

Formalità e varietà simplettiche

PAOLO CARESSA

Firenze, 2000

Notazioni: con *varietà* vorremo intendere *varietà infinitamente differenziabile di dimensione finita*; con $\mathfrak{X}(M)$ denoteremo lo spazio dei campi di vettori sulla varietà; con $\Omega^k(M)$ lo spazio delle k -forme differenziali sulla varietà; con $\Gamma(M, E)$ lo spazio delle sezioni di un fibrato vettoriale $E \rightarrow M$ sulla varietà; diremo *polivettori* le sezioni del fibrato $\bigwedge^* TM$. Denoteremo la contrazione di una forma φ su un campo vettoriale X come $\mathbf{i}_X \varphi$; allo stesso modo la contrazione lungo un polivettore π sarà denotata $\mathbf{i}_\pi \varphi$; se la forma e il polivettore hanno lo stesso grado (e quindi il risultato è una funzione) scriveremo anche $\mathbf{i}_\pi \varphi = \pi(\varphi) = \varphi(\pi)$.

1 Introduzione

Consideriamo una varietà simplettica (M, ω) : si tratta di una varietà dotata di una 2-forma ω chiusa e non degenere; una parafrasi di queste condizioni è che la 2-forma ω induce una classe in coomologia $[\omega]$ in modo che $[\omega]^n \neq 0$ in $H^{2n}(M)$, ove $2n$ è la dimensione della varietà; in altri termini la mappa di fibrati

$$\omega^b: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M)$$

definita come

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \quad \mathbf{i}_Y \omega^b(X) = \omega(X \wedge Y)$$

è un isomorfismo di fibrati, e possiede quindi un'inversa $\omega^\#: \Omega^1(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$.

Equivalentemente, la moltiplicazione per $[\omega]^n \in H^{2n}(M)$ (rispetto al prodotto *cap*) è iniettiva; una condizione ancor più forte è la seguente

Definizione 1.1 *Una varietà M equipaggiata di una 2-forma ω soddisfa alla condizione di Lefschetz (forte) se le applicazioni $H^{n-k}(M) \rightarrow H^{n+k}(M)$ date dalle moltiplicazioni per le classi $[\omega]^k$ ($k = 0, \dots, n$) sono isomorfismi.*

Questa è ovviamente una condizione molto forte: ad esempio implica la compattezza perché una varietà simplettica è orientabile (le nostre varietà sono senza bordo).

Siamo qui interessati alle varietà simplettiche che soddisfano la condizione di Lefschetz (forte) e precisamente alla seguente proprietà stabilita da S.A. Merkulov [7]:

Teorema 1.2 *Se (M, ω) è una varietà che soddisfa alla condizione di Lefschetz allora il suo complesso di de Rham è formale.*

Per dimostrarlo si utilizza il calcolo di Poisson sulle varietà simplettiche, in particolare un risultato di Mathieu [8] che le caratterizza in termini coomologici.

2 Forme armoniche simplettiche

Cominciamo col costruire alcuni oggetti del calcolo di Poisson, introdotti da Koszul in un ambito essenzialmente disgiunto dal nostro contesto: consideriamo una varietà simplettica (M, ω) , che è in particolare una varietà di Poisson, cioè equipaggiata di un polivettore di grado 2, $\pi \in \Gamma(M, \wedge^2 TM)$, che verifichi la condizione di integrabilità di Lie–Lichnerowicz:

$$[[\pi, \pi]] = 0$$

(ove $[[,]]$ denotano le parentesi di Schouten–Nijenhuis sullo spazio dei polivettori della varietà, cfr. [9, §1]); nel caso di una varietà simplettica π si può definire come

$$\forall \varphi, \psi \in \Omega^1(M) \quad \pi(\varphi \wedge \psi) = \mathbf{i}_{\omega^\# \varphi} \psi$$

π si dice *tensore di Poisson* ed induce sempre una mappa $\pi^\#: \Omega^1(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ che è un isomorfismo se e solo se la varietà è simplettica (e che nel caso simplettico coincide con $\omega^\#$).

Ricordiamo (cfr. [1, §3.3]) che se (M, π) è una varietà di Poisson, allora lo spazio delle 1-forme è un'algebra di Lie rispetto alle parentesi

$$[\varphi, \psi] = \mathcal{L}_{\pi^\# \varphi} \psi - \mathcal{L}_{\pi^\# \psi} \varphi - d\pi(\varphi \wedge \psi)$$

(con $\mathcal{L}_X \varphi = \mathbf{i}_X d\varphi + d\mathbf{i}_X \varphi$ denotiamo la derivata di Lie di φ lungo il campo X).

La mappa $\pi^\#: \Omega^1(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ diviene allora un morfismo di algebre di Lie, ove su $\mathfrak{X}(M)$ si consideri il solito commutatore di campi vettoriali.

Questa algebra di Lie si presenta assieme ad una rappresentazione naturale sullo spazio $A = C^\infty(M)$: infatti basta considerare l'azione

$$\varphi \cdot f = \pi^\# \varphi(f) = df(\pi^\# \varphi)$$

Si tratta ovviamente di una rappresentazione dell'algebra di Lie $\Omega^1(M)$ a coefficienti in $C^\infty(M)$, dato che

$$\begin{aligned} [\varphi, \psi] \cdot f &= \pi^\# [\varphi, \psi](f) = [\pi^\# \varphi, \pi^\# \psi](f) \\ &= \pi^\# \varphi(\pi^\# \psi(f)) - \pi^\# \psi(\pi^\# \varphi(f)) \\ &= \varphi \cdot (\psi \cdot f) - \psi \cdot (\varphi \cdot f) \end{aligned}$$

Ora consideriamo l'omologia $H_k(\Omega^*(M), C^\infty(M))$ dell'algebra di Lie $\Omega^1(M)$ a coefficienti in $C^\infty(V)$: è calcolata dal complesso di Chevalley–Eilenberg $(CE_k(M), \delta)$ ove $CE_k(M) = C^\infty(M) \otimes \Omega^k(M)$ (prodotto tensoriale sui numeri reali) e $\delta: CE_k(M) \rightarrow CE_{k-1}(M)$ è definita come

$$\begin{aligned} \delta(f \otimes df_1 \wedge \dots \wedge df_k) &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} (df_i \cdot f) \otimes df_1 \wedge \dots \wedge \widehat{df_i} \wedge \dots \wedge df_k \\ &+ \sum_{\substack{1 \dots n \\ i < j}} (-1)^{i+j} f \otimes [df_i, df_j] \wedge df_1 \wedge \dots \wedge \widehat{df_i} \wedge \dots \wedge \widehat{df_j} \wedge \dots \wedge df_k \end{aligned}$$

Un classico calcolo (cfr. [5]) rivela che $\delta^2 = 0$; ora notiamo che ha luogo una mappa $\mu: CE_k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ di moltiplicazione:

$$\mu(f \otimes df_1 \wedge \dots \wedge df_k) = f df_1 \wedge \dots \wedge df_k$$

che è effettivamente applicazione suriettiva, e che ci viene in soccorso nel definire una mappa $\Delta: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ come

$$\Delta(f df_1 \wedge \dots \wedge df_k) = \mu(\delta(f \otimes df_1 \wedge \dots \wedge df_k))$$

cioè

$$\Delta \circ \mu = \mu \circ \delta$$

Lemma 2.1

- (1) $\Delta^2 = 0$
- (2) $\Delta = [\mathbf{i}_\pi, d]$

$$(3) \quad d\Delta + \Delta d = 0$$

(4) *Se $d\varphi = 0$ allora $\Delta\varphi$ è esatta.*

DIMOSTRAZIONE: Dato che

$$\Delta \circ \Delta \circ \mu = \Delta \circ \mu \delta = \mu \circ \delta \circ \delta = 0$$

abbiamo la (1); ora dimostriamo la (2): per additività dell'operatore $[\mathbf{i}_\pi, d]$ basta verificare l'identità calcolandola sui tensori decomponibili

$$\begin{aligned} [\mathbf{i}_\pi, d]f_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_k &= \mathbf{i}_\pi df_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_k - df_0 \mathbf{i}_\pi df_1 \wedge \dots \wedge df_k \\ &= \sum_{i < j}^{0 \dots k} (-1)^{i+j+1} \pi(df_i \wedge df_j) df_0 \wedge \dots \wedge \widehat{df_i} \wedge \dots \wedge \widehat{df_j} \wedge \dots \wedge df_k \\ &\quad - d \sum_{i < j}^{1 \dots k} (-1)^{i+j+1} f_0 \pi(df_i \wedge df_j) df_1 \wedge \dots \wedge \widehat{df_i} \wedge \dots \wedge \widehat{df_j} \wedge \dots \wedge df_k \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \pi(df_0 \wedge df_j) df_1 \wedge \dots \wedge \widehat{df_j} \wedge \dots \wedge df_k \\ &\quad + \sum_{i < j}^{1 \dots k} (-1)^{i+j+1} \pi(df_i \wedge df_j) df_0 \wedge \dots \wedge \widehat{df_i} \wedge \dots \wedge \widehat{df_j} \wedge \dots \wedge df_k \\ &\quad - \sum_{i < j}^{1 \dots k} (-1)^{i+j+1} \pi(df_i \wedge df_j) df_0 \wedge \dots \wedge \widehat{df_i} \wedge \dots \wedge \widehat{df_j} \wedge \dots \wedge df_k \\ &\quad - \sum_{i < j}^{1 \dots k} (-1)^{i+j+1} f_0 d\pi(df_i \wedge df_j) df_1 \wedge \dots \wedge \widehat{df_i} \wedge \dots \wedge \widehat{df_j} \wedge \dots \wedge df_k \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \pi(df_0 \wedge df_j) df_1 \wedge \dots \wedge \widehat{df_j} \wedge \dots \wedge df_k \\ &\quad - \sum_{i < j}^{1 \dots k} (-1)^{i+j+1} f_0 d\pi(df_i \wedge df_j) df_1 \wedge \dots \wedge \widehat{df_i} \wedge \dots \wedge \widehat{df_j} \wedge \dots \wedge df_k \\ &= \Delta(f_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_k) \end{aligned}$$

Dalla (2) segue la (3), dato che

$$d\Delta + \Delta d = d[\mathbf{i}_\pi, d] + [\mathbf{i}_\pi, d]d = d\mathbf{i}_\pi d - d^2\mathbf{i}_\pi + \mathbf{i}_\pi d^2 - d\mathbf{i}_\pi d^2 = 0$$

In modo ancor più facile segue la (4): se $d\varphi = 0$ allora

$$\Delta\varphi = [\mathbf{i}_\pi, d]\varphi = \mathbf{i}_\pi d\varphi - d\mathbf{i}_\pi\varphi = -d(\mathbf{i}_\pi\varphi)$$

QED

Naturalmente possiamo considerare l'omologia $H_i(M, \Delta)$ del complesso $(\Omega^k(M), \Delta)$, per scoprire che [3]

Teorema 2.2 $H_i(M, \Delta) \cong H^{2n-i}(M)$ (coomologia di de Rham).

La dimostrazione di Brylinski esibisce esplicitamente un isomorfismo, o meglio una mappa di complessi che lo induce, mimando le costruzioni classiche della teoria di Hodge: a noi interessano queste ultime.

Consideriamo il tensore di Poisson π della varietà simplettica (M, ω) , e guardiamo ad esso come a una biderivazione: $\pi: \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \rightarrow C^\infty(M)$; possiamo anche considerare le sue potenze esterne $\pi^k: \Omega^k(M) \times \Omega^k(M) \rightarrow C^\infty(M)$: queste ultime sono operatori simmetrici o antisimmetrici secondoche k sia pari o dispari.

Definiamo allora un operatore $\star: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{2n-k}(M)$ come

$$\varphi \wedge \star\psi = \pi^k(\varphi, \psi)\lambda$$

ove $\lambda = \omega^n/n!$ è la misura di Liouville della varietà simplettica: questa induce l'isomorfismo del teorema precedente; a noi basta dimostrare la seguente notevole identità:

Teorema 2.3 $\Delta = (-1)^{k+1}\star d\star$

Per farlo procediamo per induzione sulla semi-dimensione n della varietà simplettica M : se $n = 1$, vale a dire $\dim M = 2$, allora esistono coordinate locali (q, p) in modo che $\omega = dp \wedge dq$; se f è una 0-forma allora $\star f$ è una 2-forma, cioè del tipo $g\omega$: ma

$$g \wedge \star f = \pi^0(g, f)\omega = gf\omega$$

da cui segue $\star f = f\omega$; dunque

$$\star d\star f = 0 = \Delta f$$

Se φ è una 1-forma possiamo supporla $f dq$ oppure $f dp$: nel primo caso

$$\Delta(f dq) = dq \cdot f = \pi(df \wedge dq) = -\frac{\partial f}{\partial p}$$

(il tensore di Poisson è in questo caso $\frac{\partial}{\partial q} \wedge \frac{\partial}{\partial p}$). Ma

$$\varphi \wedge \star f dq = \pi(\varphi \wedge f dq)\omega = f\pi(\varphi \wedge dq)\omega = -f \mathbf{i}_{\frac{\partial}{\partial p}} \varphi \omega$$

e quindi $\star f dq = -f dq$, da cui

$$\star d\star f dq = -\star d(f dq) = -\star df \wedge dq = -\star \frac{\partial f}{\partial p} dp \wedge dq = -\frac{\partial f}{\partial p} = \Delta(f dq)$$

Nel caso $f dp$ si procede in modo simile; finalmente una 2-forma $f dp \wedge dq$ è tale che

$$\Delta(f dp \wedge dq) = \pi(df \wedge dp) dq - \pi(df \wedge dq) dp = \frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial p} dp = df$$

Ma in questo caso $-\star d\star f dp \wedge dq = -\star df = df$ e quindi di nuovo la formula è valida.

Si noti che abbiamo usato la relazione

$$\star\star\varphi = \varphi$$

Dimostriamola in questo caso di dimensione 2: di nuovo si tratta di verificarla su i -forme per $i = 0, 1, 2$; se f è una 0-forma allora $g \wedge \star f = fg\omega$ da cui

$$\star f = f dp \wedge dq \quad \text{e} \quad \star f dp \wedge dq = f$$

Per una 1-forma $f dq$ deve essere $\star f dq = -f dq$, dato che

$$\psi \wedge \star f dq = f \pi(\psi \wedge dq)\omega = -f \frac{\partial}{\partial p} \psi \omega$$

ed in modo analogo per $f dp$.

Abbiamo quindi dimostrato in dimensione 2 ($n = 1$) il teorema ed anche l'identità $\star\star = \mathbf{id}$.

Ora passiamo al caso $n > 1$: per applicare l'ipotesi induttiva usiamo il seguente

Lemma 2.4 *Se (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) sono varietà simplettiche di dimensioni $2n_1$ e $2n_2$ e se $\varphi_1 \in \Omega^{k_1}(M_1)$ e $\varphi_2 \in \Omega^{k_2}(M_2)$, la forma $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ in $\Omega^{k_1+k_2}(M_1 \times M_2)$ soddisfa alla identità*

$$\star(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = (-1)^{k_1 k_2} (\star\varphi_1) \wedge (\star\varphi_2) = (\star\varphi_2) \wedge (\star\varphi_1)$$

ove su $M_1 \times M_2$ si consideri la struttura simplettica $\omega_1 + \omega_2$.

DIMOSTRAZIONE: Ovviamente il tensore di Poisson su $M_1 \times M_2$ è somma dei tensori relativi ai due fattori: $\pi = \pi_1 + \pi_2$: per definizione degli operatori \star abbiamo

$$(\psi_1 \wedge \psi_2) \wedge \star(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \pi^{k_1+k_2}((\psi_1 \wedge \psi_2) \wedge (\varphi_1 \wedge \varphi_2))\lambda = \pi^{k_1}(\psi_1 \wedge \varphi_1) \pi^{k_2}(\psi_2 \wedge \varphi_2)\lambda$$

Dato che λ (forma di Liouville su $M_1 \times M_2$) è il prodotto esterno delle forme di Liouville sui singoli fattori, troviamo che

$$(\psi_1 \wedge \psi_2) \wedge \star(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = (\psi_1 \wedge (\star\varphi_1)) \wedge (\psi_2 \wedge (\star\varphi_2)) = (-1)^{k_1 k_2} (\psi_1 \wedge \psi_2) \wedge (\star\varphi_1 \wedge \star\varphi_2)$$

da cui segue il lemma.

QED

Ora possiamo completare l'induzione nel teorema precedente: poiché possiamo ragionare localmente, supponiamo che $M = M_1 \times M_2$, ove M_1 e M_2 hanno dimensione non nulla e verificano, per ipotesi induttiva, le ipotesi del teorema: per prima cosa stabiliamo, nel medesimo passo induttivo, la formula $\star\star = \text{id}$, notando che

$$\star\star(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \star(\star\varphi_2 \wedge \star\varphi_1) = (\star\star\varphi_1) \wedge (\star\star\varphi_2) = \varphi_1 \wedge \varphi_2$$

(usando l'ipotesi induttiva sui fattori esterni); ora

$$\begin{aligned} \star d\star(\varphi_1 \wedge \varphi_2) &= \star d(\star\varphi_2 \wedge \star\varphi_1) = \star(d\star\varphi_2 \wedge \star\varphi_1) + (-1)^{k_2} (\star\varphi_2 \wedge d\star\varphi_1) \\ &= \varphi_1 \wedge \star d\star\varphi_2 + (-1)^{k_2} \star d\star\varphi_1 \wedge \varphi_2 \\ &= (-1)^{k_2+1} \varphi_1 \wedge \Delta\varphi_2 + (-1)^{k_1+k_2+1} \Delta\varphi_1 \wedge \varphi_2 \\ &= (-1)^{k_1+k_2+1} (\Delta\varphi_1 \wedge \varphi_2 + (-1)^{k_1} \varphi_1 \wedge \Delta\varphi_2) \\ &= (-1)^{k_1+k_2+1} \Delta(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \end{aligned}$$

(abbiamo usato il fatto che Δ è una derivazione graduata).

QED

Osserviamo che:

- (1) incidentalmente abbiamo dimostrato

$$\star\star\varphi = \varphi$$

per ogni forma φ ;

- (2) dal teorema appena dimostrato segue immediatamente il teorema di Brylinski sull'isomorfismo fra l'omologia $H_i(M, \Delta)$ e la coomologia di de Rham $H^{2n-i}(M)$ che, a questo punto è indotto da \star .

Viene ora spontaneo formulare la

Definizione 2.5 Una forma $\varphi \in \Omega^k(M)$ si dice forma armonica simplettica se $d\varphi = \Delta\varphi = 0$.

Brylinski aveva congetturato l'esistenza di un rappresentante armonico in ciascuna classe di coomologia per qualsiasi varietà simplettica: il seguente risultato di Mathieu [8] risponde negativamente alla questione, caratterizzando le varietà per le quali ciò è possibile:

Teorema 2.6 *Se (M, ω) è una varietà simplettica, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (1) *M soddisfa la condizione di Lefschetz forte;*
- (2) *L'epimorfismo*

$$(\Omega^*(M), \Delta) \rightarrow (\Omega^*(M)/\text{Im } d, \Delta)$$

induce un isomorfismo in coomologia;

- (3) *Ogni classe di coomologia di de Rham $H^*(M, \mathbb{C})$ contiene un rappresentante armonico simplettico.*

L'equivalenza fra (2) e (3) non è difficile a vedersi: se è vera la (2) allora, se $[\varphi] \in H^k(M)$, abbiamo che $d\varphi = 0$ e, supponendo $[\varphi] \neq 0$, solleviamo φ ad una forma $\psi \in \Omega^k(M)$ tale che la sua immagine in $\Omega^k(M)/\text{Im } d$ non sia nulla (poiché per ipotesi $H^k(M) \neq 0$ e si immerge in $\Omega^k(M)/\text{Im } d$ per costruzione, questo è certamente possibile); dato che $d\psi = 0$ abbiamo che $\Delta\psi$ è esatta, quindi la sua immagine in $\Omega^{k-1}(M)/\text{Im } d$ è zero; ma dato che nel diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k & \xrightarrow{\Pi} & \frac{\Omega^k}{\text{Im } d} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^k(M) & \xrightarrow{\Pi_*} & H^k(M) \end{array}$$

Π un morfismo di complessi differenziali, abbiamo

$$\Pi\Delta\psi = -\Delta\Pi\psi = 0$$

Quindi la forma ψ è armonica, se vista come elemento dell'immagine di Π_* (che è un isomorfismo per l'ipotesi (2)).

Viceversa, se è vera la (3) allora Π_* è un isomorfismo: infatti se $[\varphi] \in H^k(M)$ allora, poiché assumiamo la (3), esiste $\varphi \in \Omega^k(M)$ con $\Delta\varphi = d\varphi = 0$; dunque la proiezione $\Pi(\varphi)$ in $\Omega^k(M)/\text{Im } d$ (che include $H^k(M)$) è zero solo se $\varphi = d\psi$; ma in questo caso avremmo $[\varphi] = 0$. Quindi Π_* è iniettiva; che sia suriettiva è ovvio, perché un elemento in $H^k(M)$ sta certamente in $\Omega^k(M)/\text{Im } d$, dunque si solleva ad una forma $\varphi \in \Omega^k(M)$ chiusa, che quindi dà luogo ad una classe in $H^k(M)$: la proiezione di questa classe per tramite di Π_* , per definizione dà luogo all'elemento di partenza in $H^k(M)$.

Alla dimostrazione della rimanente equivalenza espressa da questo teorema è dedicato il seguente paragrafo.

3 Dimostrazione del teorema di Mathieu

L'idea della dimostrazione di Mathieu consiste nell'utilizzare gli operatori del calcolo differenziale di Poisson per costruire una rappresentazione di una certa *quiver* legata alla superalgebra di Lie $sl(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^2$; in realtà l'essenza del ragionamento coinvolge le rappresentazioni di $sl(2, \mathbb{C})$ e, seguendo [10], esporremo questa dimostrazione semplificata (che in fin dei conti si ispira alla dimostrazione della proprietà di Lefschetz per le varietà proiettive complesse...).

Consideriamo dunque lo spazio vettoriale graduato $\Omega^*(M)$ e su di esso gli operatori: $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$; $\Delta: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$; $\star: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{2n-k}(M)$ legati dalle formule:

$$d^2 = \Delta^2 = 0, \quad d\Delta + \Delta d = 0, \quad \Delta = (-1)^{k+1} \star d \star$$

Ora introduciamo un nuovo operatore $Y: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+2}(M)$ che è poi la moltiplicazione per ω :

$$Y(\varphi) = \omega \wedge \varphi$$

Ovviamente, dato che $d\omega = 0$, abbiamo $[d, Y] = 0$.

Introduciamo anche un "anti-aggiunto formale" di Y , nella veste di un operatore

$X: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-2}(M)$ definito come

$$X = -\star Y \star$$

Lemma 3.1 *Se $\varphi \in \Omega^k(M)$ allora $[Y, \mathbf{i}_\pi]\varphi = (k - n)\varphi$*

DIMOSTRAZIONE: Di nuovo lo verifichiamo per induzione sulla semi-dimensione: se $n = 1$ allora esistono coordinate (q, p) in modo che $\omega = dp \wedge dq$ e $\pi = \frac{\partial}{\partial q} \wedge \frac{\partial}{\partial p}$; se f è una 0-forma allora

$$[Y, \mathbf{i}_\pi]f = \omega(\mathbf{i}_\pi f) - \mathbf{i}_\pi f \omega = 0 - f = -f$$

Se $\varphi = adq + bdp$ è una 1-forma:

$$[Y, \mathbf{i}_\pi]\varphi = \omega(\mathbf{i}_\pi \varphi) - \mathbf{i}_\pi \omega \wedge \varphi = \omega(\mathbf{i}_\pi \varphi) = \omega \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial p} \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial q} (adq + bdp) \right) = \omega \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial p} a \right) = 0$$

Se $f\omega$ è una 2-forma:

$$[Y, \pi_\pi]f\omega = \omega(\mathbf{i}_\pi f\omega) - \mathbf{i}_\pi\omega \wedge f\omega = \omega(\mathbf{i}_\pi f\omega) = f(\mathbf{i}_\pi\omega) = f\omega$$

Nel caso di dimensione qualsiasi, usiamo ancora il lemma 2.4: supponiamo cioè $M = M_1 \times M_2$ e consideriamo una forma $\varphi_1 \in \Omega^{k_1}(M_1)$ ed una forma $\varphi_2 \in \Omega^{k_2}(M_2)$: allora

$$\begin{aligned} [Y, \mathbf{i}_\pi](\varphi_1 \wedge \varphi_2) &= (\omega_1 + \omega_2) \wedge \mathbf{i}_{\pi_1 + \pi_2}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) - \mathbf{i}_{\pi_1 + \pi_2}((\omega_1 + \omega_2) \wedge (\varphi_1 \wedge \varphi_2)) \\ &= (\omega_1 + \omega_2) \wedge (\mathbf{i}_{\pi_1}\varphi_1 \wedge \varphi_2 + \varphi_1 \wedge \mathbf{i}_{\pi_2}\varphi_2) - (\mathbf{i}_{\pi_1}\omega_1 \mathbf{i}_{\pi_2}\omega_2) \varphi_1 \wedge \varphi_2 \end{aligned}$$

Ora¹:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{\pi_1 + \pi_2}((\omega_1 + \omega_2) \wedge (\varphi_1 \wedge \varphi_2)) &= \\ &= \mathbf{i}_{\pi_1}(\omega_1 \wedge (\varphi_1 \wedge \varphi_2) + \omega_2 \wedge (\varphi_1 \wedge \varphi_2)) + \mathbf{i}_{\pi_2}(\omega_1 \wedge (\varphi_1 \wedge \varphi_2) + \omega_2 \wedge (\varphi_1 \wedge \varphi_2)) \\ &= \mathbf{i}_{\pi_1}(\omega_1 \wedge \varphi_1) \wedge \varphi_2 + \omega_2 \wedge \mathbf{i}_{\pi_1}\varphi_1 \wedge \varphi_2 + \omega_1 \wedge \varphi_1 \wedge \mathbf{i}_{\pi_2}\varphi_2 + \varphi_1 \wedge \mathbf{i}_{\pi_2}(\omega_2 \wedge \varphi_2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\omega_1 + \omega_2) \wedge \mathbf{i}_{\pi_1 + \pi_2}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) &= (\omega_1 + \omega_2) \wedge (\mathbf{i}_{\pi_1}\varphi_1 \wedge \varphi_2 + \varphi_1 \wedge \mathbf{i}_{\pi_2}\varphi_2) \\ &= \omega_1 \wedge (\mathbf{i}_{\pi_1}\varphi_1 \wedge \varphi_2 + \varphi_1 \wedge \mathbf{i}_{\pi_2}\varphi_2) + \omega_2 \wedge (\mathbf{i}_{\pi_1}\varphi_1 \wedge \varphi_2 + \varphi_1 \wedge \mathbf{i}_{\pi_2}\varphi_2) \end{aligned}$$

Dunque, se $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ è una $(k_1 + k_2)$ -forma su $M_1 \times M_2$:

$$\begin{aligned} [Y, \mathbf{i}_\pi](\varphi_1 \wedge \varphi_2) &= \\ &= \omega_1 \wedge (\mathbf{i}_{\pi_1}\varphi_1 \wedge \varphi_2 + \varphi_1 \wedge \mathbf{i}_{\pi_2}\varphi_2) + \omega_2 \wedge (\mathbf{i}_{\pi_1}\varphi_1 \wedge \varphi_2 + \varphi_1 \wedge \mathbf{i}_{\pi_2}\varphi_2) - \\ &- \mathbf{i}_{\pi_1}(\omega_1 \wedge \varphi_1) \wedge \varphi_2 - \omega_2 \wedge \mathbf{i}_{\pi_1}\varphi_1 \wedge \varphi_2 - \omega_1 \wedge \varphi_1 \wedge \mathbf{i}_{\pi_2}\varphi_2 - \varphi_1 \wedge \mathbf{i}_{\pi_2}(\omega_2 \wedge \varphi_2) \\ &= ([Y_1, \mathbf{i}_{\pi_1}]\varphi_1) \wedge \varphi_2 + \varphi_1 \wedge [Y_2, \mathbf{i}_{\pi_1}]\varphi_2 \\ &= (k_1 - n_1)\varphi_1 \wedge \varphi_2 + (k_2 - n_2)\varphi_1 \wedge \varphi_2 \\ &= (k - n)\varphi_1 \wedge \varphi_2 \end{aligned}$$

QED

Lemma 3.2 $X = \mathbf{i}_\pi$

¹Usiamo i seguenti fatti: $\mathbf{i}_\pi(\varphi \wedge \psi) = \mathbf{i}_\pi\varphi \wedge \psi + (-1)^{\deg \varphi} \varphi \wedge \mathbf{i}_\pi\psi$, $\mathbf{i}_{\pi_i}\omega_j = \delta_{ij}$ ed il fatto che gli oggetti definiti su M_2 sono azzerati da π_1 e ω_1 e viceversa.

DIMOSTRAZIONE: La tecnica ormai è nota: nel caso $n = 1$ abbiamo (se φ è una 0-forma, $\star\varphi$ è una 2-forma; se φ è una 1-forma anche $\star\varphi$ lo è), per φ 0-forma o 1-forma:

$$X\varphi = -\star\omega \wedge \star\varphi = 0 = \mathbf{i}_\pi\varphi$$

(si rammenti che $\mathbf{i}_\pi = \mathbf{i}_{\frac{\partial}{\partial p}} \mathbf{i}_{\frac{\partial}{\partial q}}$ e che \mathbf{i}_π porta k forme in $k - 2$ forme (ove

conveniamo che le forme di ordine negativo siano nulle); se $f\omega$ è una 2-forma allora

$$Xf\omega = -\star\omega \wedge \star f\omega = -\star f\omega = -f = f \cdot 1 = f\mathbf{i}_\pi\omega = \mathbf{i}_\pi(f\omega)$$

Dunque $X = \mathbf{i}_\pi$ in questo caso.

Per $n > 1$ supponiamo che $M = M_1 \times M_2$: dato che (al solito un indice 1 o 2 indica l'appartenenza ad un fattore M_1 o M_2):

$$\star(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = (\star\varphi_2) \wedge (\star\varphi_1)$$

abbiamo ($\omega = \omega_1 + \omega_2$):

$$\omega \wedge \star(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = (\star\varphi_2) \wedge (\omega_1 \wedge \star\varphi_1) + (\omega_2 \wedge \star\varphi_2) \wedge (\star\varphi_1)$$

in virtù del lemma 2.4 che pure implica

$$\star(\omega \wedge \star(\varphi_1 \wedge \varphi_2)) = \star(\omega_1 \wedge \star\varphi_1) \wedge \varphi_2 + \varphi_1 \wedge \star(\omega_2 \wedge \star\varphi_2)$$

Dunque (rammentando che $\mathbf{i}_{\pi_1}\varphi_2 = 0$ e $\mathbf{i}_{\pi_2}\varphi_1 = 0$)

$$\begin{aligned} X(\varphi_1 \wedge \varphi_2) &= X_1\varphi_1 \wedge \varphi_2 + \varphi_1 \wedge X_2\varphi_2 = \mathbf{i}_{\pi_1}\varphi_1 \wedge \varphi_2 + \varphi_1 \wedge \mathbf{i}_{\pi_2}\varphi_2 \\ &= \mathbf{i}_{\pi_1}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) + \mathbf{i}_{\pi_2}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \mathbf{i}_\pi(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \end{aligned}$$

QED

Abbiamo quindi due operatori X e Y : consideriamo l'algebra di Lie da essi generati: per prima cosa identifichiamo il loro commutatore.

Lemma 3.3 $H = [X, Y]$ è l'operatore

$$H = \sum_{k=0}^{2n} (n - k)p_k$$

ove $p_k: \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ è la proiezione sulle forme di grado k .

DIMOSTRAZIONE: Questo segue dai due lemmi precedenti: infatti possiamo scrivere una forma $\varphi \in \Omega^*(M)$ in somma di componenti omogenee:

$$\varphi = \sum_{i=0}^{2n} p_k(\varphi)$$

ed ottenere

$$[Y, X]\varphi = \sum_{i=0}^{2n} [Y, \mathbf{i}_\pi] p_k(\varphi) = \sum_{i=0}^{2n} (k - n) p_k(\varphi) = -H\varphi$$

QED

Lemma 3.4

- (1) $[H, X] = 2X$
- (2) $[H, Y] = -2Y$

DIMOSTRAZIONE: Si tratta di usare i lemmi precedenti ed un semplice cambiamento di indici, tenendo conto del fatto che \mathbf{i}_π e $\omega \wedge$ sono operatori di grado -2 e $+2$ rispettivamente:

$$\begin{aligned} [H, X]\varphi &= \sum_{k=0}^{2n} (n - k) p_k(\mathbf{i}_\pi \varphi) - \mathbf{i}_\pi \sum_{k=0}^{2n} (n - k) p_k(\varphi) \\ &= \sum_{k=0}^{2n-2} (n - k) p_k(\mathbf{i}_\pi \varphi) - \sum_{k=2}^{2n} (n - k) \mathbf{i}_\pi p_k(\varphi) \\ &= \sum_{k=0}^{2n-2} (n - k) p_k(\mathbf{i}_\pi \varphi) - \sum_{h=0}^{2n-2} (n - h - 2) p_h(\mathbf{i}_\pi \varphi) \\ &= \sum_{k=0}^{2n-2} (n - k - n + k + 2) p_k(\mathbf{i}_\pi \varphi) \\ &= 2 \sum_{k=0}^{2n-2} p_k(\mathbf{i}_\pi \varphi) = 2\mathbf{i}_\pi \varphi = 2X\varphi \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 [H, Y]\varphi &= \sum_{k=0}^{2n} (n-k)p_k(\omega \wedge \varphi) - \omega \wedge \sum_{k=0}^{2n} (n-k)p_k(\varphi) \\
 &= \sum_{k=2}^{2n} (n-k)p_k(\omega \wedge \varphi) - \sum_{k=0}^{2n-2} (n-k)\omega \wedge p_k(\varphi) \\
 &= \sum_{k=2}^{2n} (n-k)p_k(\omega \wedge \varphi) - \sum_{h=2}^{2n} (n-h+2)p_h(\omega \wedge \varphi) \\
 &= \sum_{k=2}^{2n} (n-k-n+k-2)p_k(\omega \wedge \varphi) \\
 &= -2 \sum_{k=2}^{2n} p_k(\omega \wedge \varphi) = -2\omega \wedge \varphi = -2Y\varphi
 \end{aligned}$$

QED

Le regole di commutazione che abbiamo dedotto per H , X e Y sono ben note (ad esempio cfr. [4, §VIII]):

Corollario 3.5 *L'algebra di Lie generata da $\{H, X, Y\}$ è isomorfa a $\mathfrak{sl}(2)$.*

In altri termini abbiamo una rappresentazione dell'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2)$ nell'algebra degli operatori \mathbb{R} -lineari sullo spazio $\Omega^*(M)$, che possiamo scrivere esplicitamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto H \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto X \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto Y$$

Lo spazio $\Omega^*(M)$ della rappresentazione ha dimensione infinita, quindi la classificazione delle rappresentazioni irriducibili di $\mathfrak{sl}(2)$ non può applicarsi direttamente: comunque per una certa classe di rappresentazioni è possibile estendere i risultati della dimensione finita:

Definizione 3.6 *Una rappresentazione V di $\mathfrak{sl}(2)$ si dice con H -spettro finito se*

- (1) H ha un numero finito di autovalori distinti.
- (2) $V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}$ ove V_{λ} sono gli autospazi di H ;

Il lemma 2.3 implica in effetti che la rappresentazione $\Omega^*(M)$ definita per tramite degli operatori $\{H, X, Y\}$ ha H -spettro finito: infatti

$$H = \sum_{k=0}^{2n} (n-k)p_k$$

e quindi gli autospazi di H sono per definizione $\Omega^k(M)$ e gli autovalori i numeri interi $\{n-k\}_{k=0, \dots, 2n}$.

Alle rappresentazioni con H -spettro finito si applicano le stesse idee della teoria delle rappresentazioni irriducibili di dimensione finita di $\mathfrak{sl}(2)$: infatti l'ipotesi di finitezza della dimensione serve essenzialmente a dimostrare che le (1) e (2) della definizione precedente (cfr. [4, §VIII]).

Il punto essenziale è che H agisce sempre come un operatore diagonale, quindi che ogni rappresentazione è somma diretta di suoi autospazi: se consideriamo un autovettore φ di H : $H\varphi = \lambda\varphi$, tale che $X\varphi = 0$ (un tale elemento si dice *primitivo*) allora

Lemma 3.7 *La rappresentazione generata da φ ha, come spazio vettoriale, dimensione finita.*

DIMOSTRAZIONE: Mostriamo per prima cosa che

$$XY^k\varphi = Y^kX\varphi + k(\lambda - k + 1)Y^{k-1}\varphi$$

Questo si vede per induzione su k : se $k = 1$

$$XY\varphi = [X, Y]\varphi + YX\varphi = Y\varphi + H\varphi = YX\varphi + \lambda\varphi$$

Se $k > 1$ e se $XY^k\varphi = Y^kX\varphi + k(\lambda - k + 1)Y^{k-1}\varphi$ allora

$$\begin{aligned} XY^{k+1}\varphi &= [X, Y]Y^k\varphi + YXY^k = HY^k\varphi + Y^{k+1}X\varphi + k(\lambda - k + 1)Y^k\varphi \\ &= [H, Y^k]\varphi + Y^kH\varphi + Y^{k+1}X\varphi + k(\lambda - k + 1)Y^k\varphi \\ &= -2kY^k\varphi + \lambda Y^k\varphi + Y^{k+1}X\varphi + k(\lambda - k + 1)Y^k\varphi \\ &= Y^{k+1}X\varphi + (k\lambda - k^2 + k - 2k + \lambda)Y^k\varphi \\ &= Y^{k+1}X\varphi + (k+1)(\lambda - (k+1) + 1)Y^k\varphi \end{aligned}$$

(abbiamo usato $[H, Y^k] = -2kY^k$ che segue ovviamente per induzione da $[H, Y] = -2Y$).

Ora, la rappresentazione generata da φ ha come base (nel senso degli spazi vettoriali):

$$\varphi, Y\varphi, Y^2\varphi, \dots$$

(si rammenti che $X\varphi = 0$ per ipotesi) e quindi la finitezza dello spettro di H implica la tesi del lemma (precisamente la dimensione della rappresentazione è $\lambda + 1$).

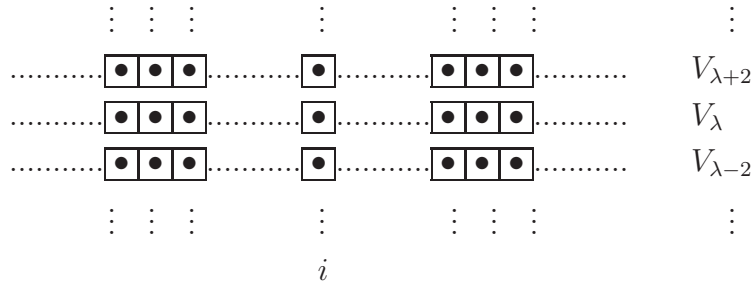
QED

Dunque: lo spazio V si spezza in somma diretta finita di sotto-moduli, e ciascun sotto-modulo è una somma di rappresentazioni isomorfe (componente isotipica)

$$V_\lambda = \bigoplus_i V_{\lambda,i}$$

ciascuna delle quali è una rappresentazione irriducibile di $\mathfrak{sl}(2)$ di dimensione finita (ad esempio si prende una base dello spazio vettoriale V_λ e si applica il lemma precedente a ciascun elemento di questa base).

Ora, come segue dal lemma, l'operatore Y e l'operatore X sono l'uno l'inverso dell'altro lungo le "componenti trasversali" V_{λ,i_0} (i_0 fissato) della decomposizione $V = \bigoplus V_\lambda$: dunque gli operatori X e Y sono l'uno inverso dell'altro; relativamente alla seguente figura, Y fa salire di una riga e X scendere di una riga (il numero di righe è finito, quello di colonne infinito):



(nella figura ciascun $\boxed{\bullet}$ rappresenta un sotto-modulo $V_{\lambda,i}$ generato da un elemento.)

Quindi (il nostro V_k è $\Omega^{n-k}(M)$):

Teorema 3.8

- (1) $Y : \Omega^{n-k-2}(M) \rightarrow \Omega^{n-k}(M)$ è iniettiva ($k = -1, 0, \dots, n - 2$);
- (2) $Y^k : \Omega^{n-k}(M) \rightarrow \Omega^{n+k}(M)$ sono isomorfismi;

Rammentiamo che siamo interessati a dimostrare l'equivalenza della condizione di Lefschetz e dell'esistenza di rappresentanti armonici nelle classi di coomologia di de Rham: introduciamo la notazione

$$\Omega_h^k(M) = \{\varphi \in \Omega^k(M) \mid d\varphi = \Delta\varphi = 0\}$$

per denotare lo spazio delle forme armoniche di grado k .

(3) $Y^k : \Omega_h^{n-k}(M) \rightarrow \Omega_h^{n+k}(M)$ è un isomorfismo.

La (3) segue dalla (2) del teorema non appena si sia notato che $\Omega_h^*(M)$ è una rappresentazione di $\mathfrak{sl}(2)$ con H -spettro finito.

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema di Mathieu: supponiamo per prima cosa che ogni classe di coomologia contenga un rappresentante armonico; si consideri allora il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \Omega_h^{n-k}(M) & \xrightarrow{Y^k} & \Omega_h^{n+k}(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{n-k}(M) & \xrightarrow{Y^k} & H^{n+k}(M) \end{array}$$

(le mappe verticali sono le proiezioni dei cocicli nelle classi di coomologia).

Ma per il teorema precedente le mappe $Y^k : \Omega_h^{n-k}(M) \rightarrow \Omega_h^{n+k}(M)$ sono isomorfismi, e quindi la mappa $Y^k : H^{n-k}(M) \rightarrow H^{n+k}(M)$ è suriettiva: da ciò la (3) del teorema di Mathieu.

Ora assumiamo per vera la condizione di Lefschetz: supponiamo che la moltiplicazione per la classe di coomologia della forma simplettica sia un isomorfismo, come pure tutti i suoi multipli; allora le mappe

$$Y^k : H^{n-k}(M) \rightarrow H^{n+k}(M)$$

sono in particolare suriettive per $k \leq n$: per prima cosa notiamo che

$$H^{n-k}(M) = \text{Im } Y + P_{n-k}$$

ove²

$$P_{n-k} = \{[\varphi] \in H^{n-k}(M) \mid Y^{k+1}[\varphi] = 0\}$$

(se M è compatta allora la somma precedente è diretta).

In effetti se $[\varphi] \in H^{n-k}(M)$ allora esiste $[\psi] \in H^{n-k-2}(M)$ in modo che se $Y^{k+1}[\varphi] = Y^{k+2}[\psi]$ allora $\varphi - \psi \wedge \omega \in P_{n-k}$; dunque

$$\varphi = (\varphi - \psi \wedge \omega) + \psi \wedge \omega \in \text{Im } Y + P_{n-k}$$

Possiamo ora dimostrare per induzione che ogni classe di coomologia contiene un rappresentante armonico.

Nel caso di 0-cocicli e 1-cocicli questo è vero banalmente (per definizione di Δ); supponiamo ora che il teorema valga per ogni $r < n - k$; se $[\psi] \in H^{n-k}(M) = \text{Im } Y + P_{n-k}$, dato che in $\text{Im } Y$, per induzione, esiste certamente

²Questo spazio è quello dei vettori primitivi della rappresentazione: $Y^{k+1}\varphi = 0 \iff X\varphi = 0$.

un rappresentante armonico, non resta che verificare questo fatto anche per P_{n-k} .

Sia $[\varphi] \in H^{n+k}(M)$: poiché $[\varphi \wedge \omega^{k+1}] = 0$ esiste $\chi \in \Omega^{n+k+1}(M)$ con

$$\varphi \wedge \omega^{k+1} = d\chi$$

Ma $Y^{k+1}: \Omega^{n-k-1}(M) \rightarrow \Omega^{n+k+1}(M)$ è suriettiva, quindi deve esistere $\vartheta \in \Omega^{n-k-1}(M)$ in modo che $\chi = \vartheta \wedge \omega^{k+1}$; allora

$$(\varphi \wedge d\vartheta) \wedge \omega^{k+1} = 0$$

Dunque $Y^{k+1}[\varphi - d\vartheta] = Y^{k+1}[\varphi] = 0$; infine dato che $[X, \Delta] = 0$, otteniamo $([Y, \Delta] = d)$

$$\Delta(\varphi - d\vartheta) = [X, d](\varphi - d\vartheta) = Xd(\varphi - d\vartheta) - dX(\varphi - d\vartheta) = -d\mathbf{i}_\pi\varphi + d\mathbf{i}_\pi d\vartheta = 0$$

così abbiamo il nostro rappresentante armonico.

QED

4 Formalità del complesso di de Rham per le varietà simplettiche che soddisfano alla condizione di Lefschetz

Ora dimostriamo il teorema di Merkulov sulla formalità del complesso di de Rham di una varietà simplettica che verifichi la condizione di Lefschetz forte.

Il meccanismo che vogliamo far scattare poggia su un lemma, che mostra come certe ipotesi di base (cfr. [6, lemma 5.4.1]) siano soddisfatte:

Lemma 4.1 *Se (M, ω) è simplettica e verifica la condizione di Lefschetz forte allora gli operatori $d, \Delta: \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$ verificano le*

$$\text{Im } d\Delta = \text{Im } d \cap \ker \Delta = \text{Im } \Delta \cap \ker d$$

DIMOSTRAZIONE: Cominciamo con l'osservare che

$$\text{Im } d \cap \ker \Delta = \text{Im } \Delta \cap \ker d$$

Infatti, per la (2) del teorema di Mathieu, se consideriamo una forma $\varphi \in \text{Im } d \cap \ker \Delta$ allora, dato che si azzerà nella proiezione su $\Omega^*(M)/\text{Im } d$, questa

induce una classe nulla in coomologia, cioè $d \in \ker d$; inoltre poiché questa coomologia è quella del complesso relativo all'operatore Δ , la nullità della classe generata da φ (tale che $\Delta\varphi = 0$) ci dice che $\varphi \in \text{Im } \Delta$. L'inclusione opposta si dimostra in modo analogo.

Ora questi due intersezioni sono pure uguali a

$$\text{Im } d \cap \text{Im } \Delta$$

Ad esempio, dato che $\text{Im } \Delta \subset \ker \Delta$ abbiamo $\text{Im } d \cap \text{Im } \Delta \subset \text{Im } d \cap \ker \Delta$; inoltre se $\varphi \in \text{Im } d \cap \ker \Delta$ allora la sua immagine in $\ker \Delta / \text{Im } d$ è zero e quindi, per la (2) del teorema di Mathieu, la sua classe di coomologia è nulla, dunque lo è la sua classe di omologia: $\varphi = \Delta\psi$ per qualche ψ .

Dunque, per avere il lemma, basta mostrare che

$$\text{Im } d\Delta = \text{Im } d \cap \text{Im } \Delta$$

L'inclusione $\text{Im } d\Delta \subset \text{Im } d \cap \text{Im } \Delta$ è banale (dato che $d\Delta + \Delta d = 0$); resta l'inclusione opposta.

Ad esempio se φ ha grado massimo $2n$ allora è ovvio che se $\varphi = d\psi = \Delta\rho$ allora $\rho = 0$ (per definizione) e quindi $\varphi = 0$ e la tesi è banale (analogamente per una 0-forma invertendo i ruoli di d e Δ); anche per $2n - 1$ forme φ si verifica banalmente l'inclusione che ci interessa: se $\varphi = d\psi = \Delta\rho$ allora, dato che ρ ha grado $2n$ e quindi $d\rho = 0$, e dato che ogni classe di coomologia ha un rappresentante armonico, devono esistere ρ' e σ tale che $\rho' = \rho + d\sigma$ in modo che $\Delta\rho' = 0$; allora $\varphi = \Delta\rho = \Delta(\rho' - d\sigma) = d\Delta\sigma$.

Ora procediamo per induzione su k considerando $(2n - k)$ -forme: sia cioè $\varphi \in \Omega^{2n-k}$ e mostriamo che se è della forma $\varphi = d\psi = \Delta\rho$ allora è anche della forma $d\Delta\sigma$, supponendo vero questo fatto per forme di grado superiore.

Consideriamo $\varphi' = d\rho$: si tratta di una forma Δ -chiusa (e di grado maggiore di φ), dato che $\Delta\varphi' = -d\Delta\rho = -d\varphi = -d^2\psi = 0$. Dunque $\varphi' \in \text{Im } d \cap \ker \Delta = \text{Im } d \cap \text{Im } \Delta$, cioè $\varphi' = \Delta\tau$; ora facciamo scattare l'ipotesi induttiva su φ' , ottenendo $\varphi' = d\Delta\xi$.

Ma $\varphi' = d\rho = d\Delta\xi$, cioè $d(\rho - \Delta\xi) = 0$; la sua classe di coomologia contiene una forma armonica ν :

$$\nu = \rho - \Delta\xi + d\sigma$$

per qualche σ : ora

$$\varphi = \Delta\rho = \Delta(\nu + \Delta\xi - d\sigma) = d\Delta\sigma$$

($\Delta\nu = 0$ perché è armonica).

Questo completa l'induzione.

QED

Rammentiamo che un quasi-isomorfismo di DG-algebre è un morfismo che induca nelle coomologie, relative agli operatori differenziali, un isomorfismo. Una DG-algebra (Ω^*, d) è *formale* quando è quasi-isomorfa alla DG-algebra $(H^*(\Omega^*, d), 0)$ data dal suo anello di coomologia rispetto al differenziale nullo.

Teorema 4.2 *Il complesso di de Rham di una varietà simplettica che soddisfi alla condizione di Lefschetz è formale.*

DIMOSTRAZIONE: L'idea è quella solita che si ispira al caso delle varietà kähleriane compatte (cfr. [6, lemma 5.4.1]: qui diamo dei ragionamenti più diretti ma meno generali): consideriamo i due operatori differenziali che possediamo sul complesso di de Rham, d e Δ .

L'inclusione

$$I: \ker \Delta \rightarrow \Omega^*(M)$$

è un morfismo di DG-algebre rispetto ai differenziali d in virtù del lemma precedente; allo stesso modo è un morfismo di DG-algebre la proiezione di $\ker \Delta$ sull'omologia $\ker \Delta / \text{Im } \Delta$ che per il teorema di Brylinsky coincide con la coomologia di de Rham

$$P: \ker \Delta \rightarrow H^*(M)$$

(ove su $H^*(M)$ si consideri il differenziale identicamente nullo.)

Vogliamo mostrare che tanto I quanto P sono quasi-isomorfismi, e quindi che $\Omega^*(M)$ è quasi-isomorfo a $H^*(M)$ via $\ker \Delta$.

Consideriamo la mappa $I^*: H^*(M) \rightarrow (\ker \Delta \cap \ker d) / (\ker \Delta \cap \text{Im } d)$ indotta da I in coomologia: si tratta di una mappa suriettiva; infatti $\ker \Delta \cap \text{Im } d = \text{Im } d\Delta$ per il lemma, e quindi se

$$[\varphi] \in \frac{\ker \Delta \cap \ker d}{\ker \Delta \cap \text{Im } d}$$

allora $d\varphi = 0$, quindi φ è una forma chiusa, ma anche $\psi \in [\varphi]$ se e solo se $\psi - \varphi = d\Delta\rho$ per qualche forma ρ , sicché $[\varphi]$ si identifica effettivamente una classe di coomologia di de Rham, la cui immagine tramite I^* per definizione è $[\varphi]$ stessa vista come elemento di $(\ker \Delta \cap \ker d) / (\ker \Delta \cap \text{Im } d)$.

Mostriamo che I^* è iniettiva: infatti se $[\varphi] \in H^*(M)$ ha come immagine la classe nulla allora $\varphi \in \ker \Delta \cap \text{Im } d$ che, di nuovo per il lemma, è $\text{Im } d\Delta$, da cui $\varphi = d\Delta\rho$ e quindi $[\varphi] = 0$.

Ora ragioniamo su $P^*: H^*(M) \rightarrow (\ker \Delta \cap \ker d) / (\ker \Delta \cap \text{Im } d)$; facciamo vedere che è suriettiva: se

$$[\varphi] \in \frac{\ker \Delta \cap \ker d}{\ker \Delta \cap \text{Im } d}$$

allora φ è un rappresentante armonico di una classe di coomologia di de Rham la cui immagine tramite P^* è la classe $[\varphi]$ stessa.

Mostriamo infine che P^* è iniettiva: se $[\varphi]$ è una classe di omologia in $H^*(M, \Delta)$ (che come sappiamo è isomorfa alla coomologia di de Rham) la cui immagine rispetto a P^* è nulla allora $\varphi = \Delta d\psi$ per qualche ψ (di nuovo per il lemma e per il fatto che $\text{Im } d\Delta = \text{Im } \Delta d$), e quindi $[\varphi] = 0$ (si rammenti che P proietta da $\ker \Delta$ su $\ker \Delta / \text{Im } \Delta$).

QED

5 Struttura di varietà di Frobenius su $H^*(M)$

Dimostriamo infine il risultato che realmente interessa Merkulov (si tratta comunque di una facile applicazione della teoria generale sintetizzata da Manin in [6, §5-6]):

Teorema 5.1 *Se M è una varietà simplettica che soddisfi alla condizione di Lefschetz, su $H^*(M)$ la coppia di operatori (d, Δ) induce una struttura di varietà di Frobenius.*

Cominciamo con l'osservare che la nostra varietà è compatta, in quanto orientabile e soddisfacente alla condizione di Lefschetz: dunque possiamo supporre che l'algebra di coomologia $H^*(M)$ sia generata da un insieme $\{[\varphi_1], \dots, [\varphi_n]\}$; inoltre possiamo integrare su M e, tenendo conto che abbiamo due operatori di differenziazione, diamo due versioni del lemma di Stokes:

Lemma 5.2 *Se $\varphi, \psi \in \Omega^* M$ allora*

$$\int_M d\varphi \wedge \psi = (-1)^{\deg \varphi + 1} \int_M \varphi \wedge d\psi$$

e

$$\int_M \Delta\varphi \wedge \psi = (-1)^{\deg \varphi} \int_M \varphi \wedge \Delta\psi$$

DIMOSTRAZIONE: In effetti la prima equazione è il teorema di Stokes per le varietà senza bordo; la seconda segue da

$$\begin{aligned} \int_M \Delta\varphi \wedge \psi &= (-1)^{\deg \varphi + 1} \int_M \star d\star\varphi \wedge \psi = (-1)^{\deg \varphi + 1} \int_M d\star\varphi \wedge \star\psi \\ &= \int_M \star\varphi \wedge d\star\psi = \int_M \varphi \wedge \star d\star\psi \\ &= (-1)^{\deg \varphi + 1} \int_M \varphi \wedge \Delta\psi \end{aligned}$$

(se $\varphi \in \Omega^k(M)$ allora $\psi \in \Omega^{2n-k+1}(M)$.)

QED

Torniamo ora al teorema: seguendo Manin ([6, §5.1]) siamo interessati a produrre una dGBV algebra nella quale esprimere le equazioni di Maurer–Cartan; all’uopo basterà considerare l’algebra $\Omega^*(M)$ rispetto ai differenziali d e Δ ed alle parentesi dispari

$$[\varphi \bullet \psi] = (-1)^{\deg \varphi} \Delta(\varphi \wedge \psi) + (-1)^{\deg \varphi + 1} \Delta \varphi \wedge \psi - \varphi \wedge \Delta \psi$$

(cfr. [6, formula 5.5]).

Basandosi sulle proprietà $\Delta^2 = 0$ e $\Delta(1) = 0$ Manin dimostra che

- (1) $[\varphi \bullet \psi] = -(-1)^{(\deg \varphi + 1)(\deg \psi + 1)} [\psi \bullet \varphi]$ (anticommutatività dispari)
- (2) $[[\varphi \bullet \psi] \bullet \rho] = [\varphi \bullet [\psi \bullet \rho]] - (-1)^{(\deg \varphi + 1)(\deg \psi + 1)} [\psi \bullet [\varphi \bullet \rho]]$ (identità di Jacobi dispari)
- (3) $[\varphi \bullet (\psi \wedge \rho)] = [\varphi \bullet \psi] \wedge \rho + (-1)^{(\deg \varphi + 1) \deg \psi} \psi \wedge [\varphi \bullet \rho]$ (identità di Poisson dispari)
- (4) $\Delta[\varphi \bullet \psi] = [\Delta \varphi \bullet \psi] + (-1)^{\deg \varphi + 1} [\varphi \bullet \Delta \psi]$ (identità di derivazione dispari per Δ)
- (5) $d[\varphi \bullet \psi] = [d\varphi \bullet \psi] + (-1)^{\deg \varphi + 1} [\varphi \bullet d\psi]$ (identità di derivazione dispari per d)

Le (1), (2) e (4)/(5) vogliono dire che $\Omega^*(M)$ è una superalgebra di Lie differenziale dispari (equivalente, cambiando la parità, ad una superalgebra di Lie differenziale) rispetto ad entrambi i differenziali d e Δ , che pure commutano tra loro: $[d, \Delta] = d\Delta + \Delta d = 0$.

Ora costruiamo quella che Manin chiama una pre-varietà di Frobenius ([6, §6.2]): tensorizziamo $\Omega^*(M)$ per l’algebra delle serie formali a coefficienti complessi $K = \mathbb{C}[[x^i]]$ ove x^i sono le coordinate relative alla base $\{[\varphi_1], \dots, [\varphi_n]\}$ che avevamo fissato in $H^*(M)$ (più intrinsecamente $K = \mathbb{C}[[\Omega^*(M)^t]]$ è l’algebra delle serie formali sul duale di $\Omega^*(M)$).

In altri termini consideriamo la superalgebra di Lie dispari $(K \otimes_{\mathbb{C}} \Omega^*(M), \bullet)$ e, su di essa, i due differenziali $d_K = 1 \otimes d$ e $\Delta_K = 1 \otimes \Delta$: allora ([6, prop. 6.1.1])

Teorema 5.3 *Esiste una soluzione formale pari generica $\Gamma = \sum_i \Gamma_i \in K \otimes \ker \Delta$ all’equazione di Maurer–Cartan*

$$d\Gamma + \frac{1}{2}[\Gamma \bullet \Gamma] = 0$$

tale che

$$\Gamma_0 = 0 \quad e \quad \Gamma_1 = x^i \otimes \eta_i$$

ove η_i è un rappresentante armonico della classe di coomologia $[\varphi_i]$; inoltre per ogni $n \geq 2$, $\Gamma_n \in K \otimes \text{Im } \Delta$; infine Γ può essere normalizzato in modo che Γ_n non dipenda da x^0 per $n \geq 2$.

Una volta che questa soluzione formale è costruita possiamo considerare un operatore

$$d_\Gamma: K \otimes \Omega^*(M) \rightarrow K \otimes \Omega^*(M)$$

definito come

$$d_\Gamma(\tau) = d_K\tau + [\Gamma \bullet \tau]$$

che soddisfa alle

$$d_\Gamma^2 = 0 \quad e \quad d_\Gamma \Delta_K + \Delta_K d_\Gamma = 0$$

Consideriamo la coomologia del complesso $(K \otimes \Omega^*(M), d_\Gamma)$, che denoteremo con $H_K^*(M)$: evidentemente $H_K^*(M) = K \otimes H^*(M)$: l'immersione

$$(\ker \Delta_K, d_\Gamma) \rightarrow (K \otimes \Omega^*(M), d_\Gamma)$$

induce un isomorfismo in coomologia.

Ora vogliamo considerare una moltiplicazione in $H_K^*(M)$: notiamo che si tratta di un'algebra perché $\ker d_\Gamma$ è una sottoalgebra di $K \otimes \Omega^*(M)$ e $\text{Im } d_\Gamma$ è un ideale in questa sottoalgebra: dunque il quoziente, che è isomorfo a $H_K^*(M)$ pure è un'algebra; scriviamo "esplicitamente" questo prodotto o guardando agli elementi $X \in H_K^*(M)$ come a derivazioni \overline{X} nell'algebra $K \otimes \Omega^*(M)$ (rispetto all'azione sul primo fattore):

$$\overline{X \circ Y} = \overline{X}(\Gamma)\overline{Y}(\Gamma) \quad \text{mod } \text{Im } d_\Gamma$$

(il prodotto a destra è la moltiplicazione associativa in $K \otimes \Omega^*(M)$).

Ora consideriamo la forma bilineare (estendiamo l'integrale a una mappa K -lineare $\int: K \otimes \Omega^*(M) \rightarrow K$)

$$g(X, Y) = \int_M \overline{X}(\Gamma)\overline{Y}(\Gamma)$$

Il lemma 4.2 ci permette di concludere che questa forma è non degenere, ed il 3-tensore necessario alla definizione della struttura di varietà di Frobenius:

$$A(X, Y, Z) = g(X \circ Y, Z) = g(X, Y \circ Z)$$

L'assioma associativo per le varietà di Frobenius segue dall'associatività del prodotto \circ nell'algebra $K \otimes \Omega^*(M)$.

Resta da vedere la potenzialità, che è garantita da [6, teorema 6.2.3]; Manin descrive anche la funzione potenziale:

$$\Phi = \int_M \left(\frac{1}{6} \Gamma^3 - \frac{1}{2} dB \Delta B \right)$$

ove abbiamo supposto $\Gamma = \Gamma_1 + \Delta_K B$ e $B_0 = B_1 = 0$; allora

$$A(X, X, X) = X^3 \Phi$$

(per i calcoli, cfr. [6, p.43–44]).

Esplicitamente:

$$[\varphi_i] \circ [\varphi_j] = \sum_{h,k} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^i \partial x^j \partial x^h} g^{hk} [\varphi_k]$$

ove g^{hk} è il trasposto della metrica di Poincaré

$$g_{ij} = \int_M [\varphi_i] \wedge [\varphi_j]$$

Quindi la struttura di varietà di Frobenius su $H^*(M)$ è completamente descritta.

Bibliografia

- [1] F. Abraham, J. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Addison Wesley, 1978.
- [2] K.H. Bhaskara, K. Viswanath, *Calculus on Poisson manifolds*, Bull. London Math. Soc. **20**(1988), 68–72.
- [3] J.-L. Brylinsky, *A differential complex for Poisson manifolds*, J. Diff. Geom. **28** (1988), 93–114.
- [4] N. Bourbaki, *Groupes et algèbre de Lie, chap. 7-8*, Masson, 1981.
- [5] H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton, 1952.
- [6] Yu.I. Manin, *Three constructions of Frobenius manifolds: a comparative study*, math/9801006.
- [7] S.A. Merkulov, *Formality of canonical symplectic complexes and Frobenius Manifolds*, dg/9805072.
- [8] O. Mathieu, *Harmonic cohomology classes of symplectic manifolds*, Comment. Math. Helvetici **70** (1995), 1–9.
- [9] I. Vaisman, *Lectures on the geometry of Poisson manifolds*, Birkhäuser, Basel, 1994.
- [10] Yan Dong, *Hodge structure on symplectic manifolds*, Adv. in Math. **120** (1996), 143–154.



This work is licensed under a *Creative Commons Attribution-Non Commercial 3.0 Unported License*.