Capitolo 18

QUANTIZZAZIONE CANONICA

In questo capitolo diamo una descrizione matematica del formalismo (ormai classico) della Meccanica Quantistica di un sistema finito di particelle: si tratta della teoria di Schrödinger–Heisenberg, che discuteremo nell'àmbito della teoria delle algebre di operatori e della simmetria del capitolo precedente. In particolare dimostreremo l'unicità della rappresentazione di Schrödinger (d'onde il nome "canonica") per la forma che Weyl ha dato alle relazioni di Heisenberg: come si vedrà, la differenza degli approcci classici sta solo nella diversa presentazione di stesse algebre di operatori isomorfe fra loro. Preliminarmente richiameremo brevemente il formalismo hamiltoniano per i sistemi classici con finiti gradi di libertà.

18.1 Formalismo canonico

Consideriamo uno spazio vettoriale V di dimensione finita: ogni elemento di $V \otimes V$ si decompone in modo unico come somma di un tensore simmetrico ed un tensore antisimmetrico; questo significa che per studiare le forme bilineari basta limitarsi a queste.

Se $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) è una forma bilineare, possiamo associarle la

$$\varphi^\flat : V \longrightarrow V^*$$

definita come

$$(\varphi^\flat(v))(v') = \varphi(v, v')$$

Dato che $V/\ker\varphi^\flat = \operatorname{im}\varphi$, la forma è non degenere se e solo se $\varphi^\flat$ è un isomorfismo. Una forma bilineare simmetrica non degenere è una forma pseudo-euclidea; il teorema di Sylvester, noto dall'Algebra Lineare, classifica queste forme in termini delle forme quadratiche loro associate: se φ è una forma bilineare non degenere, possiamo associarle una forma quadratica $Q(v) = \varphi(v, v)$ che, in una opportuna base $(e_1, ..., e_n)$, è sempre del tipo

$$Q(x) = x_1^2 + .. + x_k^2 - x_{k+1}^2 - ... - x_n^2$$

Nel caso antisimmetrico, non possiamo definire la forma quadratica, e la classificazione è molto più semplice.

18.1.1 Definizione *Una* forma simplettica *su uno spazio vettoriale V è una funzione bilineare antisimmetrica e non degenere $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$.*

Nel caso in cui $\dim V = \infty$, questa definizione non è precisa: bisogna infatti specificare cosa significhi essere non degenere; se V è uno spazio di Banach, un forma bilineare continua φ è *fortemente non degenere* se la mappa lineare e continua $\varphi^\flat$ è un isomorfismo di spazi di Banach fra V e V^* (duale topologico), mentre è *debolmente non degenere* se $\varphi^\flat$ è semplicemente una isometria; ovviamente uno spazio di Banach ammette forme fortemente non degeneri se e solo se è riflessivo, e una forma debolmente non degenere e suriettiva, è pure fortemente non degenere, per il teorema della mappa aperta.

18.1.2 Esempio *Se $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert complesso, e (x, y) è la sua forma hilbertiana, questa, come forma bilineare simmetrica, è fortemente non degenere: se scriviamo*

$$(x, y) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y)$$

allora $\beta : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una forma simplettica fortemente non degenere su $\mathcal{H}$.

18.1.3 Teorema (Darboux) *Se φ è una forma simplettica su uno spazio vettoriale V di dimensione finita, allora esiste una base $(e_1, ..., e_{2n})$ di V nella quale*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} e_i \wedge e_{i+n}$$

Una tale base si dice base simplettica.

Dimostrazione: Procediamo per induzione sulla dimensione N di V. Per prima cosa osserviamo che deve aversi $\dim V = 2n$; infatti in una qualsiasi base la forma simplettica è rappresentata da una matrice A antisimmetrica, $A = -A^T$ e quindi tale che $\det A = \det(-A^T) = (-1)^N \det A^T = (-1)^N \det A$, sicché N è pari oppure $\det A = 0$; ma A è non degenere, quindi $\det A \neq 0$, i.e. $N = 2n$ è pari.

Ora sia $n = 1$: allora fissato un vettore non nullo $e_1 \in V$, il funzionale lineare

$$f_{e_1}(v) := \varphi(e_1, v)$$

su V è non nullo (la forma è non degenere), quindi esiste un $e_2 \in V$ tale che $f_{e_2}(e_1) = 1$; ovviamente e_1 e e_2 non possono essere linearmente dipendenti, altrimenti $e_1 = ae_2$ e quindi $\varphi(e_1, e_2) = a\varphi(e_2, e_2) = 0$. Quindi sono una base di V che ha dimensione 2.

Se $n > 1$ e supponiamo che il teorema sia valido per $n-1$ scegliamo di nuovo un vettore $e_1 \in V$ non nullo e, come nel caso precedente, un vettore e_{n+1} linearmente indipendente da e_1 e tale che

$$\varphi(e_1, e_{n+1}) = 1$$

Ora consideriamo i funzionali lineari f_{e_1} e $f_{e_{n+1}}$ dati da

$$f_{e_1}(v) := \varphi(e_1, v) \qquad f_{e_{n+1}}(v) := \varphi(e_{n+1}, v)$$

e gli spazi N_1 e N_{n+1} ortogonali a e_1 e e_{n+1} rispetto alla forma simplettica:

$$N_1 = \{v \in V \mid \varphi(e_1, v) = 0\} \qquad N_{n+1} = \{v \in V \mid \varphi(e_{n+1}, v) = 0\}$$

si tratta di spazi $(2n-1)$-dimensionali (nuclei di funzionali lineari), la cui intersezione $W = N_1 \cap N_{n+1}$ ha dimensione $2n-2$: infatti $e_1 \notin N_{n+1}$ e $e_{n+1} \notin N_1$. Vogliamo ora dimostrare che su W la forma simplettica φ è non degenere, e quindi applicare l'induzione per dedurre l'esistenza di una base simplettica $(e_2, ..., e_n, e_{n+2}, ..., e_{2n})$ per W: aggiungendo a questa base i vettori e_1 e e_{n+1} si ottiene ovviamente una base simplettica di V e il teorema è dimostrato.

Resta solo quindi da provare che $\varphi|_W$ è non degenere, il che è semplice: se esistesse $w \in W$ tale che, per ogni $w' \in W$, $\varphi(w, w') = 0$, allora, dato che per definizione si ha pure $\varphi(e_1, w) = \varphi(e_{n+1}, w) = 0$, e $W \oplus e_1\mathbb{K} \oplus e_{n+1}\mathbb{K} = V$, allora w sarebbe nel nucleo della forma φ, i.e. $w = 0$.

QED

In altri termini, la forma è, nella base $(e_1, ..., e_{2n})$ determinata dalle equazioni

$$\varphi(e_i, e_j) = 0 \qquad \varphi(e_{i+n}, e_{j+n}) = 0 \qquad \varphi(e_i, e_{j+n}) = \delta_{ij}$$

se $i, j \in \{1, ..., n\}$, ed è quindi, scritta in forma matriciale, la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$.

18.1.4 Definizione *Uno* spazio simplettico *è uno spazio vettoriale dotato di una forma simplettica.*

18.1.5 Corollario *Uno spazio simplettico di dimensione finita ha dimensione pari.*

Una *trasformazione lineare simplettica* è una funzione lineare $f : V \longrightarrow W$ fra spazi vettoriali simplettici che preserva le forme simplettiche

$$\psi(f(v), f(w)) = \varphi(v, w)$$

Una trasformazione lineare simplettica è un *simplettomorfismo* (o isomorfismo simplettico) se è un isomorfismo di spazi vettoriali.

18.1.6 Corollario *Due spazi simplettici della stessa dimensione sono simplettomorfi.*

18.1.7 Esempio *Il più importante (ed in un certo senso l'unico) spazio vettoriale simplettico è il seguente: consideriamo uno spazio vettoriale qualsiasi V, ed il suo spazio duale V^*; allora possiamo definire una forma simplettica su $V \times V^*$ come*

$$\varphi((v, \varphi), (w, \psi)) = \psi(v) - \varphi(w)$$

Per il teorema di Darboux, ogni spazio vettoriale simplettico di dimensione $2 \dim V$ si ottiene in questo modo. In coordinate, scriviamo una base $(q_1, ..., q_n)$ di V ed una base duale $(p_1, ..., p_n)$ di V^*: allora la forma simplettica standard è

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} p_i \wedge q_i$$

Usiamo ora queste nozioni per formalizzare la Meccanica Classica; consideriamo un sistema fisico descritto da energia cinetica E e potenziale U, come ad esempio un sistema di punti con masse m_i e distanze dall'origine r_i, che ha energia cinetica e potenziale

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d}{dt} {r_i}^2 \qquad U = \sum_{i,j} V_{ij}(r_i - r_j)$$

(V_{ij} sono le interazioni fra i punti di masse m_i e m_j, ad esempio il potenziale gravitazionale newtoniano $V_{ij}(r) = -Gm_i m_j / |r|$). I moti $t \longmapsto q(t)$ del sistema sono descritti come gli estremali del funzionale

$$\int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t)) dt \tag{†}$$

ove $L = E - U$ è la lagrangiana del sistema. Se le coordinate lagrangiane $q = (q_1, ..., q_n)$ sono quelle di $\mathbb{R}^n$, la lagrangiana è semplicemente una funzione L :

$\mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$. Come noto dagli elementi della Meccanica gli estremali del funzionale (†) sono localmente descritti dalle equazioni di Eulero–Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

Sotto opportune condizioni di non degenerazione della lagrangiana, questo sistema può trasformarsi in uno equivalente per mezzo della trasformata di Legendre (cfr. [1] o [2]) in un sistema hamiltoniano: si definiscono gli impulsi

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

e le equazioni di Lagrange divengono

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

Considerando ora la funzione hamiltoniana

$$H(p, q, t) = \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q, \dot{q}, t)$$

e confrontandone il differenziale

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

col differenziale della trasformata di Legendre $p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t)$ della lagrangiana L:

$$\dot{q}dp - \frac{\partial L}{\partial q} dq - \dot{L}dt = \dot{q}dp - \dot{p}dq - \dot{L}dt$$

otteniamo le equazioni di Hamilton.

$$\begin{cases} \dot{p}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q_k} \\ \dot{q}_k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \end{cases}$$

18.1.8 Esempio *Se la lagrangiana $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ è una forma quadratica sullo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^n$, ad esempio $L = E - U$ con E prodotto scalare in V, allora $H = E + U$. Infatti la trasformata di Legendre di una funzione quadratica coincide con la forma stessa: $H(p(q)) = pq - L(q) = 2E - (E - U) = E + U$.*

Si può esprimere in forma intrinseca il formalismo hamiltoniano ricorrendo agli spazi simplettici: gli osservabili di un sistema dinamico classico sono le funzioni (differenziabili o comunque che soddisfino ipotesi di regolarità) $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ definite sullo *spazio delle fasi*, che in generale sarà una varietà differenziabile (ad esempio un aperto di $\mathbb{R}^{2n}$); nel caso lineare, V è uno spazio vettoriale simplettico. L'algebra degli osservabili è quindi $C^\infty(V)$ col prodotto di funzioni punto per punto: si tratta di un'algebra associativa e commutativa. Possiamo definire su $C^\infty(V)$ anche una struttura di algebra di Lie, considerando le *parentesi di Poisson*. Per farlo consideriamo una forma simplettica φ su $V = \mathbb{R}^{2n}$ e l'isomorfismo

$$\varphi^\# : V^* \longrightarrow V$$

duale dell'isomorfismo $\varphi^\flat$. Possiamo allora definire un campo di vettori in V come

$$X_H = \varphi^\#(dH)$$

ove dH è il differenziale dell'osservabile $H : V \longrightarrow \mathbb{R}$. Un campo della forma X_H si dice *campo hamiltoniano* di hamiltoniana H; le parentesi di Poisson su $C^\infty(V)$ si definiscono come

$$\{F, G\} = \varphi(X_F, X_G)$$

e le equazioni del moto assumono la forma

$$\dot{F} = \{H, F\}$$

ove H è l'hamiltoniana e F è un osservabile. Per $F = q_k$ e $F = p_k$ otteniamo esattamente le equazioni di Hamilton; gli integrali primi del sistema, le costanti del moto, sono caratterizzati dalla

$$\{H, I\} = 0$$

Se il sistema possiede integrali primi $I_1, ..., I_k$, l'algebra di Lie da essi generata (rispetto alle parentesi di Poisson) corrisponde a un gruppo di Lie che è il gruppo delle simmetrie del sistema: se gli integrali primi sono un sistema completo, nel senso che le relazioni $\{I_k, F\}$ implicano $F = 0$ allora il sistema è completamente integrabile (teorema di Liouville).

Oltre alla presentazione hamiltoniana, esiste anche un punto di vista indipendente dal tempo: per questo si considerano gli stati del sistema, cioè funzionali lineari sugli osservabili $C^\infty(V)$ che abbiano valori positivi sulle funzioni positive e 1 sulla funzione 1 (si tratta di misure di probabilità su V), che variano col tempo secondo le equazioni di Hamilton: se $\rho(p, q, t)$ è la densità di probabilità associata ad uno stato, allora

$$\dot{\rho} = \{\rho, H\}$$

I due approcci sono legati dalla relazione

$$\int_V \{H, F\}\rho dp dq = \int_V F\{\rho, H\} dp dq$$

Questi concetti hanno degli analoghi in Meccanica Quantistica: in questo caso l'algebra degli osservabili non è un'algebra di funzioni ma di operatori (non commutativa), ma esiste un analogo delle parentesi di Poisson dato dal commutatore di operatori: l'equazione del moto è formalmente analoga a quella precedente (*Heisenberg picture*):

$$\hbar\dot{A} = i[H, A]$$

Analogamente al caso classico esiste anche una presentazione nella quale gli operatori che corrispondono agli osservabili non cambiano nel tempo, ma cambiano gli stati (*Schrödinger picture*). L'equazione del moto in questo caso diviene l'equazione di Schrödinger

$$\hbar\dot{\rho} = iH\rho$$

La corrispondenza fra un sistema classico e un sistema quantistico, in modo che ad osservabili classici corrispondano osservabili quantistici, a simmetrie classiche simmetrie quantistiche e alle parentesi di Poisson le parentesi di Lie fra operatori si dice *quantizzazione* del sistema classico: per una discussione precisa di questo concetto si rimanda a [6].

18.2 Rappresentazione di Schrödinger

Consideriamo un sistema nel quale posizione e impulso siano determinati dalle famiglie finite di osservabili

$$q_1, ..., q_n \qquad \text{e} \qquad p_1, ..., p_n$$

di operatori autoaggiunti su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, ove, se $k \neq h$ e $r \neq s$:

$$\begin{cases} [q_k, q_h] = [p_r, p_s] = 0 \\ [p_r, q_k] \subset -i\hbar\delta_{rk} I \end{cases}$$

(si noti che gli operatori non sono continui, quindi dobbiamo considerare l'estensione del commutatore.)

Per semplicità notazionale ci limiteremo al caso $n = 1$, ponendo anche $\hbar = 1$:

$$pq - qp \subset -iI$$

Notiamo che, se lo spazio $\mathcal{H}$ ha dimensione finita, allora possiamo calcolare la traccia di p e q, così come del loro commutatore:

$$\mathrm{tr}[p,q] = 0$$

il che contraddice la relazione di Heisenberg precedente.

Quindi lo spazio deve avere dimensione infinita, e lo stesso argomento prova che gli operatori p e q non possono essere nucleari; in realtà

18.2.1 Proposizione *Gli operatori p e q non possono essere continui.*

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo che lo siano: è ben definito allora l'operatore

$$c := \frac{1}{i}[p,q]$$

Se ω è uno stato e se $\Delta_\omega A = \sqrt{\omega(A^2) - \omega(A)^2}$ allora

$$\Delta_\omega(p)\delta_\omega(q) \geq \frac{1}{2}|\omega(c)| = \frac{1}{2}$$

Ma, per continuità di p, $\Delta_\omega p \leq ||p||$ e quindi

$$\Delta_\omega p \geq \frac{1}{2||p||} \qquad \text{e} \qquad \Delta_\omega q \geq \frac{1}{2||q||}$$

Se ω è uno stato tale che $\xi_\omega = E(\Delta)\xi_\omega$, ove

$$p = \int \lambda dE(\lambda)$$

con $E(\Delta) \neq 0$ e $\mathrm{diam}(\Delta) < \varepsilon$ allora

$$\Delta_\omega p = \sqrt{\omega(p^2) - \omega(p)^2} \leq ||(p - \omega(p)I)\xi_\omega|| \leq \varepsilon$$

il che contraddice il principio di Heisenberg.

QED

18.2.2 Esempio *Consideriamo una particella che si muove sulla circonferenza $\mathbb{T} = S^1$ e lo spazio di Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T}, ds)$ (misura di Lebesgue), e gli operatori*

$$(qx)(s) = sx(s) \qquad \text{e} \qquad (px)(s) = -i\frac{\partial}{\partial s}x(s)$$

Notiamo che $\sigma(q) = [0, 2\pi]$, mentre $\sigma(p) = \mathbb{Z}$: si noti che in questo caso p è certamente non limitato, mentre lo è q; questo non è in contraddizione col principio di Heisenberg, dato che p è definita (in quanto operatore di derivazione) sulle funzioni assolutamente continue (periodiche in $\mathbb{R}$ di periodo 2π) e quindi il dominio di $[p,q]$ contiene funzioni che in 0 e 2π valgono zero.

Se $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n, ds^n)$ con

$$(q_k x)(s) = s_k x(s) \qquad \text{e} \qquad (p_k x)(s) = -i\frac{\partial}{\partial s_k} x(s)$$

allora

$$\mathcal{D}_{q_k} = \{x \in \mathcal{H} \,|\, (s \longmapsto s_k x(s)) \in \mathcal{H}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_{p_k} = \{x \in \mathcal{H} \,|\, (s \longmapsto s_k \widehat{x}(s)) \in \mathcal{H}\}$$

dato che, se $\mathfrak{F}x = \widehat{x}$ è la trasformata di Fourier, allora

$$\mathfrak{F} q_k \mathfrak{F}^{-1} = p_k$$

e quindi

$$[p_k, q_r] \subset -\delta_{kr} I \qquad \text{e} \qquad [q_h, q_k] = 0$$

Possiamo meglio precisare queste relazioni nel modo seguente: le mappe $U, V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definite come

$$U(\alpha) := e^{i\langle \alpha, q\rangle} \qquad \text{e} \qquad v(\alpha) := e^{i\langle \alpha, p\rangle}$$

sono rappresentazioni unitarie fortemente continue di $\mathbb{R}^n$ e

$$(U(\alpha)x)(S) = e^{i\langle \alpha, s\rangle} x(s) \qquad \text{e} \qquad (V(\alpha)x)(S) = x(s+\alpha)$$

sono operatori unitari (ovvio) fortemente continui (teorema della convergenza dominata).

18.2.3 Definizione *La rappresentazione degli operatori q e p per mezzo delle U e V si dice* rappresentazione di Schrödinger.

Possiamo quindi, per il teorema di Stone 14.3.6, scrivere:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{i}\left(\dfrac{\partial}{\partial \alpha_j} U(\alpha) x\right)_{\alpha=0}(s) = s_j x(s) = q_j(x)(s) \\ \dfrac{1}{i}\left(\dfrac{\partial}{\partial \alpha_j} V(\alpha) x\right)_{\alpha=0}(s) = -i\dfrac{\partial}{\partial s_j} x(s) = p_j(x)(s) \end{cases}$$

Ma

$$\begin{aligned} V(\beta)U(\alpha)(s) =& U(\alpha)(x)(s+\beta) = e^{i\langle \alpha, s+\beta\rangle} x(s+\beta) \\ &= e^{i\langle \alpha, \beta\rangle} e^{i<\alpha, s>} x(s+\beta) \\ &= e^{i\langle \alpha, \beta\rangle} (U(\alpha)V(\beta)x)(s) \end{aligned}$$

Abbiamo cioè ottenuto le *regole di commutazione di Weyl*

18.2.4 Teorema $V(\beta)U(\alpha) = e^{i\langle\alpha,\beta\rangle}U(\alpha)V(\beta)$

Viceversa, partendo da due rappresentazioni unitarie U e V fortemente continue, sempre per il teorema di Stone 14.3.6, possiamo dedurre che sono della forma

$$U(\alpha) = e^{i\langle\alpha,q\rangle} \qquad \text{e} \qquad V(\beta) = e^{i\langle\beta,p\rangle}$$

per p e q opportuni operatori autoaggiunti. Allora, supponendo che le rappresentazioni U, V soddisfino alle relazioni di Weyl, si deduce che

$$[p_k, q_j] \subset -i\delta_{jk}I$$

La corrispondenza fra la rappresentazione di Schrödinger e le relazioni di Weyl non è precisamente biunivoca: in effetti ogni rappresentazione delle relazioni di Weyl è somma diretta di rappresentazioni di Schrödinger. Prima di dimostrarlo approfondiamo qualche proprietà di queste ultime.

18.2.5 Teorema *La rappresentazione di Schrödinger è irriducibile.*

DIMOSTRAZIONE: Sia U, V la rappresentazione di Schrödinger: allora

$$\{U(\alpha)\}''_{\alpha\in\mathbb{R}^n} = \{U(\alpha)\}'_{\alpha\in\mathbb{R}^n}$$

(si tratta di un'algebra di von Neumann abeliana massimale); inoltre

$$\left(\int f(\alpha)U(\alpha)d\alpha x\right)(s) = \widehat{f}(s)x(s)$$

dunque

$$\{U(\alpha)\}''_{\alpha\in\mathbb{R}^n} = \{M_f\}_{f\in L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

(operatori di moltiplicazione). Ma sappiamo che ogni $x\in L^2(\mathbb{R}^n)$ tale che $\{x = 0\}$ abbia misura nulla è ciclico.

Analogamente si procede per V, dato che $\mathfrak{F}^{-1}U\mathfrak{F} = V$ e quindi, se $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ è tale che

$$BU = UB \qquad \text{e} \qquad BV = VB$$

allora $B \in \mathbb{C}I$. in particolare, se $[B, U] = [B, V] = 0$ allora $B = M_f$, con $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$; ma

$$\begin{aligned}(V(\beta)M_f x)(s) =&(M_f x)(s + \beta) = f(s + \beta)x(s + \beta)\\ =&f(s + \beta)(V(\beta)x)(s) = (M_{f_{-\beta}}V(\beta)x)(s)\end{aligned}$$

(f_t è la traslazione per t), ovvero

$$V(\beta)M_f V(\beta)^{-1} = M_{f_{-\beta}}$$

Ma, dato che $[B, U] = 0$, $B = M_f$ e $M_f = M_{f_\beta}$ i.e.

$$M_{f-f_\beta} = 0 \Rightarrow f = f_\beta \text{ q.o.}$$

e quindi f è quasi ovunque costante, cioé $M_f \in \mathbb{C}I$.

Quindi la rappresentazione di Schrödinger è irriducibile.

QED

Consideriamo ora q_k, p_j operatori autoaggiunti su $\mathcal{H}$ che siano una rappresentazione delle relazioni di Heisenberg; ci chiediamo quando una tale rappresentazione sia irriducibile. Una condizione è che, per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si abbia

$$Bq_k \subset q_k B \qquad \text{e} \qquad Bp_j \subset p_j B$$

cioè

$$BE_{q_k}(\lambda) = E_{q_k}(\lambda)B \qquad \text{e} \qquad BE_{p_j}(\lambda) = E_{p_j}(\lambda)B$$

(famiglie spettrali). Nel caso della rappresentazione di Schrödinger, queste condizioni sono una caratterizzazione dell'irriducibilità:

$$\left.\begin{array}{l} BU(\alpha) = U(\alpha)B \\ BV(\alpha) = V(\alpha)B \end{array}\right\} \Rightarrow B \in \mathbb{C}I$$

Ora definiamo l'*operatore di von Neumann*, se $z = \alpha \oplus \beta \cong \alpha + i\beta$:

$$W(z) := e^{\frac{i}{2}\langle\alpha,\beta\rangle} U(\alpha)V(\beta)$$

La funzione $z \longmapsto W(z)$ è fortemente continua ed è una rappresentazione:

$$\begin{aligned} W(z)W(z') &= e^{\frac{i}{2}(\langle\alpha,\beta\rangle + \langle\alpha',\beta'\rangle)} U(\alpha)U(\beta)U(\alpha')U(\beta') \\ &= e^{\frac{i}{2}(\langle\alpha,\beta> + \langle\alpha',\beta'\rangle + 2\langle\alpha',\beta\rangle)} U(\alpha+\alpha')V(\beta+\beta') \\ &= e^{i\langle\alpha',\beta\rangle} W(z+z') = e^{\frac{i}{2}(\langle\alpha',\beta\rangle - \langle\alpha,\beta'\rangle)} W(z+z') \\ &= e^{i\sigma(\alpha,\beta)} W(z+z') \end{aligned}$$

ove abbiamo definito

$$\sigma(z, z') = \frac{1}{2}(\langle\alpha', \beta\rangle - \langle\alpha, \beta'\rangle) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\langle z', z\rangle = \frac{1}{2}\langle\alpha + i\beta, \alpha' + i\beta'\rangle$$

(prodotto scalare in $\mathbb{C}^n$). Notiamo che σ è una forma bilineare, antisimmetrica e non degenere: infatti è la parte immaginaria di una forma sesquilineare[1]. Si tratta

[1] Una tale forma si dice kähleriana.

cioè di una forma simplettica; sappiamo che ogni tale forma è, in una opportuna base, associata ad una matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ (teorema di Darboux).

Notiamo qui che la $\mathbb{R}$-bilinearità e l'antisimmetricità di σ implicano

$$W(z)^* = W(z)^{-1} = W(-z)$$

e quindi, se $z = \lambda\xi$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), $\lambda \longmapsto W(\lambda z)$ è una rappresentazione unitaria e fortemente continua di $\mathbb{R}$; viceversa, ogni tale rappresentazione tale che

$$W(z)W(z') = e^{i\sigma(z,z')}W(z+z') \tag{$\dagger$}$$

determina una rappresentazione di Schrödinger U, V come

$$U(\alpha) = W(\alpha + i0) \qquad \text{e} \qquad V(\beta) = W(0 + i\beta)$$

Quindi la ($\dagger$) e le regole di commutazione di Weyl sono equivalenti.

Ora consideriamo l'insieme $H_n = \{(z, \lambda) \,|\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } z \in \mathbb{C}^n\}$ tale che

$$(z, \lambda) \longmapsto e^{i\lambda}W(z)$$

Vogliamo su H_n una moltiplicazione che renda questa mappa una rappresentazione:

$$(z, \lambda) \cdot (z', \lambda') \longmapsto e^{i(\lambda+\lambda')}W(z)W(z') = e^{i(\lambda+\lambda'+\sigma(z,z'))}W(z+z')$$

Ovviamente basta porre

$$(z, \lambda) \cdot (z', \lambda') := (z + z', \lambda + \lambda' + \sigma(z, z'))$$

vale a dire che $H_n = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{C}^n$ è il prodotto semidiretto dei gruppi di Lie additivi $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}^n$.

18.2.6 Definizione *Il gruppo H_n si dice* gruppo di Heisenberg.

Usando la terminologia della teoria delle algebre di Lie, che si applica anche ai gruppi, possiamo dire che H_n è estensione centrale del gruppo additivo C^n per mezzo del cociclo σ:

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H_n \longrightarrow \mathbb{C}^n \longrightarrow 0$$

Ricordiamo che queste estensioni sono parametrizzate, a meno di equivalenze, da $H^2(\mathbb{C}^n)$: in effetti la forma simplettica σ usata per definire l'estensione dà luogo esattamente all'elemento di $H^2(\mathbb{C}^n)$ associato all'estensione stessa.

Notiamo che possiamo realizzare il gruppo H_n come gruppo di matrici nel modo seguente:

$$H_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x^T & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{C}^n \text{ e } t \in \mathbb{R} \right\}$$

Si vede in questo modo che il gruppo di Heisenberg è nilpotente.

Con la costruzione precedente abbiamo quindi determinato una rappresentazione unitaria del gruppo di Heisenberg per mezzo dell'operatore di von Neumann

$$\mathcal{U}_W(\lambda, z) = e^{i\lambda} W(z)$$

Naturalmente, per il teorema di Stone 14.3.6, ogni rappresentazione $\mathcal{U}$ del gruppo di Heisenberg soddisfa alla relazione

$$\mathcal{U}(0, \lambda) = e^{iT\lambda}$$

per un opportuno T; inoltre, dato che $\sigma(z, z) = 0$, di nuovo per il teorema di Stone 14.3.6, abbiamo che

$$\mathcal{U}(\alpha + i0, 0) = e^{i\langle\alpha, q\rangle} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{U}(0, 0 + i\beta) = e^{i\langle\beta, p\rangle}$$

per opportuni p, q; quindi esistono $2n + 1$ generatori per la rappresentazione del gruppo tali che

$$[p_k, q_j] = \frac{1}{i}\delta_{kj} T$$

Dato che a noi interessano operatori che verifichino le relazioni di Heisenberg o, equivalentemente, quelle di Weyl, dobbiamo considerare solo le rappresentazioni tali che $T = I$.

Osserviamo che H_n è connesso e semplicemente connesso: possiamo quindi, per mezzo del teorema di Nelson 16.4.2, determinarne le rappresentazioni a partire da quelle della sua algebra di Lie. L'algebra di Lie $\mathfrak{h}_n$ del gruppo di Heisenberg è ovviamente (come spazio vettoriale) somma diretta di $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}^n$ (algebre di Lie banali); il prodotto è desunto da quello del gruppo:

$$[(z, \lambda), (z', \lambda')] = (0, 2\sigma(z, z'))$$

Notiamo inoltre che la forma simplettica $\sigma : \mathbb{C}^n \wedge \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ determina un 2-cociclo sull'algebra di Lie: questo è ovvio se scriviamo la mappa esponenziale $\exp : \mathfrak{h}_n \longrightarrow H_n$: usiamo la rappresentazione matriciale che abbiamo dato per il gruppo di Heisenberg.

Per prima cosa, osserviamo che le matrici di $\mathcal{H}_n$ sono della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & x^T & t \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con $x, y \in \mathbb{C}^n$ e $t \in \mathbb{R}$; allora

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & x^T & t \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x^T & t + \frac{1}{2}\sigma(x,y) \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In questo caso la mappa esponenziale è quindi un diffeomorfismo fra il gruppo H_n e la sua algebra di Lie $\mathfrak{h}_n$.

Consideriamo una rappresentazione dell'algebra di Lie $\mathfrak{h}_n$, i cui generatori siano $p_1, ..., p_n$,$q_1, ..., q_n$ e I; per applicare il teorema di Nelson 16.4.2 necessita che l'operatore

$$\frac{1}{2}\sum_j (p_j^1 + q_j^2)$$

sia essenzialmente autoaggiunto (si tratta dell'hamiltoniano dell'oscillatore armonico ($\hbar = m = m\omega = 1$)): lo dimostreremo alla fine di questo capitolo.

18.3 Teorema di Stone–von Neumann

Affronteremo ora la dimostrazione del seguente e fondamentale teorema che stabilisce la canonicità della rappresentazione di Schrödinger (e quindi, ad esempio, implica la sua equivalenza alla rappresentazione di Heisenberg).

18.3.1 Teorema di unicità (STONE–VON NEUMANN) *Ogni rappresentazione unitaria irriducibile delle relazioni di Weyl su $\mathbb{C}^n$ è isomorfa alla rappresentazione di Schrödinger.*

che implicherà il *teorema di unicità di Dirac–Dixmier* per la rappresentazione di Schrödinger: combinando infatti questo risultato col teorema di Nelson 16.4.2 otteniamo il

18.3.2 Corollario *Ogni rappresentazione delle relazioni di Weyl in $\mathbb{C}^n$ è somma diretta di copie della rappresentazione di Schrödinger.*

Procediamo ora nella dimostrazione del teorema di Stone–von Neumann: si tratta di dimostrare in sostanza che il gruppo di Heisenberg possiede, a meno di equivalenze unitarie, la sola rappresentazione di Schrödinger come rappresentazione irriducibile unitaria.

L'algebra di gruppo $L^1(H_n, d\mu)$ del gruppo di Heisenberg: è un'algebra di Banach non commutativa (non lo è il gruppo): sia $J \lhd L^1(H_n)$ un suo ideale chiuso, tale che le rappresentazioni che verificano la

$$\mathcal{U}(0,\lambda) = e^{i\lambda}$$

siano zero su J, e sia

$$\pi : L^1(H_n) \longrightarrow L^1(H_n)/J \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

la rappresentazione associata a $\mathcal{U}$; per questo possiamo ad esempio considerare l'ideale delle funzioni tali che

$$\int e^{i\lambda} f(z,\lambda) d\lambda = 0$$

(si tratta ovviamente di uno *-ideale bilatero chiuso). Descriviamo ora il quoziente $L^1(H_n)/J$: un elemento dell'algebra $L^1(H_n)$ possiamo immaginarlo come una funzione

$$\lambda \longmapsto f(z,\lambda)$$

la cui trasformata di Fourier sia

$$\mu \longmapsto \widehat{f}(z,\mu)$$

Quozientare per J significa allora valutare la trasformata di Fourier in $\lambda = 1$: $\widehat{f}(z,1)$. Quindi, dato che, per ogni $f, g \in L^1(H_n)$,

$$\begin{aligned}(f *_\sigma g)(z,\lambda) &:= \int_{H_n} f(z',\lambda') g((z',\lambda')^{-1}(z,\lambda)) d(z',\lambda') \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{C}^n} f(z',\lambda') g(z-z', \lambda - \lambda' + \sigma(-z',z)) dz' d\lambda'\end{aligned}$$

si trova che

$$\widehat{f *_\sigma g}(z,s) = \int_{\mathbb{C}^n} \widehat{f}(z',s') g(z-z',s) e^{-i\sigma(z',z)s} dz'$$

e quindi, in $L^1(H_n)/J$ la convoluzione è

$$\widehat{f *_\sigma g}(z,1)$$

sicché, come *-algebra di Banach, è isomorfa a $L^1(\mathbb{C}^n)$ con l'involuzione $f^*(z) = \overline{f(-z)}$ e il prodotto:

$$\begin{aligned}(f *_\sigma g)(z) :=& \int_{\mathbb{C}^n} f(z') g(z-z') e^{i\sigma(z',z)} dz' = \int_{\mathbb{C}^n} f(z-\zeta) g(\zeta) e^{i\sigma(z-\zeta,z)} d\zeta \\ =& \int_{\mathbb{C}^n} f(z-\zeta) g(\zeta) e^{-i\sigma(\zeta,z)} d\zeta\end{aligned}$$

Quindi le rappresentazioni non degeneri di $L^1(\mathbb{C}^n)$ col prodotto $*_\sigma$ sono in corrispondenza biunivoca con le rappresentazioni delle relazioni di Weyl per mezzo della

$$\pi(f) = \int_{\mathbb{C}^n} f(z)W(z)dz$$

Infatti

$$W(z)\pi(f) = \pi(f_{(z)})$$

ove $f_{(z)}(z') = e^{i\sigma(z,z')}f(z'-z)$, pertanto

$$\begin{aligned}\pi(f)\pi(g) &= \int f(z)g(z')W(z)W(z')dzdz'\\ &= \int f(z)g(z')e^{i\sigma(z,z')}W(z+z')dzdz'\\ &= \int f(z)g(\zeta-z)e^{i\sigma(z,\zeta)}W(\zeta)d\zeta = \pi(f *_\sigma g)\end{aligned}$$

Inoltre

$$(f *_\sigma g)(\zeta) = \int f(z)g(\zeta-z)e^{i\sigma(z,\zeta)}dz = \int f(\zeta-z')g(z')e^{-i\sigma(z',\zeta)}dz'$$

Per dimostrare il teorema di Stone–von Neumann ci basterà quindi dimostrare che l'algebra $L^1(\mathbb{C}^n, *_\sigma)$ possiede un'unica rappresentazione irriducibile.

18.3.3 Lemma *Per ogni rappresentazione $\pi \neq 0$ di $L^1(\mathbb{C}^n, *_\sigma)$ e ogni funzione f tale che $\pi(f) = 0$ si ha $f = 0$.*

Dimostrazione: Abbiamo $W(z)\pi(f)W(z)^{-1} = 0$, dato che

$$\begin{aligned}W(z)\int f(\zeta)W(\zeta)d\zeta W(-z) &= \int f(\zeta)W(z+\zeta)e^{i\sigma(z,\zeta)}d\zeta W(-z)\\ &= \int f(\zeta)W(\zeta)e^{i(\sigma(z+\zeta,-z)+\sigma(z,\zeta))}d\zeta\\ &=\pi(f^{(z)})\end{aligned}$$

ove $f^{(z)}(\zeta) = e^{2i\sigma(z,\zeta)}f(\zeta)$, cioè

$$\forall x, y \in \mathcal{H} \qquad \int e^{2i\sigma(z,\zeta)}f(\zeta)(x, W(\zeta)y)d\zeta = 0$$

ovvero

$$f \cdot (\widehat{x, W(-})y) = 0$$

sicché $f \cdot (x, W(-)y) = 0$ q.o. da cui $f = 0$ q.o. il che vuol dire che $f = 0$ come elemento di $L^1(\mathbb{C}^n)$.

QED

Ora introduciamo la funzione

$$f_0(z) := \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-\frac{1}{4}||z||^2}$$

(con $||z|| = \sum |z_j|^2$); f_0 è tale che

$$f_0^* * f_0 = f_0 \Rightarrow f_0 = f_0^*$$

ed inoltre

18.3.4 Lemma $\forall f \in L^1(\mathbb{C}^n) \quad f_0 * f * f_0 = \omega(f) f_0$

DIMOSTRAZIONE: Basta far vedere che

$$(*) \qquad f_0 * f_0(\zeta) = \omega_0(\zeta) f_0$$

con $\omega_0(0) = 1$. Infatti[2], se è vera la (*):

$$g * f = \int g(\zeta) f_{(\zeta)} d\zeta = \int g(\zeta) f(z-\zeta) e^{i\sigma(\zeta,z)} dz$$

e quindi, dato che

$$\omega_0(f) = \int \omega_0(\zeta) f(\zeta) d\zeta$$

si ha

$$f^* * f_0(0) = f_0(0)$$

Ma

$$(f_0 * f_{0(w)})(z) = \int f_0(z-z') f_{(w)}(z') e^{i\sigma(z,z')} dz'$$

e $f_0(z'-w)e^{i\sigma(w,z')} = f_{0(w)}$, quindi

$$(f_0 * f_{0(w)})(z) = \int f_0(z-z') f(z'-w) e^{i(\sigma(z,z')+\sigma(w,z'))} dz'$$

[2]Si rammenti che (per antisimmetricità di σ):

$$\int f(z)W(\zeta)W(z)dz = \int f(z)e^{i\sigma(\zeta,z)}W(\zeta - z)dz \int f(z-\zeta)e^{i\sigma(\zeta,z)}W(z)dz = \pi(f_{(\zeta)})$$

ove $f_{(\zeta)}(z) = e^{i\sigma(\zeta,z)} f(z-\zeta)$.

Dunque, per definizione di f_0:

$$\begin{aligned}(f_0 * f_{0(w)})(z) =& \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int e^{-\frac{1}{4}(||z-z'||^2+||z'-w||^2)+i(\sigma(z,z')+\sigma(w,z'))} dz' \\ =& \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int e^{-\frac{1}{2}||z||^2-\frac{1}{4}||z||^2-\frac{1}{4}||w||^2+\frac{1}{2}(\mathrm{Re}(z,z')+\mathrm{Re}(w,z')+i\,\mathrm{Im}(z',w+z))} dz' \\ =& \frac{1}{(2\pi)^{2n}} e^{-\frac{1}{4}||z||^2-\frac{1}{4}||w||^2} \int e^{-\frac{1}{2}||z'||^2+\frac{1}{2}(z',w+z)} dz' \\ =& f_0(z) e^{-\frac{1}{4}||w||^2} \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int e^{-\frac{1}{2}||z'||^2+\frac{1}{2}(z',w+z)} dz'\end{aligned}$$

Per avere la nostra tesi dobbiamo mostrare che

$$\frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int e^{-\frac{1}{2}||z'||^2+\frac{1}{2}(z',w+z)} dz' = 1$$

Ma

$$\int e^{-\frac{1}{2}||z'||^2+\frac{1}{2}(z',z+w)} dz' = \int e^{-\frac{1}{2}(z',z'+w+z)} dz'$$

e quindi basta dimostrare l'identità

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{-\frac{1}{2}\overline{a}(\overline{a}+b)} da_1 da_2 = 1$$

che segue osservando che

$$(a_1 - ia_2)(a_1 + ia_2 + b) = \left(a_1 + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(a_2 - i\frac{b}{2}\right)^2$$

da cui

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{-\frac{1}{2}\overline{a}(\overline{a}+b)} da_1 da_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2}\left(a_1+i\frac{b}{2}\right)^2} da_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2}a_1^2} da_1 = 1$$

Ne segue che

$$(f_0 * f_{0(w)})(z) = f_0(z) e^{-\frac{1}{4}||w||^2}$$

e

$$\omega_0(f) = \int f_0(z) e^{-\frac{1}{4}||z||^2} dz$$

QED

Ora consideriamo una rappresentazione irriducibile π non degenere (quindi $\pi(f_0) \neq 0$); se $E_0 := \pi(f_0)$ allora abbiamo dimostrato che

$$E_0^* E_0 = E_0 \qquad \text{e} \qquad E_0 \pi(f) E_0 = \omega_0(f) E_0$$

Possiamo dunque, analogamente a quanto fatto per la costruzione GNS, considerare l'operatore unitario U tale che, se $\{e_\alpha\}$ è una base:

$$U_{\alpha\beta}\pi(f)e_\beta = \pi(f)e_\alpha$$

cioè $\pi_\alpha \cong \pi_\beta$ e π_α è irriducibile:

$$(e_\alpha, \pi(f)e_\alpha) = \omega_0(f)$$

Ma la rappresentazione di Schrödinger π_S è irriducibile e quindi esiste un vettore Ω tale che

$$(\Omega, \pi_S(f)\Omega) = \omega_0(f)$$

(vedremo in realtà che Ω è il vettore di stato dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico).

Questo implica il teorema di unicità di Stone–von Neumann.

18.4 Regole di commutazione e completa riducibilità

Il teorema di completa decomposizione di una rappresentazione delle regole di commutazione di Weyl in somma diretta di copie della rappresentazione di Schrödinger è stato ottenuto nella sezione precedente come conseguenza del teorema di unicità di Stone–von Neumann e del teorema di Nelson 16.4.2 sull'integrazione di rappresentazioni di algebre di Lie ai gruppi corrispondenti: qui dimostreremo il teorema di completa riducibilità direttamente, senza ricorrere alla teoria di Nelson.

Consideriamo la C*-algebra $\mathcal{A}$ inviluppante della *-algebra di Banach $L^1(\mathbb{C}^n, *_\sigma)$: dato che le rappresentazioni di quest'ultima sono in corrispondenza biunivoca con le rappresentazioni non degeneri delle regole di commutazione di Weyl, queste sono anche in corrispondenza biunivoca con le rappresentazioni non degeneri di $\mathcal{A}$.

Ora dimostriamo un risultato generale

18.4.1 Lemma *Se $\mathcal{B}$ è una *-algebra di Banach e $E_0 \in \mathcal{B}$ è un idempotente autoaggiunto tale che*

- *Se π è una rappresentazione di $\mathcal{B}$ allora $\pi(E_0) = 0$ implica $\pi(\mathcal{B}) = 0$.*
- *$E_0\mathcal{B}E_0 = E_0\mathbb{C}$.*
- *$\mathcal{B}$ ammette rappresentazioni fedeli su spazi di Hilbert separabili.*

allora la C-algebra $\mathcal{A}$ inviluppante di $\mathcal{B}$ è la C*-algebra degli operatori compatti su $\mathcal{H}$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia π una rappresentazione irriducibile di $\mathcal{B}$; $\pi(E_0)$ idempotente autoaggiunto è un proiettore di rango 1, quindi $\pi(E_0)\in\mathbb{K}(\mathcal{H})$ e $\pi(A)\pi(E_0)\pi(B)$ è un operatore di rango 1 ($\pi(E_0)$ è un proiettore) e se

$$|\Omega\rangle\langle\Omega| := \pi(E_0)$$

allora

$$|\pi(A)\Omega\rangle\langle\pi(B^*)\Omega|$$

Dunque una somma finita del tipo $\sum \pi(A)\pi(E_0)\pi(B)$ ha rango finito; ma la chiusura in norma di queste somme è un sottospazio dell'algebra degli operatori compatti.

Alternativamente: si consideri la C*-algebra inviluppante $\mathcal{A}$ e l'intersezione

$$\pi(\mathcal{A}) \cap \mathcal{K}(\mathcal{H})$$

la cui controimmagine in $\pi(\mathcal{B})$ è un ideale bilatero chiuso J che non può essere proprio, altrimenti le rappresentazioni del quoziente indurrebbero delle rappresentazioni di $\mathcal{A}$ nulle su J e quindi nulle su E_0: la (1) implicherebbe allora che $\pi(\mathcal{B}) = 0$, i.e. che J possiede solo la rappresentazione nulla e quindi $J = \mathcal{A}$. Questo dimostra che $\pi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Il viceversa, $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \subset \pi(\mathcal{A})$, si ottiene immediatamente per ciclicità della rappresentazione π.

QED

Se π_0 è una rappresentazione irriducibile allora $\pi_0(\mathcal{A}) = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ e la mappa $A \longmapsto \pi_0(A)$ è una isometria di le C*-algebre, dato che

$$\pi(A) = \begin{pmatrix} \pi_0(A) & 0 & ... & 0 \\ 0 & \pi_0(A) & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \pi_0(A) \end{pmatrix} = \bigoplus \pi_0(A)$$

In particolare $||\pi(A)|| = ||\pi_0(A)|| = ||A||$, quindi $\mathcal{A} \cong \mathcal{K}(\mathcal{H})$ i.e.

$$\mathcal{A}^{**} \cong \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

(algebra di von Neumann inviluppante della C*-algebra $\mathcal{A}$): in effetti $\widehat{\pi}(A) = \oplus_\alpha \pi_0(A)$ è la rappresentazione universale.

In generale, se G è un gruppo topologico localmente compatto commutativo possiamo scrivere su di esso le relazioni di Weyl: consideriamo due rappresentazioni unitarie in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$

$$V : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}) \qquad \text{e} \qquad U : \widehat{G} \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$$

tali che
$$U(\chi)V(g) = \chi(g)V(g)U(\chi)$$
Ad esempio, considerando la rappresentazione regolare di G, $L^2(G)$ abbiamo
$$(U(\chi)f)(g) = \chi(g)f(g) \qquad \text{e} \qquad (V(h)f)(g) = f(gh)$$
Il seguente teorema di Mackey generalizza allora la teoria svolta per il gruppo di Heisenberg:

Teorema. (U, V) *è la sola rappresentazione irriducibile delle relazioni di Weyl su* G.

Anche in questo ambito più generale esiste un teorema di unicità alla Stone–von Neumann. Notiamo comunque che queste generalizzazioni si limitano al caso localmente compatto: ad esempio se X è uno spazio vettoriale topologico non di dimensione finita, non possiamo dire nulla di tutto ciò: possiamo comunque (e questo sarà fatto nel prossimo capitolo) sfruttare la linearità di X per considerare delle forme simplettiche e definire un gruppo di Heisenberg $H_X = X \rtimes \mathbb{R}$ per il quale potremo scrivere delle regole di commutazione di Weyl: tuttavia non avremo più l'unicità, che è propria del caso di dimensione finita, e che giustifica la terminologia "quantizzazione canonica" data a questa teoria.

Riassumiamo la procedura di quantizzazione[3] fin qui considerata: abbiamo definito
$$\pi(f) = \int f(z)W(z)dz$$
ove l'operatore di von Neumann soddisfa alle relazioni di Weyl
$$W(z)W(z') = e^{i\sigma(z,z')}W(z + z')$$
Ciò induce un gruppo a un parametro fortemente continuo che, per il teorema di Stone 14.3.6, possiamo scrivere come
$$\lambda \longmapsto W(\lambda z) = e^{i\lambda A}$$
ove $A = (\alpha, q) + i(\beta, p)$, se $z = \alpha + i\beta$:
$$\frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}W(\lambda z)\right)_{\lambda=0} = \frac{1}{i}\left(\left(\sum \alpha_k \frac{\partial}{\partial\alpha_k} + \sum \beta_k \frac{\partial}{\partial\beta_k}\right)W(z)\right)_{z=0} = (\alpha, q) + i(\beta, p)$$
Quindi, se $\widehat{f} \in \mathfrak{F}(L^1) \subset C_0(\mathbb{R}^{2n})$ è la trasformata di Fourier:
$$\widehat{f}(q, p) := \int f(\alpha, \beta)e^{i((\alpha,q)+(\beta,p))}d\beta d\beta = \pi(f)$$

[3]Dovuta a Wigner, Von Neumann e Moyal.

allora $\pi(f)^* = \pi(f)$ equivale a $f^*(z) = \overline{f(-z)}$, i.e. $\widehat{f^*} = \overline{\widehat{f}}$ e quindi $\widehat{f}$ è autoaggiunto.

Se $\widehat{f}$ è reale allora $\widehat{f}(q,p)$ è compatto; se $\widehat{f}$ è continua, $\widehat{f}(q,p)$ è nucleare (tracciabile).

Dimostriamo ora il teorema di completa riducibilità, che abbiamo già dedotto dal teorema di Nelson 16.4.2 e dal teorema di unicità di Stone–von Neumann.

18.4.2 Teorema *Se $\{q_k, p_k\}$ è una rappresentazione delle regole di commutazione di Heisenberg per mezzo di operatori hermitiani su un dominio comune $\mathcal{D}$, denso e invariante, e se*

$$A_0 = \frac{1}{2}\sum(p_k^2 + q_k^2)$$

è essenzialmente autoaggiunto su $\mathcal{D}$ allora la rappresentazione è somma diretta di copie della rappresentazione di Schrödinger.

DIMOSTRAZIONE: Considereremo per semplicità il caso $n = 1$; per ipotesi abbiamo gli operatori autoaggiunti p, q che soddisfano le regole di Heisenberg e posseggono un dominio comune (denso) $\mathcal{D}$ invariante per essi (basta in realtà che $\mathcal{D}$ sia contenuto nei domini di p, q e $[p,q]$) e sappiamo che l'operatore $A_0 = p^2 + q^2$ è essenzialmente autoaggiunto sul dominio $\mathcal{D}$.

Se $A = \overline{A_0}$ ne è la chiusura, allora A è un operatore autoaggiunto definito positivo (perché A_0 è hermitiano definito positivo) e se

$$\eta := \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{p_0 - iq_0}$$

(ove p_0 e q_0 sono operatori definiti su $\mathcal{D}$) allora η è definito su $\mathcal{D}$, come pure lo è $p_0 + iq_0$, sicché

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(p_0 + iq_0) \subset \eta^*$$

Ma $\eta^*\eta$ e $\eta\eta^*$ sono autoaggiunti definiti positivi (essendo chiusi, teorema di von Neumann 13.1.8) e soddisfano alle

$$\eta^*\eta|_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}(p_0^2 + q_0^2) - \frac{i}{2}[p_0, q_0]$$
$$\eta\eta^*|_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}(p_0^2 + q_0^2) + \frac{i}{2}[p_0, q_0]$$

cioè $\eta^*\eta|_{\mathcal{D}} = A_0 - \frac{1}{2}I$ e $\eta\eta^*|_{\mathcal{D}} = A_0 + \frac{1}{2}I$; ma A_0 è essenzialmente autoaggiunto, e $A_0 \subset \eta^*\eta + \frac{1}{2}I$ implicano

$$A = \eta^*\eta + \frac{1}{2}I \qquad \text{e} \qquad A_0 = \eta\eta^* - \frac{1}{2}I$$

Dato che $\mathcal{D}_{\eta^*\eta} = \mathcal{D}_{\eta\eta^*}$, se $\eta = |\eta|V$ è la decomposizione polare di η allora

$$\mathcal{D}_{|\eta|} = \mathcal{D}_{\eta^*} = \mathcal{D}_\eta$$

e quindi $\ker\eta \neq 0$ mentre $\ker\eta^* = 0$; infatti[4] $A \geq 0$ e, se $x \in \ker\eta^*$ allora

$$(x, Ax) = \eta^* x, \eta^* x) - \frac{1}{2}(x, x)$$

dunque $x = 0$ (per positività di A); se fosse $\ker\eta = 0$ allora, per unitarietà di V ($VV^* = I$), avremmo

$$A + \frac{1}{2}I = \eta\eta^* = V|\eta|^2V^* \Rightarrow A = |\eta|^2 + \frac{1}{2}I = V\left(|\eta|^2 - \frac{1}{2}I\right)V^*$$

e quindi $AV^* = V^*A + I$. A sarebbe dunque unitariamente equivalente a $|\eta|^2 - \frac{1}{2}I{=}A - I$, i.e. per ogni $n \in \mathbb{Z}$: $A \cong A + nI$, col che lo spettro di A sarebbe $\mathbb{Z}$-invariante e A e quindi illimitato sia inferiormente che superiormente, il che è assurdo, dato che A è definito positivo. Ne segue che V non è un operatore unitario, ma solo una isometria parziale, e $\ker\eta \neq 0$.

Sia ora $x_0 {\in} \ker\eta$ con $||x_0|| = 1$ e completiamo $\{x_0\}$ a un sistema ortonormale, definendo

$$x_n := V^{*n}x_0$$

Questi sono tutti vettori di norma 1. Si rammenti che se V^* è una isometria parziale, allora

$$AV^* = V^*(A + I) \tag{†}$$

e quindi $A|_{\operatorname{im} V^*}$ è unitariamente equivalente a $(A + I)|_{|imV^*}$; allora, se $n < m$:

$$(x_n, x_m) = (V^{*n}x_0, V^{*n}V^{*m-n}x_0) = (x_0, V^{*m-n}x_0) = (Vx_0, V^{*m-n}x_0) = 0$$

(dato che $Vx_0 = 0$: $x_0 \in \ker\eta$). Quindi $\{x_n\}$ è un sistema ortonormale; inoltre ogni x_n appartiene al dominio di definizione di A, dato che, per induzione dalla (†):

$$AV^{*n} = V^{*n}(A + In)$$

e quindi, dato che $\eta^*\eta = A - \frac{1}{2}I$ e $x_0 \in \ker\eta$:

$$Ax_n = \left(A + \frac{n}{2}I\right)x_0 = \left(n + \frac{1}{2}\right)x_n$$

Dunque $|\eta|^2 x_n = nx_n$, cioè $|\eta|x_n = \sqrt{n}x_n$, per il calcolo funzionale.

[4] $(x, A_0x) = \frac{1}{2}(||px||^2 + ||qx||^2) \geq 0$

Si noti che $V^* x_n = x_{n+1}$ e che V è lo shift unilaterale:

$$Vx_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ x_{n-1} & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Da questo segue che

$$\eta x_n = |\eta| V x_n = \sqrt{n} V x_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ \sqrt{n} x_{n-1} & \text{se } n > 0 \end{cases}$$
$$\eta^* x_n = |\eta| V^* x_n = \sqrt{n+1} x_{n+1}$$

cioè che

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \eta^{*n} x_0$$

Ora:

$$p|_{\mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_q} \subset \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta^* + \eta) \qquad \text{e} \qquad q|_{\mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_q} \subset \frac{1}{i\sqrt{2}}(\eta^* - \eta)$$

sicché

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{(\eta^* + \eta)} \qquad \text{e} \qquad q = \frac{1}{i\sqrt{2}} \overline{(\eta^* - \eta)}$$

ovvero

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta^* + \eta) \subset p \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{i\sqrt{2}}(\eta^* - \eta) \subset q$$

Dunque, per ogni $x_n \in \mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_q$:

$$px_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{n} x_{n-1} + \sqrt{n+1} x_{n+1} \right) \ , \quad qx_n = \frac{1}{i\sqrt{2}} \left(\sqrt{n+1} x_{n+1} - \sqrt{n} x_{n-1} \right)$$

Assumiamo momentaneamente il

18.4.3 Lemma *Per ogni n, x_n è un vettore analitico intero per p e q.*
e dimostriamo il teorema con questo assunto: per prima cosa, se (p, q) è una rappresentazione irriducibile allora ogni operatore lineare e continuo che commuti con p e q è multiplo dell'identità I; vogliamo ora dimostrare che il sistema ortonormale $\{x_0, x_1, ...\}$ costruito è una base hilbertiana, cioè che il sottospazio $\mathfrak{M}_0$ da esso generato è denso; ma questo equivale a dimostrare che il proiettore ortogonale su questo sottospazio è I, e, come abbiamo osservato, per questo basta far vedere che commuta con p e q. Per assicurarcene, mostreremo che $\mathfrak{M}_0$ è un sottospazio stabile per i gruppi unitari generati da p e q.

In virtù del lemma, le serie

$$e^{i\lambda p} x_n = \sum_{k \geq 0} \frac{(i\lambda)^k}{k!} p^k x_n \qquad \text{e} \qquad e^{i\mu q} x_n = \sum_{k \geq 0} \frac{(i\mu)^k}{k!} q^k x_n$$

convergono per ogni λ; quindi, dato che $p^k x_n$ e $q^k x_n$ sono combinazioni lineari di vettori del sistema $\{x_0, x_1, ...\}$, le ridotte n-esime di questa serie esponenziale (le somme parziali che la approssimano) appartengono al sottospazio $\mathfrak{M}_0$ generato dal sistema $\{x_0, x_1, ...\}$, quindi, se $\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{M}_0}$ è la chiusura di questo sottospazio:

$$e^{i\lambda p}\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M} \qquad \text{e} \qquad e^{i\mu q}\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$$

Dunque l'irriducibilità della rappresentazione (p, q) implica che $\mathfrak{M}$ coincide con tutto lo spazio di Hilbert del sistema, e A si diagonalizza con spettro $\left\{n + \frac{1}{2}\right\}$.

Se supponiamo (p', q') essere un'altra rappresentazione irriducibile, possiamo iterare la costruzione precedente ed esibire un sistema ortonormale $\{x'_n\}$; allora, l'operatore

$$Ux_n := x'_n$$

è unitario; facciamo vedere che realizza una equivalenza unitaria fra le due rappresentazioni. Infatti (se $\mathfrak{M}_0$ è il sottospazio generato dal sistema ortonormale $\{x'_n\}$)

$$p'|_{\mathfrak{M}'_0}U = p'U|_{\mathfrak{M}_0} = Up|_{\mathfrak{M}_0}$$

dato che $U\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}'_0$. Analogamente per q e q', quindi abbiamo le

$$Uq_0 = q'_0 U \qquad \text{e} \qquad Up_0 = p'_0 U$$

e quindi U è un operatore di allacciamento fra le rappresentazioni: essendo unitario, le rappresentazioni sono unitariamente equivalenti, considerando

$$q' = \overline{q'_0} \qquad \text{e} \qquad p' = \overline{p'_0}$$

e ricordando che, per il teorema di Nelson 16.4.2:

$$U(\overline{q_0}) = \overline{q'_0}U \qquad \text{e} \qquad U(\overline{p_0}) = \overline{p'_0}U$$

Abbiamo cioè dimostrato che se la rappresentazione delle relazioni di Heisenberg che soddisfa le ipotesi del teorema è irriducibile allora è unica, e quindi coincide con la rappresentazione di Schrödinger; dimostriamo ora che se non è riducibile è somma diretta di rappresentazioni irriducibili delle relazioni di Weyl, quindi di copie della rappresentazione di Schrödinger.

Se la rappresentazione (p, q) non è irriducibile, allora consideriamo il sottospazio di Hilbert

$$\mathcal{H}_0 = \ker \eta = \ker V \neq 0$$

ed una sua base ortonormale $\{x^{(\alpha)}\}$; per ogni α abbiamo un sistema ortonormale formato dagli elementi

$$x_n^{(\alpha)} := \frac{1}{\sqrt{n1}}\eta^{*n}x_0^{(\alpha)} = V^{*n}x_0^{(\alpha)}$$

Di nuovo questi elementi sono vettori analitici interi per p e q e costituiscono una base ortonormale, dato che, se $n < m$:

$$(x_n^{(\alpha)}, x_m^{(\beta)}) = (x_0^{(\alpha)}, x_{m-n}^{(\beta)}) = 0$$

Allora, per $m = n$:

$$(x_n^{(\alpha)}, x_m^{(\beta)}) = \delta_{nm}(x_0^{(\alpha)}, x_0^{(\beta)}) = \delta_{nm}\delta_{\alpha,\beta}$$

(per ortonormalità del sistema $\{x^{(\alpha)}\}$).

Consideriamo ora i complementi ortogonali di questi vettori analitici: si tratta di sottospazi la cui somma è tutto $\mathcal{H}$ (altrimenti avremmo $\ker\eta = 0$); definendo $\mathcal{H}_\alpha$ come il sottospazio chiuso generato dalla famiglia $\{x_n^{(\alpha)}\}_n$ per α fissato al variare di n, allora

$$\mathcal{H} = \bigoplus_\alpha \mathcal{H}_\alpha$$

e la restrizione della rappresentazione (p, q) al sottospazio $\mathcal{H}_\alpha$ è unica a meno di equivalenze unitarie: questo dà la decomposizione postulata dal teorema.

Non resta che da provare il lemma precedente: l'analiticità intera dei vettori x_n. Scrivendo $\eta^\#$ per η oppure η^*, abbiamo che

$$||q^k x_n|| = ||p^k x_n|| = 2^{-\frac{k}{2}}||(\eta \pm \eta^*)^k x_n|| \leq 2^{-\frac{k}{2}}2^k||(\eta^\#)^k x_n||$$

(sviluppando $(\eta \pm \eta^*)^k$ e maggiorando col massimo dei 2^k termini), e

$$2^{-\frac{k}{2}}2^k||(\eta^\#)^k x_n|| \leq 2^{k-\frac{k}{2}}||\eta^{*k}x_n|| = 2^{k-\frac{k}{2}}\sqrt{\frac{(n+k)!}{n!}}$$

(dato che $\eta^* x_n = \sqrt{n+1}x_{n+1}$). Ma allora la serie

$$\sum_{k\geq 0}\frac{\lambda^k}{k!}||p^k x_n|| \leq \frac{1}{\sqrt{n!}}\sum_{k\geq 0}(\sqrt{2}\lambda)^k\frac{\sqrt{(n+k)!}}{k!}$$

converge per il criterio del rapporto.

QED

Abbiamo quindi dimostrato che ogni rappresentazione delle regole di commutazione di Heisenberg si decompone in somma diretta di rappresentazioni irriducibili, unitariamente equivalenti alla rappresentazione di Schrödinger.

L'applicabilità del teorema è tuttavia condizionata dal supporre l'operatore hamiltoniano dell'oscillatore armonico essenzialmente autoaggiunto. Vediamo che questo accade effettivamente per almeno una rappresentazione.

Consideriamo la rappresentazione di Schrödinger (p_S, q_S) che opera nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}, ds)$; questo spazio contiene le funzioni infinitamente differenziabili rapidamente decrescenti, cioè lo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$; scegliendo il dominio $\mathcal{D}$ come

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{p_S^k q_S^h}$$

per $h + k = 2$, abbiamo che

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}$$

(in realtà vale un risultato più preciso: $\mathcal{S} = \bigcap_{h,k} \mathcal{D}_{p_S^k q_S^h}$).

Ci basta quindi dimostrare, per poter applicare il teorema precedente, che $\frac{1}{2}(p_S^2 + q_S^2)$ è essenzialmente autoaggiunto su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

In effetti, esiste x_0 tale che $\eta x_0 = 0$ e che tutti i vettori

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \eta^{*n} x_0$$

siano in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Per vederlo dobbiamo risolvere l'equazione

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(p - iq)x_0 = 0 \implies -\frac{i}{\sqrt{2}}(x_0'(s) + s x_0(s)) = 0$$

cioè $x_0' + s x_0 = 0$, che effettivamente ammette soluzioni

$$x_0(s) = c e^{-\frac{1}{2}s^2} \in L^2(\mathbb{R})$$

Normalizzando queste soluzioni, ponendo cioè $c = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}$ abbiamo che $x_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, come pure a decrescenza rapida è la funzione

$$\left(\frac{1}{i\sqrt{2}}(p + iq)\right)^n x_0$$

dato che possiamo scrivere

$$\left(\frac{1}{i\sqrt{2}}(p + iq)\right)^n x_0(s) = H_n(s) x_0(s)$$

per opportuni polinomi H_n: incidentalmente questi polinomi sono esattamente i *polinomi di Hermite* che avevamo incontrato nel capitolo **??** (a pagina 270) nella costruzione di un sistema ortonormale per $L^2(\mathbb{R})$ (nel quale, per giunta, la trasformata di Fourier era in forma diagonale).

Abbiamo in questo modo diagonalizzato l'operatore $\frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ che risulta quindi essenzialmente autoaggiunto.