiuso di $C(X)$ per un opportuno spazio topologico compatto X. Se B è separabile può assumersi $X = [0, 1]$.*

DIMOSTRAZIONE: Utilizzeremo in modo essenziale le nozioni generali introdotte nel capitolo sugli spazi vettoriali topologici.

Sia X la palla unitaria in V^*: sappiamo dal teorema di Alaoglu 8.2.12 che si tratta di un insieme *-debolmente compatto. Allora l'applicazione che ad ogni elemento di B fa corrispondere un funzionale lineare su X si estende ad una mappa

$$B \longrightarrow C(X)$$

che è un isomorfismo di B su un sottospazio chiuso di $C(X)$.

Supponiamo ora che B sia separabile; allora $X \subset B^*$ è uno spazio topologico metrizzabile. Costruiamo esplicitamente una funzione f da $C[0,1]$ allo spazio metrico convesso compatto X: a questo punto la funzione

$$\begin{aligned} B &\longrightarrow C[0,1] \\ x &\longmapsto (t \longmapsto (f(t)(x)) \end{aligned}$$

sarà, per la prima parte della dimostrazione, l'immersione isometrica di B in $C[0,1]$ desiderata.

Possiamo supporre che il diametro dello spazio metrico compatto X sia 1; sempre per compattezza possiamo scrivere

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$$

ove gli X_i sono chiusi e hanno diametro 1/2. Per ogni i possiamo allora scrivere

$$X_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

ove gli X_{ij} sono chiusi e hanno diametro 1/4. In generale, iterando il procedimento, perverremo ad una successione $\{X_{i_1 \dots i_k}\}$ di chiusi di diametri 2^{-k}.

Costruiamo ora la funzione $f : [0,1] \longrightarrow X$ con un procedimento iterativo: dividendo $[0,1]$ in $2n_1 - 1$ intervalli Δ_i, definiamo f su Δ_i come una curva continua che congiunga un punto x_k di X_k con un punto x_{k+1} di X_{k+1}. (lo spazio X è convesso dunque ciò è possibile). Iteriamo il procedimento dividendo Δ_{2k-1} in $2n_2 - 1$ intervalli $\Delta_{i,2k-1}$ e definendo su questi f come il cammino che congiunga un punto $x_{kh} \in X_{kh}$ con un punto $x_{k,h+1} \in X_{k,h+1}$. Iterando il procedimento indefinitamente la funzione f resta così definita su un sottoinsieme denso di $[0,1]$ ed ivi continua, i.e. sarà possibile prolungarla ad una funzione continua $f : [0,1] \longrightarrow X$.

QED

9.2.11 Teorema (Fréchet) *Ogni spazio metrico separabile X è isometrico ad un sottospazio di uno spazio di Banach separabile.*

Dimostrazione: Sia $D = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_0, x_1, ...\}$ un insieme denso numerabile in X; definiamo allora una mappa

$$\Phi : X \longrightarrow \mathcal{M}$$

ove $\mathcal{M}$ è lo spazio delle successioni numeriche limitate (che è uno spazio metrico rispetto alla distanza $d(\{x_n\},\{y_n\}) := \sup_n |x_n - y_n|$), nel modo seguente:

$$\Phi(x) := \{y_n := d(x, x_n) - d(x_0, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$$

(che $\Phi(x)$ sia una successione numerica limitata segue dalla disuguaglianza triangolare: $\forall n \geq 1$ $|y_n| \leq d(x, x_0)$). Siano ora $x.x' \in X$ e $\Phi(x) = \{y_n\}$ e $\Phi(x') = \{y'_n\}$. Allora

$$\begin{aligned}||\Phi(x) - \Phi(x')|| &= \sup_n |y_n - y'_n|\\ &= \sup_n |(d(x, x_i) - d(x_0, x_i)) - (d(x', x_i) - d(x_0, x_i))|\\ &= \sup_n |d(x, x_i) - d(x', x_i)|‘d(x, x')\end{aligned}$$

Quindi, se $0 < \varepsilon < d(x, x')$ esiste $x_n \in M$ tale che $d(x, x_n) < \varepsilon/2$ sicché:

$$d(x', x_n) \geq d(x', x) - d(x, x_n) > d(x', x) - \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

vale a dire

$$\begin{aligned}|y_n - y'_n| = |d(x_n, x) - d(x, x')| >\\ > d(x', x_n) - \frac{\varepsilon}{2} > d(x', x) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = d(x, x') - \varepsilon\end{aligned}$$

da cui $||\Phi(x) - \Phi(x')|| > d(x, x') - \varepsilon$ e, per arbitrarietà di ε:

$$d(x, x') \leq ||\Phi(x) - \Phi(x')||$$

Abbiamo cioè dimostrato che $||\Phi(x) - \Phi(x')|| = d(x, x')$ e quindi X è isometrico ad un sottospazio M_0 separabile dello spazio $\mathcal{M}$ delle successioni numeriche limitate. Allora lo spazio di Banach generato da M_0 in $\mathcal{M}$ è separabile e contiene X.

QED

Conclusione:

9.2.12 Teorema (Banach–Mazur) *Ogni spazio metrico separabile è isometrico ad un sottospazio di $C[0, 1]$.*

9.3 Spettro e risolvente

Come in precedenza, d'ora in avanti tutte le algebre e gli spazi normati, salvo esplicita avviso contrario, saranno supposti complessi: in questo e nel paragrafo seguente sarà chiaro il perché di questa assunzione.

9.3.1 Definizione *Se $\mathcal{A}$ è un'algebra di Banach definiamo lo* spettro di $A \in \mathcal{A}$ *come*

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I \notin \mathcal{A}^{-1}\}$$

ed il risolvente di A *come*

$$P(A) := \mathbb{C} \setminus \sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I \in \mathcal{A}^{-1}\}$$

Stabiliamo anche la notazione:

$$R(\lambda) := (A - \lambda I)^{-1}$$

9.3.2 Proposizione *Lo spettro di un elemento di un'algebra di Banach è compatto in $\mathbb{C}$.*

DIMOSTRAZIONE: Per continuità di $\lambda \longmapsto A - \lambda I$ l'insieme $P(A)$ è aperto e quindi $\sigma(A)$ è chiuso; ovviamente $P(A)$ è limitato: dimostriamo che lo è anche $\sigma(A)$.

$$||\lambda^{-1}A|| < 1 \Rightarrow I - \lambda^{-1}A \in \mathcal{A}^{-1}$$

quindi per $|\lambda| > ||A||$ si ha che $\lambda \in P(A)$ e

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq ||A||\}$$

che è limitato.

QED

Dimostreremo in séguito che per ogni $A \in \mathcal{A}$: $\alpha(A) \neq \emptyset$.

Osserviamo che se $|\lambda| > ||A||$ allora

$$||(A - \lambda I|^{-1}|| \leq |\lambda|^{-1} \frac{1}{1 - ||\lambda^{-1}A||}$$

è analitica. Vogliamo dare, più in generale, una definizione di analiticità per funzioni a valori in uno spazio di Banach:

9.3.3 Definizione *Se $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ è un aperto e $A : \mathcal{D} \longrightarrow X$ è una funzione a valori in uno spazio di Banach, si dice che A è* analitica in *$z \in \mathcal{D}$ se esiste la sua derivata $A' : \mathcal{D} \longrightarrow X$ nella topologia della norma:*

$$\lim_{|h| \longrightarrow 0} \left|\left| \frac{(A(z+h) - A(z))}{h} - A'(z) \right|\right| = 0$$

I casi interessanti saranno quando X è della forma $\mathcal{B}(X, Y)$ o Y^*. Diamo ora una utile caratterizzazione del concetto di analiticità di una funzione a valori in uno spazio di Banach: ci serve un risultato di Analisi Complessa[2]

[2]Per alcuni richiami sulla teoria delle funzioni olomorfe si veda l'Appendice al capitolo, pag. 319 e seguenti).

9.3.4 Lemma *Se $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa nell'aperto $\mathcal{D}$ e se la palla $\{||z'-z|| \leq r\}_{z\in\mathcal{D}}$ è contenuta in $\mathcal{D}$ allora, per ogni $h, k \in \mathbb{C}$ con $|h|, |k| \leq \frac{r}{2}$ si ha la*

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \frac{f(z+k)-f(z)}{k}\right| \leq M|h-k|$$

ove M non dipende da h né da k.

DIMOSTRAZIONE: Utilizziamo la formula integrale di Cauchy 9.6.6: abbiamo che

$$||\xi - z'|| \geq \frac{r}{2}$$

per $z' \in \{z, z+h, z+k\}$ e $\zeta \in \gamma := \{w \in \mathbb{C} \mid |w-z'| = r\}$. Cioè la curva chiusa γ è completamente contenuta nel dominio $\mathcal{D}$. Applichiamo a questa curva la formula di Cauchy:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z'}d\xi$$

al primo membro della disuguaglianza dell'enunciato, ottenendo

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma f(\zeta)\left(\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\zeta-(z+h)} - \frac{1}{\zeta - z}\right) - \frac{1}{k}\left(\frac{1}{\zeta-(z+k)} - \frac{1}{\zeta-z}\right)\right)d\zeta\right| \\
&\quad = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma f(\zeta)\frac{z-(z+k)-z+(z+h)}{(\zeta-(z+h))(\zeta-z)(\zeta-(z+k))}d\zeta\right| \\
&\quad = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma f(\zeta)\frac{1}{(\zeta-z)(\zeta-(z+h))(\zeta-(z+k))}d\zeta\right| \\
&\quad \leq |h-k|\sup_{|\zeta-z|=r} f(\zeta)\frac{4r}{r^3}
\end{aligned}$$

Cioè la disequazione voluta.

QED

9.3.5 Definizione *Se Y è uno spazio di Banach, un $E \subset Y^*$ sottospazio vettoriale chiuso si dice* sottospazio determinante *se, considerando la restrizione della mappa canonica $j : Y \hookrightarrow Y^{**}$ a E si ha che*

$$\forall y \in Y \quad ||j|_E(y)|| = ||y||$$

9.3.6 Lemma *Se X e Y sono spazi di Banach, $\mathcal{F}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{B}(X,Y)$ e E un sottospazio determinante di Y^* allora, se per ogni $x \in X$ e $y \in E$ l'insieme*

$$\{\langle y, Ax\rangle \mid A \in \mathcal{F}\}$$

è limitato, $\mathcal{F}$ è limitato in $\mathcal{B}(X,Y)$ (cioè è equilimitato in norma).

DIMOSTRAZIONE: Se $J : X \hookrightarrow X^*$ è l'immersione canonica allora

$$\forall x \in X \quad \sup_{y \in E} |\langle J(Ax), y\rangle| < \infty$$

Allora, per il teorema di Banach–Steinhaus 6.5.14:

$$\sup_{x \in X} ||J|_E(Ax)|| = \sup_{x \in X} ||J(Ax)|| = \sup_{x \in X} ||Ax|| < \infty$$

e quindi, ancora per il teorema di Banach–Steinhaus, la tesi.

QED

9.3.7 Teorema *Una funzione $A : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{B}(X,Y)$ è analitica se e solo se per ogni $F \in X^*$ la funzione*

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \langle F|A(z)\rangle \end{aligned}$$

è olomorfa (scriviamo $\langle F|x\rangle = F(x)$ per la valutazione del funzionale F sull'elemento x).

DIMOSTRAZIONE: Evidentemente una funzione A analitica soddisfa la condizione del teorema: dimostriamo il viceversa.

La funzione $z \longmapsto \langle F|A(z)x\rangle$ è analitica a valori in $\mathbb{C}$, quindi soddisfa le ipotesi del lemma 9.3.4. Consideriamo ora la famiglia

$$\mathcal{F} := \left\{ \frac{1}{h-k} \left(\frac{A(z+h) - A(z)}{h} - \frac{A(z+k) - A(z)}{k} \right) \right\}$$

(per $h, k \in \mathbb{C}$ con $|h|, |k| < \frac{r}{2}$). Per il lemma 9.3.4 questa famiglia soddisfa le ipotesi del lemma 9.3.6 e quindi $\mathcal{F}$ è limitato in norma. Questo vuol dire che la successione

$$\left\{ \frac{A(z+h) - A(z)}{h} \right\}$$

è di Cauchy e quindi converge alla derivata $A'(z)$ nella norma di $\mathcal{B}(X,Y)$.

QED

Osserviamo che, ovviamente

$$\frac{d^n}{dz^n}\langle y, A(z)x\rangle = \langle y, A^{(n)}(z)x\rangle$$

L'importanza di questo teorema sta nel fatto che ci consente di estendere al caso di funzioni a valori in uno spazio di Banach molti dei risultati della teoria delle funzioni di una variabile complessa. Osserviamo a questo proposito, che se Γ è una curva chiusa regolare nel piano complesso e $x : \Gamma \longrightarrow E$ una funzione continua a valori in uno spazio di Banach E ha perfettamente senso il vettore

$$\oint_\Gamma x(z)dz$$

dato che la continuità della x implica che le somme parziali (alla Riemann, ad esempio) che definiscono l'integrale formano una successione di Cauchy, dunque convergono in E ad un elemento ben determinato che è poi il valore dell'integrale.

Il teorema di Cauchy 9.6.5, cioè che se $\mathcal{D}$ è compatto e $\Gamma := \partial\mathcal{D}$ è una curva regolare chiusa, e se $A : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{B}(X,Y)$ è analitica in $\mathcal{D} \setminus \Gamma$ e continua in $\mathcal{D}$ allora

$$\oint_\Gamma A(z)dz = 0$$

non è completamente immediato: si tratta di osservare che, per il teorema precedente:

$$\forall x \in X\ \forall y \in Y^* \quad \left\langle y, \left(\oint_\Gamma A(z)dz\right) x\right\rangle = \oint_\Gamma \langle y, A(z)x\rangle\, dz = 0$$

Il teorema di Hahn–Banach permette allora di inferire il teorema di Cauchy. Si estendono immediatamente al nostro contesto le formule di Cauchy 9.6.6 e le sue conseguenze, ad esempio il principio di continuazione analitica, in virtù del quale si può definire il *dominio di analiticità* di una funzione analitica a valori in uno spazio di Banach come il più grande aperto connesso di $\mathbb{C}$ ove la funzione sia definita ed analitica.

Similmente le formule di Taylor 9.6.16, Caychy–Hadamard 9.6.11 e Laurent 9.6.29 si generalizzano immediatamente al caso di funzioni olomorfe a valori in $\mathcal{B}(X,Y)$.

Torniamo ora alle algebre di Banach.

9.3.8 Teorema *Se $\mathcal{A}$ è un'algebra di Banach (con unità) allora la funzione $R : P(A) \longrightarrow A$:*

$$R(\lambda) := (A - \lambda I)^{-1}$$

è analitica.

DIMOSTRAZIONE: Se $z \in P(A)$ allora

$$A - \lambda I = A - zI - (z - \lambda)I = (A - zI)(I - (\lambda - z)R(z))$$

Cioè se $(A - zI)$ e $I - (\lambda - z)R(z)$ sono invertibili allora lo è $(A - \lambda I)$; ma $(A - zI)$ è invertibile e $I - (\lambda - z)R(z)$ lo è se

$$||A - zI|| < ||R(z)||^{-1}$$

In questo caso, $\lambda \in P(A)$ e

$$R(\lambda) = \left(\sum(\lambda - z)^n R(z)^n\right) R(z) = \sum(\lambda - z)^n R(z)^{n+1}$$

e quindi $\lambda \longmapsto (A - \lambda I)^{-1}$ è analitica.

QED

Applicando allora il teorema di Liouville 9.6.26 abbiamo che

9.3.9 Corollario *$\sigma(A) \neq \emptyset$.*

Osserviamo che

$$(A - \lambda I)^{-1} = (-\lambda(I - \lambda^{-1}A))^{-1} = -\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n}$$

La serie $\sum z^n A^n$ converge per $|z| < ||A||^{-1}$ ed il suo raggio di convergenza è $1/\sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$.

9.3.10 Definizione *Il* raggio spettrale *di un elemento $A \in \mathcal{A}$ è il numero*

$$\operatorname{spr}(A) := \lim_{n \longrightarrow \infty} ||A^n||^{1/n}$$

9.3.11 Teorema *Per ogni elemento A di un'algebra di Banach $\mathcal{A}$:*

$$\operatorname{spr}(A) = \lim_{n \longrightarrow \infty} ||A||^n||^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} ||A^n||^{1/n}$$

DIMOSTRAZIONE: Per continuità e monotonia del logaritmo basta dimostrare che $a_n := \log ||A^n||^{1/n}$ converge al proprio estremo inferiore, i.e. che

$$\frac{a_n}{n} \longrightarrow \inf \frac{a_n}{n}$$

a_n è subadditiva (cioè $a_{n+m} \leq a_n + a_m$) dato che

$$a_{n+m} = \log ||A^n A^m|| \leq \log(||A^n|| \, ||A||^m) = a_n + a_m$$

Ma la subadditività di una successione implica che questa converga al proprio estremo inferiore: infatti fissato q tale che $n = qm + r$ $(r = 0, ..., q-1)$ si ha

$$a_n \le a_{qm} + a_r \le m a_q + a_r$$

(applicando m volte la subadditività) e quindi

$$\frac{a_n}{n} \le \frac{m a_q}{n} + \frac{a_r}{n}$$

Il secondo membro converge al variare di n dunque

$$\lim \left(\frac{m a_q}{n} + \frac{a_r}{n} \right) = \frac{a_q}{q}$$

i.e, per ogni q:

$$\overline{\lim} \frac{a_n}{n} \le \frac{a_q}{q} \Rightarrow \overline{\lim} \frac{a_n}{n} \le \inf_q \frac{a_q}{q} \le \underline{\lim} \frac{a_q}{q}$$

e quindi la successione a_n/n converge al proprio inf.

QED

9.3.12 Esempio

(1) *Sia* $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{N})$ *e* $\{e_i\}$ *una base ortonormale. Definiamo gli* operatori diagonali *come*

$$De_n := d_n e_n$$

con $d_n \in \mathbb{C}$, *che soddisfano alle condizioni imposte dalla*

$$||Dx||^2 = \left|\left| D \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n \right) \right|\right|^2 = \sum |d_n|^2 |x_n|^2 \le ||d||_\infty^2 ||x_n||^2$$

cioè $||D|| = ||d||_\infty = \sup_n |d_n|$. *Il raggio spettrale di un operatore diagonale è la sua norma:*

$$\mathrm{spr}(D) = ||D||$$

(2) *Se consideriamo lo shift* $Se_n := e_{n+1}$, *dato che (essendo una isometria) è* $||S|| = 1$ *abbiamo che*

$$\mathrm{spr}(S) = 1$$

(3) *Una generalizzazione sono gli operatori di* shift pesato

$$Te_n := t_n e_{n+1}$$

(con $\{t_n\} \in l^\infty$*) tali che* $||T|| = ||t||_\infty$.

(4) *Consideriamo gli* operatori di Volterra *(cfr. esempio 3.2.10). Siano* $X = L^2[0,1]$, $K \in C([0,1]^2)$ *e definiamo* $K : X \longrightarrow X$ *come*

$$(Kx)(t) := \int_0^t K(t,s)x(s)ds$$

La funzione K *si dice* nucleo *dell'operatore. (In particolare si può considerare un operatore di Volterra sullo spazio* $X = C[0,1]$*). Ovviamente*

$$||K|| \le ||K||_\infty \Rightarrow ||K^n|| \le \frac{||X||_\infty^n}{(n-1)!}$$

(il fattore numerico è il volume del dominio di integrazione) e quindi

$$\mathrm{spr}(K) = 0$$

Infatti la serie $\sum K^n$ *è assolutamente convergente in* $\mathcal{B}(X)$ *e quindi definisce* $(I-K)^{-1}$ *e, dato che se* $\lambda \ne 0$ λK *è pure un operatore di Volterra, il risolvente di* K *contiene tutti i numeri complessi non nulli e*

$$\sigma(K) = \{0\}$$

L'operatore K *è invertibile se*

$$\forall t \in [0,1] \quad K(t,t) \ne 0$$

Infatti in questo caso, se $x \in \mathcal{N}(K)$*:*

$$\int_0^t K(t,s)x(s)ds = 0$$

derivando per t *(*K *rispetto alla prima variabile):*

$$\int_0^t K'(t,s)x(s)ds + K(t,t)x(t) = 0$$

da cui (per l'ipotesi su K*):*

$$\int_0^t \frac{K'(t,s)}{K(t,t)}x(s)ds + x(t) = 0$$

i.e. $x \in \mathcal{N}(I+H)$ *ove* H *è l'operatore di Volterra con nucleo* K'/K *e quindi,* $x = 0$.

9.4 Morfismi e quozienti

Le algebre di Banach non sopportano strutture algebriche troppo forti: in particolare debbono sempre possedere elementi non invertibili (e quindi ideali) a meno di non ridurli ai soli numeri complessi.

9.4.1 Teorema (MAZUR) *Un'algebra di Banach con unità e in cui ogni elemento sia invertibile è isomorfa a $\mathbb{C}$.*

DIMOSTRAZIONE: Un elemento $A \in \mathcal{A}$ ha spettro non vuoto e quindi esiste $\lambda \in \sigma(A)$; in particolare $(A-\lambda I)$ non è invertibile, quindi deve essere nullo. Abbiamo cioè dimostrato che ogni elemento non nullo di $\mathcal{A}$ è multiplo dell'identità. Quindi $\mathcal{A} \cong \mathbb{C}$.

QED

Un'algebra in cui ci siano elementi non invertibili possiede delle notevoli sottoalgebre: gli ideali.

9.4.2 Definizione *Un* ideale sinistro *di un'algebra di Banach $\mathcal{A}$ è un sottospazio vettoriale $J \subset \mathcal{A}$ tale che*

$$\forall B \in J\ \forall C \in \mathcal{A} \quad CB \in J$$

Si scrive $J \lhd \mathcal{A}$.

Se un'algebra di Banach ha unità I ovviamente nessun ideale (non banale, cioè non uguale a $\mathcal{A}$) può contenerla e, viceversa, un ideale non banale ha intersezione vuota con l'insieme $\mathcal{A}^{-1}$ degli elementi invertibili di $\mathcal{A}$.

In ogni algebra di Banach v'è abbondanza di elementi invertibili, infatti

$$\mathcal{B} := \{B \in \mathcal{A} \mid ||I - B|| < 1\} \subset \mathcal{A}^{-1}$$

In particolare se $J \lhd \mathcal{A}$ è un ideale proprio (cioè non banale) allora $J \cap \mathcal{B} = \emptyset$ e quindi J è contenuto nell'insieme chiuso $\complement\mathcal{B}$, che deve quindi contenere anche la chiusura $\overline{J}$ di J. Dunque se $J \lhd \mathcal{A}$ allora $\overline{J} \subset \mathcal{A}$, anzi

9.4.3 Proposizione *Se J è un ideale sinistro (destro, bilatero) allora $\overline{J}$ è un ideale sinistro (destro, bilatero).*

DIMOSTRAZIONE: Se $\{B_n\} \subset J$ converge a $B \subset \overline{J}$ allora, per ogni $A \in \mathcal{A}$ la $\{AB_n\} \subset J$ converge (per continuità del prodotto) a $AB \in \overline{J}$.

QED

D'ora in avanti conveniamo che il termine "ideale" voglia dire "ideale sinistro"; se un ideale sarà destro o bilatero lo diremo esplicitamente.

Rispetto all'inclusione gli ideali sinistri (destri, bilateri) di un'algebra di Banach formano un reticolo (con $0 = \{0\}$ ideale zero e $1 = \mathcal{A}$ ideale banale): inoltre questo insieme parzialmente ordinato soddisfa le ipotesi del lemma di Zorn, dato che se $\{J_\alpha\}$ è una catena di ideali allora $\bigcup_\alpha J_\alpha$ è un ideale, il che significa che ogni ideale è contenuto in un ideale (proprio!) massimale[3].

Ovviamente, dato che la chiusura di un insieme contiene l'insieme stesso:

9.4.4 Corollario *Ogni ideale massimale è chiuso.*

Sappiamo che possiamo definire il quoziente di un'algebra $\mathcal{A}$ per un ideale J ottenendo ancora un'algebra $\mathcal{A}/J$. Effettuiamo questa costruzione per le algebre di Banach.

L'insieme $\mathcal{A}/J$ è senz'altro un'algebra associativa: dobbiamo verificare se sia un'algebra di Banach. Denotando gli elementi di $\mathcal{A}/J$ come $A + J$ (sono classi di equivalenza rispetto alla relazione $A \equiv B \iff A - B \in J$), poniamo

$$||A + J|| := \inf_{B \in A+J} ||B||$$

9.4.5 Proposizione *Se J è un ideale chiuso allora $\mathcal{A}/J$ è un'algebra di Banach.*

DIMOSTRAZIONE: Scrivendo $B = A - C$ con $C \in J$ abbiamo che $\inf ||A - C|| = d(A, J)$ ove d è la distanza indotta dalla norma dello spazio di Banach $\mathcal{A}$. Dunque se $||A + J|| = 0$ si ha che $d(A, J) = 0$ e quindi (per chiusura di J) $A \in J$ i.e. $A + J = J$, l'elemento $0 \in \mathcal{A}/J$. Le altre proprietà della norma sono ovvie dalla definizione di distanza $d(A, J)$.

Verifichiamo infine che la norma indotta su $\mathcal{A}$ è completa. Sia

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||A_n + J|| < \infty$$

una serie assolutamente convergente in $\mathcal{A}/J$; prendiamo nella classe $A_n + J$ degli elementi B_n tali che $||B_n|| < ||A_n|| + \varepsilon_n$ con

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$$

[3]Questa e diverse altre asserzioni valgono nelle algebre associative qualsiasi e negli anelli: in particolare l'esistenza di un ideale massimale che contenga un ideale dato è nota in Algebra come *Lemma di Krull*.

(ad esempio basta considerare $\varepsilon = 2^{-1}$). Dunque $\sum ||B_n||$ è assolutamente convergente e, dato che $\mathcal{A}$ è di Banach, la serie $\sum B_n$ converge ad un elemento $B \in \mathcal{A}$, in modo che

$$\left|\left|B - \sum_{n=1}^{N} B_n\right|\right| \longrightarrow 0$$

e (per definizione la norma della classe di un elemento $A + J \in \mathcal{A}/J$ è minore o uguale alla norma di A in $\mathcal{A}$):

$$\left|\left|(A+J) - \sum_{n=1}^{N}(A_n + J)\right|\right| \leq \left|\left|B - \sum_{n=1}^{N} B_n\right|\right|$$

Quindi ogni serie assolutamente convergente in $\mathcal{A}/J$ converge in $\mathcal{A}/J$.

Infine, se $A+J, B+J \in \mathcal{A}/J$ esistono rappresentanti $A_\varepsilon \in A+J$ e $B_\varepsilon \in B+J$ tali che $||A_\varepsilon|| \leq ||(A+J)|| + \varepsilon$ e $||B_\varepsilon|| \leq ||(B+J)|| + \varepsilon$. Quindi

$$\begin{aligned} ||(A+J)(B+J)|| &= ||(AB)+J|| \leq ||A_\varepsilon B_\varepsilon|| \\ &\leq ||A_\varepsilon||\ ||B_\varepsilon|| \leq ||A+J||\ ||B+J|| + 2\varepsilon \end{aligned}$$

QED

Naturalmente un ideale J è massimale se e solo se $\mathcal{A}/J = \mathbb{C}$ per il teorema di Mazur.

9.4.6 Lemma *Se $\mathcal{A}$ è un'algebra di Banach con unità allora*

$$\mathcal{A}^{-1} = \complement\{A \mid \exists J \text{ ideale massimale proprio e } A \in J\}$$

Se fissiamo un elemento $A \in \mathcal{A}$ l'insieme degli ideali che contengono A è pure parzialmente ordinato e soddisfa le ipotesi del lemma di Zorn, quindi il teorema di Mazur può formularsi come

9.4.7 Teorema *Un'algebra di Banach con unità che non abbia ideali non banali è isomorfa a $\mathbb{C}$.*

Naturalmente un'algebra può non avere ideali bilateri pur possedendo moltissimi ideali sinistri, mentre in un'algebra commutativa i concetti di ideale sinistro, destro e bilatero coincidono.

Tutte le costruzioni algebriche che si effettuano sugli anelli possono darsi anche per le algebre di Banach: ad esempio un *morfismo* $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ fra algebre di Banach è un operatore lineare continuo fra gli spazi di Banach $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tale che

$$\forall A \in \mathcal{A}\ \forall B \in \mathcal{B} \quad \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$$

Ovviamente le algebre di Banach formano in questo modo una categoria.

I concetti di *nucleo* e *immagine di un morfismo* sono ovvi: il nucleo $\ker(\varphi)$ è l'insieme degli elementi di $\mathcal{A}$ la cui immagine è zero e l'immagine $\operatorname{im}(\varphi)$ l'insieme degli elementi di $\mathcal{B}$ che siano immagine di un elemento di $\mathcal{A}$.

L'insieme degli omomorfismi fra due algebre di Banach $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ si denota $\hom(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Un omomorfismo si dice *isomorfismo* se è un operatore lineare continuo e biunivoco (quindi una isometria). Si possono formulare e dimostrare esattamente come nel caso algebrico i teoremi di isomorfismo: ad esempio

9.4.8 Teorema *Se $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un morfismo fra algebre di Banach allora* $\ker(\varphi)$ *è un ideale bilatero e l'algebra $\mathcal{A}/J$ è isomorfa alla sottoalgebra* $\operatorname{im}(\varphi) \subset \mathcal{B}$.

9.4.9 Definizione *Un* modulo su un'algebra di Banach $\mathcal{A}$ *è uno spazio di Banach $\mathcal{M}$ dotato di un morfismo*

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$$

che si dice azione di $\mathcal{A}$ su $\mathcal{M}$.

Si scrive in genere $A \cdot M$ in luogo di $\mu(A)(M)$. Quindi gli elementi di un modulo si possono moltiplicare per gli elementi dell'algebra. Ad esempio un $\mathbb{C}$-modulo X non è altri che uno spazio di Banach.

Osserviamo che un ideale J, così come l'insieme quoziente $\mathcal{A}/J$ sono $\mathcal{A}$-moduli.

9.4.10 Definizione *Un'algebra di Banach priva di ideali bilateri non banali si dice* semplice.

9.4.11 Esempio

(1) *$\mathbb{C}$ è semplice.*

(2) *Le algebre (di dimensione finita) $M_n(\mathbb{C})$ sono algebre semplici (teorema 5.5.14).*

(3) *Il teorema di Mazur implica che un'algebra semplice commutativa (con unità) è isomorfa a $\mathbb{C}$.*

Consideriamo dunque un ideale massimale J nell'algebra di Banach (con unità) $\mathcal{A}$; dato che il quoziente $\mathcal{A}/J$ è $\mathbb{C}$ possiamo definire la mappa

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \varphi(A) := \lambda$$

con $A + J = \lambda I$, ovvero $A + J = \varphi(A)I$. La mappa φ non è altri che il morfismo naturale dato dalla proiezione di $\mathcal{A}$ sul quoziente $\mathcal{A}/J$:

$$\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$$

che è ovviamente suriettivo. Viceversa, se $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ è un morfismo allora $\ker \varphi = \varphi^{-1}(0)$ è un ideale bilatero che deve essere massimale, dato che $\mathcal{A}/\ker \varphi = \operatorname{im} \varphi$ è una sottoalgebra di $\mathbb{C}$ e quindi $\{0\}$ (da cui $\mathcal{A} = \ker \varphi$) oppure $\mathbb{C}$ stessa (da cui $\ker \varphi$ massimale). Quindi

9.4.12 Teorema *Esiste una corrispondenza biunivoca*

$$\{J \lhd \mathcal{A} \mid J \neq \mathcal{A}\} \longleftrightarrow \{\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \varphi \text{ morfismo}\}$$

Si noti che il funzionale φ associato ad un ideale massimale è continuo (perché l'ideale è chiuso) ed ha norma 1.

9.4.13 Esempio *Gli ideali massimali dell'algebra di Banach $C(X)$ delle funzioni continue su uno spazio compatto di Hausdorff sono tutti della forma*

$$M_x := \{f \in C(X) \mid f(x) = 0\}$$

In effetti, se $\varphi : C(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ allora $\varphi(1) = 1$ e φ ha lo stesso nucleo del funzionale

$$\delta_x : X \longrightarrow \mathbb{C}$$

che vale 1 su x e zero altrove (misura di Dirac concentrata in x), quindi $\varphi = \delta_x$. Ma il nucleo di δ_x è esattamente M_x.

Si noti che la corrispondenza $x \longmapsto M_x$ è biunivoca, fra X e l'insieme degli ideali massimali, dato che se $x \neq y$ per il lemma di Urysohn esiste una funzione f con $f(x) \neq f(y)$ e quindi $\delta_x \neq \delta_y$.

9.4.14 Teorema *Se $A \in \mathcal{A}$ algebra di Banach, allora*

$$\{\varphi(A)\}_{\varphi \in \hom(\mathcal{A},\mathbb{C})} = \sigma(A)$$

Dimostrazione: Se $\varphi \in \hom(\mathcal{A}, \mathbb{C})$ allora, per ogni $A \in \mathcal{A}$ si ha che $\varphi(A - \varphi(A)I) = 0$ e quindi $A - \varphi(A)I \in \ker \varphi$; dunque $(A - \varphi(A)I)$ non è invertibile, i.e. $\varphi(A) \in \sigma(A)$.

Viceversa, se $\lambda \in \sigma(A)$, $A - \lambda I)$ non è invertibile ed è pertanto contenuto in un ideale massimale proprio J. Ma allora la proiezione canonica $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/J$ è tale che $\varphi(A - \lambda I) = 0$ i.e. $\varphi(A) = \lambda I$.

QED

9.4.15 Corollario *Se $\mathcal{A}$ è un'algebra di Banach, $A \in \mathcal{A}$ e $\varphi \in \hom(\mathcal{A}, \mathbb{C})$:*

(1) $|\varphi(A)| \leq \mathrm{spr}(A) \leq ||A||$

(2) *Se $\varphi \in \mathcal{B}(\mathcal{A}, \mathbb{C})$ con $\varphi(I) = 1$ allora $||\varphi|| = 1$.*

9.4.16 Teorema *In un'algebra di Banach lo spettro è debolmente compatto.*

DIMOSTRAZIONE: Basta, per il teorema di Alaoglu 8.2.12, far vedere che $\sigma(\mathcal{A})$ è contenuto nella palla unitaria. Si ha intanto che, per ogni $\varphi \in \sigma(\mathcal{A})$: $\varphi(I) = 1$, e dunque possiamo prendere

$$\mathcal{A}_1^* \cap \{f \in \mathcal{A}^* \mid f(I) = 1\} \cap \bigcap_{A,B \in \mathcal{A}} \{f \in \mathcal{A}^* \mid f(AB) - f(A) - f(B) = 0\}$$

che è esattamente $\sigma(\mathcal{A})$ (per definizione!). Abbiamo così scritto $\sigma(\mathcal{A})$ come intersezione di un insieme *-debolmente compatto (la palla unitaria) e di insiemi *-debolmente chiusi (per continuità delle $f \in \mathcal{A}^*$ e dell'operazione di valutazione di un funzionale su un elemento dell'algebra); cioè $\sigma(\mathcal{A})$ è debolmente chiuso in un debolmente compatto, dunque è debolmente compatto.

QED

Il morfismo

$$\begin{aligned} \widehat{\ } : \mathcal{A} &\longrightarrow C(\sigma(\mathcal{A})) \\ A &\longmapsto (\varphi \longmapsto \varphi(A)) \end{aligned}$$

si dice *trasformata di Gel'fand*. Dato che i funzionali φ sono lineari, moltiplicativi e continui, la trasformata di Gel'fand è un operatore lineare:

$$\widehat{aA + bB}(\varphi) = \varphi(aA + bB) = a\varphi(A) + b\varphi(B) = (a\widehat{A} + b\widehat{B})(\varphi)$$

un morfismo di algebre:

$$\widehat{AB}(\varphi) = \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B) = (\widehat{A}\widehat{B})(\varphi)$$

ed è continuo:

$$||\widehat{A}|| = \sup_{\varphi \in \sigma(A)} |\widehat{A}(\varphi)| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda = \mathrm{spr}(A) \leq ||A||$$

(per definizione di $\sigma(A) = \{\varphi(A)\}_{\varphi \in \sigma(A)}$).

9.4.17 Definizione *Un elemento A di un'algebra di Banach $\mathcal{A}$ si dice* topologicamente nilpotente *se* $\mathrm{spr}(A) = 0$.

9.4.18 Corollario *Gli elementi topologicamente nilpotenti di un'algebra di Banach $\mathcal{A}$ costituiscono il nucleo della trasformata di Gel'fand. In particolare sono un ideale.*

Il nucleo della trasformata di Gel'fand si dice *nilradicale* dell'algebra $\mathcal{A}$.

9.4.19 Esempio *Consideriamo il disco unitario del piano complesso $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ e l'algebra*

$$A(D) := \{f \in C(D) \mid f \in \mathcal{O}(\overset{o}{\longrightarrow} D)\}$$

delle funzioni olomorfe nell'interno di D e continue in D; rispetto alla norma del sup si tratta ovviamente di un'algebra di Banach, e, essendo compatta l'immagine di un compatto per tramite di una mappa continua:

$$\sigma(A(D)) = \{\Phi_z : A(D) \longrightarrow D\}_{z\in\mathbb{C}} = D$$

*ove $\Phi_z(f) := f(z)$. In questo caso la trasformata di Gel'fand è la mappa identica, quindi, ad esempio, il nilradicale è $\{0\}$. Osserviamo esplicitamente che non esiste una operazione * in quest'algebra, e che la sua immagine in $C(\sigma(A(D)))$ per tramite della trasformata di Gel'fand non esaurisce tutta l'algebra delle funzioni continue: questo fatto, dato che, come si vede facilmente, $\mathcal{A}$ separa i punti e contiene le costanti, fornisce un esempio che mostra come la condizione di essere una *-sottoalgebra è essenziale nelle ipotesi del teorema di Stone–Weierstrass complesso. Se invece del prodotto punto per punto, consideriamo su $A(D)$ il prodotto*

$$(f \cdot g)(z) := \int_0^1 f(z - tz)g(tz)zdt$$

otteniamo un'algebra di Banach priva di unità; in questi casi, come vedremo meglio in seguito, possiamo sempre estenderla ad un'algebra con unità, ponendo $\mathcal{B} := \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$. Allora ogni elemento della forma $A \oplus 0$ (con $A \in A(D)$) ha raggio spettrale zero, sicché $\sigma(A(D))$ si riduce ad un sol punto.

9.4.20 Esempio *Nell'algebra delle matrici*

$$\left\{\begin{pmatrix} z & z' \\ 0 & z \end{pmatrix}\right\}_{z,z'\in\mathbb{C}}$$

(rispetto al solito prodotto matriciale) il nilradicale non si riduce al solo zero.

In tutti questi esempi le difficoltà presentate da queste algebre sono dovute al fatto che non sono C*-algebre.

9.5 Teorema di Gel'fand–Najmark

In questo paragrafo dimostreremo un teorema che in un certo senso è definitivo per la teoria delle C*-algebre abeliane.

9.5.1 Teorema (GEL'FAND–NAJMARK) *Se $\mathcal{A}$ è una C*-algebra abeliana allora la trasformata di Gel'fand è*

(1) *uno *-morfismo di C*-algebre;*

(2) *una isometria (in particolare è iniettivo);*

(3) *suriettiva.*

DIMOSTRAZIONE: Cominciamo col dimostrare che se valgono le (1)–(2) allora vale anche la (3); infatti l'immagine della trasformata di Gel'fand è una *-sottoalgebra chiusa (per le (1) e (2)) di $C(\sigma(\mathcal{A}))$ che contiene l'unità 1 di $C(\sigma(\mathcal{A}))$ (infatti $1 = \widehat{I}$) e separa i punti di $\sigma(\mathcal{A})$: se $\varphi_1, \varphi_2 \in \sigma(\mathcal{A})$ deve esistere $A \in \mathcal{A}$ tale che se $\varphi_1(A) \neq \varphi_2(A)$ allora $\widehat{A}(\varphi_1) \neq \widehat{A}(\varphi_2)$. Quindi, per il teorema di Stone–Weierstrass:

$$\overline{\widehat{\mathcal{A}}} = C(\sigma(\mathcal{A}))$$

Ma $\widehat{\mathcal{A}}$ è chiusa e quindi $\widehat{\mathcal{A}} = C(\sigma(\mathcal{A}))$.

Possiamo dunque limitarci a dimostrare le (1) e (2).

9.5.2 Definizione *Un elemento $A \in \mathcal{A}$ di una C*-algebra qualsiasi, si dice* normale *se $A^*A = AA^*$.*

Osserviamo che in un'algebra commutativa ogni elemento è normale: ora la (2) del teorema di Gel'fand–Najmark sarà conseguenza del

9.5.3 Lemma *Se A è un elemento normale in una C*-algebra $\mathcal{A}$ con unità allora* $\operatorname{spr} A = ||A||$.

Prima di dimostrare il lemma vediamo anche l'idea della dimostrazione della (1), ovvero che $\widehat{A^*} = \widehat{A}*$. Dato che

$$\varphi(A^*) = \widehat{A^*}(\varphi) = \widehat{A}^*(\varphi) = \overline{\widehat{A}(\varphi)} = \overline{\varphi(A)}$$

basta dimostrare che per ogni $\varphi \in \sigma(\mathcal{A})$: $\varphi(A^*) = \overline{\varphi(A)}$.

Ora si osservi che, per ogni $A \in \mathcal{A}$:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + i\frac{1}{2i}(A - A^*) =: A_1 + iA_2$$

(decomposizione che vale in ogni *-algebra) e che A_1 e A_2 sono ovviamente autoaggiunti; allora

$$\varphi(A) = \varphi(A_1) + i\varphi(A_2)$$

e quindi basta dimostrare che $\varphi(A_i) \in \mathbb{R}$ per avere che $\varphi(A^*) = \overline{\varphi(A)}$, i.e. che se $A = A^*$ allora $\varphi(A) \in \mathbb{R}$.

Dunque la (1) sarà dimostrata se proveremo il

9.5.4 Lemma *Se $\mathcal{A}$ è una C^*-algebra con unità e $A \in \mathcal{A}$ è autoaggiunto allora $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

Dunque per dimostrare il teorema di Gel'fand–Najmark non resta che dimostrare i lemmi 9.5.3 e 9.5.4.

Dimostrazione: (Lemma 9.5.3) Sappiamo che $||A^*A|| = ||A||^2$ e quindi che $||A^n||^2 = ||A^{n*}A^n||$ e quindi, se A è normale: $||A^n||^2 = ||(A^*A)^n||$. Quindi per studiare il limite $\lim ||A^n||^{1/n}$ basta studiare il

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} ||(A^*A)^n||^{\frac{1}{n}} = \mathrm{spr}(A^*A) = \mathrm{spr}(A^2)$$

Ma se $B = B^*$, per calcolare $\lim ||B^n||^{1/n}$ basta considerare una sottosuccessione, ad esempio $n = 2^m$, in modo che

$$||B^{2^m}|| = ||(B^{2^{m-1}})^2|| = ||B^{2^{m-1}}||^2$$

(essendo B autoaggiunto). Iterando questo calcolo si trova

$$||B^{2^m}|| = ||B||^{2^m}$$

e quindi $\mathrm{spr}(B) = ||B||$ (convergendo la sottosuccessione ad un certo limite, anche la successione converge al medesimo limite).

QED

Dimostrazione: (Lemma 9.5.4) Sia $A = A^*$ in $\mathcal{A}$ e $z \in \sigma(A)$. Vogliamo dimostrare che la parte immaginaria $\mathrm{Im}\, z$ è nulla. Intanto si noti che, ogni algebra con unità:

$$\sigma(A - \lambda I) = \sigma(A) - \lambda$$

(per definizione di spettro!). Quindi basta dimostrare che se $i\,\mathrm{Im}\, z \in \sigma(A - \mathrm{Re}\, zI)$ allora $\mathrm{Im}\, z = 0$, cioè basta supporre che sia $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ e $i\lambda_0 \in \sigma(A)$ e dimostrare che $\lambda_0 = 0$.

Ma, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} ||A + i\lambda I||^2 &= ||(A + i\lambda I)^*(A + i\lambda I)|| = ||(A - i\lambda I)(A + i\lambda I)|| \\ &= ||A^2 + \lambda^2 I|| \leq ||A||^2 + \lambda^2 \end{aligned}$$

cioè,

$$\forall z \in \sigma(A) \quad |z + i\lambda|^2 \leq ||A||^2 + \lambda^2$$

Ma se $i\lambda_0 \in \sigma(A)$ allora $|\lambda_0 + \lambda|^2 \leq ||A||^2 + \lambda^2$ e, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$|\lambda_0 + \lambda|^2 = \lambda_0^2 + 2\lambda\lambda_0 - ||A||^2 \leq 0$$

il che è assurdo, a meno che $\lambda_0 = 0$.

QED

Con ciò i due lemmi sono dimostrati, e quindi lo è anche il teorema di Gel'fand–Najmark.

Osserviamo che se un'algebra di Banach $\mathcal{A}$ non ha unità, possiamo estenderla come $\mathcal{B} : \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ col prodotto

$$(A \oplus z)(B \oplus w) := (AB + zB + wA) \oplus zw$$

e con la norma data dal sup delle norme di $\mathcal{A}$ e $\mathbb{C}$. $\mathcal{B}$ ha palesemente un'unità, che è $0 \oplus 1$.

9.5.5 Definizione *Se $\mathcal{A}$ è una C*-algebra anche non commutativa e priva di unità, la* rappresentazione regolare sinistra *di $\mathcal{A}$ è il morfismo di C*-algebre*

$$\begin{aligned} L : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{A}) \\ A &\longmapsto (B \longmapsto AB) \end{aligned}$$

9.5.6 Proposizione *Se $L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{A})$ è la rappresentazione regolare sinistra di $\mathcal{A}$ allora lo spazio $L(\mathcal{A}) \oplus \mathbb{C} \subset \mathcal{B}(\mathcal{A})$ è una sotto-C*-algebra (con unità) di $\mathcal{B}(\mathcal{A})$.*

DIMOSTRAZIONE: $L(\mathcal{A}) \oplus \mathbb{C}$ è una *-algebra il cui *-operatore è definito come

$$(L(A) + zI)^* := L(A^*) + \overline{z}I$$

Vogliamo dimostrare che $L(\mathcal{A})$ è chiusa[4] e che è una sotto-C*-algebra di $\mathcal{B}(\mathcal{A})$: con ciò la proposizione sarà provata.

A questo scopo basta dimostrare le

(1) $\forall A \in \mathcal{A} \; ||L(A)|| = ||A||$.

(2) $\forall B \in L(\mathcal{A}) \oplus \mathbb{C} \; ||B^*B|| = ||B||^2$.

[4]Questo implicherà che $L(\mathcal{A}) \oplus \mathbb{C}$ è una sottoalgebra di Banach di $\mathcal{B}(\mathcal{A})$: infatti se X è uno spazio di Banach e M, N suoi sottospazi, con M chiuso e N di dimensione finita, allora $M + N = \overline{M + N}$.

La (1) si dimostra osservando che

$$||L(A)L(B)|| = ||AB|| \leq ||A|| \, ||B||$$

e quindi $||L(A)|| \leq ||A||$; inoltre, per $B = A^*$ si ha che

$$||AB|| = ||AA^*|| = ||A||^2 = ||A|| \, ||A^*|| = ||A|| \, ||B||$$

con $B \neq 0$ ovviamente e quindi si ha anche $||L(A)|| \geq ||A||$.

Dimostriamo infine la (2); dato che

$$||B||^2 = \sup_{C \in \mathcal{A}_1} ||BC||^2$$

e $B = L(A) + zI$ da cui $BC = AC + zC$, troviamo che

$$\begin{aligned} ||AC + zC||^2 = ||BC||^2 &= ||(BC)^* BC|| = ||(AC + zC)^* BC|| \\ &= ||C^*(A^*(BC) + \overline{z}(BC))|| = ||C^* L(A^*)(BC) + zBC|| \\ &= ||C^* B^*(BC)|| \leq ||C|| \, ||B^* BC|| \leq ||BB^*|| \end{aligned}$$

(dato che $||C|| = 1$). Passando al sup:

$$||B||^2 \leq ||BB^*|| \leq ||B^*|| \, ||B|| \leq ||B||^2$$

QED

Ne segue che una C*-algebra $\mathcal{A}$ si immerge in una C*-algebra $\widetilde{\mathcal{A}}$ con unità. Ovviamente $\mathcal{A}$ è commutativa se e solo se lo è $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Dunque possiamo applicare il teorema di Gel'fand–Najmark anche al caso di algebre prive di unità, estendendole ed ottenendo

$$\widehat{\ }: \widetilde{\mathcal{A}} \longrightarrow C(\sigma(\widetilde{\mathcal{A}}))$$

Vediamo come la trasformata di Gel'fand riflette l'effetto del passaggio da $\mathcal{A}$ a $\widetilde{\mathcal{A}}$: intanto l'algebra $\widetilde{\mathcal{A}}$ possiede un funzionale lineare che $\mathcal{A}$ non ha, definito come

$$\varphi_\infty(A \oplus z) := z$$

Possiamo quindi considerare lo spazio $Y = \sigma(\widetilde{\mathcal{A}}) \setminus \{\varphi_\infty\}$, che è localmente compatto di Hausdorff; per definizione, la compattificazione ad un punto di Y è esattamente $X = \sigma(\mathcal{B})$. L'immagine della restrizione della trasformata di Gel'fand a $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ è l'algebra $C_0(Y)$ delle funzioni continue nulle all'infinito su Y. In effetti

$$A \in \mathcal{A} \iff \varphi_\infty(A) = 0$$

e quindi la restrizione della trasformata di Gel'fand di $\widetilde{\mathcal{A}}$ a $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\longrightarrow C(\sigma(\mathcal{A})) \\ A &\longmapsto \widehat{A}_X \end{aligned}$$

è la trasformata di Gel'fand di $\mathcal{A}$. pertanto

9.5.7 Corollario *Se $\mathcal{A}$ è una C*-algebra commutativa esiste uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto X tale che $\mathcal{A} \cong C_0(X)$ (isomorfismo di C*-algebre). Se $\mathcal{A}$ possiede unità, allora X è compatto.*

Si può ulteriormente precisare questo risultato usando il linguaggio delle categorie. Le C*-algebre formano ovviamente una categoria (i cui morfismi sono i morfismi di C*-algebre) che contiene la sottocategoria delle C*-algebre commutative $\mathfrak{A}_0$. Per quanto detto in precedenza, l'estensione da $\mathcal{A}$ a $\widetilde{\mathcal{A}}$ è un funtore

$$\mathfrak{F} : \mathfrak{A}_0 \longrightarrow \mathfrak{A}$$

dalla categoria delle C*-algebre commutative alla categoria $\mathfrak{A}$ delle C*-algebre commutative con unità. Inoltre, se consideriamo la categoria $\mathfrak{T}$ degli spazi topologici localmente compatti di Hausdorff (i cui morfismi sono le mappe continue) esiste anche un funtore

$$\mathfrak{G} : \mathfrak{T} \longrightarrow \mathfrak{T}_0$$

dato dalla compattificazione di Alexandroff, che ad ogni oggetto X di $\mathfrak{T}$ fa corrispondere la sua compattificazione ad un punto, e che quindi manda la categoria $\mathfrak{T}$ nella categoria $\mathfrak{T}_0$ degli spazi compatti di Hausdorff.

9.5.8 Teorema *Esiste una equivalenza naturale fra i funtori $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ che induce una equivalenza fra le categorie $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{T}$ e $\mathfrak{A}_0$ e $\mathfrak{T}_0$.*

DIMOSTRAZIONE: La trasformazione naturale fra i funtori $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ è indotta dalla trasformata di Gel'fand: infatti il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[r] \arrow[d, "\mathfrak{F}"'] & \mathfrak{T} \arrow[d, "\mathfrak{G}"] \\ \mathfrak{A}_0 \arrow[r] & \mathfrak{T}_0 \end{tikzcd}$$

è commutativo, ove le frecce orizzontali sono le trasformate di Gel'fand. L'unica cosa che resta da mostrare è che la trasformata di Gel'fand è un morfismo di funtori, cioè che per ogni morfismo di C*-algebre induce una mappa continua fra i relativi spettri e che ogni mappa continua fra gli spettri proviene in questo modo da un morfismo di C*-algebre.

Se $\eta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ è un morfismo fra la C*-algebra con unità $\mathcal{A}$ e la C*-algebra commutativa $\mathcal{B}$ allora $\eta(\mathcal{A})$ è una sotto-*-algebra di $\mathcal{B}$ con unità $\eta(I)$ e quindi possiamo supporre che sia

$$\overline{\eta(\mathcal{A})} = \mathcal{B}$$

i.e. $\eta(I) = I$, dunque, per ogni $\varphi \in \sigma(\mathcal{B})$: $\varphi \circ \eta \in \sigma(\mathcal{A})$. Evidentemente la mappa

$$\begin{aligned} \eta^* : \sigma(\mathcal{B}) &\longrightarrow \sigma(\mathcal{A}) \\ \varphi &\longmapsto \eta^*(\varphi) := \varphi \circ \eta \end{aligned}$$

è continua (su $\sigma(\mathcal{A})$ e $\sigma(\mathcal{B})$ le topologie sono quelle deboli rispetto alle mappe $\sigma(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$ e $\sigma(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$, che quindi sono continue per definizione): infatti[5]

$$\widehat{A} \circ \eta^* = \widehat{\eta(A)}$$

Ma $\sigma(\mathcal{A})$ e $\sigma(\mathcal{B})$ sono compatti di Hausdorff, quindi l'insieme

$$E := \eta^*(\sigma(\mathcal{B}))$$

è chiuso in $\sigma(\mathcal{A})$. Dimostriamo allora che

$$E \neq \sigma(\mathcal{A}) \iff \ker \eta \neq 0$$

Infatti $E \neq \sigma(\mathcal{A})$ se e solo se $\sigma(\mathcal{A}) \setminus E$ è aperto e non vuoto, se e solo se esiste $f \in C(\sigma(\mathcal{A}))$ non nulla che ristretta ad E sia zero (per il lemma di Urysohn 2.3.2). Ma per ogni $f \in C(\sigma(\mathcal{A}))$ si ha che $f = \widehat{A}_0$ (per il teorema di Gel'fand–Najmark) e quindi $F|_E = 0$ se e solo se per ogni $\varphi \in \sigma(\mathcal{B})$: $\widehat{A}_0(\eta^*(\varphi)) = 0$, se e solo se $\widehat{\eta(A_0)}(\varphi) = 0$ se e solo se $\eta(A_0) = 0$ (di nuovo per il teorema di Gel'fand–Najmark). Questa catena di equivalenze dimostra che $E \neq \sigma(\mathcal{A}) \iff \ker \eta \neq 0$.

In altri termini, η^* è suriettiva se e solo se $\ker \eta = 0$. Ma η^* è suriettiva se e solo se η è isometrica, dato che

$$||\eta(A)|| = ||\widehat{\eta(A)}|| = \sup_{\varphi \in \sigma(\mathcal{B})} |\widehat{\eta(A)}(\varphi)| = \sup_{\varphi \in \sigma(\mathcal{B})} |\widehat{A}(\eta^*(\varphi))| = \sup_{\psi \in \sigma(\mathcal{A})} |\widehat{A}(\psi)| = ||A||$$

In particolare se $\ker \eta = 0$ allora $||\eta(A)|| = ||A||$.

Questo dimostra che ogni morfismo di *-algebre determina in modo unico una mappa continua fra gli spettri.

QED

Il seguente risultato afferma che su una C*-algebra commutativa con unità esiste una sola struttura normata.

9.5.9 Teorema *Se $\eta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ è uno *-omomorfismo di C*-algebre allora:*

[5] Nella topologia debole su uno spazio X indotta dalle mappe $\{X \xrightarrow{f_\alpha} X_\alpha\}$ un'applicazione $f : Y \longrightarrow X$ è continua se e solo se per ogni α l'applicazione $f_\alpha \circ f : Y \longrightarrow X_\alpha$ è continua.

(1) $\forall A \in \mathcal{A}\ ||\eta(A)|| \leq ||A||$.

(2) $\forall A \in \mathcal{A}\ ||\eta(A)|| \leq ||A|| \iff \ker \eta = 0$.

(3) *$\eta(\mathcal{A})$ è chiusa (in norma, cioè è una C*-sottoalgebra di $\mathcal{B}$.*

DIMOSTRAZIONE: Se $\mathcal{A}$ è commutativa possiamo supporre che anche $\mathcal{B}$ lo sia, dato che $\eta(\mathcal{A})$ è una *-sottoalgebra commutativa di $\mathcal{B}$ e quindi $\overline{\eta(\mathcal{A})}$ è una C*-sottoalgebra commutativa di $\mathcal{B}$.

A meno di estendere $\mathcal{A}$ ad una $\widetilde{\mathcal{A}}$ con unità (e con $\widetilde{\eta}(I) := I$), per ipotesi si ha che:

$$||\eta(A)||^2 = ||\eta(A)^*\eta(A)|| = ||\eta(A^*)\eta(A)|| = ||\eta(A^*A)||$$

Ma A^*A, essendo un elemento normale, appartiene ad una sottoalgebra commutativa: la chiusura dell'algebra generata dai polinomi in A^*A e quindi

$$||\eta(A)||^2 \leq ||A^*A|| = ||A||^2$$

il che dimostra (1) e (2).

Si osservi ora che se η è un morfismo di C*-algebre allora certamente $\eta(\mathcal{A})$ è una *-sottoalgebra; inoltre, dato che $\ker \eta \subset \mathcal{A}$ è uno *-ideale (bilatero) chiuso in norma, ed il quoziente $\mathcal{A}/\ker\eta \cong \operatorname{im}\eta$ è certamente una C*-algebra e quindi il morfismo $\eta' : \mathcal{A}/\ker\eta \longrightarrow \mathcal{B}$ ottenuto componendo η con la proiezione $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\ker\eta$ è una isometria. Da ciò risulta che $\eta'(\mathcal{A}/\ker\eta) = \eta(\mathcal{A})$ è una C*-sottoalgebra di $\mathcal{B}$.

QED

9.5.10 Corollario *Se $\mathcal{A}$ è una *-algebra che sia una C*-algebra rispetto a due norme di Banach $||\text{-}||_1$ e $||\text{-}||_2$ allora le C*-algebre $(\mathcal{A}, ||\text{-}||_1)$ e $(\mathcal{A}, ||\text{-}||_2)$ sono isomorfe.*

DIMOSTRAZIONE: Si applichi il teorema allo *-isomorfismo $i : (\mathcal{A}, ||\text{-}||_1) \longrightarrow (\mathcal{A}, ||\text{-}||_2)$.

QED

9.6 Appendice: elementi di analisi complessa

Raccogliamo qui alcuni richiami sulle nozioni essenziali di Analisi Complessa in una variabile: stabiliamo solo i teoremi che abbiamo utilizzato in questo capitolo, e non nella loro massima generalità: per questo si rimanda ai testi specialistici, come l'ottimo [18].

9.6.1 Funzioni e integrali complessi

9.6.1 Definizione *Una funzione* $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *definita in un aperto* U *del piano complesso si dice* olomorfa *nel punto* $z_0 \in U$ *se esiste finito il limite*

$$f'(z_0) := \lim_{|\delta z| \longrightarrow 0} \frac{f(z_0 + \delta z) - f(z_0)}{\delta z}$$

Scriviamo

$$f(z) = u(z) + iv(z)$$

($u = \mathrm{Re}(f)$ e $v = \mathrm{Im}(f)$), osservando le che funzioni u e v dipendono dalle variabili reale x e y tali che $z = x + iy$. Allora possiamo dare la seguente caratterizzazione:

9.6.2 Teorema (CAUCHY–RIEMANN) *Una funzione* $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *è olomorfa in* z_0 *se e solo se*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad e \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo il limite che definisce l'olomorfia di f e, scrivendo $z = x + iy$, poniamo $\delta z = \delta x$ (il limite dipende solo dal fatto che il modulo di δz tende a zero, indipendentemente dall'argomento):

$$f'(z_0) = \lim_{\delta x \longrightarrow 0} \frac{u(x_0 + \delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\delta x} + i \lim_{\delta x \longrightarrow 0} \frac{v(x_0 + \delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\delta x}$$

Quindi se f è olomorfa in z_0 le derivate parziali di u e v rispetto a x esistono e $f' = u_x + iu_y$ (indichiamo le derivate parziali con un indice che denota la variabile rispetto alla quale si deriva).

Analogamente, per $\delta z = i\delta y$:

$$f'(z_0) = -iu_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0)$$

Confrontando le due espressioni di $f'(z_0)$ così ottenute, abbiamo el equazioni di Cauchy–Riemann nel punto z_0.

Viceversa, supponiamo che le u e v ammettano derivate parziali rispetto alle x e y e che valgano le relazioni di Cauchy–Riemann: allora,

$$\begin{aligned} u(x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0) - u(x_0, y_0) &= \\ &= u_x(x_0, y_0)\delta x + u_y((x_0, y_0)\delta y + o((\delta x)^2 + (\delta y)^2) \\ v(x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0) - v(x_0, y_0) &= \\ &= v_x(x_0, y_0)\delta x + v_y((x_0, y_0)\delta y + o((\delta x)^2 + (\delta y)^2) \end{aligned}$$

Quindi, per $\delta z = \delta x + i\delta y$ e le relazioni di Cauchy–Riemann:

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0+\delta z)-f(z_0)}{\delta z} &= u_x(x_0,y_0)\frac{\delta x + i\delta y}{\delta x + i\delta y} + v_x(x_0,y_0)\frac{i\delta x - \delta y}{\delta x + i\delta y} + \\ &\qquad + \frac{o((\delta x)^2+(\delta y)^2)}{\delta x + i\delta y} \\ &= u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) + \frac{o((\delta x)^2+(\delta y)^2)}{\delta z}\end{aligned}$$

e quindi la funzione f è olomorfa in z_0.

QED

9.6.3 Esempio *Sono olomorfe: le funzioni lineari (complesse), le funzioni razionali complesse e la funzione $f(z) = \exp z$, mentre* non è *olomorfa la funzione $g(z) = |z|^2$.*

Ci limiteremo qui a considerare come insiemi di definizione delle funzioni olomorfe i *domini regolari U* cioè gli aperti connessi del piano complesso la cui frontiera sia una curva regolare (non necessariamente connessa, cioè i nostri domini potranno avere dei "buchi"). Il numero di componenti connesse della curva ∂U si dice *ordine di connessione del dominio*[6]: se la curva che delimita il dominio è connessa (e quindi il dominio non ha "buchi"), è semplicemente connesso.

Evidentemente se Γ è una curva regolare nel piano complesso è chiaro cosa debba intendersi con

$$\int_\Gamma f(z)dz$$

per una funzione $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$: l'integrale si calcola infatti per mezzo di una qualsiasi rappresentazione parametrica $c = c(t)$ (con $c : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continua e regolare) della curva Γ:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b f(c(t))c'(t)dt$$

9.6.4 Esempio *Vogliamo calcolare l'integrale*

$$\int_{\Gamma_\rho} \frac{dz}{z-z_0}$$

ove Γ_ρ è il cerchio di centro z_0 e raggio ρ. Rappresentando la curva in coordinate polari per mezzo della funzione $c(t) = z_0 + e^{it}$, troviamo:

$$\int_{\Gamma_\rho} \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}dt}{\rho e^{it}} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

[6]Si tratta del primo numero di Betti di U incrementato di uno.

Una ipotesi che faremo spesso è che $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ sia una funzione olomorfa in U e continua in $\overline{U}$: esprimeremo questa ipotesi con la notazione $f \in \mathcal{O}(\overline{U})$.

9.6.5 Teorema di Cauchy *Se $f \in \mathcal{O}(\overline{U})$ nel dominio semplicemente connesso U e se derivata $f' : U \longrightarrow \mathbb{C}$ continua, allora per ogni curva chiusa Γ contenuta in U:*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

Dimostrazione: Per definizione:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma (udx - vdy) + i\int_\Gamma (udy + vdx)$$

(diamo per nota la teoria elementare delle forme differenziali nel piano ed il teorema di Gauss–Green) ove, per ipotesi e per il teorema precedente, le u e v sono parzialmente derivabili dunque, per il teorema di Gauss–Green (la curva regolare connessa Γ è la frontiera di un dominio semplicemente connesso $\mathfrak{G}$ del piano)

$$\int_\Gamma f(z)dz = \iint_{\mathfrak{G}} (-v_x - u_y)dxdy + i\iint_{\mathfrak{G}} (u_x - v_y)dxdy$$

Ma questi integrali sono zero per le relazioni di Cauchy–Riemann.

QED

Il caso realmente interessante è quando $\Gamma = \partial U$.

Osserviamo che, dalla definizione e dalla sua caratterizzazione, non discende immediatamente la continuità della derivata di una funzione olomorfa: abbiamo dunque dovuto supporla nelle ipotesi del teorema di Cauchy[7].

Il teorema di Cauchy può estendersi ad un dominio non semplicemente connesso, osservando che un tale dominio può sempre rendersi semplicemente connesso a meno di effettuarne dei tagli[8]:

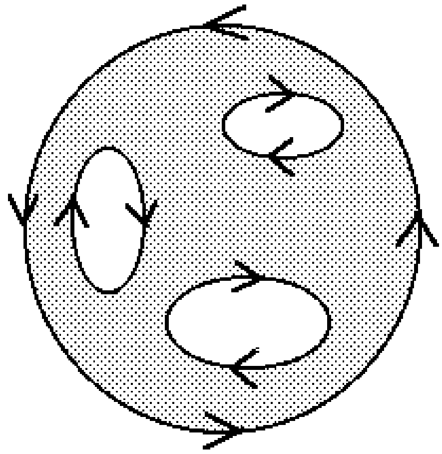
Supponiamo cioè che U sia delimitato da una curva Γ con $n+1$ componenti connesse $\Gamma_0, ..., \Gamma_n$ (quattro nella figura) e consideriamo dei segmenti che uniscano le componenti "interne" al dominio con la componente "esterna"[9]. Se $\gamma_1, ..., \gamma_n$

[7] In realtà, questa supposizione è superflua, come dimostrato da Goursat nel 1904: per questa versione più generale del teorema di Cauchy (che infatti ne rivela la natura topologica) si veda [18] §5.

[8] Precisamente il numero di tagli che bisogna effettuare per renderlo semplicemente connesso è pari al primo numero di Betti del dominio stesso.

[9] Dovrebbe essere chiaro al lettore come rendere rigoroso questo ragionamento intuitivo.

sono questi segmenti, il dominio che si ottiene dopo il taglio è semplicemente connesso e ha come frontiera $\Gamma \cup \gamma_1 \cup ... \cup \gamma_n$.



Allora il teorema di Cauchy applicato a questo nuovo dominio implica che (tenendo conto delle diverse orientazioni fra le componenti "interne" e quelle "esterne" della curva Γ, e del fatto che i segmenti $\gamma_1, ..., \gamma_n$ sono presenti due volte e con segni opposti nell'integrazione):

$$\sum_{i=1}^{n+1} \int_{\Gamma_i} f(z)dz = \int_{\Gamma_0} f(z)dz$$

il che si esprime (tenendo conto che l'orientazione su Γ_0 è opposta a quella delle restanti componenti connesse) ancora come

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

9.6.6 Teorema (FORMULA DI CAUCHY) *Se $f \in \mathcal{O}(\overline{U})$ nel dominio regolare semplicemente connesso U allora, per ogni $z_0 \in U$:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo un disco $D_r = \{z \mid |z - z_0| < \rho\}$ di centro z_0 e completamente contenuto in U (ciò è possibile perché U è aperto. Allora la funzione

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$$

è olomorfa in $U \setminus \{z_0\}$ (che non è un dominio regolare, dato che una componente connessa della sua frontiera si riduce al solo punto $\{z_0\}$), e quindi è pure olomorfa in $U \setminus \overline{D_r}$ che è un dominio regolare (non semplicemente connesso, ma tale che il suo bordo sia $\partial U \cup \partial D_r$): allora per il teorema di Cauchy in questo dominio:

$$\int_{\partial U} \varphi(z)dz = \int_{\partial D_r} \varphi(z)dz$$

Questo vale per ogni scelta di r tale che $D_r \subset U$: quindi l'integrale a primo membro non dipende da r: in particolare la relazione precedente vale per $r \longrightarrow 0$ e quindi, dato che un elemento sul bordo $\partial D_r = \{z \mid |z - z_0| = r\}$ si scrive come $z = z_0 + re^{it}$ al variare di $t \in [0, 2\pi)$, otteniamo

$$\int_{\partial U} \varphi(z)dz = \lim_{r \longrightarrow 0} \int_{\partial D_r} \varphi(z)dz = \lim_{r \longrightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} re^{it} dt = 2\pi i f(z_0)$$

QED

Il teorema precedente, del pari del teorema di Cauchy, vale per un dominio regolare qualsiasi, anche non semplicemente connesso.

Se il dominio U è un disco aperto di centro z_0 e raggio r evidentemente la formula di Cauchy diviene

9.6.7 Teorema (Formula del valor medio)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|z-z_0|=r} f(z_0 + re^{it})dt$$

Dunque i valori di una funzione olomorfa all'interno di un disco sono determinati dai valori che assume sul bordo: esaminando ulteriormente questo fenomeno giungeremo al principio del massimo per funzioni olomorfe.

9.6.2 Sviluppi in serie di potenze

Le funzioni olomorfe sono talvolta chiamate *analitiche*: questo perché possiamo confonderle con le funzioni sviluppabili in serie di potenze.

9.6.8 Definizione *Una* serie di potenze *è una serie della forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

con $c_n \in \mathbb{C}$ costanti, $z_0 \in \mathbb{C}$ e z variabile complessa.

Ricordiamo[10] che una serie di funzioni si dice *uniformemente convergente* in un dominio U se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un n_ε tale che per ogni $n \geq n_\varepsilon$ si abbia:

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z) \right| < \varepsilon$$

e che una condizione necessaria per la convergenza uniforme è la possibilità di maggiorare i termini della serie di funzioni con quelli di una serie numerica assolutamente convergente (criterio di Weierstrass).

In generale sarà interessante stabilire il dominio di convergenza uniforme di una serie di potenze:

9.6.9 Definizione *Il* raggio di convergenza *di una serie di potenze è il valore ρ tale che, per ogni disco di centro z_0 e raggio $r < \rho$ la serie converga uniformemente in quel disco e per ogni $r > \rho$ la serie non converga in nessun punto esterno al disco chiuso di centro z_0 e raggio r.*

9.6.10 Definizione *Se una serie di potenze converge in un aperto U, la funzione che a $z \in U$ associa il valore della serie in z si dice* analitica.

Cioè le funzioni analitiche sono le funzioni definite da serie di potenze convergenti.

9.6.11 Teorema (CAUCHY–HADAMARD) *Il raggio di convergenza ρ di una serie di potenze vale*[11]

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \longrightarrow \infty} |a_n|^{1/n}}$$

(inverso del massimo limite della successione $|a_n|^{1/n}$.)

DIMOSTRAZIONE: Se $0 < r < \rho$ allora

$$\overline{\lim}_{n \longrightarrow \infty} |a_n r^n|^{1/n} = r \lim_{n \longrightarrow \infty} |a_n|^{1/n} < 1$$

Dunque la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n|$$

converge (per il criterio della radice per serie numeriche), e per ogni z tale che $|z - z_0| < r$:

$$|a_n (z - z_0)^n| \leq |a_n r^n|$$

[10] Assumiamo la conoscenza della teoria elementare delle serie di funzioni.

[11] Il valore di ρ è in $[0, \infty]$ con la convenzione simbolica che $1/0 = \infty$ e $1/\infty = 0$.

Così il termine generico della serie di potenze è maggiorato dal termine generico di una serie assolutamente convergente.

Rimane il caso $\rho < \infty$. Consideriamo in questo caso z tale che $|z - z_0| > \rho$ e quindi

$$1 < |z - z_0|\overline{\lim}_{n\longrightarrow\infty}|a_n|^{1/n} = \overline{\lim}_{n\longrightarrow\infty}|a_n(z - z_0)^n|^{1/n}$$

Quindi il termine generico della serie di potenze non è infinitesimo e, come noto, questo implica che la serie non può convergere.

QED

9.6.12 Esempio *Consideriamo la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(z - z_0)^n$$

(i coefficienti sono tutti 1). Per il criterio del rapporto per la convergenza delle serie numeriche, la serie converge nel cerchio di centro z_0 e raggio 1 a qualche funzione analitica f: allora, per definizione di convergenza di una serie:

$$f(z) = \lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{k=0}^{n}(z - z_0)^n = \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1 - (z - z_0)^n}{q - (z - z_0)} = \frac{1}{1 - (z - z_0)}$$

(per la formula di sommazione di una serie geometrica con un numero finito di addendi).

Il teorema fondamentale sulla convergenza delle serie di potenze è il

9.6.13 Teorema (ABEL) *Se una serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z - z_0)^n$$

converge in un punto $z_1 \neq z_0$ allora converge assolutamente in ogni punto interno al disco di centro z_0 e raggio $|z_1 - z_0|$ ed in un disco chiuso di centro z_0 e raggio $r < |z_1 - z_0|$ la serie converge uniformemente.

DIMOSTRAZIONE: Se z è tale che $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ definiamo $q < 1$ come

$$q = \frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|}$$

Poiché la serie converge in z_1 il suo termine generico è infinitesimo, i.e. esiste una costante M tale che

$$|a_N|\ |z_1 - z_0|^n \leq M$$

e quindi

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\ |z-z_0|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n \\ = M \sum_{n=0}^{\infty} |q|^n = \frac{M}{1-q}\end{aligned}$$

($q < 1$ e quindi la serie geometrica converge). Questo dimostra la convergenza della serie.

Per vedere l'uniforme convergenza nel disco di centro z_0 e raggio $r < |z_1 - z_0|$ usiamo il criterio di Weierstrass: infatti la serie

$$M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{|z_1 - z_0|^n}$$

(che ovviamente converge perché è una serie geometrica con $r/|z_1 - z_0| < 1$) maggiora la serie di potenze per costruzione.

QED

Nel suo dominio di convergenza, una funzione analitica può integrarsi e derivarsi un numero arbitrario di volte, ottenendo sempre funzioni analitiche nel medesimo dominio. Inoltre i termini generici di una serie di potenze soddisfano in modo ovvio le relazioni di Cauchy–Riemann: quindi

9.6.14 Corollario *Una funzione analitica è olomorfa.*

Quello che ci proponiamo di dimostrare è che vale anche il viceversa.

9.6.15 Teorema *Una funzione olomorfa è analitica nel suo dominio di olomorfia.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa nell'aperto U; se $z_0 \in U$ allora esiste un disco D_r di centro z_0 e raggio r interamente contenuto in U. Usando la formula integrale di Cauchy ed i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale (usando la teoria di Lebesgue oppure la convergenza uniforme delle serie):

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r}\frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r}\frac{f(w)}{w-z_0-(z-z_0)}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r}\frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\ (z-z_0)^n \end{aligned}$$

Quindi, intorno a z_0 la funzione f è analitica.

QED

Lo sviluppo in serie di una funzione analitica è ovviamente unico: i coefficienti dello sviluppo sono

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$$

e devono quindi coincidere con i termini della serie di Taylor della funzione f intorno a z_0:

$$\frac{d^n}{dz^n}f(z_0) = n!a_n$$

Dunque

9.6.16 Teorema *Una funzione olomorfa è infinitamente derivabile e*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$$

in un opportuno disco D_r di centro z_0 e raggio r.

9.6.17 Esempio *La funzione*

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

è analitica in tutto il piano complesso eccettuati i punti[12] $\pm i$. *Considerando la formula di sommazione di una serie geometrica che abbiamo stabilito in precedenza*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$$

[12]Osserviamo che non si tratta di un dominio regolare, ma basta prendere $\mathbb{C}$ a cui si tolgano due dischi chiusi intorno a questi punti per ottenere un dominio regolare.

troviamo che f che deve quindi essere l'espansione di Taylor in ogni disco del piano complesso che non contenga i punti $\pm i$.

Applichiamo ora le formule precedenti per calcolare l'espansione di Taylor intorno al punto 1 in un disco di raggio $r = \sqrt{2}$. Scrivendo

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$$

ed utilizzando ancora la formula di sommazione della serie geometrica:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin\frac{\pi}{4}(n+1)}{2^{(n+1)/2}}(z-1)^n$$

(abbiamo usato le rappresentazioni polari $1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm i\pi/4}$). Il raggio di convergenza di questa serie è, per la formula di Cauchy–Hadamard, $\sqrt{2}$.

9.6.3 Continuazione Analitica

Il seguente principio è di fondamentale importanza: stabilisce infatti una proprietà determinante delle funzioni olomorfe.

9.6.18 Teorema *Se $f \in \mathcal{O}(\overline{U})$ nell'aperto connesso U allora, se l'insieme degli zeri di f contiene un punto di accumulazione, $f = 0$.*

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo per assurdo che esista una successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di zeri di f (i.e. $f(z_n) = 0$) convergente ad uno zero z di f. Intorno a z possiamo scrivere

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(w-z)^n$$

Consideriamo il più piccolo intero m tale che $a_m \neq 0$. Allora

$$0 = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{f(z_n)}{(z_n - z)^m} = \lim_{n\longrightarrow\infty} (a_m + a - m + 1(z_n - z) + ...) = a_m$$

Questo assurdo dimostra che f deve essere identicamente nulla intorno a z, e quindi l'insieme dei punti di accumulazione dell'insieme degli zeri di f è aperto (osserviamo che questo insieme non è vuoto, perché contiene z e non esaurisce tutto U perché f non è identicamente nulla). Ma questo insieme è anche chiuso, dato che contiene (per definizione) i suoi punti di accumulazione. Quindi U contiene un insieme chiuso e aperto e questo è impossibile, dato che lo si era supposto connesso.

QED

9.6.19 Corollario *Se $f \in \mathcal{O}(\overline{U})$ in un aperto connesso del piano complesso $\mathbb{C}$ e se $|f|$ è una funzione costante in U allora anche f è costante in U.*

Dimostrazione: Osserviamo che, se $f = u + iv$, per le relazioni di Cauchy–Riemann:

$$\begin{aligned} f'\overline{f} &= (u_x + iv_x)(u - iv) = (uu_x + vv_x) + i(uv_x - vu_x) \\ &= \frac{\partial u^2 + v^2}{\partial x} - i\frac{\partial u^2 + v^2}{\partial y} = \frac{\partial |f|}{\partial x} - i\frac{\partial |f|}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

(infatti $(uv_x - vu_x = -uu_y - vv_y)$). ma il implica che se un prodotto di funzioni olomorfe è nullo, almeno una delle due funzioni deve essere identicamente zero, e quindi $f = 0$ oppure f è costante in U.

QED

9.6.20 Corollario (Principio di identità delle funzioni olomorfe) *Se $f, g \in \mathcal{O}(\overline{U})$ e se l'insieme dove $f = g$ ha un punto di accumulazione allora $f = g$ su tutto U.*

In particolare, mentre una funzione olomorfa è certamente infinitamente differenziabile, non è detto che una funzione C^∞ sia olomorfa: può benissimo darsi che una funzione infinitamente differenziabile sia, ad esempio, nulla in un intero intervallo, ma non identicamente nulla in tutto l'insieme di definizione.

Se un insieme A è unione di due insiemi B e C e se sono date due funzioni $f : B \longrightarrow X$ e $g : C \longrightarrow X$ tali che $f_{B\cap C} = g|_{B\cap C}$ allora esiste una sola funzione $f \cup G : A \longrightarrow X$ che ristretta a B e C coincide con f e g. Usando questa ovvia definizione possiamo dare un altro corollario del teorema:

9.6.21 Corollario *Se $f_1 \in \mathcal{O}(\overline{U_1})$ e $f_2 \in \mathcal{O}(\overline{U_2})$ e se $f_1|_V = f_2|_V$ ove V è un aperto connesso contenuto in $U_1 \cap U_2$ allora la funzione $f1 \cup f_2$ è univocamente ben definita e analitica.*

L'applicazione di questo corollario per estendere il dominio di definizione di una funzione si dice *continuazione analitica*. Ad esempio, non appena una serie di potenze sia definita sull'asse reale, possiamo estenderla in modo unico ad una funzione olomorfa in un aperto del piano complesso.

9.6.22 Esempio *Le classiche funzioni*

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

danno luogo a funzioni olomorfe in opportuni aperti del piano complesso.

Evidentemente, il dominio (connesso) di olomorfia di una funzione può rendersi massimale in virtù del principio di continuazione analitica.

9.6.23 Definizione *Una funzione olomorfa si dice* intera *se il suo dominio di olomorfia è l'intero piano complesso* $\mathbb{C}$.

Torniamo ora a considerare funzioni olomorfe ed il loro comportamento al bordo dei dischi chiusi.

9.6.24 Teorema (PRINCIPIO DEL MASSIMO) *Se* $f \in \mathcal{O}(\overline{U})$ *nel dominio regolare* U *allora la funzione reale* $|f|$ *(se non è costante) assume il suo valore massimo sul bordo* $\partial U = \overline{U} \setminus U$ *di* U.

DIMOSTRAZIONE: La funzione reale che stiamo considerando

$$|f(z)| = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)}$$

è continua in $\overline{U}$. Dunque assume un massimo M in qualche punto $z_0 = (x_0, y_0) \in \overline{U}$. Supponiamo per assurdo che $z_0 \in U$ non sia un punto del bordo di U: esiste allora un disco D_r di centro z_0 e raggio r interamente contenuto in U, per il quale la formula del valor medio, ed il fatto che per ogni $z \in U$ $|f(z)| \leq M$, implicano che

$$2\pi M = \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt \leq 2\pi M$$

cioè che

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt = 2\pi M$$

da cui, per continuità di f in $\overline{U}$ e per la definizione di massimo M:

$$\forall z \quad |z - z_0| = r \Rightarrow |f(z)| = M$$

Quindi f è costante in modulo su in intorno di f e, per continuazione analitica, è costante in tutto U, il che è assurdo.

QED

Possiamo ora dimostrare il teorema che, in un certo senso, inverte il teorema di Cauchy:

9.6.25 Teorema (MORERA) *Una funzione continua $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ definita in un dominio regolare semplicemente connesso tale che, per ogni curva regolare chiusa $\Gamma \subset U$ si abbia*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

è necessariamente olomorfa in U.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo, per $z_0, z \in U$ e per un cammino $\gamma \subset U$ che connetta z_0 e z (i.e. se $\gamma : [a,b] \in U$ allora $\gamma(a) = z_0$ e $\gamma(b) = z$), la funzione

$$F(z) := \int_\gamma f(w)dw$$

Dimostriamo che si tratta di una funzione olomorfa: se scriviamo $f = u + iv$ e $F = U + iV$, allora (per le relazioni di Cauchy–Riemann):

$$\begin{aligned} U_x &= \int_\gamma u_x d\xi - v_x d\eta = \int_\gamma v_y d\xi + u_y d\eta = V_y \\ U_y &= \int_\gamma u_y d\xi - v_y d\eta = -\int_\gamma v_x d\xi + u_x d\eta = -V_x \end{aligned}$$

Quindi F soddisfa alle equazioni di Cauchy–Riemann e dunque è olomorfa. Ovviamente

$$\begin{aligned} F'(z) = U_x(x,y) + iV_x(x,y) &= \int_\gamma u_x d\xi - v_x d\eta + i\int_\gamma v_x d\xi + u_x d\eta \\ &= \int_\gamma f'(z)dw = f(z) \end{aligned}$$

QED

Il teorema si generalizza in modo ovvio a domini non semplicemente connessi.

9.6.26 Teorema (LIOUVILLE) *Una funzione intera e limitata (in modulo) è costante.*

DIMOSTRAZIONE: Usiamo la formula di Taylor per la derivata di $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r} \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw$$

(ove D_r è il solito disco di centro z e raggio r). Ora sfruttiamo la limitatezza di $|f|$:

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r}\frac{|f(w)|}{r^2}dw \leq \frac{M}{R}$$

Ma r può essere scelto arbitrariamente grande (perché f è intera) e $|f'|$ è indipendente da R: quindi $|f'| = 0$ su tutto il piano complesso, quindi $|f|$ è costante.

QED

Ad esempio, la funzione $\sin z$, continuazione analitica della funzione reale $\sin x$ non può essere limitata (come accade nel caso reale), perché ovviamente non è costante.

Una notevole applicazione è la seguente:

9.6.27 Teorema fondamentale dell'Algebra *Un polinomio a coefficienti complessi e di grado positivo ammette sempre almeno uno zero.*

DIMOSTRAZIONE: Un polinomio complesso è una funzione della forma

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0$$

Si noti che, per $|z|$ abbastanza grande, possiamo scrivere

$$|p(z)| \geq |z^n|\left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{z^{n-1}} - ... - |a_0|\right) > |a^n|\ |z^n|$$

Ora supponiamo che p non abbia zeri nel piano complesso: allora la funzione $1/p(z)$ è intera e, per la disuguaglianza precedente:

$$\lim_{|z|\longrightarrow\infty}\frac{1}{|p(z)|} \leq \lim_{|z|\longrightarrow\infty}\frac{1}{|a_n|\ |z^n|} = 0$$

Quindi $|1/p(z)|$ è limitata e, per il teorema di Liouville, deve essere costante, il che è assurdo.

QED

9.6.4 Residui

9.6.28 Definizione *Una serie di potenze bilatera*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

si dice serie di Laurent*.*

Per determinare il dominio di convergenza di una serie di Laurent, spezziamola come

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n}$$

Il dominio di convergenza della serie di Laurent sarà l'intersezione dei domini di convergenza delle due serie che figurano a secondo membro; nel caso della prima di queste serie si tratta di un disco di centro z_0 e raggio ρ. Mostriamo che nel caso della seconda serie il dominio è il complementare di un disco di centro z_0. Poniamo

$$\zeta = \frac{1}{z-z_0}$$

in modo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\zeta^n$$

Si tratta quindi di una serie di potenze di centro 0; sia $\frac{1}{R}$ il suo raggio di convergenza: evidentemente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ ha come dominio di convergenza il complementare del disco di centro z_0 e raggi R.

Dunque una serie di Laurent definisce una funzione olomorfa nella corona circolare $C_{R,\rho} = \{z \in \mathbb{C} \mid R < |z-z_0| < \rho\}$. Ovviamente può benissimo accadere che sia $\rho <\leq R$ e quindi $C_{R,\rho} = \emptyset$: in questo caso la serie di Laurent non definisce alcuna funzione olomorfa.

9.6.29 Teorema (Laurent) *Una funzione $f \in \mathcal{O}(C_{R,\rho})$ è univocamente determinata in $C_{R,\rho}$ dal suo sviluppo in serie di Laurent.*

Dimostrazione: Se $z \in C_{R,\rho}$ consideriamo due cerchi Γ_1 e Γ_2 di centro z_0 e raggi tali che $R < r_2 < |z-z_0| < r_1 < Er$. Per la formula di Cauchy (in un dominio non semplicemente connesso) si trova

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}dw$$

Ora, sul cerchio Γ_1 vale la

$$\frac{|z-z_0|}{|w-z_0|} < 1$$

quindi

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$$

Integrando e scambiando il segno di integrale con quello della serie (per la teoria di Lebesgue o per uniforme convergenza)[13]:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

con, per $n \geq 0$:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$$

In modo analogo, dalla

$$\frac{|w-z_0|}{|z-z_0|} < 1$$

sul cerchio Γ_2 si trova

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n}$$

con, per $n \geq 0$:

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}}dw$$

Le a_n e a_{-n} così ottenute sono olomorfe in $C_{R,\rho}$ e quindi, i corrispondenti integrali non dipendono dai cammini di integrazione: dunque possiamo combinare le formule per a_n e a_{-n} ottenendo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$$

con $n \in \mathbb{Z}$ e Γ qualsiasi curva regolare chiusa contenuta nell'anello $C_{R,\rho}$. Quindi

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

ove la serie converge nella corona circolare $C_{R,\rho}$ ed uniformemente nella corona circolare chiusa $\{z \in \mathbb{C} \mid r_2 \leq |z-z_0| \leq r_1\}$.

Dimostriamo infine l'unicità dell'espansione di Laurent della f; supponiamo che sia

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$$

[13]Il ragionamento è il medesimo che abbiamo svolto nel dimostrare l'analiticità delle funzioni olomorfe.

ove esista almeno un $n \in \mathbb{Z}$ tale che $a_n \neq b_n$. Quindi in $C_{R,\rho}$ abbiamo che

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$$

Considerando il cerchio Γ_r di centro z_0 e raggio $R < r < \rho$, queste serie vi convergono uniformemente e, moltiplicandole per $(z-z_0)^{n-m-1}$ (per $m \in \mathbb{Z}$ fissato) ed integrando termine a termine otteniamo:

$$\int_{\Gamma_r} (z - z_0)^{n-m-1} dz = i r^{n-m} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt = 2\pi i \delta_{nm}$$

Così, dopo aver integrato le serie in a_n e b_n, avremo solo un termine non nullo per ciascuna serie, e precisamente

$$a_m = b_m$$

Ma m può scegliersi arbitrariamente, e quindi le serie debbono coincidere.

QED

9.6.30 Definizione *Se una funzione olomorfa f è definita in un dominio U privato di un punto z_0 interno a U, si dice che z_0 è* singolare *per f.*

Dato che U è aperto esiste un disco D centrato in z_0 e completamente contenuto in U tale che la funzione sia olomorfa in $D \setminus \{z_0\}$ e quindi in una corona circolare di centro z_0 e contenuta in D. Possiamo dunque limitarci a studiare i punti singolari come se fossero centri di corone circolari.

9.6.31 Definizione *Un punto singolare z_0 per una funzione olomorfa f si dice:*

(1) singolarità eliminabile *se la serie di Laurent di f intorno a z_0 non contiene termini di esponente negativo (i.e. se $a_n = 0$ per $n < 0$);*

(2) polo di ordine m *se la serie di Laurent di f intorno a z_0 non contiene termini di esponente minore di $-m$ (i.e. se $a_n = 0$ per $n < -m$);*

(3) singolarità essenziale *se la serie di Laurent di f intorno a z_0 contiene termini di esponente negativo arbitrariamente basso (i.e. se per ogni $n < 0$ esiste un $m < n$ con $a_m \neq 0$);*

Se z_0 è una singolarità eliminabile, la funzione f può estendersi ad una funzione olomorfa in z_0: infatti facendo tendere z a z_0 (da qualunque direzione) otteniamo come limite della serie di Laurent il valore a_0; definendo allora $f(z_0) = a_0$ otteniamo l'estensione voluta.

Se z_0 è una singolarità essenziale, il comportamento della funzione olomorfa in un suo intorno può essere estremamente bizzarro, in particolare, profondi teoremi dovuti a Casorati, Weierstrass e Picard dimostrano che non è possibile controllare in alcun modo il comportamento di f intorno ad una singolarità essenziale.

Infine, se z_0 è un polo di ordine m possiamo scrivere, in una corona circolare centrata in z_0:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

In questo caso non possiamo eliminare la singolarità, dato che per z che tende a z_0 il valore di $|f(z)|$ cresce arbitrariamente: infatti

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + ... + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \\ &= (z-z_0)^m(a_{-m} + ... + a_{-1}(z-z_0)^{m-1}) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \\ &= (z-z_0)^m \varphi(z) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \end{aligned}$$

ove φ è olomorfa in z_0. è immediato ora che per $z \longrightarrow z_0$ $|f(z)|$ cresce arbitrariamente.

9.6.32 Definizione *Il* residuo *di una funzione olomorfa in una sua singolarità z_0 è il valore del coefficiente a_{-1} nel suo sviluppo di Laurent intorno a z_0.*

Per unicità della serie di Laurent il residuo è ben definito ed è pari a

$$\mathrm{Res}_{z_0} f(z) := c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(w)dw$$

per ogni curva regolare chiusa Γ nel dominio di olomorfia di f che racchiuda il punto z_0 (e nessun altro punto singolare di f).

Il calcolo dei residui è estremamente utile, e, nel caso di poli, può effettuarsi in modo semplice.

Sia infatti z_0 un polo di ordine m: i.e.

$$f(z) = (z-z_0)^m(a_{-m} + ... + a_{-1}(z-z_0)^{m-1}) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

Moltiplicando ambo i membri per $(z-z_0)^m$, derivando $(m-1)$ volte e passando al limite per $z \longrightarrow z_0$ si ottiene

$$\mathrm{Res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-z_0)^m f(z))$$

9.6.33 Definizione *Una funzione olomorfa in un dominio U e che abbia in questo dominio al più singolarità polari si dice* meromorfa *in U.*

Ad esempio una funzione razionale (un quoziente di polinomi) è meromorfa nel piano complesso.

9.6.34 Teorema dei Residui *Se f è meromorfa nel dominio regolare chiuso $\overline{U}$ con un numero finito di singolarità $z_1, ..., z_n \in U$ allora*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} f(z)dz = \sum_{z_0\in U} \operatorname{Res}_{z_0} f(z)$$

(la somma è finita perché le uniche singolarità non eliminabili della f sono i poli $z_1, ..., z_n$).

DIMOSTRAZIONE: Poiché i punti $z_1, ...z_n$ sono isolati possiamo trovare dei dischi $D_1, ..., D_n$ centrati in essi e che non contengano altri punti singolari (di più: i dischi D_i sono a due a due disgiunti): l'idea è di applicare il teorema di Cauchy al dominio $U \setminus \cup_{i=1}^n \overline{D}_i$, nel quale la funzione è olomorfa, ottenendo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_k} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k} f(z) = \sum_{z_0\in U} \operatorname{Res}_{z_0} f(z)$$

QED

Non ci soffermiamo sulle applicazioni di questo teorema, in particolare al calcolo di integrali definiti per mezzo di una scelta opportuna dei domini di integrazione: per questo rimandiamo ai testi specialistici. Concludiamo con qualche semplice ma notevole conseguenza.

9.6.35 Corollario *Se f è una funzione meromorfa nel dominio regolare U e $g \in \mathcal{O}(U)$ allora, per $z_0 \in U$:*

$$\operatorname{Res}_{z_0}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}g(z)\right) = \nu_{z_0}(f)g(z_0)$$

ove $\nu_{z_0}(f)$ è l'ordine di f in z_0 (minimo intero per il quale il coefficiente dello sviluppo di Laurent non è nullo).

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo che U sia un disco centrato in z_0 (possiamo assumerlo senza ledere la generalità). Sia

$$f(z) = (z - z_0)^n h(z)$$

con $h(z)$ olomorfa e mai nulla in U. Allora $n = \nu_{z_0}(f)$ e

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)}g(z) &= \frac{n(z-z_0)^{n-1}h(z) + (z-z_0)^n h'(z))}{(z-z_0)^n}\frac{g(z)}{h(z)}\\ &= n\frac{g(z)}{z-z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)}g(z)\end{aligned}$$

ma $h'g/h$ è olomorfa, quindi il suo residuo è zero in z_0 e

$$\text{Res}_{z_0}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}g(z)\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{ng(z)}{z-z_0}dz = ng(z_0)$$

QED

9.6.36 Corollario (TEOREMA DELL'INDICATORE LOGARITMICO) *Sia U un dominio regolare, una funzione f meromorfa in $\overline{U}$ e $z_1, ..., z_n$ gli zeri di f in U e $p_1, ..., p_m$ i poli di f in U: supponendo che f non abbia zeri su ∂U e che g sia olomorfa in U allora*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f'(z)}{f(z)}g(z)dz = \sum_{k=1}^{n} g(z_k)\nu_{z_k}(f) - \sum_{k=1}^{m} g(p_k)\nu_{p_k}(f)$$

In particolare, per $g = z$ si ha

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f'(z)}{f(z)}zdz = \sum_{k=1}^{n} z_k\nu_{z_k}(f) - \sum_{k=1}^{m} p_k\nu_{p_k}(f)$$

e per $g = 1$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^{n}\nu_{z_k}(f) - \sum_{k=1}^{m}\nu_{p_k}(f) = \#\{\text{zeri di } f\} - \#\{\text{poli di } f\}$$