

Historia y didáctica: ¿Quién sirve a quién?

Paolo Caressa



25 de abril 2012

*Máster Universitario en Didácticas Específicas en el Aula,
Museos y Espacios Naturales*

Departamento de Didácticas Específicas

Facultad de Formación del Profesorado y Educación

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

Enseñar a través de la historia

Es reconocido que la historia tiene un sentido particular por la didáctica de las ciencias

Enseñar a través de la historia

Es reconocido que la historia tiene un sentido particular por la didáctica de las ciencias

Por ejemplo siempre las enseñanzas de didáctica e historia son asociadas en las facultades universitarias...

Enseñar a través de la historia

Es reconocido que la historia tiene un sentido particular por la didáctica de las ciencias

Por ejemplo siempre las enseñanzas de didáctica e historia son asociadas en las facultades universitarias... y las motivaciones son más o menos obvias:

- la historia puede motivar los conceptos científicos

Enseñar a través de la historia

Es reconocido que la historia tiene un sentido particular por la didáctica de las ciencias

Por ejemplo siempre las enseñanzas de didáctica e historia son asociadas en las facultades universitarias... y las motivaciones son más o menos obvias:

- la historia puede motivar los conceptos científicos
- la historia puede acercar los alumnos a la ciencia

Enseñar a través de la historia

Es reconocido que la historia tiene un sentido particular por la didáctica de las ciencias

Por ejemplo siempre las enseñanzas de didáctica e historia son asociadas en las facultades universitarias... y las motivaciones son más o menos obvias:

- la historia puede motivar los conceptos científicos
- la historia puede acercar los alumnos a la ciencia
- la historia puede ayudar los enseñantes a encuadrar un sujeto científico

Enseñar a través de la historia

Es reconocido que la historia tiene un sentido particular por la didáctica de las ciencias

Por ejemplo siempre las enseñanzas de didáctica e historia son asociadas en las facultades universitarias... y las motivaciones son más o menos obvias:

- la historia puede motivar los conceptos científicos
- la historia puede acercar los alumnos a la ciencia
- la historia puede ayudar los enseñantes a encuadras un sujeto científico
- ...

Enseñar a través de la historia

Es reconocido que la historia tiene un sentido particular por la didáctica de las ciencias

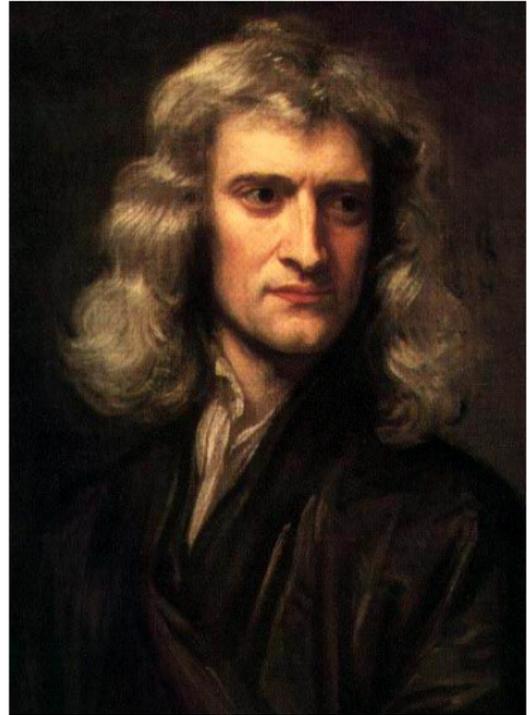
Por ejemplo siempre las enseñanzas de didáctica e historia son asociadas en las facultades universitarias... y las motivaciones son más o menos obvias:

- la historia puede motivar los conceptos científicos
- la historia puede acercar los alumnos a la ciencia
- la historia puede ayudar los enseñantes a encuadrar un sujeto científico
- ...

Pero, para nosotros, la historia de la ciencia es importante porque la ciencia es una *empresa colectiva*

Isaac Newton (1642-1727)

“Si he visto más lejos es porque estoy sentado sobre los hombros de gigantes”



Historia y didáctica en la escuela

(Nos referimos a la situación en Italia)

Division entre el enfoque historico y lógico por diversos sujetos: las disciplinas “humanísticas” son enseñadas a través de sus historia, las disciplinas “técnicas” de manera lógica

Historia y didáctica en la escuela

(Nos referimos a la situación en Italia)

Division entre el enfoque histórico y lógico por diversos sujetos: las disciplinas “humanísticas” son enseñadas a través de sus historia, las disciplinas “técnicas” de manera lógica

episteme vs. techne

Historia y didáctica en la escuela

(Nos referimos a la situación en Italia)

Division entre el enfoque historico y lógico por diversos sujetos: las disciplinas “humanísticas” son enseñadas a través de sus historia, las disciplinas “técnicas” de manera lógica

episteme vs. techne

Las disciplinas que de certa manera pueden transmitirse sono enseñadas ignorando sus historia (por ejemplo la matemática), las otras son enseñada solo por medio de su historia (por ejemplo la literatura)

Historia y didáctica en la escuela

(Nos referimos a la situación en Italia)

Division entre el enfoque historico y lógico por diversos sujetos: las disciplinas “humanísticas” son enseñadas a través de sus historia, las disciplinas “técnicas” de manera lógica

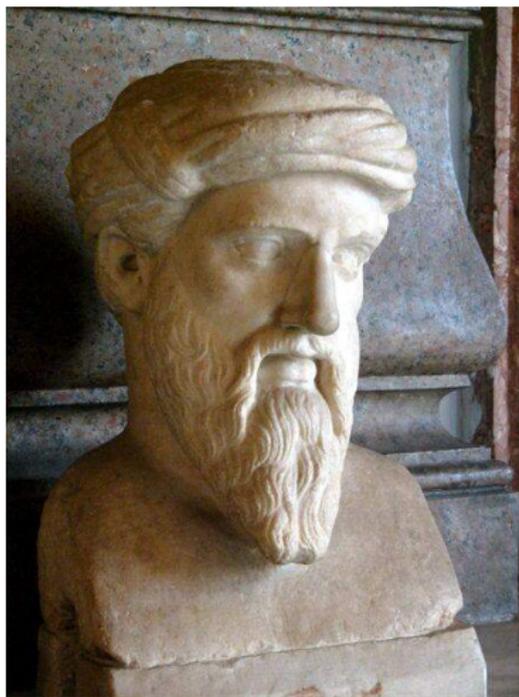
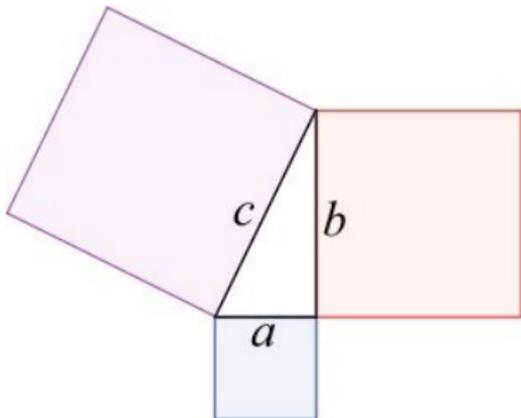
episteme vs. techne

Las disciplinas que de certa manera pueden transmitirse sono enseñadas ignorando sus historia (por ejemplo la matemática), las otras son enseñada solo por medio de su historia (por ejemplo la literatura)

Pero esta distinción es demasiado artificial: hay tanto una historia de la trigonometria como una tecnica literaria, etcétera

¿Techne? Pitágoras (siglo VI a.C.)

$$a^2 + b^2 = c^2$$



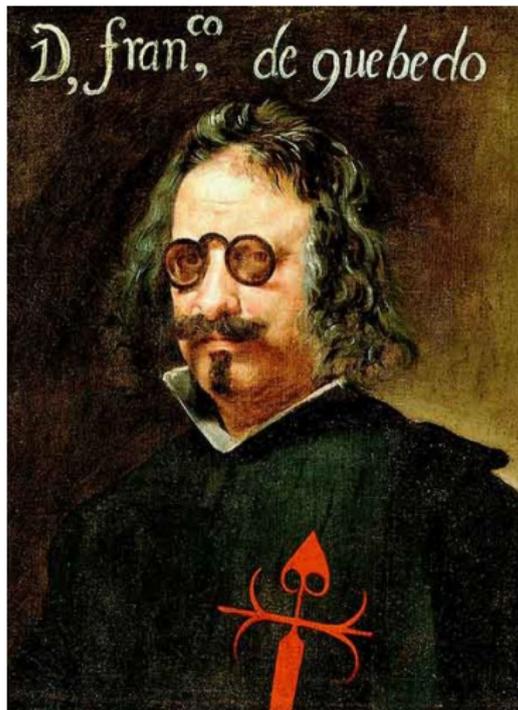
¿Episteme? Francisco de Quevedo (1580-1645)

“¡Ah de la vida!” ... ¿Nadie me responde?
¡Aquí de los antaños que he vivido!
La Fortuna mis tiempos ha mordido;
las Horas mi locura las esconde.

¡Que sin poder saber cómo ni adónde,
la salud y la edad se hayan huído!
Falta la vida, asiste lo vivido,
y no hay calamidad que no me ronde.

Ayer se fue; mañana no ha llegado;
hoy se está yendo sin parar un punto;
soy un fue, y un será y un es cansado.

En el hoy y mañana y ayer, junto
pañales y mortaja, y he quedado
presentes sucesiones de difunto.

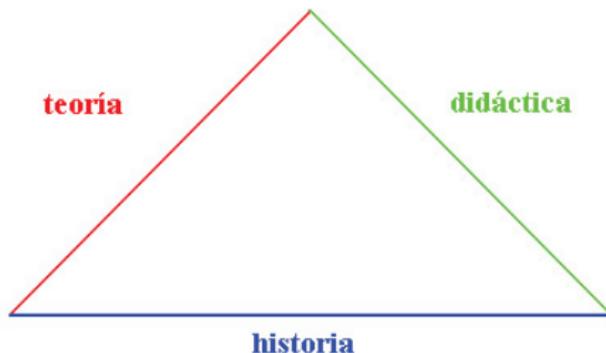


El triángulo conceptual

En la enseñanza de una disciplina científica hay tres aspectos que tener en consideración, que representamos como lados de un *triángulo conceptual*

El triángulo conceptual

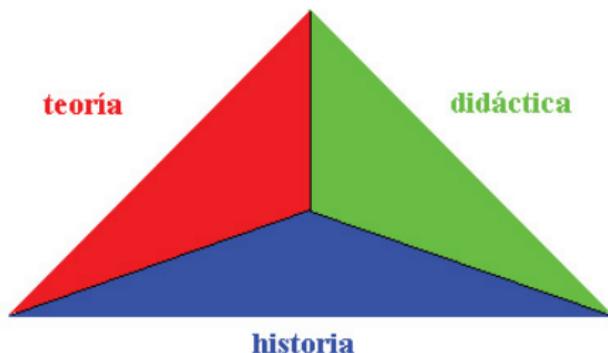
En la enseñanza de una disciplina científica hay tres aspectos que tener en consideración, que representamos como lados de un *triángulo conceptual*



Se busquen tres libros de geometría analítica: un texto escolar (D), un texto de historia de la matemática (H) y un manual universitario (T).

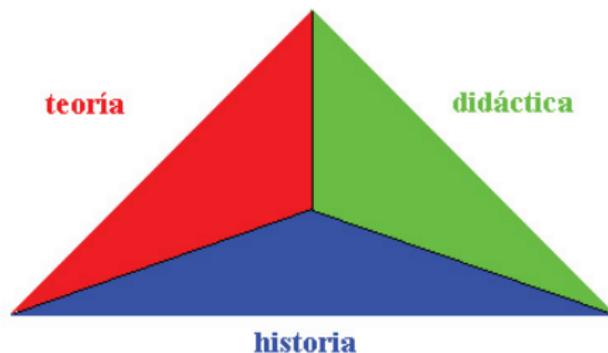
- ¿Hay una correspondencia cabal entre las nociones expuestas en (D) y en (T)?
- ¿Todas las nociones expuestas en (H) se hallan también en (D) y (T)? O, si no se hallan del todo, ¿en qué porcentual?
- ¿Cuál de estos textos da la idea de que es la geometría analítica?, o sea ¿cuál contesta a la pregunta *¿Que es la geometría analítica?*?

El triángulo conceptual



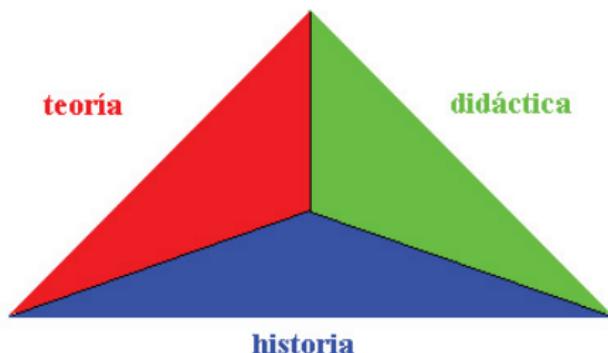
Más importante que el perímetro del triángulo es su área: los puntos internos corresponden a diferentes gradaciones

El triángulo conceptual



- Rojo = rigor y precisión científica
- Azul = raíces y ramificaciones
- Verde = intuición y motivación

El triángulo conceptual



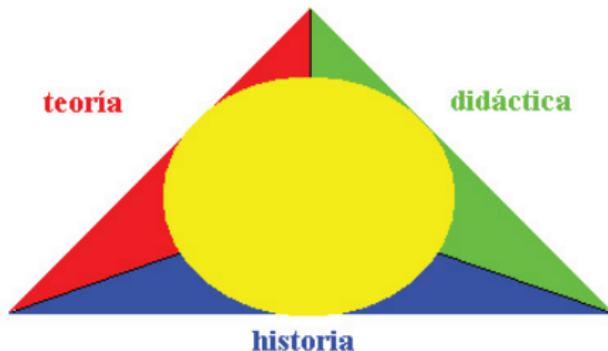
- Rojo = presente (como entendemos hoy)
- Azul = pasado (como entendíamos antes)
- Verde = futuro (como entenderemos mañana)

El triángulo conceptual

El *incentro* del triángulo conceptual es el punto de “máxima erudición” y comprensión de la disciplina: siguiendo nuestra metáfora geométrica, es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo (que es tangente a sus lados)

El triángulo conceptual

El *incentro* del triángulo conceptual es el punto de “máxima erudición” y comprensión de la disciplina: siguiendo nuestra metáfora geométrica, es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo (que es tangente a sus lados)



Las *Cartas a una princesa alemana* de Leonhard Euler (1707-83) son un *bestseller* de divulgación científica del siglo XVIII, y tratan de muchos y diferentes temas científicos de manera simple. Se considere la discusión sobre los silogismos y se reflexione sobre la colocación de Euler en el triángulo conceptual, por lo que se refiere a esa obra



El triángulo conceptual

¿Qué nos enseña esa metáfora del triángulo conceptual?

- Que la hibridación entre teoría, didáctica e historia es lo que puede dar un conocimiento más profundo de una disciplina y ayudarnos a comprender los diferentes aspectos de esta a través de diferentes puntos de vista

El triángulo conceptual

¿Qué nos enseña esa metáfora del triángulo conceptual?

- Que la hibridación entre teoría, didáctica e historia es lo que puede dar un conocimiento más profundo de una disciplina y ayudarnos a comprender los diferentes aspectos de esta a través de diferentes puntos de vista
- Que concentrarnos sobre dos lados que se cortan en el triángulo conceptual no debe hacernos olvidar el otro lado

El triángulo conceptual

¿Qué nos enseña ese metáfora del triángulo conceptual?

- Que la hibridación entre teoría, didáctica e historia es lo que puede dar un conocimiento mas profundo de una disciplina y ayudarnos a comprender los diferentes aspectos de esta a través de diferentes puntos de vista
- Que concentrarnos sobre dos lados que se cortan en el triángulo conceptual no deve hacernos olvidar el otro lado

Vamos a discutir unos ejemplos por los lados de la didáctica y de la historia.

Figuras ejemplares: Ernst Mach (1838-1916)

Concepción empírica y histórica de la ciencia, en particular de la física, e influjo sobre el pensamiento de Einstein(!)

Para Mach el progreso y las nuevas teorías solo se pudieran descubrir fundándose sobre el desarrollo histórico



Figuras ejemplares: Pierre Duhem (1861-1916)

Para Duhem la física se puede desarrollar solo si tiene en cuenta las descubiertas y las investigaciones del pasado: por lo tanto, según Duhem, la historia puede ser empleada como verdadero método científico

“El método legítimo, seguro y fecundo por preparar un espíritu a recibir una hipótesis física es el método histórico.”



Figuras ejemplares: Federigo Enriques (1871-1946)

El enfoque de Enriques a la didáctica es por un lado filosófico y epistemológico, y por otro lado histórico: el estudio del desarrollo de las nociones científicas y de las intuiciones de los científicos sirve para fundar el progreso de la misma ciencia

En sus obras didácticas, por ejemplo sus *Elementos de geometría* por la escuela secundaria, Enriques aplica estos principios posicionándose con buena aproximación en el incentro del triángulo conceptual



Enseñar a través de la historia: ¿Cómo?

La historia de la ciencia es ella misma una disciplina por la cual se puede dibujar un triángulo conceptual: por lo tanto **no se trata de enseñar en paralelo la historia de la ciencia** sino de utilizar la historia como auxilio didáctico, al lado de otros

Enseñar a través de la historia: ¿Cómo?

La historia de la ciencia es ella misma una disciplina por la cual se puede dibujar un triángulo conceptual: por lo tanto **no se trata de enseñar en paralelo la historia de la ciencia** sino de utilizar la historia como auxilio didáctico, al lado de otros

No creemos en los métodos “definitivos” en didáctica, pero en el sincretismo de técnicas e ideas diferentes, y la historia es una de estas

Enseñar a través de la historia: ¿Cómo?

La historia de la ciencia es ella misma una disciplina por la cual se puede dibujar un triángulo conceptual: por lo tanto **no se trata de enseñar en paralelo la historia de la ciencia** sino de utilizar la historia como auxilio didáctico, al lado de otros

No creemos en los métodos “definitivos” en didáctica, pero en el sincretismo de técnicas e ideas diferentes, y la historia es una de estas

Mejor es **integrar** la historia de la ciencia con la didáctica de la ciencia

Pero, antes de proseguir, en el nombre de la dialéctica, queremos exponer también unos argumentos contra el empleo de la historia en la enseñanza de la ciencia.

Enseñar a través de la historia: ¿Por qué no?

Algunas motivaciones para no utilizar la historia en didáctica:

Enseñar a través de la historia: ¿Por qué no?

Algunas motivaciones para no utilizar la historia en didáctica:

- una disciplina científica y su historia son cosas distintas

Enseñar a través de la historia: ¿Por qué no?

Algunas motivaciones para no utilizar la historia en didáctica:

- una disciplina científica y su historia son cosas distintas
- un enfoque histórico puede confundir los alumnos en el distinguir entre el proceso histórico y el verdadero resultado científico

Enseñar a través de la historia: ¿Por qué no?

Algunas motivaciones para no utilizar la historia en didáctica:

- una disciplina científica y su historia son cosas distintas
- un enfoque histórico puede confundir los alumnos en el distinguir entre el proceso histórico y el verdadero resultado científico
- analizar los hechos históricos requiere instrumentos críticos

Enseñar a través de la historia: ¿Por qué no?

Algunas motivaciones para no utilizar la historia en didáctica:

- una disciplina científica y su historia son cosas distintas
- un enfoque histórico puede confundir los alumnos en el distinguir entre el proceso histórico y el verdadero resultado científico
- analizar los hechos históricos requiere instrumentos críticos
- todo eso requiere tiempo!!!

Enseñar a través de la historia: ¿Por qué no?

Algunas motivaciones para no utilizar la historia en didáctica:

- una disciplina científica y su historia son cosas distintas
- un enfoque histórico puede confundir los alumnos en el distinguir entre el proceso histórico y el verdadero resultado científico
- analizar los hechos históricos requiere instrumentos críticos
- todo eso requiere tiempo!!!

Estas objeciones tienen sus fundamentos, pero suponen la enseñanza de la historia de la ciencia y no simplemente su integración con la normal actividad didáctica: por ese motivo creemos que es importante tenerlas presente como recomendaciones pero no como vínculos.

Enseñar a través de la historia: ¿Por qué sí?

Antes de mostrar por medio de unos ejemplos como la historia de una disciplina científica puede ayudar la didáctica de esa disciplina, queremos enumerar unos puntos importantes:

- la historia ayuda a humanizar los conceptos

Enseñar a través de la historia: ¿Por qué sí?

Antes de mostrar por medio de unos ejemplos como la historia de una disciplina científica puede ayudar la didáctica de esa disciplina, queremos enumerar unos puntos importantes:

- la historia ayuda a humanizar los conceptos
- la historia provee a motivar los resultados científicos

Enseñar a través de la historia: ¿Por qué sí?

Antes de mostrar por medio de unos ejemplos como la historia de una disciplina científica puede ayudar la didáctica de esa disciplina, queremos enumerar unos puntos importantes:

- la historia ayuda a humanizar los conceptos
- la historia provee a motivar los resultados científicos
- la historia hace mirar a la ciencia como al resultado de un proceso

Enseñar a través de la historia: ¿Por qué sí?

Antes de mostrar por medio de unos ejemplos como la historia de una disciplina científica puede ayudar la didáctica de esa disciplina, queremos enumerar unos puntos importantes:

- la historia ayuda a humanizar los conceptos
- la historia provee a motivar los resultados científicos
- la historia hace mirar a la ciencia como al resultado de un proceso
- la historia muestra como los paradigmas científicos son provisionales y no definitivos

Enseñar a través de la historia: ¿Por qué sí?

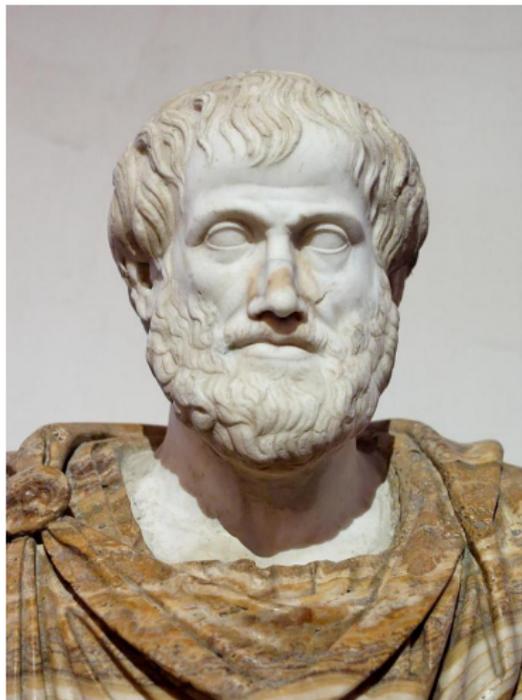
Antes de mostrar por medio de unos ejemplos como la historia de una disciplina científica puede ayudar la didáctica de esa disciplina, queremos enumerar unos puntos importantes:

- la historia ayuda a humanizar los conceptos
- la historia provee a motivar los resultados científicos
- la historia hace mirar a la ciencia como al resultado de un proceso
- la historia muestra como los paradigmas científicos son provisionales y no definitivos

Estos puntos son relevantes no solo por los alumnos pero también por los docentes

Humanizar los conceptos: el hombre como animal social

La ciencia es un fenómeno colectivo, sin comunicación no hay progreso científico y una prueba de eso es que con frecuencia una misma idea científica emerge por diversos científicos, que, según Aristóteles (384-322 a.C.) son animales sociales, como todos los hombres



Humanizar los conceptos: el fingido hombre de Piltdown

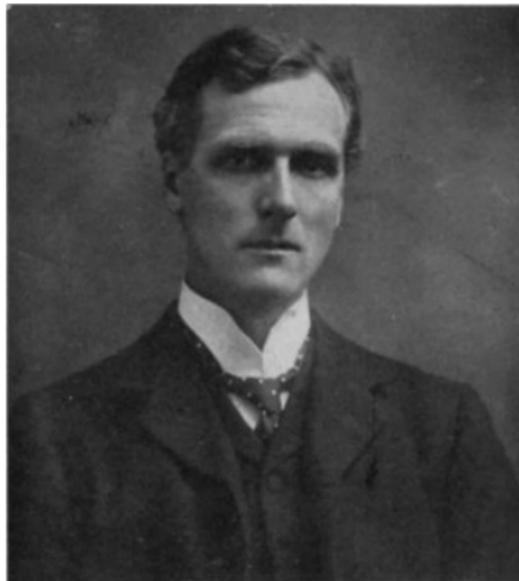
A principio del siglo XX se habían hallado muchos fósiles de hombres prehistóricos, en Asia (*Homo erectus*) y en Europa (*Homo sapiens neandertalensis*): faltava un fósil en el Reino Unido, una super-potencia de la época. Así alguien produjo una broma, mezclando huesos de hombres medievales, orangután y chimpancé y “los hecho descubrir” cerca de Piltdown (East Sussex, Inglaterra)



Humanizar los conceptos: el fingido hombre de Piltdown

Eminentes científicos, como Sir Arthur Keith (1866-1955), esperando haber finalmente hallado un hombre prehistórico inglés, crearon por cuarenta años que el fingido *hombre di Piltdown* había realmente existido

También influyó la idea que la historia del Hombre era mucho antigua de lo que hoy sabemos que es. Keith fue uno de los máximos antropólogos de su época



Humanizar los conceptos: los científicos son hombres de carne y hueso

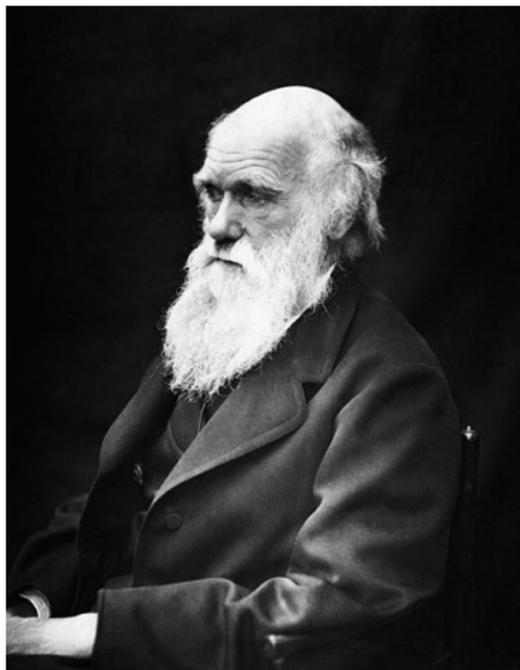
La ciencia es un fenómeno humano, hecha por *hombres de carne y hueso* como decía Miguel de Unamuno (1864-1936) hablando de los filósofos: en cuanto humanos, los científicos son sujetos a los sentimientos, modas y también perjuicios de su época y de su ambiente cultural (pronto veremos unos ejemplos)



Humanizar los conceptos: la teoría de la evolución

No se puede separar la teoría de la evolución de Charls Darwin (1809-92) de su historia y sobre todo de todas las polémicas que, hace mas que 150 años, la acompañan

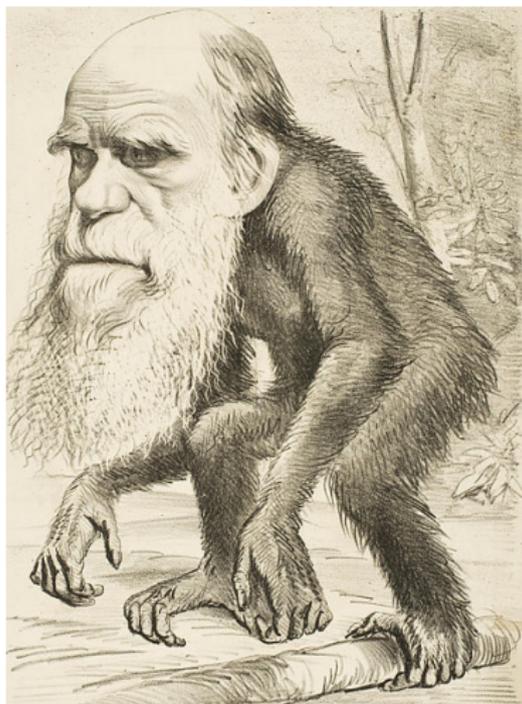
En particular la teoría fue hallada también por Alfred Russell Wallace (1823-1913), como el mismo Darwin reconoció, y tuvo muchos precursores, como Jean Baptiste Lamarck (1744-1829)



Humanizar los conceptos: la teoría de la evolución

No se puede separar la teoría de la evolución de Charls Darwin (1809-92) de su historia y sobre todo de todas las polémicas que, hace mas que 150 años, la acompañan

En particular la teoría fue hallada también por Alfred Russell Wallace (1823-1913), como el mismo Darwin reconoció, y tuvo muchos precursores, como Jean Baptiste Lamarck (1744-1829)



La teoría de Darwin y la de Galileo han causado muchas polémicas, que perduran aún hoy en el caso de la evolución: estas polémicas vieron la oposición de las autoridades religiosas y del pensamiento más conservador de sus épocas. Pero hay también casos de polémicas entre científicos, por ejemplo en relación a la verdad de una hipótesis o a la prioridad de una descubierta. Se analizen por ejemplo la muchas polémicas en la matemática del siglo XVII sobre la cuadratura de la cicloide (entre Pascal, Roberval y Torricelli) y sobre la descubierta del cálculo infinitesimal (entre Newton y Leibniz), en la óptica de apasionar los alumnos: ¿Cómo puede hacerse sin caer en el *gossip*?

Motivar los resultados científicos

Al enseñar un resultado científico, por ejemplo un teorema, el alumno siempre tiene la impresión que la natura del resultado sea inseparable del contexto lógico en el cual es expuesto

Motivar los resultados científicos

Al enseñar un resultado científico, por ejemplo un teorema, el alumno siempre tiene la impresión que la natura del resultado sea inseparable del contexto lógico en el cual es expuesto

Colocar un resultado científico en el contexto histórico que lo ha engendrado puede fornir otras motivaciones y mostrar otras interpretaciones que ayudan a comprender mejor el resultado

Motivar los resultados científicos

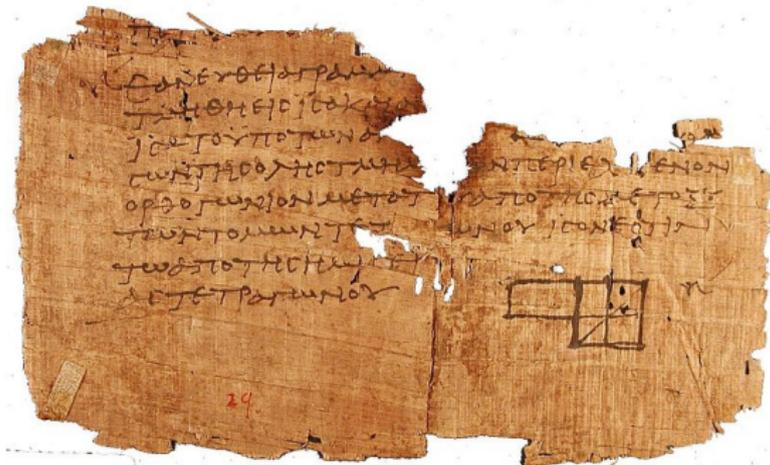
Al enseñar un resultado científico, por ejemplo un teorema, el alumno siempre tiene la impresión que la natura del resultado sea inseparable del contexto lógico en el cual es expuesto

Colocar un resultado científico en el contexto histórico que lo ha engendrado puede fornir otras motivaciones y mostrar otras interpretaciones que ayudan a comprender mejor el resultado

En otras palabras: el contexto histórico puede ayudar a mostrar diferentes perspectivas por un mismo concepto

Motivar los resultados científicos: el teorema de Pitágoras

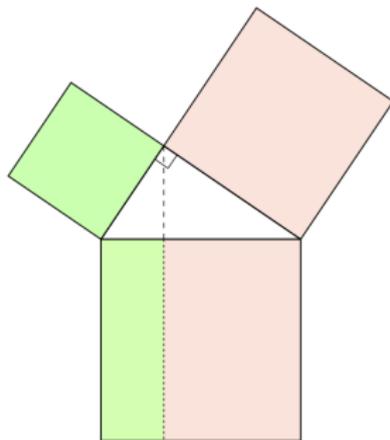
A despecho del nombre, el teorema de Pitágoras aparece por la primera vez en los *Elementos* de Euclides, del cual practicamente nada se sabe sino el nombre y que probablemente vivió en Alejandria



(uno de los raros fragmentos griegos de la obra de Euclides)

Motivar los resultados científicos: el teorema de Pitágoras

Usualmente se introduce este teorema como consecuencia de un teorema de Euclides:



Esta es una demostración que supone la geometría euclidiana, desarrollada por Euclides en la época helenística (III siglo a.C.)

Motivar los resultados científicos: el teorema de Pitágoras

Pero...

Motivar los resultados científicos: el teorema de Pitágoras

Pero...

El teorema de Pitágoras, del cual no hay ningún indicio que Pitágoras lo haya enunciado o demostrado, es mucho más antiguo

Motivar los resultados científicos: el teorema de Pitágoras

Pero...

El teorema de Pitágoras, **del cual no hay ningún indicio que Pitágoras lo haya enunciado o demostrado**, es mucho más antiguo



Esta es una tablilla cuneiforme que enumera unas *ternas pitagóricas*, o sea ternas (a, b, c) de enteros tales que $a^2 + b^2 = c^2$ (1800 a.C.)

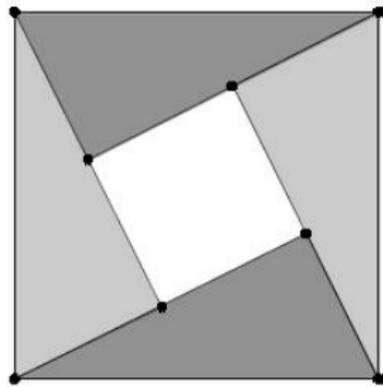
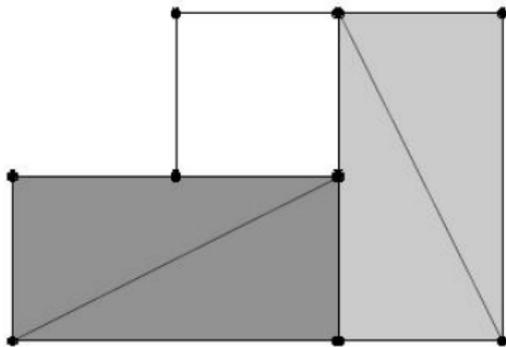
Motivar los resultados científicos: el teorema de Pitágoras

Las ternas pitagóricas y el teorema de Pitágoras aparecen en los *Shulba Sutras*, textos del período vedico de la India (1500-500 a.C.) por la construcción de altares

Motivar los resultados científicos: el teorema de Pitágoras

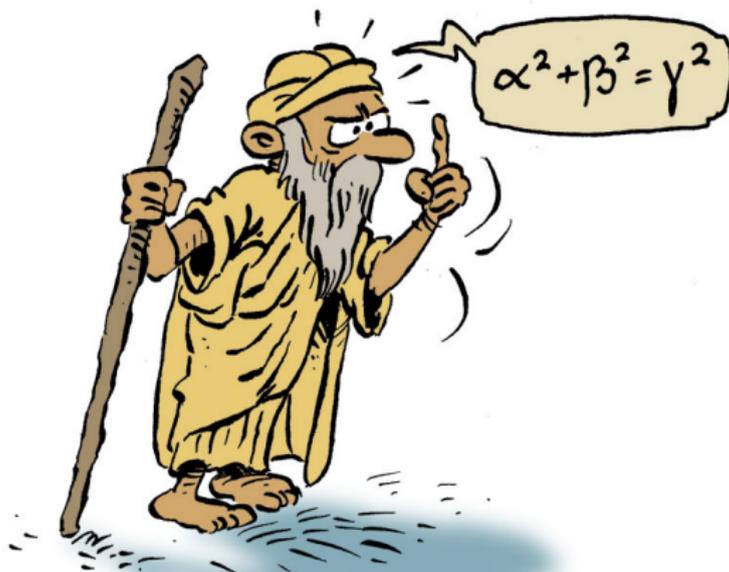
Las ternas pitagóricas y el teorema de Pitágoras aparecen en los *Shulba Sutras*, textos del período vedico de la India (1500-500 a.C.) por la construcción de altares

Una demostración simple es debida al indio Bhaskara (1114-1185)



Motivar los resultados científicos: el teorema de Pitágoras

Ahora no es raro decir que el teorema de Pitágoras es un resultado fundamental y fascinante, y no simplemente una consecuencia de un teorema de geometría euclidiana (aun si Pitágoras no tiene nada que ver con este teorema)



La ley de gravitación universal de Newton (1642-1727) tiene su motivación histórica fue de justificar las leyes de Kepler (1571-1630) del moto planetario, y la formulación newtoniana es directamente inspirada por la teoría kepleriana que, a su vez, fue originada en el intento de explicar la hipótesis de Copérnico (1473-1543). Se analice como presentar ese proceso histórico para fornir una motivación de la teoría newtoniana.



Provisionalidad de los paradigmas científicos

La ciencia no procede simplemente por teorías, pero por paradigmas: un concepto aclarado por Thomas Kuhn (1922-1996) en su famoso libro *La estructura de las revoluciones científicas* (1962), cuya motivación es comprender unos mecanismos de la historia de la ciencia

Los paradigmas científicos, aún si entendidos en un sentido más amplio, son sujetos a decaer y ser substituidos por otros, a través de las revoluciones: todos paradigmas son provisionales



Provisionalidad de los paradigmas científicos

No hay teorías definitivas, tampoco en matemática: aun si los teoremas correctamente demostrados no podrían nunca ser refutados, pueden ser generalizados y los axiomas de los cuales dependen pueden ser cambiados

Provisionalidad de los paradigmas científicos

No hay teorías definitivas, tampoco en matemática: aun si los teoremas correctamente demostrados no podrían nunca ser refutados, pueden ser generalizados y los axiomas de los cuales dependen pueden ser cambiados

Por ejemplo la geometría no euclidiana no contradice la geometría euclidiana, pero simplemente utiliza axiomas diferentes. Ambas son teorías geométricas correctas

Provisionalidad de los paradigmas científicos

No hay teorías definitivas, tampoco en matemática: aun si los teoremas correctamente demostrados no podrían nunca ser refutados, pueden ser generalizados y los axiomas de los cuales dependen pueden ser cambiados

Por ejemplo la geometría no euclidiana no contradice la geometría euclidiana, pero simplemente utiliza axiomas diferentes. Ambas son teorías geométricas correctas

En el caso de las teorías físicas, las nuevas teorías usualmente extienden las viejas y son válidas por mejores aproximaciones de las medidas experimentales

Provisionalidad de los paradigmas científicos

No hay teorías definitivas, tampoco en matemática: aun si los teoremas correctamente demostrados no podrían nunca ser refutados, pueden ser generalizados y los axiomas de los cuales dependen pueden ser cambiados

Por ejemplo la geometría no euclidiana no contradice la geometría euclidiana, pero simplemente utiliza axiomas diferentes. Ambas son teorías geométricas correctas

En el caso de las teorías físicas, las nuevas teorías usualmente extienden las viejas y son válidas por mejores aproximaciones de las medidas experimentales

Por ejemplo la física newtoniana es correcta por distancias no demasiado pequeñas ni demasiado grandes

Provisionalidad de los paradigmas científicos: la teoría de los cuantos

El paradigma de la mecánica de Galileo y Newton es el paradigma determinista, que fue codificado en el siglo XVIII

Podemos mirar el estado presente del universo como el efecto del pasado y la causa de su futuro. Se podría condensar un intelecto que en cualquier momento dado sabría todas las fuerzas que animan la naturaleza y las posiciones de los seres que la componen, si este intelecto fuera lo suficientemente vasto para someter los datos al análisis, podría condensar en una simple fórmula de movimiento de los grandes cuerpos del universo y del átomo más ligero; para tal intelecto nada podría ser incierto y el futuro así como el pasado estarían frente sus ojos.

P.-S. de Laplace (1749-1827)

Provisionalidad de los paradigmas científicos: la teoría de los cuantos

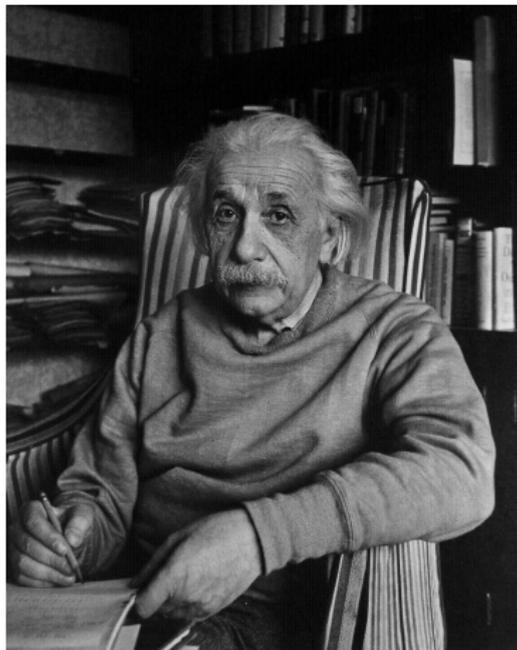


P.-S. de Laplace (1749-1827)

Provisionalidad de los paradigmas científicos: la teoría de los cuantos

No hubo teoría científica que no fuera determinista...

Aun la revolucionaria teoría de la relatividad de Albert Einstein (1879-1955) no salió del paradigma determinista



Provisionalidad de los paradigmas científicos: la teoría de los cuantos

Pero...

Provisionalidad de los paradigmas científicos: la teoría de los cuantos

Pero...

... en 1927 Werner Heisenberg (1901-76) formuló su principio de indeterminación, cuya consecuencia principal es la renuncia a la descripción espacio-temporal por una descripción probabilística



Provisionalidad de los paradigmas científicos: la teoría de los cuantos

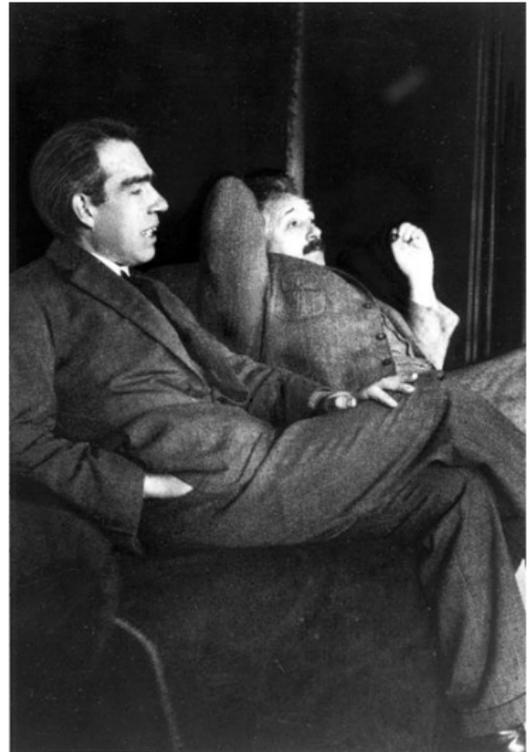
Aun si Einstein contribuyó a la teoría de los cuantos (por eso ganó su Nobel en 1921), no aceptó el cambio de paradigma que la nueva teoría impuso

Usted cree en un Dios que juega a los dados, y yo en un orden y una ley completos en un mundo que existe objetivamente, y que yo, en una forma altamente especulativa, intento capturar... ni siquiera el gran éxito inicial de la teoría cuántica me hace creer en el juego de dados fundamental, aún cuando estoy advertido que sus colegas más jóvenes lo interpretan como una consecuencia de la senilidad

Einstein en una carta a Max Born (1882-1970) del 1926

Provisionalidad de los paradigmas científicos: la teoría de los cuantos

Einstein y Niels Bohr (1885-1962) polemizaron sobre el nuevo paradigma de la mecánica cuántica, no sobre las ecuaciones o las leyes físicas



Otro caso en el cual unos científicos fueron influenciados por sus paradigmas de pensamiento es el de la geometrías no euclidiana: Girolamo Saccheri (1667-1733) y Johann Heinrich Lambert (1728-77) descubrieron un teorema de geometría iperbólica pero, no creyendo posible la existencia de tal geometría, que no entendieron el sentido de sus descubierta. Analizar la posibilidad de enseñar algo de geometría iperbólica partiendo de la “hipótesis del ángulo agudo” y siguiendo históricamente el camino hacia Nikolái Lobachevski (1792-1856)

OK, pero ¿cómo se hace?

En la práctica hay muchas y diferentes técnicas que se pueden emplear por *integrar* la historia en la didáctica. Aquí unas ideas compartidas por muchos autores

OK, pero ¿cómo se hace?

En la práctica hay muchas y diferentes técnicas que se pueden emplear por *integrar* la historia en la didáctica. Aquí unas ideas compartidas por muchos autores

- utilizar introducciones históricas

OK, pero ¿cómo se hace?

En la práctica hay muchas y diferentes técnicas que se pueden emplear por *integrar* la historia en la didáctica. Aquí unas ideas compartidas por muchos autores

- utilizar introducciones históricas
- utilizar historias y anécdotas sobre argumentos específicos

OK, pero ¿cómo se hace?

En la práctica hay muchas y diferentes técnicas que se pueden emplear por *integrar* la historia en la didáctica. Aquí unas ideas compartidas por muchos autores

- utilizar introducciones históricas
- utilizar historias y anécdotas sobre argumentos específicos
- tomar unos ejercicios de la matemática antigua

OK, pero ¿cómo se hace?

En la práctica hay muchas y diferentes técnicas que se pueden emplear por *integrar* la historia en la didáctica. Aquí unas ideas compartidas por muchos autores

- utilizar introducciones históricas
- utilizar historias y anécdotas sobre argumentos específicos
- tomar unos ejercicios de la matemática antigua
- leer fragmentos de obras antiguas, oportunamente traducidas

OK, pero ¿cómo se hace?

En la práctica hay muchas y diferentes técnicas que se pueden emplear por *integrar* la historia en la didáctica. Aquí unas ideas compartidas por muchos autores

- utilizar introducciones históricas
- utilizar historias y anécdotas sobre argumentos específicos
- tomar unos ejercicios de la matemática antigua
- leer fragmentos de obras antiguas, oportunamente traducidas
- asignar tareas sobre la vida y la obra de grandes matemáticos del pasado

OK, pero ¿cómo se hace?

En la práctica hay muchas y diferentes técnicas que se pueden emplear por *integrar* la historia en la didáctica. Aquí unas ideas compartidas por muchos autores

- utilizar introducciones históricas
- utilizar historias y anécdotas sobre argumentos específicos
- tomar unos ejercicios de la matemática antigua
- leer fragmentos de obras antiguas, oportunamente traducidas
- asignar tareas sobre la vida y la obra de grandes matemáticos del pasado
- emplear material multimedial

OK, pero ¿cómo se hace?

En la práctica hay muchas y diferentes técnicas que se pueden emplear por *integrar* la historia en la didáctica. Aquí unas ideas compartidas por muchos autores

- utilizar introducciones históricas
- utilizar historias y anécdotas sobre argumentos específicos
- tomar unos ejercicios de la matemática antigua
- leer fragmentos de obras antiguas, oportunamente traducidas
- asignar tareas sobre la vida y la obra de grandes matemáticos del pasado
- emplear material multimedial
- visitas a museos y a exposiciones

OK, pero ¿cómo se hace?

En la práctica hay muchas y diferentes técnicas que se pueden emplear por *integrar* la historia en la didáctica. Aquí unas ideas compartidas por muchos autores

- utilizar introducciones históricas
- utilizar historias y anécdotas sobre argumentos específicos
- tomar unos ejercicios de la matemática antigua
- leer fragmentos de obras antiguas, oportunamente traducidas
- asignar tareas sobre la vida y la obra de grandes matemáticos del pasado
- emplear material multimedial
- visitas a museos y a exposiciones
- buscar la etimología de los términos técnicos

Leer branos de obras antiguas... ¡oportunamente traducidas!



¿Puede la didáctica ayudar a la historia?

Hemos visto que la historia puede ser integrada en la didáctica para servir de auxilio. Pero...

¿Puede la didáctica ayudar a la historia?

Hemos visto que la historia puede ser integrada en la didáctica para servir de auxilio. Pero...

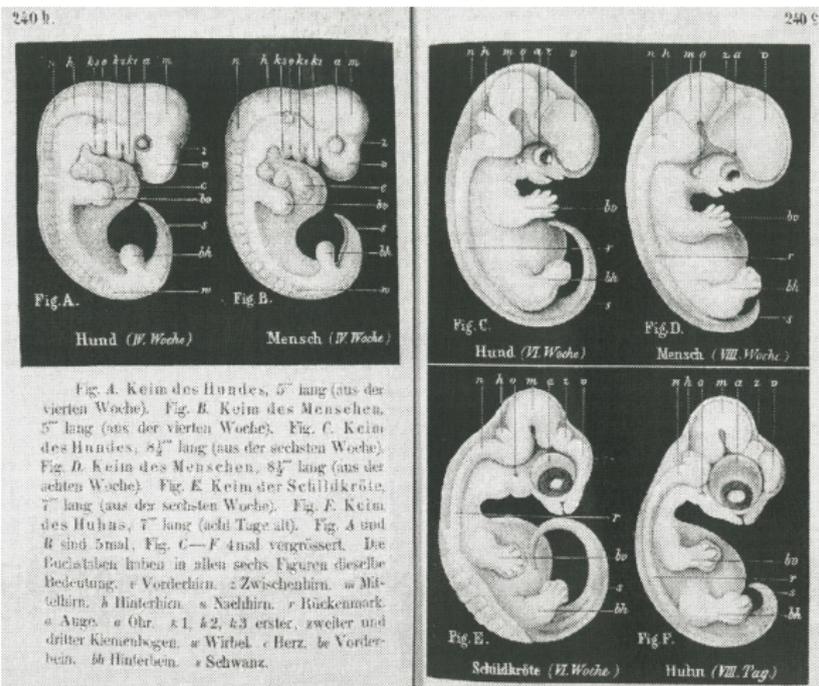
¿puede ocurrir lo contrario?

Una metáfora biológica

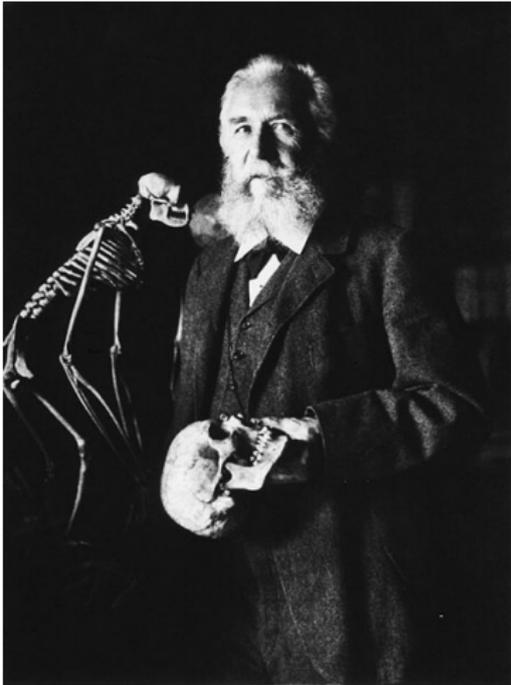
Intentamos proponer unos ejemplos inspirados por una metáfora biológica, la ley de Haeckel:

Una metáfora biológica

Intentamos proponer unos ejemplos inspirados por una metáfora biológica, la ley de Haeckel: **la ontogenia recapitula la filogenia**



Formulación biológica (¡jerrada!): Ernst Haeckel (1834-1919)



En verdad la teoría de la recapitulación no es biológicamente fundada... pero aquí la utilizamos cómo metáfora histórica

Formulación histórica: Giambattista Vico (1668-1774)

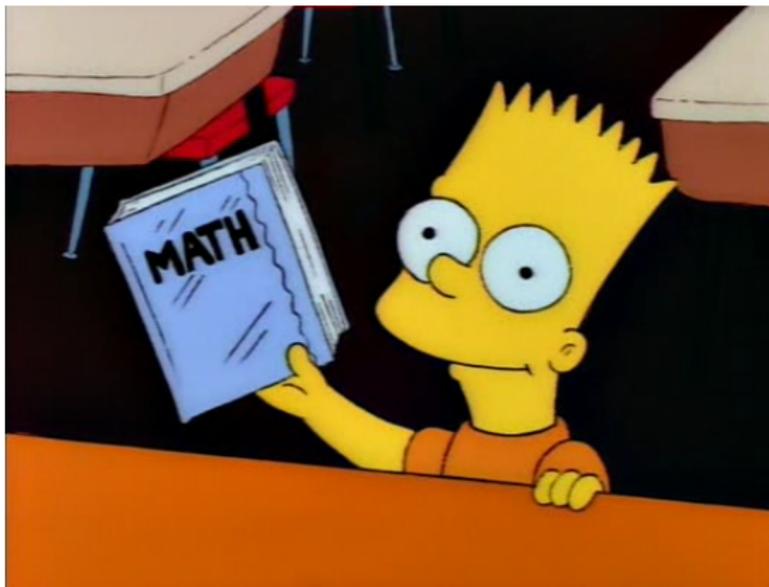




Epistemología genética

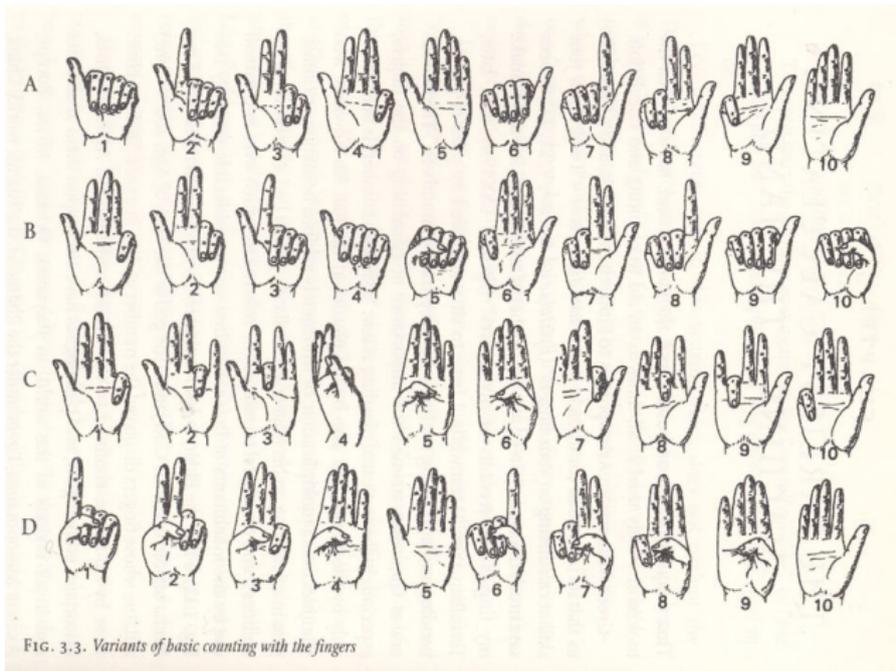
Ejemplo: el desarrollo del concepto de número

¿Pueden las teorías cognitivas y didácticas sobre el desarrollo del concepto de número en el niño sugerir algo sobre la historia de los sistemas de numeración?



Ejemplo: cálculos prehistóricos e infantiles

El primer sistema de numeración empleava partes del cuerpo...



Ejemplo: cálculos prehistóricos e infantiles

... luego se empleó la “base uno”...



Hueso de Ishango, hace 35.000 años

Ejemplo: cálculos prehistóricos e infantiles

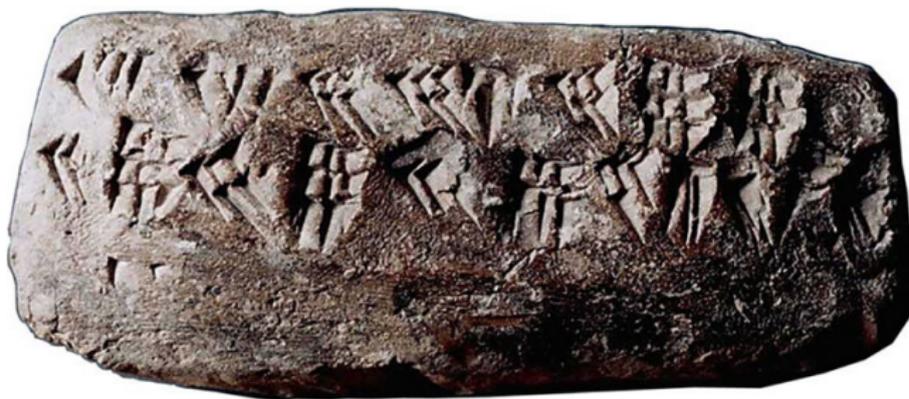
... y aún sistemas posicionales...



Quipu, hace 3.000 años (civilizaciones andinas)

Ejemplo: numeración y escritura

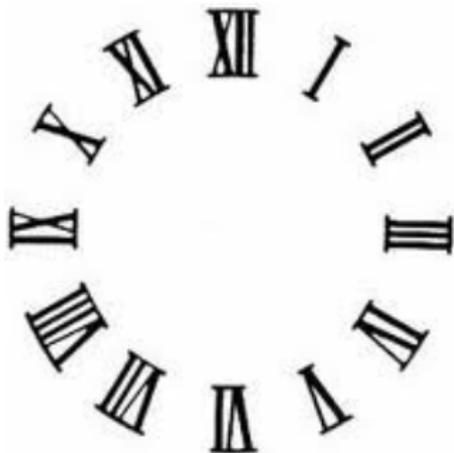
... hacia la invención de símbolos y de la escritura...



Números sumeros, hace 5.000 años

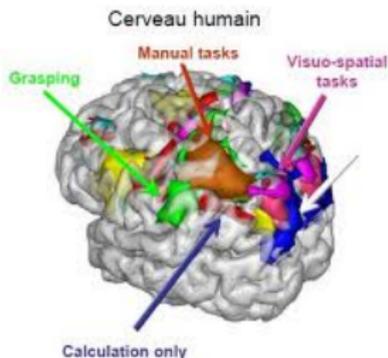
Ejemplo: numeración y escritura

... y luego los numerales que empleamos aún hoy



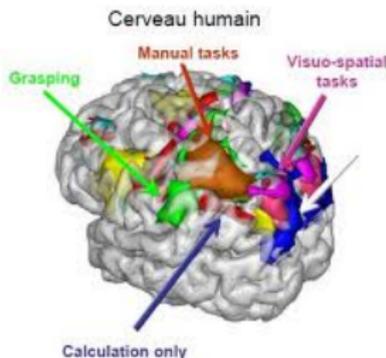
Ejemplo: no se parte de una *tabula rasa*

A pesar de unas concepciones de Piaget, hoy los neurólogos han hallado una área del cerebro que nos da un “instinto numérico”



Ejemplo: no se parte de una *tabula rasa*

A pesar de unas concepciones de Piaget, hoy los neurólogos han hallado una área del cerebro que nos da un “instinto numérico”



Por lo tanto los números son producidos por la evolución y no por la cultura (Deheane): hay una filogenia de los números

Ejemplo: no se parte de una *tabula rasa*

Utilizando la metáfora se podría comprender como se ha desarrollado el concepto de número en la historia mirando al aprendizaje de los niños

Ejemplo: no se parte de una *tabula rasa*

Utilizando la metáfora se podría comprender como se ha desarrollado el concepto de número en la historia mirando al aprendizaje de los niños

Por ejemplo:

- se pueden aprender los números antes de escribirlos
- el cero no es un concepto inmediato
- los algoritmos de cálculo son largamente basados sobre la manipulación simbólica
- ...

Ejemplo: no se parte de una *tabula rasa*

Utilizando la metáfora se podría comprender como se ha desarrollado el concepto de número en la historia mirando al aprendizaje de los niños

Por ejemplo:

- se pueden aprender los números antes de escribirlos
- el cero no es un concepto inmediato
- los algoritmos de cálculo son largamente basados sobre la manipulación simbólica
- ...

Todo eso puede ayudar la interpretación de la larga historia de los números

Bruno D'Amore, en su artículo *La argumentación matemática de jóvenes alumnos y la lógica hindú (nyaya)*, Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 38 (2005), 83-99, analiza unos razonamientos “errados” por alumnos de la escuela secundaria, que no son lógicamente correctos según la lógica aristotélica “occidental”, pero que lo son por la lógica hindú *naya*, fuertemente empírica, que se opone al budismo en los primeros siglos d.C. ¿Qué implicaciones podría tener esta observación por el estudio del desarrollo de la lógica griega (teniendo presente que sea griegos sea los indios tienen etnológicamente un origen común)?

(véase <http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/517%20logica%20nyaya%20spagnola.pdf>)

Ontogenia de los errores

Otra aplicación de la metáfora ontogenia/filogenia es en la consideración de los errores de los científicos

Ontogenia de los errores

Otra aplicación de la metáfora ontogenia/filogenia es en la consideración de los errores de los científicos

En particular, ¿cuánto las ideas preconcebidas influyen sobre la actividad de un científico? ¿Cómo juzgar los tales errores de perspectiva, como por ejemplo la broma de Piltdown?

Ontogenia de los errores

Otra aplicación de la metáfora ontogenia/filogenia es en la consideración de los errores de los científicos

En particular, ¿cuánto las ideas preconcebidas influyen sobre la actividad de un científico? ¿Cómo juzgar los tales errores de perspectiva, como por ejemplo la broma de Piltdown?

Hay quien en su trabajo cotidiano se ocupa de analizar y corregir errores de varia natura, y también ligados a ideas preconcebidas: ¡los profesores!

Ontogenia de los errores

Otra aplicación de la metáfora ontogenia/filogenia es en la consideración de los errores de los científicos

En particular, ¿cuánto las ideas preconcebidas influyen sobre la actividad de un científico? ¿Cómo juzgar los tales errores de perspectiva, como por ejemplo la broma de Piltdown?

Hay quien en su trabajo cotidiano se ocupa de analizar y corregir errores de varia natura, y también ligados a ideas preconcebidas: ¡los profesores!

El historiador de la ciencia puede así beneficiar de la experiencia práctica para comprender los mecanismos de descubierta de conceptos en presencia de ideas preconcebidas

Ejemplo: ontogenia del error

John D. Bransford en varios libros sugiere que:

Ejemplo: ontogenia del error

John D. Bransford en varios libros sugiere que:

- los alumnos no parten de una *tabula rasa* pero poseen ideas y conceptos, en analogía a cuanto Francis Bacon (1561-1626) dijo con su teoría de los ídolos

Ejemplo: ontogenia del error

John D. Bransford en varios libros sugiere que:

- los alumnos no parten de una *tabula rasa* pero poseen ideas y conceptos, en analogía a cuanto Francis Bacon (1561-1626) dijo con su teoría de los ídolos
- los alumnos no substituyen simplemente los conceptos conocidos con conceptos nuevos (como hace una computadora) pero los integran y modifican

Ejemplo: ontogenia del error

John D. Bransford en varios libros sugiere que:

- los alumnos no parten de una *tabula rasa* pero poseen ideas y conceptos, en analogía a cuanto Francis Bacon (1561-1626) dijo con su teoría de los ídolos
- los alumnos no substituyen simplemente los conceptos conocidos con conceptos nuevos (como hace una computadora) pero los integran y modifican
- el aprendizaje es influenciado por el ambiente social de los alumnos

Ejemplo: ontogenia del error

John D. Bransford en varios libros sugiere que:

- los alumnos no parten de una *tabula rasa* pero poseen ideas y conceptos, en analogía a cuanto Francis Bacon (1561-1626) dijo con su teoría de los ídolos
- los alumnos no substituyen simplemente los conceptos conocidos con conceptos nuevos (como hace una computadora) pero los integran y modifican
- el aprendizaje es influenciado por el ambiente social de los alumnos
- comprender un concepto científico no es simplemente imparar unos hechos, pero colocarlos en un esquema conceptual

Ejemplo: filogenia del error

Esas observaciones pueden ser de ayuda para comprender procesos históricos:

Ejemplo: filogenia del error

Esas observaciones pueden ser de ayuda para comprender procesos históricos:

- los científicos del pasado no veían el mundo como nosotros hoy día: creían en la astrología, alquimia, en la superioridad de una raza sobre una otra, etc.

Ejemplo: filogenia del error

Esas observaciones pueden ser de ayuda para comprender procesos históricos:

- los científicos del pasado no veían el mundo como nosotros hoy día: creían en la astrología, alquimia, en la superioridad de una raza sobre una otra, etc.
- los científicos no substituyen simplemente los viejos conceptos con los nuevos, ma tienden de manera natural a integrar y modificar

Ejemplo: filogenia del error

Esas observaciones pueden ser de ayuda para comprender procesos históricos:

- los científicos del pasado no veían el mundo como nosotros hoy día: creían en la astrología, alquimia, en la superioridad de una raza sobre una otra, etc.
- los científicos no substituyen simplemente los viejos conceptos con los nuevos, ma tienden de manera natural a integrar y modificar
- el proceso de descubierta era influenciado por el ambiente social en el cual vivían

Ejemplo: filogenia del error

Esas observaciones pueden ser de ayuda para comprender procesos históricos:

- los científicos del pasado no veían el mundo como nosotros hoy día: creían en la astrología, alquimia, en la superioridad de una raza sobre una otra, etc.
- los científicos no substituyen simplemente los viejos conceptos con los nuevos, ma tienden de manera natural a integrar y modificar
- el proceso de descubierta era influenciado por el ambiente social en el cual vivían
- sus descubiertas tienen que ser encuadradas en sus propios esquemas conceptuales y mentales

¿Cuánto influjo la concepción religiosa de la Inglaterra del siglo XIX sobre la aceptación de la teoría de Darwin? Aún hoy en unos países mucha gente no la acepta y adopta una concepción creacionista. Algunos estudios sugieren que las personas que no tienen prejuicios creacionistas tienden a desarrollar una concepción lamarckiana del evolucionismo. Discutir las implicaciones didácticas y si esa observación se podría utilizar para interpretar la complicada historia de la teoría de la evolución

(véase <http://homepage.mac.com/vtalsma/misconcept.html> por una interesante lista de errores comunes de los alumnos)

También los historiadores se equivocan

El estudio de los procesos de aprendizaje puede ser de utilidad a los historiadores para no incurrir en errores de interpretación, proyectando sus mentalidad sobre los científicos del pasado

También los historiadores se equivocan

El estudio de los procesos de aprendizaje puede ser de utilidad a los historiadores para no incurrir en errores de interpretación, proyectando sus mentalidad sobre los científicos del pasado

Un ejemplo es el “álgebra geométrica”, término acuñado por Hieronymus Georg Zeuthen (1839-1920) en 1866, por el segundo libro de los *Elementos* de Euclides. Ya Paul Tannery (1843-1904) había hablado en 1882 de proposiciones algebraicas bajo forma geométrica

También los historiadores se equivocan

El estudio de los procesos de aprendizaje puede ser de utilidad a los historiadores para no incurrir en errores de interpretación, proyectando sus mentalidad sobre los científicos del pasado

Un ejemplo es el “álgebra geométrica”, término acuñado por Hieronymus Georg Zeuthen (1839-1920) en 1866, por el segundo libro de los *Elementos* de Euclides. Ya Paul Tannery (1843-1904) había hablado en 1882 de proposiciones algebraicas bajo forma geométrica

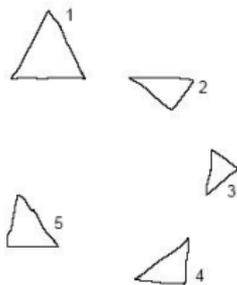
Aunque es cierto que los enunciados de esas proposiciones pueden traducirse con facilidad a enunciados algebraicos, desde ningún otro punto de vista puede calificarse esa parte del texto euclídeo de algebraico

Tannery y Zeuthen



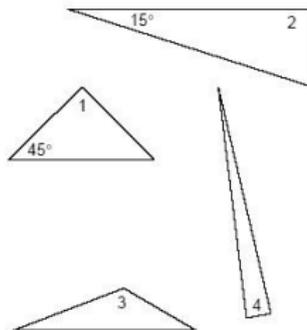
La distinción entre geometría y álgebra

La formación de los conceptos geométricos procede de la intuición espacial



Bud, Grade 5

- Triangle 1 was "straight up."
- Triangle 2 was "upside down."
- Triangle 3 was "pointing way down."
- Triangle 4 was "pointing way to the left."
- Triangle 5 "has crooked lines."



Amy, Grade 8

- "Triangle 2 has a smaller angle than triangle 1."
- "Triangle 1 has a 45-degree angle."
- "Triangle 2 has a 15-degree angle."
- "Triangle 3 has a wider angle than triangles 1 and 2."
- "Triangle 4 has a 90-degree angle and a really small angle."

(véase: Van de Walle, John A, *Geometric Thinking and Geometric Concepts*, in *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, 4th ed. Boston: Allyn and Bacon, 2001.)

La teoría de Van Hiele

Tiene su origen en 1957, en las disertaciones doctorales de Dina van Hiele-Geldof y Pierre van Hiele (Universidad de Utrecht), y explica el aprendizaje de la geometría según unos niveles

La teoría de Van Hiele

Tiene su origen en 1957, en las disertaciones doctorales de Dina van Hiele-Geldof y Pierre van Hiele (Universidad de Utrecht), y explica el aprendizaje de la geometría según unos niveles

Estos niveles no van asociados a la edad, y cumplen las siguientes características:

- Los niveles son secuenciales: no se puede alcanzar el nivel n sin haber pasado por nivel anterior $n - 1$
- En cada nivel de pensamiento, lo que era implícito, en el nivel siguiente se vuelve explícito
- Cada nivel tiene su lenguaje utilizado y su significatividad de los contenidos
- Dos alumnos con distinto nivel no pueden entenderse

(Algunos autores no aceptan el primer principio)

Estos niveles no van asociados a la edad, y cumplen las siguientes características:

- 1 Visualización: los objetos son identificados con sus formas (propiedades de un objeto)

Estos niveles no van asociados a la edad, y cumplen las siguientes características:

- 1 Visualización: los objetos son identificados con sus formas (propiedades de un objeto)
- 2 Análisis: los objetos son agrupados en clases de formas (propiedades de una forma)

Estos niveles no van asociados a la edad, y cumplen las siguientes características:

- 1 Visualización: los objetos son identificados con sus formas (propiedades de un objeto)
- 2 Análisis: los objetos son agrupados en clases de formas (propiedades de una forma)
- 3 Deducción informal: las propiedades de las formas son clasificadas

La teoría de Van Hiele

Estos niveles no van asociados a la edad, y cumplen las siguientes características:

- 1 Visualización: los objetos son identificados con sus formas (propiedades de un objeto)
- 2 Análisis: los objetos son agrupados en clases de formas (propiedades de una forma)
- 3 Deducción informal: las propiedades de las formas son clasificadas
- 4 Deducción formal: se formulan las teorías axiomáticas

La teoría de Van Hiele

Estos niveles no van asociados a la edad, y cumplen las siguientes características:

- 1 Visualización: los objetos son identificados con sus formas (propiedades de un objeto)
- 2 Análisis: los objetos son agrupados en clases de formas (propiedades de una forma)
- 3 Deducción informal: las propiedades de las formas son clasificadas
- 4 Deducción formal: se formulan las teorías axiomáticas
- 5 Rigor: se formulan propiedades de diferentes teorías axiomáticas

La teoría de Van Hiele

Estos niveles no van asociados a la edad, y cumplen las siguientes características:

- 1 Visualización: los objetos son identificados con sus formas (propiedades de un objeto)
- 2 Análisis: los objetos son agrupados en clases de formas (propiedades de una forma)
- 3 Deducción informal: las propiedades de las formas son clasificadas
- 4 Deducción formal: se formulan las teorías axiomáticas
- 5 Rigor: se formulan propiedades de diferentes teorías axiomáticas

Algunos autores proponen también un nivel 0, en el cual no se posee una capacidad completa de distinguir entre formas diferentes (por ejemplo entre un rombo y un paralelogramo)

Volviendo al álgebra geométrica: pasando de la ontogenia a la filogenia, se puede imaginar una estructuración en niveles por el desarrollo de las teorías geométricas: el nivel del rigor se alcanzó solo con René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665) que propusieron la geometría analítica (aún si unos griegos como Apolonio de Perge (III siglo a.C.) la habían preconizada)

Niveles históricos

Volviendo al álgebra geométrica: pasando de la ontogenia a la filogenia, se puede imaginar una estructuración en niveles por el desarrollo de las teorías geométricas: el nivel del rigor se alcanzó solo con René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665) que propusieron la geometría analítica (aún si unos griegos como Apolonio de Perge (III siglo a.C.) la habían preconizada)

La interpretación algebraica de los conceptos geométricos requiere un nivel ulterior, y no sorprende que en el siglo XIX esa interpretación fue considerada *obvia* por Tannery y Zeuthen

Niveles históricos

Volviendo al álgebra geométrica: pasando de la ontogenia a la filogenia, se puede imaginar una estructuración en niveles por el desarrollo de las teorías geométricas: el nivel del rigor se alcanzó solo con René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665) que propusieron la geometría analítica (aún si unos griegos como Apolonio de Perge (III siglo a.C.) la habían preconizado)

La interpretación algebraica de los conceptos geométricos requiere un nivel ulterior, y no sorprende que en el siglo XIX esa interpretación fue considerada *obvia* por Tannery y Zeuthen

No se trata de paragonar los antiguos a los niños, pero de reconocer que conceptos que hoy aprendimos a la escuela, y por lo tanto nos parecen obvios y descontados, son el resultado de una lenta evolución

Árpád Szabó (1913-2001) y Sabetai Unguru (1931-) publicaron libros y artículos que criticaban como falaz el álgebra geométrica: siguió una polémica con otros y mas tradicionalistas históricos de la matemática, como Bertel van der Waerden (1903-1996) y André Weil (1906-1998)

On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics

SABETAI UNGURU

Communicated by W. HARTNER

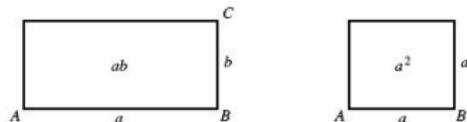
'History is the most fundamental science, for there is no human knowledge which cannot lose its scientific character when men forget the conditions under which it originated, the questions which it answered, and the function it was created to serve. A great part of the mysticism and superstition of educated men consists of knowledge which has broken loose from its historical moorings.'

BENJAMIN FARRINGTON¹

¿O no? [D.M. Burton *The History of Mathematics: An Introduction*, 2006.]

Book II on Geometric Algebra

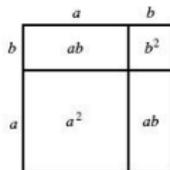
Book II of the *Elements* could be called a treatise on geometric algebra, because it is algebraic in substance but geometric in treatment. Algebraic problems are cast entirely in geometric language and solved by geometric methods. Lacking any adequate algebraic symbolism, Euclid found it necessary to represent numbers by line segments.



Thus, the product ab (as we write it) of two numbers is thought of as the area of a rectangle with sides whose lengths are the two numbers a and b . Euclid referred to the product as the “rectangle contained by $AB = a$ and $BC = b$ ”; in place of a^2 , he spoke of “the square on AB .” Various algebraic identities, even complicated ones, were presented by Euclid in purely geometric form. For instance, the identity

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

was pictured in terms of the diagram



and was quaintly stated in Proposition 4 of Book II as: “If a straight line be cut at random

¡Muchas gracias!

AAVV, *Historical Topics for the Mathematical Classroom*, National Council of Teachers of Mathematics, 1969.

Acerbi F., *Il silenzio delle sirene. La matematica greca antica*, Carocci, 2010.

Amaldi U., Enriques F., *Elementi di geometria*, Zanichelli, 1903.

Bagni G., *Eulero e la didattica della matematica*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 31B, 1, (2008), 9-28.

Barbin E., Kronfeller M., Tzanakis C., (ed.) *History and Epistemology in Mathematics Education. Proceedings of the Sixth European Summer University*, Holzhausen, 2011.

Biehler R. et al., *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Kluwer, 1994.

Bocheński J.M., *La logica formale* vol.2, Einaudi, 1972, tr. it. di *Formale logik*, Karl Alber, 1956.

Born M., Einstein, *Scienza e vita. Lettere 1916-1955*, Boringhieri, 1973, tr. it. di *Briefwechsel 1916-1955*, Nymphenburger, 1969.

Bourbaki N., *Éléments d'histoire des mathématiques.*, Hermann, 1960.

Bransford J.D., Donovan S.M., *Scientific Inquiry and How People Learn*, in Bransford J.D., Donovan S.M., (eds.) *How Student Learn*, The National Academic Press, 1960.

Bransford J., Brown A., Cocking R., *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School*, National Academy Press, 1999.

Caressa P., *Piccola storia della matematica*, 1, Alphatest, 2012.

Caressa P., *Piccola storia della matematica*, 2, Alphatest, 2010.

D'Amore B., *L'argomentazione matematica di allievi di scuola secondaria e la logica indiana (nyaya)*, *La matematica e la sua didattica*, 4 (2005) 481-500.

Deheane S., *Il pallino della matematica*, Raffaello Cortina, 2010, tr. it. di *La bosse des maths : Quinze ans après*, Odile Jacob, 2010.

Dibattista L., *Storia della scienza e didattica delle discipline scientifiche*, Armando, 2009.

Doplicher S., *Scienza e conoscenza, etica e cultura: la prospettiva della fisica*, *La Matematica nella Società e nella Cultura*, 3 (2010), 271-309.

Duhem P., *La théorie physique, son objet, sa structure*, Chevalier&Rivière, 1906.

Einstein A., *Teoria dei quanti di luce*, Newton-Compton, 1972, tr. it. di *Die Hypothese der Lichtquanten*, Battenberg, 1965.

Einstein A., Infeld L., *The Evolution of Physics*, Cambridge UP, 1938.

Fauvel J., van Maanen J. (ed.), *History in mathematics education: An ICMI study*, Kluwer, 2000.

Flick L.B., Lederman N.G. (ed.), *Scientific Inquiry and Nature of Science. Implications for Teaching, Learning, and Teacher Education*, Springer, 2006.

Freudenthal H., *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Kluwer, 1999.

Girelli L., *Noi e i numeri*, Il Mulino, 2006.

Gould S.J., *Ontogeny and Phylogeny*, Harvard UP, 1977.

Guerraggio A., Nastasi P. (ed.), *Gentile e i matematici italiani. Lettere 1907-1913*, Boringhieri, 1993.

Heisenberg W., *Mutamenti nelle basi della scienza*, Boringhieri, 1978, tr. it. di *Wundlungen in den Grundlagen der Naturwissenschaft*, Hirzel, 1959.

Ifrah G., *Storia universale dei numeri*, Mondadori, 1983, trad. it. di *Histoire universelle des Chiffres*, Seghers, 1981.

Infeld L., *Introduzione alla fisica moderna*, Editori Riuniti, 1972, trad. it. di *Nowe Drogi Nauki*, Mathesis Polska, 1957.

Jablonka E., Lamb M., *Evolution in Four Dimensions. Genetic, Epigenetic, Behavioral, and Symbolic Variation in the History of Life*, MIT.

Kaizinger A., *The mathematics in the structures of Stonehenge*, Arch. Hist. Exact Sci. 65 (2011), 67-97

Lecourt D., *Dictionnaire d'histoire et philosophie des sciences*, PUF, 2006.

Mach E., *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico*, Boringhieri, 1992, tr. it. di *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch-dargestellt*, 1883.

Miller, J.D., Scott, E.C., Okamoto, S., *Public acceptance of evolution*, *Science*, 313 (2006), 765-766.

Piaget J., *La géométrie spontanée de l'enfant*, PUF, 1948.

Piaget J., *L'épistémologie génétique*, PUF, 1970.

Swetz F.J., *History of mathematics, overview*, in Grinstein L.S., Lipsey S.I., (ed.), *Encyclopedia of mathematics education*, Routledge Falmer, 2001, pp.316-323.

Unguru S., *On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics*,
Archive for History of Exact Sciences 15 (1975), pp. 67-114.

Van de Walle, John A, *Geometric Thinking and Geometric Concepts, in
Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*,
4th ed. Boston: Allyn and Bacon, 2001

Las imágenes son tomadas de Wikipedia

Esta obra está bajo la licencia *Reconocimiento-No Comercial 3.0 Unported* (CC BY-NC 3.0) de Creative Commons