

## CAPITOLO 16

# GRUPPI E ALGEBRE DI LIE

I gruppi di matrici, ai quali abbiamo dedicato spazio perché si tratta dei gruppi che governano la fisica delle particelle, sono gli esempi classici dei gruppi di Lie: questi ultimi vengono di solito definiti in Geometria Differenziale come importanti esempi di varietà differenziabili (cfr. ad esempio [17]). Qui vogliamo invece introdurli come una notevole classe di esempi di gruppi topologici. In particolare non useremo il concetto di fibrato tangente, ma la trattazione delle algebre di Lie associate ai gruppi sarà data in uno spirito più algebrico, anziché nel modo usuale: questo, crediamo, renderà interessante la trattazione anche a chi già conosce queste nozioni per via geometrica.

### 16.1 Gruppi di Lie

Abbiamo visto come  $GL_n(\mathbb{R})$  sia una varietà in quanto è un aperto di una varietà: anche gli altri gruppi classici sono varietà differenziabili, anzi sono molto di più:

**16.1.1 Definizione** *Un gruppo topologico  $G$  si dice gruppo di Lie se ammette una struttura di varietà differenziabile in modo che il prodotto  $(g, h) \mapsto gh$  e l'inverso  $g \mapsto g^{-1}$  siano funzioni differenziabili.*

Si può dimostrare (teorema di Pontriagin) che un gruppo di Lie possiede sempre coordinate non solo differenziabili, ma anche analitiche: lo assumeremo sempre nel seguito (per la dimostrazione si può vedere [26]).

Dimostriamo piuttosto che su ogni gruppo di Lie esiste una misura di Haar, ma prima diamo una

**16.1.2 Definizione** *Se  $M$  è una varietà differenziabile e  $\mu$  una misura di Radon su  $X$ , diciamo che  $\mu$  è una misura differenziabile se per ogni carta locale  $(U, x)$*

della varietà esiste una funzione continua (positiva)  $\varphi_U : U \rightarrow \mathbb{R}$  tale che, per ogni insieme misurabile  $E \subset U$ :

$$\mu(E) = \int_E \varphi_U(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

(ove con  $dx_1 \dots dx_n$  indichiamo la misura di Lebesgue in  $\mathbb{R}^n$ ) e tale che se  $U$  e  $V$  sono carte locali tali che  $U \cap V \neq \emptyset$  allora

$$\varphi_V(y) = \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| \varphi_U(x)$$

ove abbiamo indicato lo Jacobiano in  $U \cap V$  con

$$\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| = \det \left( \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) \right)$$

La scelta di una tale funzione  $\varphi_u$  per ogni carta locale spesso si dice *forma di volume* sulla varietà differenziabile: le varietà per le quali questa scelta è possibile si dicono *orientabili*. I gruppi di Lie rientrano in questa classe<sup>1</sup>:

**16.1.3 Teorema (HURWITZ)** *Su un gruppo di Lie esiste un'unica (a meno di un fattore di scala) misura invariante.*

**DIMOSTRAZIONE:** Consideriamo un gruppo di Lie  $G$  e due carte locali  $(U, x)$  e  $(V, y)$  in  $G$  tali che  $g \cdot U \subset V$  per qualche  $g \in G$ : perché una forma di volume sia associata ad una misura invariante è necessario che

$$(*) \quad \varphi_V(gh) \left| \frac{\partial x(g)}{\partial x(h)} \right| = \varphi_U(h)$$

Fissiamo ora  $h \in U$  e moltiplichiamo per un fattore costante in modo da avere  $\varphi(h) = 1$ : allora ogni forma invariante deve essere,

$$(**) \quad \varphi_V(gh) = \left| \frac{\partial x(g)}{\partial x(h)} \right|^{-1}$$

perché la (\*) sia vera. Questo dimostra che, se una forma di volume esiste, allora è unica a meno di un fattore di scala. Ma la (\*\*) può essere usata proprio per definire una tale forma in  $gh$ .

QED

<sup>1</sup>In realtà godono di una proprietà ben più forte: sono parallelizzabili, cfr. [17].

Ovviamente  $GL_n(\mathbb{R})$  è un gruppo di Lie, dato che prodotto e inverso sono espressi da funzioni polinomiali e razionali, quindi analitiche. Non è così immediato dimostrare che gli altri gruppi classici sono gruppi di Lie: per farlo usiamo un procedimento generale che coinvolge la trasformata di Cayley.

**16.1.4 Definizione** *Un omomorfismo di gruppi di Lie è una funzione differenziabile fra essi che sia anche un omomorfismo di gruppi. Un isomorfismo di gruppi di Lie è un isomorfismo di gruppi che sia un diffeomorfismo di varietà differenziabili.*

In particolare un omomorfismo di gruppi è un omomorfismo di gruppi topologici. Possiamo anche definire i sottogruppi di Lie, sebbene possano avere in generale un comportamento bizzarro.

**16.1.5 Esempio** *Si consideri il gruppo  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ; se consideriamo il sottogruppo di  $\mathbb{R}^2$  dato da una retta  $R$  passante per l'origine, questo induce sempre sul quoziente  $\mathbb{T}^2$  un sottogruppo di Lie: in particolare, se  $R$  è una retta che forma un angolo irrazionale con l'asse delle ascisse, ad esempio, allora il sottogruppo indotto in  $\mathbb{T}^2$  sarà una curva ergodica, cioè denso in  $\mathbb{T}^2$ , pur essendo un sottogruppo di dimensione 1.*

Diamo ora una procedura generale per dimostrare che certi gruppi di matrici sono gruppi di Lie.

**16.1.6 Definizione** *Una matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  si dice regolare se  $\det(A + I) \neq 0$ ; se  $A$  è regolare, la matrice*

$$A^\# := (I - A)(I + A)^{-1}$$

*si dice trasformata di Cayley di  $A$ .*

L'insieme  $R_n(\mathbb{R})$  delle matrici regolari è un aperto denso in  $M_n(\mathbb{R})$  e quindi è una varietà differenziabile.

**16.1.7 Lemma** *La funzione  $A \mapsto A^\#$  è un diffeomorfismo di  $R_n(\mathbb{R})$  in sé ed è involutivo:  $A^{\#\#} = A$ .*

DIMOSTRAZIONE: Sia  $B = A^\#$ ; allora

$$I + B = I + (I - A)(I + A)^{-1} = ((I + A)(I - A))(I + A)^{-1} = 2(I - A)^{-1}$$

e, analogamente

$$I - B = 2A(I + A)^{-1}$$

Quindi  $\det(I + B) \neq 0$  e

$$B^\# = (I - B)(I + B)^{-1} = A$$

Che la mappa  $A \mapsto A^\#$  sia differenziabile è ovvio.

QED

**16.1.8 Teorema** *Un gruppo di matrici  $G$  tale che le trasformate di Cayley delle sue matrici regolari sia un aperto in uno spazio vettoriale di matrici  $M$  è un gruppo di Lie.*

DIMOSTRAZIONE: Dato che le trasformate di Cayley di  $G \cap R_n(\mathbb{R})$  formano uno spazio vettoriale, la mappa  $A \mapsto A^\#$  può vedersi come un sistema di coordinate locali sull'aperto delle matrici regolari in  $G$  (che ovviamente è un intorno di  $I$ ); così abbiamo un sistema di coordinate intorno ad ogni matrice  $C \in G$ , considerando l'insieme delle matrici della forma  $AC$  con  $A \in G \cap R_n(\mathbb{R})$  e la mappa  $AC \mapsto A^\#$ : per vedere che  $G$  è una varietà differenziabile non resta quindi che verificare che il cambiamento di coordinate fra queste carte è differenziabile. Ma, se  $C_1, C_2 \in G$ , le carte locali intorno ad essi sono formate dai prodotti  $A_1C_1$  e  $A_2C_2$ ; se esiste un punto in comune a questi due intorni allora  $A_1C_1 = A_2C_2$  e quindi le coordinate sono  $A_1^\#$  e  $A_2^\#$  e sono, per definizione, funzioni razionali nelle entrate delle matrici  $A_1$  e  $A_2$ , quindi la loro composizione è certamente differenziabile. Infine, la trasformata di Cayley del prodotto di matrici è una funzione razionale nelle entrate delle matrici stesse, quindi differenziabile. Ne segue che  $G$  è un gruppo di Lie.

QED

**16.1.9 Esempio** *Se  $A \in O(n)$  è una matrice ortogonale e  $B = A^\#$ , allora*

$$\begin{aligned} B^T &= (I + A^T)^{-1}(I - A^T) = (I + A^{-1})^{-1}(I - A^{-1}) \\ &= (I + A^{-1})^{-1}A^{-1}A(I - A^{-1}) = (A(I + A^{-1}))^{-1}(A - I) \\ &= (A + I)^{-1}(A - I) = -(I - A)(I + A)^{-1} = -B \end{aligned}$$

*cioè  $B + B^T = 0$ , i.e.  $B \in \mathfrak{so}(n)$ . Viceversa, un conto analogo mostra che, se  $B \in \mathfrak{so}(n)$  allora  $A^T = A^{-1}$  i.e.  $A \in O(n)$ . In altri termini le matrici ortogonali regolari sono esattamente le trasformate di Cayley delle matrici antisimmetriche.*

Un ragionamento analogo vale per i gruppi unitario e simplettico (considerando matrici regolari complesse e quaternioniche), così come per i loro sottogruppi speciali. Quindi

**16.1.10 Corollario** *I gruppi di matrici  $O(n)$ ,  $U(n)$ ,  $Sp(n)$ ,  $SO(n)$  e  $SU(n)$  sono gruppi di Lie.*

Notiamo che gli spazi vettoriali delle coordinate dei gruppi classici compatti sono *algebre di Lie*. Ricordiamo che un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  è uno spazio vettoriale (su un campo fissato: nel nostro caso  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ) fornito di una mappa bilineare

$$\mathfrak{l} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

che scriviamo  $[X, Y] = \mathfrak{l}(X, Y)$  che sia anticommutativo e verifichi l'identità di Jacobi:

$$\begin{aligned} [X, Y] + [Y, X] &= 0 \\ [[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] &= 0 \end{aligned}$$

### 16.1.11 Esempio

- L'algebra delle matrici  $M_n(\mathbb{R})$  rispetto al commutatore

$$[A, B] = AB - BA$$

è un'algebra di Lie.

- In generale, se  $\mathcal{A}$  è un'algebra associativa (ad esempio un'algebra di Banach), porre  $[A, B] = AB - BA$  la rende un'algebra di Lie: ovviamente se  $\mathcal{A}$  è pure commutativa, la struttura di Lie che si ottiene è banale (cioè nulla).

L'algebra di Lie degli operatori lineari di uno spazio vettoriale  $V$  rispetto al commutatore  $[F, G] = FG - GF$  si denota  $\mathfrak{gl}(V)$ .

Ora è immediato che, se  $A, B \in \mathfrak{so}(n)$ , allora

$$\begin{aligned} [A, B] + [A, B]^T &= AB - BA - B^T A^T + A^T B^T = AB - A^T B - BA + BA^T \\ &= (A - A^T)B - B(A + A^T) = 0 \end{aligned}$$

Quindi  $\mathfrak{so}(n)$  è un'algebra di Lie (analogamente lo sono  $\mathfrak{su}(n)$  e  $\mathfrak{sp}(n)$ ). Inoltre, per le identità di Weyl, il prodotto del gruppo  $SO(n)$  è legato al commutatore dell'algebra  $\mathfrak{so}(n)$  dalla formula

$$e^A e^B (e^A)^{-1} (e^B)^{-1} = e^{[A, B]}$$

a meno di termini superiori al secondo.

## 16.2 Funtore di Lie

Consideriamo una costruzione che permette di definire algebre di Lie a partire da algebre date qualsiasi (non necessariamente associative): se  $\mathcal{A}$  è un'algebra qualsiasi, consideriamo lo spazio  $\text{End}(\mathcal{A})$  degli operatori lineari di  $\mathcal{A}$  in sé: si tratta di un'algebra associativa rispetto alla composizione di endomorfismi. Sia  $\text{Der}(\mathcal{A})$  il sottospazio vettoriale degli elementi  $D \in \text{End}(\mathcal{A})$  tali che

$$D(ab) = D(a)b + aD(b)$$

Gli elementi di  $\text{Der}(\mathcal{A})$  si dicono *derivazioni* dell'algebra  $\mathcal{A}$ .

**16.2.1 Proposizione**  $\text{Der}(\mathcal{A})$  è un'algebra di Lie.

DIMOSTRAZIONE: Basta definire il commutatore come

$$[D, D'](a) = D(D'(a)) - D'D'(a)$$

Allora  $[D, D'] \in \text{Der}(\mathcal{A})$ :

$$\begin{aligned} [D, D'](ab) &= D(D'(a)b) + D(aD'(b)) - D'(D(a)b) - D'(aD(b)) \\ &= D(D'(a)b) + D'(a)D(b) + D(a)D'(b) + aD(D'(b)) - \\ &\quad - D'(D(a)b) - D(a)D'(b) - D'(a)D(b) - aD'(D(b)) \\ &= (D(D'(a)) - D'(D(a)))b + a(D(D'(b)) - D'(D(b))) \\ &= [D, D'](a)b + a[D, D'](b) \end{aligned}$$

Che  $[\cdot, \cdot]$  definisca una struttura di algebra di Lie si verifica allo stesso modo che per le parentesi  $[A, B] = AB - BA$  su  $M_n(\mathbb{R})$ .

QED

**16.2.2 Esempio** Se  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie,  $\text{Der}(\mathfrak{g})$  è l'algebra di Lie degli operatori lineari  $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  tali che

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY]$$

Se consideriamo quindi la rappresentazione aggiunta di  $\mathfrak{g}$  su se stessa, cioè la mappa lineare

$$\begin{aligned} \text{ad} : \mathfrak{g} &\rightarrow \text{End}(\mathfrak{g}) \\ X &\rightarrow (Y \rightarrow \text{ad}_X Y = [X, Y]) \end{aligned}$$

l'identità di Jacobi in  $\mathfrak{g}$  vuol dire che  $\text{ad}_X$  è una derivazione per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ .

**16.2.3 Definizione** Se  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie, una rappresentazione di  $\mathfrak{g}$  è un omomorfismo di algebre di Lie

$$\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

Un omomorfismo fra le algebre di Lie  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$  è un operatore lineare  $F : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  tale che

$$F[X, Y] = [FX, FY]$$

rispetto ai commutatori di  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$ .

Prima di continuare la discussione sulle algebre di Lie, vediamo il motivo per il quale le abbiamo introdotte.

Se  $M$  è una varietà differenziabile, possiamo considerare l'algebra  $C^\infty(M)$  delle funzioni differenziabili da  $M$  in  $\mathbb{R}$ : si tratta di un'algebra rispetto alla moltiplicazione punto per punto:

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

È quindi un'algebra commutativa e associativa: si tratta una sottoalgebra associativa dell'algebra di Banach  $C(M)$  delle funzioni continue sullo spazio topologico  $M$  a noi ben nota, ma non una sottoalgebra di Banach: sappiamo infatti che lo spazio  $C^\infty(M)$  è solo uno spazio di Fréchet.

Possiamo comunque considerare le derivazioni dell'algebra  $C^\infty(M)$ :

**16.2.4 Definizione** *Un campo di vettori su una varietà differenziabile  $M$  è una derivazione dell'algebra  $C^\infty(M)$ : l'insieme di tali campi si denota  $\mathfrak{X}(M)$ .*

**16.2.5 Esempio** *Se  $M = \mathbb{R}$ , e se  $x$  è una coordinata su  $\mathbb{R}$ , allora la mappa lineare*

$$f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}$$

*è un campo di vettori (per la regola di Leibniz di derivazione del prodotto di funzioni). Si noti che  $X(c) = 0$  se  $c$  è costante, dato che  $X(c) = X(1)c + X(c)1$  e quindi  $X(1) = 0$ , da cui  $X(c) = 0$ .*

Naturalmente  $\mathfrak{X}(M)$  è uno spazio vettoriale reale di dimensione infinita: inoltre, per la proposizione precedente, è un'algebra di Lie rispetto al commutatore di campi  $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ .

**16.2.6 Teorema** *I campi vettoriali di  $\mathbb{R}^n$  sono gli operatori differenziali del primo ordine, cioè funzionali della forma*

$$X = \sum h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

*con  $h_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .*

**DIMOSTRAZIONE:** Intanto notiamo che su una varietà differenziabile  $M$ , un campo di vettori è un operatore "locale", cioè, se  $f \in C^\infty(M)$  si annulla in un intorno  $U$  di un punto  $x$  allora  $X(f)$  è nulla in  $x$ : basta considerare una funzione  $h$  che sia 1 in  $U$  e zero fuori da  $V$  (ad esempio come quella considerata a pag. 242)

$$X(f)(x) = X(1-h)(x)f(x) + X(f)(x)(1-h(x)) = 0$$

Ora mostriamo che in  $\mathbb{R}^n$  (e quindi nell'intorno di un punto di una qualsiasi varietà) i campi di vettori sono esattamente gli operatori lineari differenziali. Se  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  e  $x$  in un intorno dello zero di  $\mathbb{R}^n$ :

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(tx) dt = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$$

Quindi

$$(Xf)(0) = \sum_{i=1}^n X(x_i)(0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$$

sicché, intorno a zero,

$$X(f) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

con  $h_i(0) = X(x_i)(0)$ .

QED

Consideriamo ora un gruppo di Lie  $G$ : dato che, in particolare è una varietà differenziabile, possiede la sua algebra di Lie dei campi di vettori  $\mathfrak{X}(G)$ .

**16.2.7 Definizione** Se  $X \in \mathfrak{X}(G)$ , diciamo che si tratta di un campo invariante a sinistra se

$$\forall f \in C^\infty(G) \quad \forall g \in G \quad X(f_g) = X(f)$$

ove  $f_g$  è la funzione  $(f_g)(h) = f(gh)$ .

Dato che, se  $X$  e  $Y$  sono invarianti a sinistra allora

$$[X, Y](f_g) = X(Y(f_g)) - Y(X(f_g)) = X(Y(f)) - Y(X(f)) = [X, Y](f)$$

si ha che

**16.2.8 Proposizione** Il sottospazio  $L(G) \subset \mathfrak{X}(G)$  dei campi di vettori invarianti a sinistra è una sottoalgebra di Lie dell'algebra dei campi di vettori, che si dice algebra di Lie del gruppo.

Mentre lo spazio  $\mathfrak{X}(G)$  è di dimensione infinita, l'algebra di Lie  $L(G)$  ha dimensione finita pari alla dimensione del gruppo: per vederlo interpretiamone gli elementi come curve integrali di equazioni differenziali.

Consideriamo cioè  $X \in \mathfrak{X}(M)$  su una varietà ed una carta locale  $(U, x)$  intorno ad un punto fissato  $p \in M$ ; supponiamo che  $x(p) = 0$ . Possiamo allora scrivere un'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt}(f \circ c)(t) = X(f)(c(t))$$



ove  $f \in C^\infty(M)$  e  $c : I \rightarrow M$  è differenziabile in un intervallo  $I$  della retta reale contenente lo zero. Le soluzioni di questa equazione, tali che  $c(0) = p$  si dicono *curve integrali* del campo vettoriale  $X$  nel punto  $p$ . Una *curva integrale massimale* è una curva integrale  $c : I \rightarrow M$  di  $X$  tale che non esistano curve integrali  $c' : I' \rightarrow M$  di  $X$  tali che  $I \subset I'$  e  $c'|_I = c$ ; un campo vettoriale si dice *completo* se tutte le sue curve integrali sono massimali (e.g. se  $M$  è compatta ogni campo è completo).

**16.2.9 Definizione** *Un gruppo a un parametro su un gruppo di Lie  $G$  è un omomorfismo di gruppi di Lie  $c : \mathbb{R} \rightarrow G$ .*

In particolare  $c(0) = e$ . Si noti che i gruppi ad un parametro che abbiamo considerato fin qui sono gruppi ad un parametro nel senso della definizione precedente solo se lo spazio di Hilbert sul quale sono definiti è di dimensione finita.

**16.2.10 Teorema** *I gruppi a un parametro su un gruppo di Lie sono esattamente le curve integrali dei campi invarianti a sinistra.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo un gruppo a un parametro  $c$ ; la curva differenziabile

$$c_g(t) = gc(t)$$

è tale che  $c_g(0) = g$  per un fissato  $g \in G$ . Consideriamo una carta  $(U, x)$  intorno a  $g$  e definiamo un campo di vettori

$$(Xf)(g) = \left( \frac{d}{dt}(f \circ c_g) \right)_{t=0}$$

Si tratta di una derivazione in  $C^\infty(U)$  per la regola di derivazione delle funzioni composte, e per definizione  $c_g$  è una sua curva integrale. È un campo invariante perché

$$c_{hg}(t) = hgc(t) = h(c_g(t))$$

Sia ora  $X$  un campo di vettori invariante a sinistra,  $c$  una sua curva integrale massimale tale che  $c(0) = e$ ; dimostriamo che si tratta di un gruppo a un parametro. Per l'invarianza di  $X$  abbiamo che

$$c_{hg} = (c_g)_h$$

(nella notazione precedente). Ora: dato che, fissato  $s$ , la curva  $t \mapsto c(t+s)$  è integrale per  $X$  e in 0 vale  $h = c_e(s)$  allora  $c_h(t) = c_e(t+s)$  e quindi

$$c(s+t) = c(t+s) = c_e(t+s) = c_h(t) = hc_e(t) = c_e(s)c_e(t) = c(s)c(t)$$

Resta solo da far vedere che  $c$  è definita in  $\mathbb{R}$ , dato che a priori una curva integrale massimale è definita su un intervallo  $I \subset \mathbb{R}$ . Ma anche se  $I \subsetneq \mathbb{R}$  allora, per ogni  $t \in \mathbb{R}$  esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $t/n \in I$  e quindi se definiamo

$$c(t) = c(t/n)^n$$

otteniamo un gruppo a un parametro che estende  $c$ ; se mostriamo che è una curva integrale per  $X$  abbiamo un assurdo, per massimalità di  $c$ .

Ed infatti:

$$\begin{aligned} X(f)(c(t)) &= X(f)(c(t/n)^n) = X(f)(c(t/n) \dots c(t/n)) \\ &= X(f_{c(t/n)^{n-1}})(c(t/n)) = \frac{d}{dt}(f_{c(t/n)^{n-1}} \circ c)(t/n) \\ &= \frac{d}{dt}(f(c(t/n)^n)) = \frac{d}{dt}(f \circ c)(t) \end{aligned}$$

QED

**16.2.11 Corollario** *Un campo invariante a sinistra su un gruppo di Lie è completo.*

Ora consideriamo un sistema di coordinate  $(U, x)$  di  $G$  intorno all'elemento neutro  $e$ ; se  $X$  è un campo invariante a sinistra e  $c$  una sua curva integrale massimale, allora  $c$  è completamente determinata dai numeri

$$a_i = \left( \frac{dc_i}{dt} \right)_{t=0}$$

ove  $c_i = x_i \circ c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ; infatti  $c_i(0) = 0$  e  $c_i$  è l'unica soluzione del sistema differenziale  $\dot{c}_i = X(x_i) \circ c$  (teorema di esistenza e unicità: le  $c_i$  sono differenziabili).

Quindi, localmente, un gruppo a un parametro è determinato dal "vettore tangente"  $(a_1, \dots, a_n)$  e viceversa: questo significa che

**16.2.12 Proposizione** *Lo spazio vettoriale  $L(G)$  è isomorfo a  $\mathbb{R}^{\dim G}$ .*

Inoltre questo mostra che l'algebra di Lie di un gruppo dipende solo dalla struttura locale del gruppo intorno a  $e$ : vogliamo mostrare che  $L(G)$  determina effettivamente il gruppo intorno a  $e$ ; per vederlo, basta mostrare che se due gruppi  $G$  e  $U'$  sono *localmente isomorfi*, cioè se esiste un diffeomorfismo

$$\varphi : U \rightarrow U'$$

fra una carta locale  $U$  in  $G$  e una carta locale  $U'$  in  $G$  tale che

$$\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$$

(per  $g, h$  tali che  $gh \in U$  e  $\varphi(g)\varphi(h) \in U'$ ), allora le algebre di Lie  $L(G)$  e  $L(G')$  sono isomorfe (che lo siano come spazi vettoriali segue dal fatto che  $\dim G = \dim G'$ ). Questo è conseguenza dal

**16.2.13 Teorema** *La mappa  $L : G \mapsto L(G)$  che ad un gruppo di Lie associa la sua algebra è un funtore dalla categoria dei gruppi di Lie alla categoria delle algebre di Lie.*

DIMOSTRAZIONE: Basta far vedere che se  $\varphi : G \rightarrow H$  è un omomorfismo di gruppi di Lie allora è indotto un omomorfismo  $L(\varphi) : L(G) \rightarrow L(H)$  di algebre di Lie. In effetti, basta porre, se  $X \in L(G)$  e  $f \in C^\infty(H)$ :

$$L(\varphi)(X)(f) = X(f \circ \varphi)$$

In effetti, se  $L(\varphi)(X)$  è un campo di vettori invariante a sinistra se lo è  $X$ , dato che

$$(f \circ \varphi)_g(h) = f(\varphi(gh)) = f(\varphi(g)\varphi(h)) = (f_{\varphi(g)} \circ \varphi)(h)$$

e quindi

$$L(\varphi)(X)(f_{\varphi(g)}) = X(f_{\varphi(g)} \circ \varphi) = X((f \circ \varphi)_g) = X(f \circ \varphi) = L(\varphi)(X)(f)$$

Mostriamo infine che  $L(\varphi)$  è un omomorfismo: per vederlo dimostriamo intanto che, se  $X \in L(G)$  allora esiste un unico  $X' \in L(H)$  tale che

$$(\dagger) \quad (X'f) \circ \varphi = X(f \circ \varphi) = (L(\varphi)X)(f)$$

Definiamo la funzione  $X'f : G \rightarrow \mathbb{R}$  in  $e$  come

$$(X'f)(e) = X(f \circ \varphi)(e)$$

e, per ogni  $h \in H$  (si tenga conto che  $\varphi(e) = e$ ):

$$(X'f)(h) = (X'f_h)(e) = X(f_h \circ \varphi)(e)$$

Allora, per definizione,  $X'$  è un campo invariante a sinistra e verifica la  $(\dagger)$ . Ora mostriamo che

$$L(\varphi)[X, Y] = [X', Y'] \circ \varphi$$

Infatti

$$\begin{aligned} L(\varphi)[X, Y]f &= X(Y(f \circ \varphi)) - Y(X(f \circ \varphi)) = X((Y'f) \circ \varphi) - Y((X'f) \circ \varphi) \\ &= (X'(Y'f)) \circ \varphi - (Y'(X'f)) \circ \varphi = ([X', Y']f) \circ \varphi \end{aligned}$$

Infine mostriamo che  $\varphi$  è un omomorfismo di algebre di Lie:

$$\begin{aligned} [L(\varphi)X, L(\varphi)Y]f &= L(\varphi)X(L(\varphi)Y(f)) - L(\varphi)Y(L(\varphi)X(f)) \\ &= (L(\varphi)X)((Y'f) \circ \varphi) - (L(\varphi)Y)((X'f) \circ \varphi) \\ &= (X'(Y'f)) \circ \varphi - (Y'(X'f)) \circ \varphi \\ &= ([X', Y']f) \circ \varphi = L(\varphi)[X, Y](f) \end{aligned}$$

QED

Il funtore  $L$  si dice *funtore di Lie*. Abbiamo visto come esista una corrispondenza biunivoca fra gli elementi dell'algebra di Lie  $L(G)$  (campi di vettori invarianti a sinistra) e gruppi a un parametro su  $G$ : usiamo questa biiezione per costruire la mappa esponenziale su un gruppo di Lie qualsiasi. Precisamente, definiamo

$$\exp : L(G) \longrightarrow G$$

come

$$\exp X = c(1)$$

ove  $c : \mathbb{R} \longrightarrow G$  è l'unico gruppo a un parametro associato a  $X$ .

Notiamo che  $\exp 0 = e$ .

**16.2.14 Teorema**  $\exp$  è un diffeomorfismo locale intorno a  $0 \in L(G)$ .

**DIMOSTRAZIONE:** Fissiamo delle coordinate  $(U, x)$  intorno a  $e \in G$  e consideriamo un campo di vettori  $X$  invariante ed il corrispondente gruppo ad un parametro  $c$ ; possiamo scrivere la mappa esponenziale in coordinate:

$$x \circ \exp : L(G) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ottenendo una funzione differenziabile fra spazi vettoriali della stessa dimensione: per mostrare che è un diffeomorfismo intorno a zero basta notare che la sua matrice jacobiana è invertibile in zero ed usare il teorema della funzione inversa. Ma gli elementi della jacobiana sono le funzioni  $\partial(x_i \circ \exp)/\partial x_j$  e si calcolano in 0 come segue:

$$\sum_j \left( \frac{\partial x_i \circ \exp}{\partial x_j} \right)_0 \dot{x}_j(0) = \left( \frac{dx_i \circ c}{dt} \right)_0 = a_i$$

ove  $(a_1, \dots, a_n)$  è il vettore corrispondente a  $c$  nell'isomorfismo fra lo spazio dei gruppi a un parametro e  $\mathbb{R}^n$  (abbiamo tenuto conto che  $c(t) = \exp tX$ ) che, per  $c \neq 0$  è diverso da zero.

QED

Nel caso di un gruppo di matrici, la mappa esponenziale è esattamente l'esponenziale di matrici: ogni gruppo a un parametro è infatti della forma  $t \longmapsto e^{tX}$  ove si identificano gli elementi  $X$  dell'algebra di Lie con le matrici corrispondenti in una fissata base (si tratta di operatori lineari).

Il funtore di Lie permette di realizzare una equivalenza di categorie, come asserito dal seguente teorema dovuto a E. Cartan:

**16.2.15 Teorema** *Il funtore di Lie è una equivalenza fra la categoria dei gruppi di Lie connessi e semplicemente connessi e la categoria delle algebre di Lie.*

Questo vuol dire che ogni algebra di Lie (di dimensione finita) è l'algebra di Lie di un gruppo di Lie, e che esiste un solo gruppo connesso e semplicemente connesso per cui questo è vero; per la dimostrazione si rimanda ai testi specialistici, come [26] o [27].

L'idea consiste nei seguenti passi: si fa vedere che ogni algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie di matrici (teorema di Ado, cfr. 16.3.18), si dimostra poi l'esistenza di intorno aperti in  $\mathfrak{g}$  tali che la serie di Campbell–Hausdorff che determina  $C$  nell'equazione  $e^A e^B = e^C$  converga e si dimostra che la struttura di gruppo così trovata si può “globalizzare” ad una struttura di gruppo di Lie.

Facciamo qualche esempio: consideriamo un gruppo di Lie di matrici  $G$  per il quale le trasformate di Cayley dei suoi elementi regolari sono un aperto in uno spazio vettoriale  $V$ .

**16.2.16 Teorema** *Lo spazio  $V$  è l'algebra di Lie  $L(G)$ .*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo  $X \in L(G)$  e quindi il corrispondente gruppo a un parametro  $t \mapsto e^{tX}$  (siamo in un gruppo di matrici); ma per ipotesi lo spazio delle matrici regolari in  $G$  forma un intorno dell' $I$  e quindi esiste  $t$  tale che

$$(e^{tX})^\# = (I - e^{tX})(I + e^{tX})^{-1} \in G^\# = V$$

Ma  $V$  è uno spazio vettoriale, quindi la derivata rispetto a  $t$  di  $e^{tX}$  calcolata in zero appartiene ancora a  $V$  e

$$\frac{d}{dt}(e^{tX})^\# = -Xe^{tX}(I + e^{tX})^{-1} + (I - e^{tX})\frac{d}{dt}((I + e^{tX})^{-1})$$

e quindi

$$\left(\frac{d}{dt}(e^{tX})^\#\right)_0 = -\frac{1}{2}X$$

i.e.  $X \in V$ . Quindi  $L(G) \subset V$ : ma si tratta di spazi vettoriali della medesima dimensione, quindi  $L(G) = V$ .

QED

Ad esempio:

$$L(O(n)) = L(SO(n)) = \mathfrak{so}(n), \quad L(SU(n)) = \mathfrak{su}(n), \quad L(Sp(n)) = \mathfrak{sp}(n)$$

Il commutatore dell'algebra di Lie di un gruppo di matrici è esattamente il commutatore di matrici.

Dimostriamo ora due risultati fondamentali sul rapporto fra gruppi e algebre di Lie.

**16.2.17 Lemma** *Se  $H$  è un sottogruppo chiuso di un gruppo di Lie allora*

$$V = \{X \in L(G) \mid \forall t \in \mathbb{R} \exp tX \in H\}$$

*è un sottospazio vettoriale di  $L(G)$ .*

**DIMOSTRAZIONE:** Notiamo intanto che, se  $\{Z_n\}$  è una successione di elementi non nulli in  $L(G)$  tale che per ogni  $n$ :  $\exp Z_n \in H$  allora

$$(*) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n}{\|Z_n\|} = Z \Rightarrow Z \in V$$

(ove  $\|\cdot\|$  è una norma qualsiasi sullo spazio di dimensione finita  $V$ ). Infatti, dato che  $\|Z_n\| \rightarrow 0$  (e  $\|Z_n\| \neq 0$ ) deve esistere una successione di numeri interi  $\{k_n\}$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n \|Z_n\| = t$$

e quindi

$$\exp tZ = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(k_n Z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\exp Z_n)^{k_n}$$

ove  $(\exp Z_n)^{k_n} \in H$  e, dato che  $H$  è chiuso,  $\exp tZ \in H$ , i.e.  $Z \in V$ .

Ora si osservi che, scrivendo in coordinate locali lo sviluppo di Taylor, abbiamo, su un intorno di  $e$  diffeomorfo tramite  $\exp$  a un intorno di  $L(G)$ :

$$(**) \quad \exp^{-1}(\exp X \cdot \exp Y) = X + Y + O(\|X\| + \|Y\|)$$

Dimostriamo ora che  $V$  è un sottospazio vettoriale di  $L(G)$ : ovviamente se  $X \in V$  e  $t \in \mathbb{R}$  allora  $tX \in V$ , mentre se  $X, Y \in V$  sono tali che  $X + Y \neq 0$ , allora per  $Z = (X + Y)/\|X + Y\|$  e

$$Z_n = \exp^{-1}(\exp \frac{1}{n}X \cdot \exp \frac{1}{n}Y)$$

la (\*) è soddisfatta (in virtù della (\*\*)). Quindi  $X + Y \in V$  e  $V$  è un sottospazio vettoriale.

QED

**16.2.18 Teorema** *Se  $H$  è un sottogruppo topologico chiuso di un gruppo di Lie  $G$  allora  $H$  è un gruppo di Lie e la sua algebra di Lie è formata dagli elementi di  $L(G)$  i cui esponenziali appartengono a  $H$ .*

**DIMOSTRAZIONE:** Scegliamo un sistema di coordinate  $(U, x)$  intorno a  $e \in G$  (e quindi, traslando, intorno a ogni suo punto) tale che la mappa esponenziale sia in  $U$  un diffeomorfismo; preso  $V$  come nel lemma, possiamo definire delle coordinate su  $H$  semplicemente considerando  $\exp^{-1}U \cap V$  in  $L(G)$  ed usando ivi la mappa esponenziale per definire delle coordinate che, per il lemma, sono coordinate su  $H$ .

QED

Ad esempio ogni sottogruppo chiuso di  $GL_n(\mathbb{R})$  è un gruppo di Lie: questo è un metodo che va bene per  $SL_n(\mathbb{R})$  e tutti gli altri gruppi classici.

Dimostriamo ora che un gruppo topologico può sostenere al più una struttura di gruppo di Lie.

**16.2.19 Lemma** *Se  $c : \mathbb{R} \rightarrow G$  è un omomorfismo continuo allora è differenziabile, cioè un gruppo a un parametro.*

**DIMOSTRAZIONE:** Scegliamo al solito un intorno  $U$  di  $e \in G$  sul quale  $\exp$  sia un diffeomorfismo: possiamo, al più restringendo questo intorno, supporre che per ogni  $g \in U$  esista  $h \in U$  tale che  $h^2 = g$ . Allora se  $\varepsilon > 0$  è tale che  $c([- \varepsilon, \varepsilon]) \subset U$ , e se  $c(\varepsilon) = \exp X$ , allora

$$c\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = c(\varepsilon) = \exp X = \left(\exp \frac{1}{2}X\right)^2$$

Iterando:  $c(\varepsilon/2^k) = \exp X/2^k$  e quindi  $c(q\varepsilon) = \exp qX$  per ogni  $q \in \mathbb{Q}$  della forma  $n/2^n \in [-1, 1]$ : ma questi razionali sono densi in  $[-1, 1]$  e, per continuità di  $c$  troviamo allora

$$\forall t \in [-1, 1] \quad c(t\varepsilon) = \exp tX$$

e quindi per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . In particolare  $c$  è differenziabile.

QED

**16.2.20 Teorema** *Se  $f : G \rightarrow G'$  è un omomorfismo di gruppi topologici fra i gruppi di Lie  $G$  e  $G'$  allora è differenziabile.*

**DIMOSTRAZIONE:** Basta mostrare che lo è in un intorno di  $e \in G$ : fissiamo quindi una carta locale  $(U, x)$  intorno a  $e \in G'$  e definiamo

$$f_i(t) = f(\exp tE_i)$$

per una fissata base  $(E_1, \dots, E_n)$  di  $L(G)$ . Abbiamo così degli omomorfismi continui  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow G'$ , e, per il lemma, sono differenziabili ed esistono  $E'_i \in L(G')$  tali che

$$f_i(t) = \exp tE'_i$$

Ora consideriamo due mappe differenziabili

$$h : \mathbb{R}^n \rightarrow G \quad \text{e} \quad h' : \mathbb{R}^n \rightarrow G'$$

definite come

$$h(t_1, \dots, t_n) = \exp t_1 E_1 \cdots \exp t_n E_n \quad \text{e} \quad h'(t_1, \dots, t_n) = \exp t_1 E'_1 \cdots \exp t_n E'_n$$

Si tratta, intorno alle  $e \in G, G'$  di diffeomorfismi; ora usiamo l'ipotesi che  $f$  sia un omomorfismo di gruppi:

$$f(h(t_1, \dots, t_n)) = f(t_1) \cdots f(t_n) = \exp t_1 E'_1 \cdots \exp t_n E'_n = h'(t_1, \dots, t_n)$$

Cioè intorno a  $e$  abbiamo espresso  $f$  come  $h' \circ h^{-1}$  composizione di mappe differenziabili. Quindi  $f$  è differenziabile.

QED

**16.2.21 Corollario** *Su un gruppo topologico esiste al più una struttura di gruppo di Lie.*

DIMOSTRAZIONE: Se  $G$  è un gruppo topologico che possiede due strutture distinte di gruppo di Lie (per la medesima topologia fissata), indichiamo i gruppi di Lie corrispondenti con  $G'$  e  $G''$  (come gruppi topologico sono esattamente  $G$ ). L'identità  $\text{id} : G' \rightarrow G''$  è ovviamente una mappa continua fra questi gruppi di Lie, quindi è differenziabile: anche l'inverso dell'identità lo è e quindi  $G'$  e  $G''$  sono isomorfi come gruppi di Lie per mezzo dell'identità: sono cioè lo stesso gruppo di Lie.

QED

Sorge spontanea la domanda se un gruppo topologico possieda sempre una struttura di gruppo di Lie: si tratta di un arduo problema (il quinto nella famosa lista di Hilbert) risolto da von Neumann, Pontriagin, Montgomery, Zippin, Gleason e Yamabe. Citiamo i loro risultati: osserviamo intanto che un gruppo di Lie, essendo una varietà differenziabile, deve essere localmente compatto e localmente connesso. Un'altra condizione necessaria è che non abbia sottogruppi piccoli, nel senso della

**16.2.22 Definizione** *Un gruppo topologico  $G$  non possiede sottogruppi piccoli se esiste un intorno  $U$  di  $e \in G$  che non contiene sottogruppi di  $G$  a parte  $\{e\}$ .*

**16.2.23 Lemma** *Un gruppo di Lie non contiene sottogruppi piccoli.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo un intorno  $U$  di  $e \in G$  nel quale  $\exp$  sia un diffeomorfismo e tale che  $V = \exp^{-1}(U)$  sia convesso in  $L(G)$ . Anche  $U' = \exp \frac{1}{2}V$  è un intorno di questo tipo: se per assurdo  $G$  possiede un sottogruppo  $H$  ( $\neq \{e\}$ ) e tale che  $H \subset U'$ , sia  $h \neq e$  un suo elemento; allora esiste  $X \in \frac{1}{2}V$  tale che  $\exp X = h$ , e, dato che  $V$  è limitato e convesso, esiste  $k \in \mathbb{N}$  tale che  $2^k X \in V \setminus \frac{1}{2}V$ . Quindi

$$h^{2^k} = \exp 2^k X \in \exp V \setminus U'$$

(dato che  $\exp$  è iniettiva in  $V$ ) il che vuol dire che  $H$  non è un sottogruppo.

QED

Queste condizioni sono anche sufficienti:



**Teorema (GLEASON–YAMABE).** *Un gruppo topologico di Hausdorff è un gruppo di Lie se e solo se è localmente compatto e non possiede sottogruppi piccoli.*

**Teorema (MONTGOMERY–ZIPPIN).** *Un gruppo topologico di Hausdorff è un gruppo di Lie se e solo se è localmente omeomorfo ad uno spazio  $\mathbb{R}^n$  fissato.*

Per questi risultati si veda ad esempio [19].

Limitiamoci qui al caso compatto.

**16.2.24 Teorema** *Se  $G$  è un gruppo topologico compatto allora le seguenti proposizioni sono equivalenti.*

- $G$  non ha sottogruppi piccoli.
- $G$  è un sottogruppo chiuso di  $O(n)$  per qualche  $n > 0$ .
- $G$  è un gruppo di Lie.

DIMOSTRAZIONE: (1) implica (2): ci basta trovare una rappresentazione fedele di  $G$ , cioè  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  con  $\ker \rho = \{e\}$ ; infatti, dato che il gruppo è compatto, tale rappresentazione è completamente riducibile e quindi, se  $\pi$  è una sua qualsiasi sottorappresentazione irriducibile, questa ha dimensione finita ed è unitaria, i.e.  $\pi(G) \subset O(n)$  per qualche  $n$  (cfr. §2 cap. precedente). Per l'ipotesi (1), esiste un intorno  $U$  di  $e \in G$  che non contiene sottogruppi di  $G$ ; se  $\rho$  è una qualsiasi rappresentazione di  $G$ ,  $\ker \rho$  è un sottogruppo normale chiuso di  $G$  e si ha

$$\bigcap_{\rho} \ker \rho = \{e\}$$

al variare di  $\rho$  nell'insieme delle rappresentazioni di  $G$ ; se  $F = G \setminus U$  si ha quindi

$$\bigcap_{\rho} (\ker \rho \cap F) = \emptyset$$

Ma  $F$  è un chiuso nel compatto  $G$ , quindi è compatto, cioè possiede la proprietà dell'intersezione finita: esistono  $\rho_1, \dots, \rho_n$  rappresentazioni di  $G$  tali che

$$(\ker \rho_1 \cap F) \cap \dots \cap (\ker \rho_n \cap F) = \emptyset$$

i.e.  $\bigcap_i \ker \rho_i \subset U$  e quindi, per ipotesi (1),  $\bigcap_i \ker \rho_i = \{e\}$ . La somma diretta  $\rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_n$  è quindi una rappresentazione fedele di  $G$ .

(2) implica (3) perché un sottogruppo chiuso di un gruppo di Lie è un gruppo di Lie.

(3) implica (1) per il lemma.

QED

### 16.3 Algebre di Lie, rappresentazioni e coomologia

Consideriamo un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  su un campo  $\mathbb{K}$  (che sarà  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ) ed una sua rappresentazione

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

di dimensione finita. Conveniamo di scrivere l'azione di  $\mathfrak{g}$  su  $V$  come una moltiplicazione, i.e. di scrivere  $Xv \in V$  in luogo di  $\rho(X)(v)$ , se  $X \in \mathfrak{g}$  e  $v \in V$ : allora l'essere  $V$  una rappresentazione di  $\mathfrak{g}$  si esprime come

$$[X, Y]v = X(Yv) - Y(Xv)$$

per ogni  $X, Y \in \mathfrak{g}$  e  $v \in V$ .

**16.3.1 Definizione** Una cocatena  $m$ -dimensionale sull'algebra  $\mathfrak{g}$  a coefficienti nella rappresentazione  $V$  è una funzione

$$c : \mathfrak{g}^m \longrightarrow V$$

*multilineare antisimmetrica.*

In altri termini possiamo supporre

$$c : \mathfrak{g} \wedge \dots \wedge \mathfrak{g} \longrightarrow V$$

Per convenzione una cocatena di dimensione zero è una costante in  $V$ . Una cocatena di dimensione uno è semplicemente una mappa lineare

$$c : \mathfrak{g} \longrightarrow V$$

Ovviamente l'insieme  $C^m(\mathfrak{g}, V)$  delle  $m$ -cocatene su  $\mathfrak{g}$  a coefficienti in  $V$  è uno spazio vettoriale di dimensione finita (se lo sono  $V$  e  $\mathfrak{g}$ ). Possiamo inoltre definire<sup>2</sup> una *mappa di cobordo*

$$\delta : C^m(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow C^{m+1}(\mathfrak{g}, V)$$

come

$$\begin{aligned} (\delta c)(X_0, X_1, \dots, X_m) &= \sum_{i=0}^m (-1)^i X_i \cdot c(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_m) + \\ &+ \sum_{i < j}^{0 \dots m} (-1)^{i+j} c([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_m) \end{aligned}$$

(ove  $\widehat{X}$  indica l'omissione della variabile  $X$ ). Per definizione, se  $c \in C^m(\mathfrak{g}, V)$  allora  $\delta c \in C^{m+1}(\mathfrak{g}, V)$ .

---

<sup>2</sup>Questa definizione si ispira alla definizione del differenziale esterno per le forme su una varietà, che dà luogo al complesso di de Rham.

**16.3.2 Esempio** Se  $c : \mathfrak{g} \rightarrow V$  è una 1-cocatena allora

$$\delta c(X, Y) = Xc(Y) - Yc(X) - c([X, Y])$$

La successione

$$V \rightarrow C^1(\mathfrak{g}, V) \rightarrow \dots \rightarrow C^m(\mathfrak{g}, V) \rightarrow C^{m+1}(\mathfrak{g}, V) \rightarrow \dots$$

non è esatta: possiamo comunque misurare quanto non lo sia. Un semplice calcolo per induzione che qui non riportiamo permette infatti di stabilire che

**16.3.3 Proposizione**  $\delta \circ \delta = 0$ .

Una cocatena  $c \in C^m(\mathfrak{g}, V)$  tale che  $\delta c = 0$  si dice *cociclo*, mentre una cocatena  $c \in C^{m+1}(\mathfrak{g}, V)$  tale che esista una cocatena  $b \in C^m(\mathfrak{g}, V)$  in modo che  $\delta b = c$  si dice *cobordo*. Ovviamente, per la proposizione, un cobordo è un cociclo. Il viceversa non è vero a meno che la successione degli spazi delle cocatene non sia esatta.

Possiamo definire gli spazi formati da cocicli e cobordi come:

$$Z^m(\mathfrak{g}, V) = \ker \left( C^m \xrightarrow{\delta} C^{m+1} \right) \quad \text{e} \quad B^m(\mathfrak{g}, V) = \text{im} \left( C^{m-1} \xrightarrow{\delta} C^m \right)$$

Quindi la successione delle cocatene è esatta se  $Z^m(\mathfrak{g}, V) = B^m(\mathfrak{g}, V)$  (definizione di successione esatta). In generale,  $B^m(\mathfrak{g}, V)$  sarà un sottospazio vettoriale di  $Z^m(\mathfrak{g}, V)$ : lo spazio quoziente

$$H^m(\mathfrak{g}, V) = Z^m(\mathfrak{g}, V) / B^m(\mathfrak{g}, V)$$

si dice *m-esimo gruppo di coomologia* di  $\mathfrak{g}$  a coefficienti nella rappresentazione  $V$ . Questi gruppi (che sono spazi vettoriali) sono tutti nulli se e solo se la successione delle cocatene è esatta: altrimenti la loro dimensione ne misura la “non esattezza”.

Consideriamo ad esempio  $H^0(\mathfrak{g}, V)$ : dato che, per definizione,  $B^0(\mathfrak{g}, V) = 0$ , abbiamo che  $H^0(\mathfrak{g}, V) = Z^0(\mathfrak{g}, V)$ ; inoltre

$$H^0(\mathfrak{g}, V) = \ker \rho$$

Infatti  $c \in H^0(\mathfrak{g}, V)$  se e solo se  $0 = \delta c(X) = Xc$  i.e.  $c \in \ker \rho$ . Notiamo che se  $\rho$  è la rappresentazione aggiunta  $ad : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  allora  $\ker ad = H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$  è il centro dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ .

Identifichiamo ora  $H^1(\mathfrak{g}, V)$ : un 1-cociclo è una mappa  $c : \mathfrak{g} \rightarrow V$  tale che  $Xc(Y) - Yc(X) = c[X, Y]$ , mentre un 1-cobordo è una mappa  $b : \mathfrak{g} \rightarrow V$  della

forma  $bX = Xv$  per qualche  $v \in V$ . Quindi se  $H^1(\mathfrak{g}, V) = 0$  allora per ogni mappa lineare  $c : \mathfrak{g} \rightarrow V$  esiste un  $v \in V$  tale che

$$c(X) = Xv$$

Analogamente, se  $H^2(\mathfrak{g}, V) = 0$  allora per ogni mappa bilineare antisimmetrica  $c : \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \rightarrow V$  esiste una mappa lineare  $b : \mathfrak{g} \rightarrow V$  tale che

$$c(X, Y) = Xb(Y) - Yb(X) - b([X, Y])$$

Particolarizziamo ora la nostra situazione al caso della rappresentazione banale

$$\beta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$$

data semplicemente da  $\beta(X) = 0$  (si noti che su  $\mathbb{K}$  esiste una sola struttura di algebra di Lie: quella identicamente nulla!).

Allora una cocatena è una forma multilineare alternante

$$c : \mathfrak{g} \wedge \dots \wedge \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$$

e la formula del cobordo si riduce alla:

$$(\delta c)(X_0, \dots, X_n) = \sum_{i < j}^{0 \dots n} (-1)^{i+j} c([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_n)$$

In questo caso,  $H^0(\mathfrak{g}) = \mathbb{K}$ ; inoltre, un 1-cociclo è un funzionale lineare  $c \in \mathfrak{g}^*$  tale che

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g} \quad c[X, Y] = 0$$

mentre l'unico cobordo è  $0 \in \mathfrak{g}^*$ . Quindi  $H^1(\mathfrak{g})$  è lo spazio dei funzionali lineari che si annullano sugli elementi della forma  $[X, Y]$ : in particolare  $H^1(\mathfrak{g}) = 0$  se e solo se l'unico elemento in  $\mathfrak{g}$  della forma  $[X, Y]$  è 0.

**16.3.4 Definizione** *Un'algebra di Lie si dice semisemplice se  $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ , ove  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  è la sottoalgebra degli elementi della forma  $[X, Y]$  con  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . Un'algebra di Lie si dice semplice se non è abeliana e non possiede ideali non banali.*

Un'algebra semplice è semisemplice, dato che  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  è un ideale e quindi  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$  (se fosse  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ ,  $\mathfrak{g}$  sarebbe abeliana).

Esempi di algebre semplici sono le algebre di Lie dei gruppi classici compatti e  $\mathfrak{sl}(n)$ ; l'algebra  $M_n(\mathbb{R})$  non è semisemplice, dato che  $[M_n(\mathbb{R}), M_n(\mathbb{R})] = \mathfrak{sl}(n) \neq M_n(\mathbb{R})$ .

Si noti che  $\mathfrak{g}$  è abeliana se e solo se  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ . Più in generale, se  $\mathfrak{i}$  e  $\mathfrak{j}$  sono ideali in  $\mathfrak{g}$ , anche  $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$  (sottoalgebra generata dagli elementi della forma  $[X, Y]$  con  $X \in \mathfrak{i}$  e  $Y \in \mathfrak{j}$ ) è un ideale. Possiamo quindi generalizzare il concetto di algebra di Lie abeliana nel modo seguente:

**16.3.5 Definizione** Un'algebra di Lie si dice risolubile se esiste  $k \geq 1$  tale che  $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$  ove la successione di ideali  $\{\mathfrak{g}^{(k)}\}$  è definita come

$$\mathfrak{g}^{(1)} := \mathfrak{g} \quad \mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \quad \mathfrak{g}^{(k)} := [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]$$

### 16.3.6 Esempio

- Un'algebra abeliana è risolubile con  $k = 2$ .
- L'algebra di Lie delle matrici diagonali superiori rispetto al solito commutatore è risolubile: ad esempio la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

non è esprimibile in alcun modo nella forma

$$\left[ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & b'(a - a') + b(c' - c) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora notiamo che, se  $\mathfrak{i}$  e  $\mathfrak{j}$  sono ideali risolubili in un'algebra di Lie qualsiasi  $\mathfrak{g}$  allora  $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$  pure è un ideale risolubile: infatti  $(\mathfrak{i} + \mathfrak{j})/\mathfrak{i} \cong \mathfrak{i}/(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j})$  (il quoziente di ideali risolubili è ovviamente risolubile).

Quindi, se  $\dim \mathfrak{g} < \infty$  esiste un unico ideale risolubile massimale, cioè la somma di tutti gli ideali risolubili in  $\mathfrak{g}$ : questo ideale si dice *radicale* e si denota con  $\text{Rad}(\mathfrak{g})$ . Dato che  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$  implica  $\text{Rad}(\mathfrak{g}) = 0$ , se  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subsetneq \mathfrak{g}$  allora  $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  è risolubile; dunque

**16.3.7 Proposizione**  $\mathfrak{g}$  è semisemplice se e solo se  $\text{Rad}(\mathfrak{g}) = 0$ .

Dalla definizione di semisemplicità segue ovviamente che

**16.3.8 Proposizione** Se  $\mathfrak{g}$  è semisemplice allora  $H^1(\mathfrak{g}) = 0$ .

In realtà vale un teorema più forte (per il quale si rimanda ai testi specialistici, come [27] o [10]):

**16.3.9 Teorema (PRIMO LEMMA DI WHITEHEAD)** Se  $\mathfrak{g}$  è semisemplice allora  $H^1(\mathfrak{g}, V) = 0$  per ogni rappresentazione di dimensione finita  $V$  di  $\mathfrak{g}$ .

L'idea della dimostrazione consiste nel far vedere che, se  $\mathfrak{g}$  è semisemplice, allora  $H^n(\mathfrak{g}, V)$  è somma diretta di  $k$  copie di  $H^n(\mathfrak{g})$ , ove  $k$  è la molteplicità con la quale la rappresentazione banale figura come sottorappresentazione di  $V$ . Una notevole applicazione è il seguente

**16.3.10 Teorema (WEYL)** *Ogni rappresentazione di dimensione finita di un'algebra di Lie semisemplice è completamente riducibile.*

DIMOSTRAZIONE: Vogliamo dimostrare, data una rappresentazione  $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ , che per ogni sottorappresentazione  $P \subset V$  ne esiste una complementare  $Q \subset V$  tale che  $P \oplus Q = V$ . Questo è equivalente a dimostrare che esiste una proiezione  $E_P$  sul sottospazio  $P$  che sia un morfismo di rappresentazioni:

$$\forall X \in \mathfrak{g} \quad \rho(X)E_P = E_P\rho(X)$$

Per questo consideriamo lo spazio  $W \subset \text{End}(V)$  degli operatori lineari  $A : V \longrightarrow V$  tali che

$$\text{im } A \subset P \subset \ker A$$

(e quindi tali che  $A^2 = 0$ ). Si tratta non solo di un sottospazio vettoriale di  $\text{End}(V)$ , ma anche di una rappresentazione di  $\mathfrak{g}$ , rispetto alla mappa  $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(W)$  data da

$$\pi(X)(A) = [\rho(X), A]$$

Se  $E$  è un operatore di proiezione su  $P$  allora

$$\forall X \in \mathfrak{g} \quad [\rho(X), E] \in W$$

sicch  possiamo definire un operatore lineare  $c : \mathfrak{g} \longrightarrow W$  come

$$c(X) := [\rho(X), E]$$

cio  una cocatena in  $C^1(\mathfrak{g}, W)$ . Ma, per l'identit  di Jacobi:

$$\begin{aligned} Xc(Y) - Yc(X) - c[X, Y] &= [\rho(X), [\rho(Y), E]] - \\ &\quad - [\rho(Y), [\rho(X), E]] - [\rho([X, Y]), E] = 0 \end{aligned}$$

e quindi  $c$    un cociclo; ma per il lemma di Whitehead deve allora esistere un cobordo  $A \in W$  tale che  $c(A) = (\delta A)(X) = A(X)$ , sicch 

$$[\rho(X), E] = [\rho(X), A]$$

Questo significa che l'operatore  $E_P := E - A$  commuta con tutti gli operatori  $\rho(X)$  e quindi   un morfismo della rappresentazione  $V$  in s ; resta solo da notare che si tratta di una proiezione su  $P$ :

$$\forall v \in P \quad E_P v = E v - A v = v - 0 = v$$

(dato che  $P \subset \ker A$ ).

QED

Torniamo a considerare la coomologia a coefficienti nella rappresentazione banale. Definiamo prima una rappresentazione di  $\mathfrak{g}$  sullo spazio vettoriale  $\mathfrak{g}^*$  come

$$\forall X \in \mathfrak{g} \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}^* \quad \text{ad}_X^*(\xi) = -\xi \circ \text{ad}_X$$

che si dice *rappresentazione coaggiunta* di  $\mathfrak{g}$ ; si tratta della rappresentazione duale della rappresentazione aggiunta. Ora definiamo una mappa, per  $m > 0$ :

$$\varphi : C^m(\mathfrak{g}) \longrightarrow C^{m-1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$$

come

$$(\varphi(c))(X_1, \dots, X_{m-1})(X) = c(X_1, \dots, X_{m-1}, X)$$

**16.3.11 Lemma**  $\delta \circ \varphi = \varphi \circ \delta$ .

DIMOSTRAZIONE: Si tratta di un calcolo:

$$\begin{aligned} (\delta\varphi(c))(X_1, \dots, X_m)(X) &= \\ &= \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} (X_i(\varphi(c)(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_m)))(X) + \\ &\quad + \sum_{i < j}^{1\dots m} (-1)^{i+j} (\varphi(c)([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_m))(X) \\ &= \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} (\varphi(c)(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_m))([X_i, X]) + \\ &\quad + \sum_{i < j}^{1\dots m} (-1)^{i+j} c([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_m, X) \\ &= \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} c(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_m, [X_i, X]) + \\ &\quad + \sum_{i < j}^{1\dots m} (-1)^{i+j} c([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_m, X) \\ &= (\varphi(\delta c))(X_1, \dots, X_m)(X) \end{aligned}$$

QED

In particolare se  $c$  è un cociclo, anche  $\varphi(c)$  lo è.

**16.3.12 Proposizione** *Se  $\mathfrak{g}$  è semisemplice allora  $H^2(\mathfrak{g}) = 0$ .*

DIMOSTRAZIONE: Se  $u \in Z^2(\mathfrak{g})$  allora, per il primo lemma di Whitehead, esiste una cocatena  $\xi \in C^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*) = \mathfrak{g}^*$  tale che

$$\varphi(c) = \delta\xi$$

e quindi, per ogni  $X, Y \in \mathfrak{g}$ :

$$\begin{aligned} c(X, Y) &= ((\varphi(c))(X))(Y) = ((\delta\xi)(X))(Y) \\ &= (\text{ad}_X^* \xi)(Y) = -\xi([X, Y]) = (\delta\xi)(X, Y) \end{aligned}$$

dunque  $c = \delta\xi$ , pertanto  $H^2(\mathfrak{g}) = 0$ .

QED

Notiamo che in generale  $H^3(\mathfrak{g}) \neq 0$ : il funzionale bilineare

$$\mathfrak{k}(X, Y) := \text{tr}(\text{ad}_X \circ \text{ad}_Y)$$

induce un 3-cociclo che non è mai un cobordo se  $\mathfrak{g}$  è semisemplice: in effetti se  $\mathfrak{g}$  è semisemplice allora la forma bilineare  $\mathfrak{k}$  è non degenere (teorema di Cartan) e quindi non può essere il cobordo di un funzionale lineare su  $\mathfrak{g}$ .

Di nuovo, vale un teorema più forte:

**16.3.13 Teorema (SECONDO LEMMA DI WHITEHEAD)** *Se  $\mathfrak{g}$  è semisemplice allora  $H^2(\mathfrak{g}, V) = 0$  per ogni rappresentazione di dimensione finita  $V$ .*

Diamo anche per questo una applicazione.

**16.3.14 Definizione** *Una estensione di un'algebra di Lie  $\mathfrak{a}$  per mezzo di una sottoalgebra  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie  $\mathfrak{h}$  tale che la successione*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

sia esatta.

In altri termini  $\mathfrak{a}$  è un ideale di  $\mathfrak{h}$  e  $\mathfrak{h}/\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$ . Un'estensione si dice *banale* se  $\mathfrak{h}$  possiede una sottoalgebra di Lie isomorfa a  $\mathfrak{g}$  per mezzo della proiezione  $\alpha : \mathfrak{h}/\mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{g}$ .

Due estensioni  $\mathfrak{h}$  e  $\mathfrak{h}'$  si dicono *equivalenti* se esiste un omomorfismo di algebre di Lie  $e : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}'$  tale che il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{a} & \longrightarrow & \mathfrak{h} & \xrightarrow{\alpha} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow e & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{a} & \longrightarrow & \mathfrak{h} & \xrightarrow{\alpha} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$



sia commutativo. Allora necessariamente  $e$  è un isomorfismo.

Notiamo che esiste una mappa lineare  $\beta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  tale che  $\alpha \circ \beta = \text{id}$ : l'estensione è banale se e solo se la  $\beta$  può essere scelta in modo che sia un omomorfismo di algebre di Lie; in generale non lo sarà, cioè la funzione

$$c(X, Y) = [\beta X, \beta Y] - \beta[X, Y]$$

sarà non identicamente nulla.

Se  $\mathfrak{a}$  è abeliana allora  $c$  è un 2-cociclo nello spazio delle cocatene  $C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ , ove la rappresentazione di  $\mathfrak{g}$  in  $\mathfrak{a}$  è definita dalla formula, per  $X \in \mathfrak{g}$  e  $Y \in \mathfrak{a}$ :

$$\rho(X)(Y) = [\beta X, Y]$$

Che si tratti di un cociclo segue dall'identità di Jacobi; se l'estensione è banale il cociclo è un cobordo, quindi

**16.3.15 Proposizione** *Se  $\mathfrak{a}$  è abeliana, lo spazio  $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$  è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle estensioni di  $\mathfrak{g}$  tramite  $\mathfrak{a}$  a meno di equivalenza.*

Quindi, per il secondo lemma di Whitehead:

**16.3.16 Corollario** *Una estensione  $\mathfrak{h}$  di un'algebra di Lie semisemplice  $\mathfrak{g}$  per mezzo di un'algebra abeliana  $\mathfrak{a}$  è banale.*

Abbiamo osservato in precedenza che un'algebra di Lie qualsiasi possiede sempre un unico ideale risolubile massimale,  $\text{Rad}(\mathfrak{g})$ , e che  $\mathfrak{g}/\text{Rad}(\mathfrak{g})$  è semisemplice. Una immediata conseguenza del corollario precedente è che, se il radicale è abeliano, allora

$$\mathfrak{g} = \text{Rad}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$$

ovvero  $\mathfrak{s}$  è una sottoalgebra semisemplice isomorfa a  $\mathfrak{g}/\text{Rad}(\mathfrak{g})$  (la somma diretta è nel senso degli spazi vettoriali). Questo risultato è vero in generale.

**16.3.17 Teorema (LEVI)** *Ogni algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  è, come spazio vettoriale, somma diretta del radicale e di una sottoalgebra semisemplice.*

**DIMOSTRAZIONE:** Procediamo per induzione sulla dimensione di  $\text{Rad}(\mathfrak{g})$ ; se  $\text{Rad}(\mathfrak{g}) = 0$  allora  $\mathfrak{g} = \mathfrak{s}$  è semisemplice e il teorema è banale; se  $\dim \text{Rad}(\mathfrak{g}) = 1$  allora  $\text{Rad}(\mathfrak{g})$  è abeliano ed il teorema segue dal corollario precedente. La stessa conclusione vale se l'ideale  $\mathfrak{a} = [\text{Rad}(\mathfrak{g}), \text{Rad}(\mathfrak{g})]$  è zero (che implica  $\text{Rad}(\mathfrak{g})$  abeliano).

Sia, per induzione, valido il teorema per  $m < n$  con  $n > 0$ ; dato che  $\text{Rad}(\mathfrak{g})$  è risolubile,  $\dim \text{Rad}(\mathfrak{g})/\mathfrak{a} < n$  e che  $\text{Rad}(\mathfrak{g})/\mathfrak{a}$  è il radicale dell'algebra quoziente

$\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ , allora, per ipotesi induttiva,  $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$  è somma diretta di  $\text{Rad}(\mathfrak{g})/\mathfrak{a}$  e di una sua sottoalgebra semisemplice, che si solleva ad una sottoalgebra  $\mathfrak{b}$  di  $\mathfrak{g}$  tale che

$$\mathfrak{g} = \text{Rad}(\mathfrak{g}) + \mathfrak{b} \quad \text{e} \quad \text{Rad}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$$

Ma  $\text{Rad}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$ ; infatti  $\mathfrak{a}$  è un ideale risolubile in  $\mathfrak{b}$  ed il quoziente  $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$  è semisemplice.

Dato che  $\dim \mathfrak{b} < n$ , per induzione, esiste un'algebra semisemplice  $\mathfrak{s}$  in  $\mathfrak{b}$  tale che  $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ ; cioè

$$\begin{aligned} \text{Rad}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{s} &= \text{Rad}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{b} \cap \mathfrak{s} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{s} = 0, \\ \text{Rad}(\mathfrak{g}) + \mathfrak{s} &= \text{Rad}(\mathfrak{g}) + \text{Rad}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{b} + \mathfrak{s} = \text{Rad}(\mathfrak{g}) + \mathfrak{a} + \mathfrak{s} \\ &= \text{Rad}(\mathfrak{g}) + \mathfrak{b} = \mathfrak{g} \end{aligned}$$

Quindi  $\mathfrak{g} = \text{Rad}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$ .

QED

Il teorema di Levi ha una conseguenza capitale nel teorema di Ado, secondo il quale ogni algebra di Lie è un'algebra di matrici (in realtà vale un enunciato più preciso).

**16.3.18 Teorema (ADO)** *Ogni algebra di Lie di dimensione finita possiede una rappresentazione fedele.*

**DIMOSTRAZIONE:** Osserviamo intanto che il teorema è vero se  $\mathfrak{g}$  è semisemplice: infatti in questo caso la rappresentazione aggiunta ad  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  è fedele, dato che il suo nucleo è il centro di  $\mathfrak{g}$  che sta nel radicale (essendo un ideale abeliano è risolubile) che è zero.

Se  $\mathfrak{g}$  non è semisemplice ma possiede una rappresentazione  $\rho$  che, ristretta al centro  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  di  $\mathfrak{g}$  è fedele, allora la rappresentazione

$$\text{ad} \oplus \rho$$

è fedele su  $\mathfrak{g}$ : infatti  $\ker \text{ad} \cap \ker \rho = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \ker \rho = 0$ . Il teorema si riduce quindi alla ricerca della rappresentazione  $\rho$ .

Consideriamo ora il centro  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ : possiede sempre rappresentazioni fedeli (uno spazio vettoriale  $V$  si immerge in  $\text{End}(V)$ ) e sia  $\zeta$  una di esse. Vogliamo costruire a partire da  $\zeta$  una rappresentazione di  $\text{Rad}(\mathfrak{g})$  che sia fedele sul centro. Per farlo notiamo che se  $\mathfrak{r}$  è un'algebra risolubile, allora esiste una successione di ideali

$$(\dagger) \quad \mathfrak{z}(\mathfrak{r}) \subset \mathfrak{r}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{r}_k \subset \mathfrak{r}$$

tali che  $\dim \mathfrak{r}_{i+1}/\mathfrak{r}_i = 1$ . Infatti abbiamo la successione di ideali

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{r}) = \mathfrak{r}^{(k-1)} \subset \mathfrak{r}^{(k-2)} \subset \cdots \subset \mathfrak{r}^{(2)} = [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r}$$

Se questa sequenza non soddisfa il requisito  $\dim \mathfrak{r}^{(k+1)}/\mathfrak{r}^{(k)} = 1$  possiamo comunque “infittirla” con altre sottoalgebre di  $\mathfrak{r}$  in modo da ottenere una sequenza  $(\dagger)$  con  $[\mathfrak{r}_{i-1}, \mathfrak{r}_i] \subset \mathfrak{r}_i$ .

Per dedurre da  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  una rappresentazione di  $\text{Rad}(\mathfrak{g})$  usiamo allora questo ragionamento ed il seguente

**Lemma.** *Se  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie e  $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{h}$  (come spazi vettoriali) ove  $\mathfrak{r}$  è un ideale risolubile in  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$  una sottoalgebra, allora ogni rappresentazione  $\sigma$  di  $\mathfrak{r}$  induce una rappresentazione  $\rho$  di  $\mathfrak{g}$  tale che  $\mathfrak{r} \cap \ker \rho \subset \ker \sigma$ .*

Prima di dimostrare il lemma concludiamo la dimostrazione del teorema di Ado: in virtù del lemma possiamo costruire per ogni  $\mathfrak{r}_i$  una rappresentazione a partire da una di  $\mathfrak{r}_{i-1}$  e quindi una rappresentazione di  $\text{Rad}(\mathfrak{g})$  fedele su  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  a partire da una rappresentazione fedele di  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ . Infine applichiamo il teorema di Levi ed il lemma per indurre una rappresentazione di  $\mathfrak{g}$  fedele sul centro, che era quanto richiesto per avere il teorema di Ado.

Resta solo da provare il lemma, il che è facile: infatti se  $\sigma$  è una rappresentazione di  $\mathfrak{r}$  e se consideriamo  $\rho = \sigma \oplus \text{ad}$  (ove  $\text{ad}$  è la rappresentazione aggiunta di  $\mathfrak{h}$ :  $\text{ad} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{h})$ ) allora otteniamo una rappresentazione di  $\mathfrak{g}$  il cui nucleo è

$$\ker \rho = \ker \sigma \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$$

cioè  $\mathfrak{r} \cap \ker \rho = \ker \sigma$ .

QED

Un simile risultato è falso per i gruppi di Lie: concludiamo la nostra discussione fornendo un esempio di gruppo di Lie non di matrici.

Osserviamo intanto che un gruppo discreto è certamente un gruppo di Lie, di dimensione zero (ogni punto  $\{g\}$  è una carta locale con la mappa  $g \mapsto 0$  come coordinata), e che la sua algebra di Lie è 0.

**16.3.19 Definizione** *Un gruppo di Lie  $G$  si dice semplice se non è abeliano e se ogni suo sottogruppo normale è di dimensione zero (e quindi, se è chiuso, è discreto).*

In particolare, a differenza dei gruppi per sé presi, un gruppo di Lie può essere semplice anche se ha centro non banale: basta che questo centro sia discreto; si noti che un gruppo è semplice se e solo se lo è la sua algebra: questo suggerisce anche la

**16.3.20 Definizione** *Un gruppo di Lie  $G$  è semisemplice se lo è la sua algebra di Lie  $L(G)$ .*

Notiamo che  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  una rappresentazione di un gruppo di Lie ne induce una dell'algebra: infatti, per funtorialità, se  $\varphi : G \rightarrow H$  è un

omomorfismo di gruppi di Lie, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} L(G) & \xrightarrow{L(\varphi)} & L(H) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{h} \end{array}$$

è commutativo

**16.3.21 Teorema** *Il centro di un gruppo semisemplice di matrici è finito.*

**DIMOSTRAZIONE:** Consideriamo  $A \in G$ , gruppo di matrici in  $GL(V)$ : dato che  $A$  commuta con ogni elemento di  $G$ , commuta anche con ogni elemento della sua algebra di Lie (tramite l'esponenziale) e dato che l'algebra di Lie di  $G$  è semisemplice, per il teorema di Weyl, possiamo decomporre  $V$  in somma diretta di sue rappresentazioni irriducibili

$$A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$$

Ora usiamo il lemma di Schur per dedurre che  $A_i = \lambda_i I$ , con  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ : che i coefficienti siano complessi non è un problema, dato che possiamo immergere  $V$  nello spazio complesso  $V^{\mathbb{C}} = V \oplus iV$  preservando l'irriducibilità della rappresentazione. Le matrici della forma  $A_i$  sono un sottogruppo  $G_i$  di  $G$ , quindi, dato che  $[G, G] = G$ , anche  $[G_i, G_i] = G_i$  e quindi  $G_i$  è composto da matrici di determinante 1. Quindi  $\det A_i = 1$  cioè esistono  $n_i \in \mathbb{N}$  tali che

$$\lambda_i^{n_i} = 1$$

Dunque  $\lambda_i$  è una radice  $n_i$ -esima di  $1 \in \mathbb{C}$ ; ne esiste solo un numero finito, quindi anche di matrici  $A_i$  ne esiste solo un numero finito e, per conseguenza, esiste solo un numero finito di matrici  $A$  nel centro di  $G$ .

QED

Quindi un gruppo di Lie semisemplice che possieda centro infinito non può essere un gruppo di matrici: diamone un esempio, ma prima svolgiamo qualche osservazione generale.

**16.3.22 Lemma** *Sia  $G$  un gruppo topologico connesso.*

- $G$  non possiede sottogruppi aperti distinti da  $G$  stesso.
- Ogni intorno  $V$  di  $e \in G$  genera il gruppo  $G$ .
- Un sottogruppo discreto normale  $K$  di  $G$  sta nel centro di  $G$ .

DIMOSTRAZIONE: (1): Poiché  $H$  è aperto, ogni laterale sinistro  $gH$  di  $H$  è aperto (dato che  $L_g : h \mapsto gh$  è un omeomorfismo) e quindi l'insieme

$$\bigcup_{g \neq e} gH$$

è aperto, essendo unione di aperti; ma si tratta del complementare di  $H$ , che quindi risulta essere chiuso. Dato che  $G$  è connesso e  $H \neq \emptyset$ , è  $H = G$  (si noti che abbiamo in generale dimostrato che in un gruppo topologico qualsiasi, un sottogruppo aperto è anche chiuso).

(2) Sia  $H$  il sottogruppo generato da  $V$ : si tratta di un sottogruppo aperto per definizione e, per (1),  $H = G$ .

(3) Sia  $k \in K$  e  $U$  un intorno di  $k$  non contenente altri elementi di  $K$ ; per continuità della mappa  $g \mapsto g^{-1}kg$  esiste un intorno  $V$  di  $e$  tale che  $V^{-1}kV \subset U$ . Ma  $K$  è normale in  $G$  e  $U \cap K = \{e\}$ , quindi

$$\forall h \in V \quad h^{-1}kh = k$$

e quindi il sottogruppo  $Z_k$  degli elementi di  $G$  che commutano con  $k$  contiene l'intorno  $V$ , che genera  $G$  per (2), e quindi  $Z_k = G$ , pertanto  $k$  sta nel centro di  $G$ .

QED

Consideriamo ora il gruppo di Lie  $SL_n(\mathbb{R})$ : la sua algebra di Lie è

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr} A = 0\}$$

Notiamo che  $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$  allora  $\operatorname{tr}[A, B] = 0$  e quindi  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$  è un ideale in  $M_n(\mathbb{K})$ ; dunque

**16.3.23 Proposizione** *L'algebra di Lie  $M_n(\mathbb{K})$  non è semplice.*

a differenza del caso associativo. Dimostriamo ora la semplicità di  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$  nel caso più facile di  $n = 2$ .

Scriviamo una base di  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il prodotto di Lie è completamente determinato dalle relazioni

$$[E, F] = H \quad [H, E] = 2E \quad [H, F] = -2F$$

In altri termini,  $E$  e  $F$  sono autovettori per l'applicazione lineare  $L_H(X) = [H, X]$  di autovalori 2 e  $-2$ ; sia ora  $I$  un ideale non nullo e

$$A = aE + bF + cH$$

un suo elemento non nullo. Allora

$$\begin{aligned} [E, [E, A]] &= [E, bH - 2cE] = -2bE \in I, \\ [F, [F, A]] &= [F, -aH + 2cF] = -2aF \in I \end{aligned}$$

Quindi, se  $a \neq 0$  oppure  $b \neq 0$  abbiamo  $E, F \in I$  e quindi  $H \in I$ , cioè  $I = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ . Se invece  $a = b = 0$  allora  $c \neq 0$  e quindi  $H \in I$ , da cui, dato che  $[H, E] = 2E$  e  $[H, F] = -2F$ ,  $E, F \in I$  e di nuovo  $I = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ .

Dunque il gruppo  $SL_2(\mathbb{R})$  è semplice perché lo è la sua algebra di Lie; ricordiamo che si tratta di un gruppo non semplicemente connesso, perché si contrae sul gruppo ortogonale speciale  $SO(2) = S^1$  (abeliano) che ha gruppo fondamentale  $\mathbb{Z}$ . Possiamo quindi considerare il suo rivestimento universale  $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ : in generale, se  $G$  è un gruppo di Lie connesso, localmente connesso e localmente semplicemente connesso, sappiamo che il suo rivestimento universale  $\widetilde{G} \rightarrow G$  è un gruppo topologico; se  $G$  è un gruppo di Lie allora possiamo considerare un suo intorno  $U$  di  $e \in G$  che sia una carta locale  $(U, x)$  e che sia omeomorfo, tramite  $p$ , a un intorno  $p^{-1}(U)$  di  $e_0 \in p^{-1}(e) \in \widetilde{G}$ ; componendo  $p$  con  $x$  otteniamo allora delle coordinate locali su  $\widetilde{G}$ :

**16.3.24 Teorema (WEYL)** *Il rivestimento universale di un gruppo di Lie  $G$  è un gruppo di Lie che ha la stessa algebra di Lie di  $G$  (essendo localmente isomorfo a  $G$ ).*

Quindi il rivestimento universale  $\widetilde{SL}(2)$  di  $SL(2)$  è un gruppo di Lie la cui algebra di Lie è  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ ; tuttavia, dato che la mappa di rivestimento

$$p : \widetilde{SL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow SL_2(\mathbb{R})$$

è un epimorfismo di gruppi di Lie, il nucleo è un sottogruppo normale, che quindi, dato che  $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$  è semplice, deve essere discreto. Per la (3) del lemma,  $\ker p$  sta nel centro di  $SL_2(\mathbb{R})$ : se dimostriamo che  $\ker p$  è infinito, il teorema 16.3.21 implica che  $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$  non può essere un gruppo di matrici.

Ma il nucleo di  $p$  è infinito dato che il gruppo fondamentale di  $SL_2(\mathbb{R})$  è  $\mathbb{Z}$ : infatti, per la decomposizione polare,  $SL_2(\mathbb{R})$  è prodotto delle matrici  $2 \times 2$  simmetriche definite positive (uno spazio contraibile, quindi semplicemente connesso) e di  $SO(2) = S^1$ , che ha gruppo fondamentale  $\mathbb{Z}$ . Così il rivestimento universale di  $SL_2(\mathbb{R})$  deve contenere il rivestimento universale di  $SO(2)$  che è  $\mathbb{R}$ , e il nucleo di  $p$  contiene il nucleo di  $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ , che è  $\mathbb{Z}$ .

Quindi  $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$  non è un gruppo di matrici.

## 16.4 Teorema di Nelson

Discutiamo da ultimo alcuni risultati che combinano la teoria dei vettori analitici con quella delle algebre di Lie, in particolare un altro fondamentale teorema di Nelson.

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert separabile e  $A = A^*$  un operatore autoaggiunto, corrispondente a un gruppo a un parametro  $U(t) = e^{iAt}$ . Sappiamo che un vettore  $x$  è analitico per  $A$  se e solo se la funzione  $T \mapsto U(t)x$  è la restrizione di una funzione olomorfa in una striscia  $\{a+ib \mid |b| < \delta\} \subset \mathbb{C}$ ; ad esempio se  $x$  appartiene all'immagine dell'operatore  $e^{-\frac{1}{2}A^2}$  allora  $x$  è analitico.

Supponiamo ora che  $A$  sia completo, i.e. che

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad BU(t) = U(t)B \Rightarrow B \in \{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}''$$

ovvero

$$U(\mathbb{R})' = U(\mathbb{R})'' = \{f(A) \mid f \in C_0(\mathbb{R})\} = \{f(A) \mid f \in L^\infty(\mathbb{R}, d\mu)\}$$

con  $d\mu$  misura basica. In questo caso  $x \in L^\infty(\mathbb{R}, d\mu)$  e

$$(U(t)x)(\lambda) = e^{it\lambda}x(\lambda)$$

e possiamo realizzare  $\mathcal{H}$  come  $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ ; la misura è determinata da

$$(\xi, f(A)\xi) = \int f(\lambda)d\mu(\lambda)$$

Basta cioè conoscerne i momenti

$$(\xi, A^n\xi) = \int \lambda^n d\mu(\lambda)$$

**16.4.1 Proposizione** *Se per ogni  $x$  ciclico consideriamo  $\xi = e^{-\frac{1}{2}A^2}x$  allora  $\xi$  è ciclico ed analitico per  $A$ .*

**DIMOSTRAZIONE:** Vediamo che  $\xi$  è ciclico. Se

$$\forall f \in C_0(\mathbb{R}) \quad (y, f(A)e^{-\frac{1}{2}A^2}x) = 0$$

allora  $(e^{-\frac{1}{2}A^2}y, f(A)x)$ ; ma  $\{f(A)x\}$  è denso (e  $e^{-\frac{1}{2}A^2}$  è autoaggiunto), sicché

$$e^{-\frac{1}{2}A^2}y = 0$$

che, siccome  $e^{-\frac{1}{2}A^2}$  è iniettiva, implica  $y = 0$ .

Per mostrare che  $\xi$  è analitico basta provare che

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} A^n e^{-\frac{1}{2}A^2}$$

è convergente nella norma uniforme degli operatori: ed infatti

$$\left\| A^n e^{-\frac{1}{2}A^2} \right\| \leq \sup_s \left| s^n e^{-\frac{1}{2}s^2} \right| = \sqrt{\frac{n}{e}}$$

(derivando e valutando in  $s = 0$ ). Ma  $e^{-\frac{1}{2}s^2} s^n$  è limitata, e, dato che il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \sqrt{\frac{n}{e}}$$

è infinito, si ha l'analiticità di  $\xi$ .

QED

Estendiamo ora la teoria svolta per un singolo  $A$  ad una famiglia finita commutativa: consideriamo cioè una famiglia  $\{A_1, \dots, A_n\}$  di operatori permutabili, nel senso che le famiglie spettrali commutano a due a due e  $\{A_1, \dots, A_n\}$  è completa. Per  $f_1, \dots, f_n \in C_0(\mathbb{R})$ :

$$C^*(A_1, \dots, A_n) = C^*(f_1(A_1), \dots, f_n(A_n))$$

è una  $C^*$ -sottoalgebra commutativa di  $C^*(U_1, \dots, U_n)$  (trasformate di Cayley) e si trova che

$$C^*(A_1, \dots, A_n) = C_0(j\sigma(f_1(A_1), \dots, f_n(A_n)))$$

(spettro congiunto). La determinazione della misura basica avviene in modo completamente analogo:  $A_1^{m_1} \dots A_n^{m_n} e^{-\frac{1}{2}(A_1^2 + \dots + A_n^2)}$  è limitato e i momenti sono

$$(\xi, A_1^{m_1} \dots A_n^{m_n} \xi) = \int \lambda^{m_1} \dots \lambda^{m_n} d\mu(\lambda)$$

e

$$(\xi, e^{i(t_1 A_1^{m_1} + \dots + t_n A_n^{m_n})} \xi) = \int e^{i(\lambda, t)} d\mu(t)$$

(trasformata di Fourier).

Enunciamo da ultimo il fondamentale teorema di Nelson che generalizza ai gruppi di Lie quello che abbiamo visto in dettaglio nel caso di gruppi a un parametro.

Se  $G$  è un gruppo di Lie connesso, è generato da un suo intorno dell'identità: a meno di estendere con traslazioni del gruppo possiamo quindi definire i concetti



che non dipendono dalla topologia di  $G$  (dalla sua struttura globale) supponendo che i suoi elementi siano della forma  $\exp tX$  con  $X \in L(G)$  (algebra di Lie del gruppo) e  $t \in \mathbb{R}$ ; ad esempio, se  $U : G \mapsto \mathcal{U}(\mathcal{H})$  è una rappresentazione unitaria (fortemente continua) in uno spazio di Hilbert di  $G$ , per ogni  $X \in L(G)$  abbiamo

$$U(\exp tX) = e^{iJ_X t}$$

(teorema di Stone) ove  $J_X$  è autoaggiunto e

$$[J_X, J_Y] = iJ_{[X, Y]}$$

Cioè le rappresentazioni unitarie fortemente continue di  $G$  inducono rappresentazioni dell'algebra di Lie  $L(G)$ . Il teorema di Nelson stabilisce delle condizioni per invertire questa corrispondenza ed "integrare" le rappresentazioni dell'algebra al gruppo: in altri termini, dato  $J_X$  autoaggiunto vogliamo determinare  $U$ . Ovviamente, in generale, questo non sarà possibile: ad esempio basta considerare  $G = U(1) = S^1$ , per il quale  $e^{iAt} = I$  solo se  $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ ; in questo caso la difficoltà è legata alla impossibilità di sollevare in modo unico la rappresentazione, che è conseguenza della struttura topologica di  $S^1$ .

Partiamo quindi da una rappresentazione  $J$  di un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  nello spazio degli operatori hermitiani di uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ : ad ogni  $X \in \mathfrak{g}$  associamo un  $J_X$ , in modo che

$$[J_X, J_Y] = iJ_{[X, Y]}$$

Dato che l'algebra  $\mathfrak{g}$  ha dimensione finita, fissata una sua base  $(X_1, \dots, X_n)$  il suo commutatore è determinato dalle costanti di struttura

$$[X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}^k X_k$$

Possiamo in particolare scrivere

$$J_X = \sum c_i J_i$$

ove  $J_i = J_{X_i}$ . Poichè data  $\mathfrak{g}$ , la teoria di Lie ci dice che esiste un unico gruppo di Lie connesso semplicemente connesso  $G$  tale che  $L(G) = \mathfrak{g}$ , non è sorprendente che dovremo richiedere queste proprietà topologiche.

Poiché l'algebra di Lie viene rappresentata in un'algebra di operatori, ha senso considerare, fissata una base  $(X_1, \dots, X_n)$  di  $\mathfrak{g}$  l'algebra generata da

$$X_i \quad \text{e} \quad H_{ij} = X_i X_j + X_j X_i$$

Denoteremo con  $\mathcal{U}_2$  questa algebra associativa<sup>3</sup>: si tratta di un'algebra di dimensione finita, al più  $n + n(n+1)/2$ .

<sup>3</sup>Si tratta di una sottoalgebra dell'algebra involuante universale di  $\mathfrak{g}$ : cfr. [10].

**16.4.2 Teorema (NELSON)** *Se  $G$  è un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso e  $J$  è una rappresentazione di  $L(G)$  nello spazio degli operatori hermitiani su  $\mathcal{H}$  in modo che il dominio  $\mathcal{D}$  di  $J_X$  ( $X \in L(G)$ ) sia invariante rispetto alla rappresentazione (i.e.  $J_X \mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ ) e che valgano le condizioni seguenti*

- $[J_X, J_Y] = iJ_{[X, Y]}$
- $\Delta = \sum_k J_k^2$  è essenzialmente autoaggiunto su  $\mathcal{D}$ .

Allora esiste un'unica rappresentazione unitaria fortemente continua  $U : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$  tale che

$$U(\exp tX) = e^{iJ_X t}$$

DIMOSTRAZIONE: Scriviamo  $J_i := J_{X_i}$  e consideriamo

$$\xi = J_1 + \dots + J_n$$

Dimostriamo intanto che, se  $\alpha = \Delta - I$  allora esiste  $c$  tale che, per ogni  $x$ :

$$(*) \quad \|\xi x\| \leq c \|\alpha x\| \quad \text{e} \quad \|(ad_\xi)^n \alpha x\| \leq c^n \|\alpha x\|$$

(ove  $ad_\xi$  è l'azione aggiunta). Infatti, per la disuguaglianza di Schwartz:

$$\begin{aligned} \sum_i \|J_i x\|^2 &= \sum_i (J x_i, J x_i) = (-\Delta x, x) \leq \left( \frac{1}{2} \Delta^2 - \Delta + \frac{1}{2} \right) x, x \\ &= \frac{1}{2} (\Delta - I)^2 x, x = \frac{1}{2} \|(\Delta - I)x\|^2 \end{aligned}$$

cioè

$$\sum_i \|J_i x\| \leq \sqrt{\frac{n}{2}} \|(\Delta - I)x\|$$

Consideriamo ora l'algebra  $\mathcal{U}_2$  generata da  $J_i$  e  $H_{ij} = J_i J_j + J_j J_i$  e notiamo che, rispetto alla norma

$$\| \|B\| \| := \inf \{ k \mid \forall x \ \|B\| \leq k \|\alpha x\| \}$$

è un'algebra di Banach.

Per definizione  $\mathcal{U}_2$  è stabile rispetto a  $ad_{J_i}$  e quindi esistono delle costanti  $c_1, \dots, c_n$  tali che

$$\| \|ad_{J_i} B\| \| \leq c_i \| \|B\| \|$$

Per  $c = n \max c_i$  otteniamo cioè

$$\|(ad_\xi)^n \alpha x\| = \sum_{i_1 \dots i_n} \|ad_{J_{i_1} \dots J_{i_n}} \Delta x\| \leq \|c_{i_1} \dots c_{i_n} \alpha x\| \leq c^n \|\alpha x\|$$

Da cui la (\*).

Ora consideriamo la chiusura  $\overline{\Delta}$  dell'operatore  $\Delta$ , una sua famiglia spettrale  $E(\lambda)$  e l'insieme

$$\mathfrak{B} = \{x \in \mathcal{H} \mid \exists \Phi \text{ boreliano } E(\Phi)x = x\}$$

Per il teorema spettrale possiamo dedurre che

$$\mathfrak{B} \subset \bigcap \mathcal{D}(\overline{\Delta}^n) \quad \text{e} \quad \overline{\mathfrak{B}} = \mathcal{H}$$

e che la serie

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\|\tilde{\alpha}^n x\|}{n!} s^n$$

converge per  $s \geq 0$ , ove  $\tilde{\Delta}$  è la restrizione di  $\overline{\Delta}$  all'intersezione  $\bigcap \mathcal{D}(\overline{\Delta}^n)$  e  $\tilde{\alpha} = \tilde{\Delta} + I$ .

Quindi, per  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $iJ_X$  è essenzialmente autoaggiunto (ogni vettore analitico per  $\xi$  lo è per  $X$ ). Ora consideriamo l'unico gruppo di Lie connesso semplicemente connesso  $G$  la cui algebra di Lie è  $\mathfrak{g}$ , e un intorno  $N_e$  di  $e \in G$  nel quale  $\exp$  è un diffeomorfismo: allora il prodotto del gruppo è determinato, in  $N_e$ , dal prodotto dell'algebra

$$\exp X \exp Y = \exp Z$$

con  $Z \in \exp^{-1} N_e$ ; se  $x$  è tale che

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\|J_{X+Y}^n x\|}{n!} s^n \quad \text{e} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{\|J_Z^n x\|}{n!} s^n$$

convergono allora possiamo "integrare" la rappresentazione  $J$  ad una rappresentazione  $U$  di  $G$  definita in  $N$  come

$$U(\exp X) = e^{iJ_X}$$

in modo che, in  $U$ :

$$U(g)U(h) = U(gh)$$

Ma sappiamo che questo è vero su un insieme denso  $\mathfrak{B} \subset \mathcal{H}$  e quindi, nell'intorno  $N$ , possiamo effettivamente definire la rappresentazione  $U_G : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ : per connessione del gruppo questa si estende a tutto il gruppo  $G$  e per semplice connessione questa estensione è unica. Abbiamo quindi la rappresentazione cercata.

QED

Questo teorema vale anche se la (2) è sostituita dalla

(2') Ogni  $x \in \mathcal{D}$  è un vettore analitico per  $J_k$ .

Per discussione più approfondita si vedano: E. Nelson, *Annals of Math.* 70 (1959), B. Simon *Comm. Math. Phys.* 28 (1972) oppure J. Frölich, *Comm. Math. Phys.* 54 (1977).