



La varietà grassmanniana

PAOLO CARESSA

Roma, 1996

Consideriamo uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita n , e, per $k \leq n$, poniamo

$$B_k(V) := \{(v_1, \dots, v_k) \in V \times \dots \times V \mid v_1, \dots, v_k \text{ linearmente indipendenti}\}$$

Definiamo in questo insieme una relazione di equivalenza \sim ponendo:

$$(v_1, \dots, v_k) \sim (w_1, \dots, w_k) \iff \exists A \in GL_k(\mathbb{R}) \quad \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$$

ovvero, scrivendo $A = ((a_{ij}))$, si ha

$$(v_1, \dots, v_k) \sim (w_1, \dots, w_k) \iff \exists A \in GL_k(\mathbb{R}) \quad w_i = \sum_j a_{ij} v_j$$

Poniamo allora

$$G_k(V) := B_k(V) / \sim$$

Osservando che $B_k(V)$ è un sottospazio chiuso dello spazio vettoriale V^k , possiamo dotare $G_k(V)$ della topologia quoziente, denotando $[v_1, \dots, v_k]$ la classe di equivalenza un cui rappresentante è (v_1, \dots, v_k) .

Naturalmente si può identificare la classe $[v_1, \dots, v_k]$ con il sottospazio vettoriale di V generato dai vettori v_1, \dots, v_k (che ne sono una base). Infatti la relazione di equivalenza che abbiamo introdotto sull'insieme delle k -ple di vettori linearmente indipendenti si può riformulare dicendo che due k -ple sono equivalenti se e solo se sono basi di uno stesso sottospazio k -dimensionale in V .

Possiamo quindi scrivere, come insiemi:

$$G_k(V) = \{k\text{-sottospazi vettoriali di } V\}$$

Lo spazio topologico $G_k(V)$ si chiama *grassmanniana dei piani k -dimensionali di V* .

Osserviamo che la relazione di equivalenza \sim può anche interpretarsi come l'equivalenza di coordinate omogenee nello spazio proiettivo $\mathbb{P}V$, sicché

$$G_k(V) = \{(k-1)\text{-sottospazi lineari di } \mathbb{P}V\}$$

Ora vogliamo dotare $G_k(V)$ di una struttura naturale di varietà differenziabile.

Fissiamo una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ di V , il che ci consente di identificare una k -pla di vettori (v_1, \dots, v_k) con una matrice $k \times n$ X le cui righe siano le coordinate dei vettori medesimi:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \dots & & \\ x_{k1} & \dots & x_{kn} \end{pmatrix}$$

(qui $v_i = \sum_j x_{ij}e_j$).

Allora scriveremo

$$[v] = [X]$$

ad intendere che la k -pla $v = (v_1, \dots, v_k)$ e la matrice X rappresentano una classe di equivalenza, cioè un elemento di $G_k(V)$, che, fissata una base di V , denotiamo anche con $G_{n,k}$.

Se ora X è una matrice $k \times n$, e $I = (i_1, \dots, i_k)$ è un multiindice, denotiamo con X_I il minore ottenuto dalla matrice X estraendo le colonne i_1, \dots, i_k . Definiamo

$$U_I := \{[X] \in G_{n,k} \mid \det(X_I) \neq 0\}$$

Questa definizione è ben posta dato che, se $A \in GL_k(\mathbb{R})$ allora $(AX)_I = A(X_I)$. Ovviamente U_I è un aperto in $G_{n,k}$ ed inoltre

$$G_{n,k} = \bigcup_I U_I$$

Ora definiamo un omeomorfismo

$$\varphi_I : U_I \rightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}$$

come segue: se $[X] \in U_I$ allora è

$$[X] = [X_I^{-1}X]$$

(per definizione di \sim) e quindi, supponendo per semplicità che sia $I = (1, \dots, k)$, è

$$X_I^{-1}X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & y_{11} & \dots & y_{1,n-k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & y_{k1} & \dots & y_{k,n-k} \end{pmatrix}$$

Definiamo allora

$$\varphi_I([X]) := ((y_{ij}))$$

Se I è un qualsiasi multiindice, la matrice $X_I^{-1}X$ è una matrice $k \times n$ nella quale le colonne i_1, \dots, i_k formano la matrice identità. Tolle queste colonne si ottiene una matrice $k \times (n - k)$ che, per definizione è la nostra $\varphi_I([X])$. Evidentemente la mappa così costruita è un omeomorfismo di U_I su $\mathbb{R}^{n(n-k)}$, ed inoltre la funzione

$$\varphi_J \varphi_I^{-1} : \varphi_I(U_I \cap U_J) \rightarrow \varphi_J(U_I \cap U_J)$$

è analitica, in particolare C^∞ . Per vederlo basta prendere come rappresentante di $\varphi_I^{-1}((y_{ij}))$ la matrice che si ottiene da $((y_{ij}))$ inserendo le colonne della matrice identità $k \times k$ nei posti i_1, \dots, i_k , cioè la prima colonna dopo la $(i_1 - 1)$ -esima di $((y_{ij}))$, la seconda colonna dopo la $(i_k - 2)$ -esima della matrice ottenuta dopo la prima inserzione, e così via.

Sia X la matrice che otteniamo dopo aver in questo modo inserito le k colonne della matrice identità $k \times k$, e consideriamo $X_J^{-1}X$: gli elementi di questa matrice sono quozienti di polinomi quadratici nelle $\{y_{ij}\}$ e del determinante di X_J , che pure è un polinomio nelle $\{y_{ij}\}$ che non si annulla su U_J . Da ciò segue che la funzione $\varphi_J \varphi_I^{-1}$ è analitica (molto di più: è una funzione razionale), e quindi i nostri aperti U_I sono delle carte locali di un atlante analitico (e quindi differenziabile) per lo spazio topologico $G_{n,k}$, che in tal modo risulta dotato della struttura di varietà differenziabile di dimensione $k(n - k)$.

Questa costruzione, presenta una certa analogia con quella che si fa per dotare gli spazi proiettivi della loro struttura differenziabile, ed in effetti, dato che $\mathbb{P}V$ può vedersi come l'insieme dei sottospazi 1-dimensionali di V , è evidente che

$$G_1(V) = \mathbb{P}V$$

Allora le coordinate che abbiamo introdotto si particolarizzano a quelle omogenee.

Dato che, come sappiamo, gli spazi proiettivi sono compatti, ci chiediamo se anche le grassmanniane qualsiasi lo siano, e la risposta è sì: per vederlo consideriamo un punto (v_1, \dots, v_k) in $B_k(V)$ ed osserviamo che è equivalente al punto $(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_k}{\|v_k\|}) \in S^{2n-1} \times \dots \times S^{2n-1}$. Quindi possiamo ottenere $G_k(V)$

anche come quoziente dello spazio $S^{2n-1} \times \dots \times S^{2n-1}$, che essendo un prodotto di sfere è compatto, e quindi ne concludiamo la compattezza di $G_k(V)$.

È un facile esercizio osservare che $G_{n,k} = G_{n,n-k}$.

Le grassmanniane sono oggetti classicamente legati alla geometria proiettiva, e sono in modo naturale sottovarietà degli spazi proiettivi per tramite della cosiddetta *immersione di Plücker*. Definiamo

$$\begin{aligned} \nu : G_k(V) &\rightarrow \mathbb{P} \wedge^k V \\ [v_1, \dots, v_k] &\mapsto [v_1 \wedge \dots \wedge v_k] \end{aligned}$$

La mappa ν è ben definita, dato che, se $w_i = \sum_j a_{ij}v_j$ allora $w_1 \wedge \dots \wedge w_k = \det(A)v_1 \wedge \dots \wedge v_k$. In coordinate:

$$\nu([X]) = [\dots, X_I, \dots]$$

L'espressione in coordinate locali di questa mappa ci mostra che è iniettiva, analitica e con jacobiano non nullo, i.e. che realizza una immersione non singolare della grassmanniana dei k -piani di V nello spazio proiettivo costruito sulla k -ma potenza esterna di V .

Scriviamo ad esempio in una carta locale, quella corrispondente al multiindice $I = (1, \dots, k)$ la mappa ν : dato che $[X] = [X_I^{-1}X]$ e

$$X_I^{-1}X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & y_{11} & \dots & y_{1,n-k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & y_{k1} & \dots & y_{k,n-k} \end{pmatrix}$$

possiamo supporre che X sia già di questa forma. Allora si ha $X_I = 1$ e

$$X_{(1, \dots, l-1, l+1, \dots, k, k+h)} = (-1)^{k-l} y_{lh}$$

sicché

$$\nu([X]) = [1, (-1)^{k-1}y_{11}, (-1)^{k-2}y_{12}, \dots, (-1)^n y_{k,n-k}, \dots]$$

Evidentemente il gruppo lineare $GL_n(\mathbb{R})$ agisce in modo transitivo sulla grassmanniana $G_{n,k}$: infatti ogni k -sottospazio di V si può spostare su un altro per mezzo di una trasformazione lineare invertibile, cioè applicando ai suoi vettori (colonna) una matrice invertibile, e questa azione è ben definita per definizione della relazione \sim . Se poi consideriamo in V la base (e_1, \dots, e_n) , ad esempio la base canonica in \mathbb{R}^n , se W è il sottospazio generato da (e_1, \dots, e_k) , è un facile esercizio verificare che gli elementi di $GL_n(\mathbb{R})$ che stabilizzano W , i.e. le matrici A tali che

$$\forall w \in W \quad Aw \in W$$

stabilizzano anche il sottospazio W^\perp generato dai vettori (e_{k+1}, \dots, e_n) . Queste matrici A sono della forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

ove $A_{11} \in GL_k(\mathbb{R})$, $A_{22} \in GL_{n-k}(\mathbb{R})$ e $A_{12} \in M_{k, n-k}(\mathbb{R})$. La totalità di queste matrici forma ovviamente un sottogruppo H di $GL_n(\mathbb{R})$ che è diffeomorfo, come varietà e come gruppo, a

$$H \cong GL_k(\mathbb{R}) \times GL_{n-k}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{k(n-k)}$$

Osserviamo inoltre che l'azione di GL_n si può ridurre a quella di $O(n)$: infatti, dato che per il procedimento di Gram-Schmidt ogni base di uno spazio vettoriale si può ortormalizzare rispetto ad un fissato prodotto scalare, come ad esempio quello usuale in \mathbb{R}^n definito da $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, lo spazio $B_k(V)$ può anche definirsi come:

$$\begin{aligned} B_k(V) &= \{(v_1, \dots, v_k) \in V^k \mid \forall i, j \quad \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}\} \\ &= \{(v_1, \dots, v_k) \in (S^n)^k \mid \forall i, j \quad \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}\} \end{aligned}$$

Ovviamente la relazione \sim sarà allora definita come:

$$v \sim w \iff \exists A \in O(n) \quad v = Aw$$

in questo modo $O(n)$ agisce in modo ovvio su $B_k(V)$ per moltiplicazione, e c'è una mappa

$$\begin{aligned} \eta : O(n) &\rightarrow B_{n,k} \\ A &\mapsto (Ae_1, \dots, Ae_n) \end{aligned}$$

se (e_1, \dots, e_n) è la solita base standard, una volta fissata la quale si scrive $B_k(V) = B_{n,k}$.

La mappa η è continua e suriettiva, come è ovvio, ed il diagramma

$$\begin{array}{ccc} O(n) & \xrightarrow{\eta} & B_{n,k} \\ \downarrow & & \downarrow \\ O(n+1) & \xrightarrow{\eta} & B_{n+1,k} \end{array}$$

è commutativo, e le frecce verticali sono inclusioni. Ricordiamo che, se $m \leq n$ ci sono due inclusioni di $O(m)$ in $O(n)$: la prima fa agire $O(m)$ su (e_1, \dots, e_m) e si denota semplicemente $O(m) \subset O(n)$, la seconda fa agire $O(m)$ su (e_{m+1}, \dots, e_n) e si denota $I_{n-m} \times O(m) \subset O(n)$. Allora la è ovvia la validità della seguente

Proposizione .1 Per ogni $A, B \in O(n)$ si ha che $\eta(A) = \eta(B)$ se e solo se esiste una matrice $C \in I_k \times O(n-k)$ tale che $A = BC$. Inoltre $\eta^{-1}\eta(A)$ è la classe laterale $[A]$ di A modulo $I_k \times O(n-k)$.

Da ciò segue che η induce una biezione continua

$$\begin{aligned} \vartheta : O(n)/O(n-k) &\rightarrow B_{n,k} \\ [A] &\mapsto (Ae_1, \dots, Ae_n) \end{aligned}$$

Lasciamo come esercizio il seguente

Teorema .2 La mappa ϑ è un omeomorfismo.

(In realtà si tratta di un diffeomorfismo, e la varietà $B_{n,k}$ risulta dotata dell'unica struttura differenziabile che la rende diffeomorfa a $O(n)/O(n-k)$, come accennato nell'appendice: questa varietà si dice *varietà di Stiefel*).

Se ora componiamo la mappa ϑ con la proiezione canonica π di $B_{n,k}$ sul suo quoziente $G_{n,k}$, otteniamo la mappa continua

$$\pi\vartheta : O(n)/O(n-k) \rightarrow G_{n,k}$$

Si lascia per esercizio la seguente

Proposizione .3 Se $A, B \in O(n)$ e $[A]$ e $[B]$ sono le loro classi modulo $O(n-k)$, allora $\pi\vartheta([A]) = \pi\vartheta([B])$ se e solo se esistono $C_1 \in I_k \times O(n-k)$ e $C_2 \in O(n-k)$ tali che $A = BC_1C_2$.

da cui

Teorema .4 $\pi\vartheta$ induce una biezione

$$\psi : \frac{O(n)}{O(k) \times O(n-k)} \rightarrow G_{n,k}$$

che è un omeomorfismo, e tale che il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} \frac{O(n)}{O(n-k)} & \xrightarrow{\vartheta} & B_{n,k} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{O(n)}{O(k) \times O(n-k)} & \xrightarrow{\psi} & G_{n,k} \end{array}$$

è commutativo.

QED

Osserviamo che questi risultati sono ben noti se $k = 1$, in quanto $V_{n,1} = S^{n-1}$ e $G_{n,i} = \mathbb{P}^{n-1}\mathbb{R}$.

In analogia al caso $k = 1$, inoltre, la grassmanniana generica $G_k(V)$ ha tre fibrati tautologici (o canonici): il *sottofibrato tautologico* S_k , la cui fibra in ogni punto $[v]$ di $G_k(V)$ è il k -sottospazio stesso individuato da $[v]$, il *fibrato prodotto* $\widehat{V} = G_k(V) \times V$ ed il *fibrato quoziente universale* Q_k definito dalla successione esatta

$$0 \rightarrow S_k \rightarrow \widehat{V} \rightarrow Q_k \rightarrow 0$$

di fibrati.

Ricordiamo che il fibrato tautologico S_k è l'insieme delle coppie (W, x) ove W è un piano k -dimensionale di V e $x \in W$: dimostriamo ora che, in un senso che renderemo preciso, questo è un fibrato universale.

Premettiamo alla discussione il seguente fatto che dovrebbe essere noto, e che in caso contrario costituisce un buon esercizio:

Lemma .5

- (1) Se M è uno spazio topologico normale ed $\{U_i\}_{i \in I}$ un suo ricoprimento aperto finito, allora esiste un ricoprimento $\{V_i\}_{i \in I}$ aperto tale che $\overline{V}_i \subset U_i$.
- (2) Se M è una varietà, U un aperto in M ed A un chiuso contenuto in U , allora esiste una funzione C^∞ f che è identicamente 1 in A e identicamente 0 fuori da U .

Supporremo per semplicità che le varietà in gioco siano di tipo finito: vedremo poi come estendere i risultati ottenuti al caso generale.

Lemma .6 Se $E \rightarrow M$ è un fibrato vettoriale di rango k su una varietà M di tipo finito, allora esistono un numero finito di sezioni C^∞ di E che, in ogni punto, generano la fibra su quel punto.

DIMOSTRAZIONE: Prendiamo un buon ricoprimento finito $\{U_i\}_{i \in I}$ di M : dato che U_i è contraibile, $E|_{U_i}$ è banale e quindi esistono k sezioni s_{i1}, \dots, s_{ik} su U_i che formano una base della fibra su ogni punto di U_i . Allora per il Lemma di Restringimento esiste un ricoprimento aperto $\{V_i\}_{i \in I}$ con $\overline{V}_i \subset U_i$ ed una famiglia di funzioni $\{f_i\}_{i \in I}$ tali che, per ogni $i \in I$, $f_i \in C^\infty(V_i)$ ed f_i sia 1 su V_i e 0 fuori da U_i .

Allora $\{f_i s_{i1}, \dots, f_i s_{ik}\}_{i \in I}$ sono sezioni globali di E che generano la fibra in ogni punto.

QED

Si osservi che le sezioni globali così ottenute *non* sono necessariamente mai nulle: se almeno una di loro lo è il fibrato è banale.

Proposizione .7 *Se $E \rightarrow M$ è un fibrato di rango k su una varietà M di tipo finito, e se ci sono n sezioni globali $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(E)$ che generano la fibra sopra ogni punto della varietà, allora esiste una mappa*

$$f : M \rightarrow G_{n,k}$$

tale che E è il pull back tramite f del fibrato quoziente universale Q_k :

$$E = f^{-1}Q_k$$

DIMOSTRAZIONE: Se s_1, \dots, s_n sono n sezioni di E che generano la fibra sopra ogni punto di M , consideriamo lo spazio vettoriale V generato su \mathbb{R} da questi elementi, cioè che li ammetta come base (allora sarà $V \cong \mathbb{R}^n$). Per ipotesi, per ogni $p \in M$, la mappa di *valutazione*

$$\begin{aligned} ev_p : V &\rightarrow E_p \rightarrow 0 \\ \sum_i a_i s_i &\mapsto \sum_i a_i s_i(p) \end{aligned}$$

è suriettiva, e quindi $Ker\ ev_p$ è un sottospazio di V di codimensione k (la dimensione di E_p), sicché la fibra del fibrato quoziente universale Q_k sul punto $(Ker\ ev_p) \in G_k(V)$ è

$$V/Ker\ ev_p = E_p$$

Allora definiamo la nostra mappa f come

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow G_{n,k} \\ p &\mapsto Ker\ ev_p \end{aligned}$$

in modo che, per definizione, il pull back di Q_k sia proprio E .

QED

La mappa f si dice anche *mappa classificante* del fibrato.

Esercizio .8 *Dimostrare che la mappa classificante è ben definita, nel senso che non dipende dalla scelta delle sezioni s_1, \dots, s_n .*

L'esercizio precedente dovrebbe mostrare che la mappa classificante è ben definita a meno di isomorfismi dello spazio V in sè, cioè a meno di cambiamenti di base, il che vuol dire che due mappe classificanti f e f' associate a sezioni distinte sono legate dalla relazione

$$f' = A \circ f$$

ove $A \in GL_n(\mathbb{R})$ agisce al solito modo sulla grassmanniana.

Proposizione .9 *Le classi di omotopia della mappa classificante del fibrato vettoriale $E \rightarrow M$ dipendono unicamente da E , e, per n abbastanza grande, la mappa classificante induce una mappa ben definita*

$$\beta : Vect_k(M) \rightarrow [M, G_{n,k}]$$

fra le classi di isomorfismo di fibrati vettoriali di rango k su M e le classi di omotopia delle applicazioni fra M e $G_{n,k}$.

DIMOSTRAZIONE: Se $g : E \rightarrow E'$ è un isomorfismo di fibrati, allora g induce una biezione fra le sezioni di E e le sezioni di E' . Quindi gli spazi vettoriali generati da queste sezioni saranno isomorfi per tramite di un elemento di $A \in GL_n(\mathbb{R})$, cioè le mappe classificanti f e f' sono legate dalla relazione $f' = Af$. Ora, se $\det(A) > 0$ A si può connettere con una curva continua $A(t)$ in $GL_n(\mathbb{R})$ con la matrice 1, e quindi la mappa $f_t = A(t)f$ è una omotopia fra f e f' . Ma il determinante di A deve essere per forza positivo, perché E e E' sono isomorfi, e quindi se uno è orientabile anche l'altro lo è, ed in questo caso hanno la stessa orientazione. Quindi, se sono orientabili anche gli spazi generati dalle sezioni che definiscono la mappa classificante lo sono ed hanno la stessa orientazione, il che vuol dire che un isomorfismo fra essi deve preservarla, e quindi avere determinante positivo, mentre se non sono orientabili è sempre possibile costruire i loro rivestimenti doppi orientabili, ed i rivestimenti devono avere la stessa orientazione perché i fibrati sono isomorfi, e dunque la mappa indotta da A deve preservare questa orientazione e $\det(A) > 0$. Quindi, in ogni caso, le mappe f e f' sono omotope.

La mappa β è quella ovvia che porta una classe di isomorfismo di fibrati nella classe di omotopia della mappa classificante associata ad un qualunque fibrato E nella classe di isomorfismo data, ove supponiamo che M abbia un buon ricoprimento finito, diciamo di m aperti, e quindi un fibrato di rango k abbia un insieme di mk sezioni, come risulta dalla proposizione precedente, sicché per $n \geq mk$ la mappa β è ben definita.

QED

Il risultato finale è il seguente:

Teorema .10 *Se M è una varietà con un buon ricoprimento finito di m aperti, e se k è un intero positivo, per ogni $n \geq mk$ c'è una corrispondenza biunivoca*

$$\text{Vect}_k(M) \leftrightarrow [M, G_{n,k}]$$

(proprietà universale della grassmanniana).

DIMOSTRAZIONE: Poiché mappe omotope fra varietà inducono, per pull back, isomorfismi di fibrati (proprietà dell'omotopia dei fibrati vettoriali), il pull back del fibrato quoziente universale Q_k su $G_{n,k}$ induce una mappa

$$\begin{aligned} \alpha : [M, G_{n,k}] &\rightarrow \text{Vect}_k(M) \\ [f] &\mapsto [f^{-1}Q_k] \end{aligned}$$

per i risultati precedenti, per ogni intero $n \geq mk$ la mappa

$$\beta : \text{Vect}_k(M) \rightarrow [M, G_{n,k}]$$

è l'inversa di α .

QED

Accenniamo ora all'estensione di questi risultati nel caso di una varietà non necessariamente di tipo finito. Evidentemente i teoremi che abbiamo dimostrato non valgono più, poiché poggiavano sulla considerazione di ricoprimenti finiti, e la finitezza di tali ricoprimenti costituiva un limite inferiore alla dimensione dello spazio vettoriale V sul quale consideravamo la grassmanniana.

Se ci permettiamo di considerare ricoprimenti numerabili (ogni varietà paracompatta ne possiede di buoni), siamo costretti a considerare grassmanniane su spazi di dimensione infinita, il che può farsi come segue: supponiamo di avere una successione di spazi vettoriali e di inclusioni:

$$\dots \subset V_{i-1} \subset V_i \subset V_{i+1} \subset \dots$$

con $\dim V_i = i$. Allora esiste una successione di inclusioni naturali

$$\dots \subset G_k(V_{i-1}) \subset G_k(V_i) \subset G_k(V_{i+1}) \subset \dots$$

Per costruire la grassmanniana infinita abbiamo ora bisogno di un procedimento canonico per incollare in modo opportuno tutti gli elementi di questa successione. Dal punto di vista insiemistico possiamo immaginare che sia

$$G_{\infty,k} = \bigcup_n G_{n,k}$$

con la topologia debole, cioè tale che un insieme H in $G_{\infty,k}$ è aperto se e solo se lo è ogni intersezione $H \cap G_{n,k}$. Un punto di $G_{\infty,k}$ è un sottospazio di dimensione k dello spazio vettoriale $V_{\infty} = \cup_n V_n$. Questo spazio non è affatto misterioso: la somma di due suoi elementi v e w si ottiene osservando che, per definizione, esistono n e m tali che $v \in V_n$ e $w \in V_m$, e dato che, ad esempio, $m \geq n$, allora $w \in V_n$ e quindi $v + w$ è semplicemente la somma di v e w in V_n . Analogamente per il prodotto per uno scalare.

Possiamo ripetere questa costruzione anche per i fibrati quozienti universali sopra ogni grassmanniana, con le inclusioni indotte:

$$\dots \subset Q_{k-1} \subset Q_k \subset Q_{k+1} \subset \dots$$

e danno luogo ad un fibrato Q_{∞} di rango k su $G_{\infty,k}$: la fibra di un punto V (che è uno spazio di codimensione k in V_{∞}) di V_{∞} in Q_{∞} è lo spazio k -dimensionale V_{∞}/V .

A questo punto, una volta dimostrato il lemma di restringimento nel caso di ricoprimenti numerabili, tutti i risultati ottenuti si estendono al caso infinito, ed in particolare la corrispondenza biunivoca

$$\text{Vect}_k(M) \cong [M, G_{\infty,k}]$$

Come ultima osservazione notiamo che tutto quel che si è detto finora, l'introduzione della grassmanniana, le sue proprietà topologiche e differenziali ed il suo ruolo nella teoria dei fibrati culminante con la proprietà universale, si sarebbe potuto svolgere a partire da spazi vettoriali complessi. Allora avremmo avuto una grassmanniana $G_{n,k}(\mathbb{C})$ dei sottospazi complessi k -dimensionali di uno spazio vettoriale complesso, avremmo potuto dimostrare che è una varietà complessa e rappresentarla come un quoziente $U(n)/(U(k) \times U(n-k))$ di gruppi unitari e formulare una proprietà universale stabilendo una corrispondenza biunivoca

$$\text{Vect}_k(M, \mathbb{C}) \cong [M, G_{n,k}(\mathbb{C})]$$

fra classi di isomorfismo di fibrati vettoriali complessi di rango k e classi di omotopia di applicazioni fra la varietà M e la grassmanniana complessa. La dimostrazione in questo caso è ancora più immediata in quanto non ci sono osservazioni da fare sulla orientabilità dei fibrati (ogni fibrato complesso è orientabile), e, dato che il gruppo $GL(n, \mathbb{C})$ è connesso, ogni mappa classificante è omotopa ad un'altra in quanto ogni matrice non singolare è connessa alla matrice identica per mezzo di una curva continua.

Appendice

La nostra definizione di grassmanniana ammette una riformulazione in termini di azioni di gruppi, ma per vederlo dobbiamo fare una breve digressione per introdurre il concetto di *spazio omogeneo*.

Un sottogruppo G di $GL_n(\mathbb{R})$ agisce su una varietà differenziabile M quando è data una mappa di varietà C^∞ :

$$\rho : G \times M \rightarrow M$$

in modo che

$$\rho(g \cdot h, x) = \rho(g, \rho(h, x))$$

e che

$$\rho(e, x) = x$$

per ogni $x \in M$, $g, h \in G$ e dove e è l'identità del gruppo. Equivalentemente, ciò significa che è possibile assegnare ad ogni elemento del gruppo G un diffeomorfismo ρ_g di M in sé tale che $\rho_e = id|_M$ e $\rho_{gh} = \rho_g \circ \rho_h$. Solitamente si snellisce questa pesante notazione e si scrive semplicemente gx al posto di $\rho(g, x)$.

Ci servirà richiamare la nozione seguente: un gruppo G si dice *gruppo di Lie* se è al contempo una varietà differenziabile in modo che la mappa di moltiplicazione

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto g \cdot h \end{aligned}$$

sia C^∞ , come pure la mappa di passaggio all'inverso:

$$\begin{aligned} G &\rightarrow G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

I gruppi di matrici che normalmente vengono considerati sono tutti gruppi di Lie, ad esempio, ed altri esempi si hanno dall'ovvio fatto che il prodotti ed i quozienti per sottogruppi *chiusi* normali di gruppi di Lie sono ancora gruppi di Lie e (non è banale: si tratta del Teorema di Cartan) che i sottogruppi chiusi dei gruppi di Lie sono gruppi di Lie.

Ricordiamo che l'azione di un gruppo su un insieme si dice *transitiva* se ogni elemento dell'insieme si può spostare in qualsiasi altro per il tramite di un elemento del gruppo: nel nostro caso, G agisce transitivamente sulla varietà M se, fissato $x_0 \in M$, per ogni altro $x \in M$ esiste un $g \in G$ tale che $g x = x_0$. Lasciamo per esercizio (se non è già noto), che l'azione di un gruppo su un

insieme induce sempre una relazione di equivalenza, che considera due punti equivalenti se esiste un elemento del gruppo che trasforma l'uno nell'altro: se l'azione del gruppo è transitiva, esisterà solo una classe di equivalenza.

Si dice che una varietà M è uno *spazio omogeneo* se esiste un'azione transitiva di un gruppo di Lie G su M .

Un esempio importante è il seguente: un gruppo di Lie agisce sempre su se stesso per moltiplicazione a sinistra: $\rho(g, h) = g \cdot h$ e ciò lo rende uno spazio omogeneo in modo naturale.

Se $x \in M$ è un punto in uno spazio omogeneo (rispetto all'azione di G), allora il *gruppo di isotropia* di x è il sottogruppo G_x di G definito come segue:

$$G_x := \{g \in G \mid g x = x\}$$

cioè G_x contiene gli elementi del gruppo per i quali x è un punto fisso.

Se x e y sono punti distinti di uno spazio omogeneo, i gruppi di isotropia G_x e G_y sono isomorfi: questo si lascia per esercizio, col suggerimento di considerare quale isomorfismo la trasformazione di coniugio $h \mapsto ghg^{-1}$.

Se H è un sottogruppo di un gruppo G , ha sempre senso considerare l'insieme delle classi laterali G/H : ovviamente questo sarà un gruppo solo se H è normale in G . Nel caso degli spazi omogenei, possiamo dimostrare quanto segue:

Proposizione. *Se M è uno spazio omogeneo per l'azione di un gruppo G , allora fissato un qualsiasi $x \in G$ esiste una corrispondenza biunivoca fra l'insieme M e l'insieme G/H .*

Infatti se $x \in M$ è fissato, stabiliamo la corrispondenza:

$$\begin{aligned} G/H &\rightarrow M \\ gH_x &\mapsto \rho(g, x) \end{aligned}$$

che questa corrispondenza sia ben definita e biunivoca è un esercizio.

Quando M è una varietà differenziabile e G un gruppo di Lie la proposizione precedente può completarsi nei seguenti teoremi, che però sono molto più difficili da dimostrare:

Teorema A. *Se H è un sottogruppo chiuso di un gruppo di Lie G e se G/H è l'insieme dei laterali di H in G , allora esiste un'unica struttura di varietà differenziabile su G/H tale che la proiezione canonica $G \rightarrow G/H$ sia C^∞ .*

Teorema B. *Se un gruppo di Lie G agisce in modo transitivo su una varietà differenziabile M e se H è il gruppo di isotropia di un qualsiasi punto fissato x di M , allora la corrispondenza biunivoca $G/H \approx M$ è un diffeomorfismo.*

Per una dimostrazione rimandiamo ad esempio al terzo capitolo del bel libro di Warner *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*.

Ora torniamo finalmente alle grassmanniane: sappiamo che c'è un'azione del gruppo $O(n)$ su $G_{n,k}$, e lo stabilizzatore di un piano k -dimensionale rispetto a questa azione è il sottogruppo $O(n-k) \times O(k)$: ne segue allora che esiste sull'insieme $G_{n,k}$ un'unica struttura differenziabile per la quale è uno spazio omogeneo $O(n)/(O(n-k) \times O(k))$, e questa struttura differenziabile è proprio quella che abbiamo introdotto in precedenza. Un risultato analogo, ma col gruppo $U(n)$ al posto di $O(n)$ vale nel caso della grassmanniana complessa.



This work is licensed under a *Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License*.