Capitolo 4

MISURE

La teoria moderna dell'integrazione può svolgersi a partire dalla teoria dei funzionali lineari e continui sugli spazi di funzioni continue, o a partire dalla teoria della misura: il primo approccio, più analitico, consente profonde generalizzazioni (distribuzioni, correnti, etc.) mentre il secondo approccio è più insiemistico e legato alla topologia. Qui diamo le linee portanti della teoria della misura, che è alla base dell'integrazione e del calcolo delle probabilità.

4.1 Algebre di insiemi e spazi di misura

Se $A \subset X$ è un sottoinsieme di un fissato insieme X denoteremo il complemento $X \setminus A$ anche col simbolo $\complement A$.

4.1.1 Definizione *Un'*algebra di sottoinsiemi *di un insieme X è una famiglia $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ tale che:*

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(2) *Se* $A, B \in \mathcal{A}$ *allora* $A \cup B \in \mathcal{A}$.

(3) *Se* $A \in \mathcal{A}$ *allora* $\complement A \in \mathcal{A}$.

Ad esempio $\mathcal{P}(X)$ è un'algebra di sottoinsiemi di X. Per le leggi di de Morgan: $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ e $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ si ha che, se $\mathcal{A}$ è un'algebra di insiemi e se $A, B \in \mathcal{A}$ allora $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Le algebre di insiemi sono in particolare *algebre di Boole*: queste ultime sono infatti arbitrari insiemi dotati di tre operazioni ($\cap, \cup$ e $\complement$) e di due elementi (0 e 1) tali da soddisfare le regole dell'algebra degli insiemi. Evidentemente le unioni e le intersezioni finite di elementi di un'algebra appartengono ancora all'algebra.

Osserviamo che un'algebra di insiemi è sempre un insieme parzialmente ordinato rispetto alla relazione $\subset$: in effetti potremmo definire questa relazione semplicemente come

$$a \subset b \iff a \cap b = a$$

Evidentemente rispetto a questo ordinamento un'algebra di insiemi è un reticolo, cioè ogni coppia di elementi $A, B \in \mathcal{A}$ ha un massimo e minimo dati rispettivamente da $A \cup B$ e $a \cap B$.

Ovviamente non ogni famiglia di sottoinsiemi di un insieme X è un'algebra, ma possiamo sempre associargliene una:

4.1.2 Proposizione *Se $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(X)$ è una famiglia di sottoinsiemi di un insieme X, esiste un'algebra $\mathcal{A}(\mathcal{X})$ contenente $\mathcal{X}$ e minima rispetto a questa proprietà, i.e. ogni altra algebra contenente $\mathcal{X}$ deve contenere $\mathcal{A}(\mathcal{X})$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\mathcal{F}$ la famiglia di tutte le algebre di sottoinsiemi di X contenenti $\mathcal{X}$: certamente $\mathcal{F} \neq \emptyset$ dato che almeno $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{F}$. Consideriamo

$$\mathcal{A}(\mathcal{X}) := \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathcal{F}} \mathcal{A}$$

Una semplice verifica mostra che si tratta di un'algebra di sottoinsiemi di X che, per definizione, è la minima rispetto all'inclusione.

QED

4.1.3 Definizione *L'algebra $\mathcal{A}(\mathcal{X})$ si dice* generata *da $\mathcal{X}$.*

4.1.4 Definizione *Una σ-*algebra *è un'algebra $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di un insieme X tale che per ogni successione $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{A}$ l'insieme $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ sia un elemento di $\mathcal{A}$.*

Dato che i complementari di un elemento di $\mathcal{A}$ appartengono ancora a $\mathcal{A}$ anche le intersezioni numerabili di elementi di una σ-algebra appartengono alla σ-algebra.

La proposizione precedente vale ovviamente anche per le σ-algebre sicché possiamo parlare di σ-algebra generata da una famiglia di sottoinsiemi di X.

4.1.5 Esempio *Se X è uno spazio topologico, la sua topologia è una famiglia di sottoinsiemi di X: dunque esiste la σ-algebra $\beta(X)$ generata dalla topologia di X, che si dice* σ-algebra di Borel *ed i cui elementi si dicono* boreliani. *Equivalentemente, $\beta(X)$ è la σ-algebra generata dai chiusi, ovvero da una qualsiasi base per la topologia di X: ad esempio la σ-algebra di Borel associata alla topologia naturale della retta reale $\mathbb{R}$ è la σ-algebra generata dagli intervalli aperti.*

4.1.6 Definizione *Se X è uno spazio topologico, un suo sottoinsieme si dice F_σ se è unione numerabile di chiusi e si dice G_δ se è intersezione numerabile di aperti.*

Evidentemente i chiusi e le unioni numerabili di F_σ sono ancora F_σ, così come gli aperti e le intersezioni numerabili di aperti sono G_δ: per definizione, gli insiemi di tipo F_σ e G_δ sono boreliani, come pure sono boreliani tutte le possibili combinazioni di F_σ e G_δ. Ad esempio, un insieme è $F_{\sigma\delta}$ se è intersezione numerabile di insiemi F_σ, è così via; gli insiemi $F_{\sigma\delta\ldots}$ e $G_{\delta\sigma\ldots}$ sono tutti boreliani ma, si può dimostrare, non tutti i boreliani sono di questo tipo.

4.1.7 Definizione *Uno* spazio misurabile *è una coppia $(X, \mathcal{B})$ formata da un insieme X e da una σ-algebra $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi di X. Un elemento $A \in \mathcal{B}$ si dice* misurabile.

4.1.8 Definizione *Una* misura esterna *μ^* su un insieme X è una funzione $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ tale che*

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(2) *Se $E \subset F$ allora $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$ (monotonia).*

(3) *Se $\{E_n\}$ è una successione di insiemi misurabili disgiunti allora*

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^* E_i$$

(Subadditività numerabile).

4.1.9 Esempio *La* misura esterna di Lebesgue *sulla retta reale è definita come*

$$l^*(E) = \inf_{E \subset \bigcup I_n} \sum_n l(I_n)$$

ove $\{I_n\}$ sono successioni di intervalli in $\mathbb{R}$ e $l(I)$ è la lunghezza dell'intervallo I. In questo caso, classicamente si definisce un insieme E misurabile secondo Lebesgue *se per ogni altro insieme F si ha che $l^*(F) = l^*(E \cap F) + l^*(\complement E \cap F)$.*

Forti di questo esempio definiamo

4.1.10 Definizione *Se μ^* è una misura esterna su un insieme X, un sottoinsieme $Y \subset X$ tale che*

$$\forall Z \subset X \quad \mu^*(Z) = \mu^*(Y \cap Z) + \mu^*(\complement Y \cap Z)$$

si dice misurabile (rispetto a μ^*).

4.1.11 Teorema *Se μ^* è una misura esterna su un insieme X l'insieme dei sottoinsiemi di X misurabili rispetto a μ^* è una σ-algebra.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\mathcal{B} := \{Y \subset X \mid Y \text{ misurabile rispetto a } \mu^*\}$; ovviamente $\emptyset \in \mathcal{B}$, e se $E \in \mathcal{B}$, anche $\complement E \in \mathcal{B}$. Consideriamo quindi le unioni fra due insiemi misurabili $E_1, E_2 \in \mathcal{B}$: dato che sono misurabili si ha, per ogni $F \subset X$:

$$\mu^*(F) = \mu^*(E_2 \cap F) + \mu^*(\complement E_2 \cap F)$$
$$\mu^*(F \cap \complement E_2) = \mu^*(E_1 \cap F \cap \complement E_2) + \mu^*(\complement E_1 \cap F \cap \complement E_2 F)$$

Ma $F \cap (E_1 \cup E_2) = (F \cap E_1) \cup (F \cap E_1 \cap \complement E_2)$ e quindi, per subadditività di μ^*:

$$\mu^*(F \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^*(F \cap E_1 \cap \complement E_2) \leq \mu^* A$$

Cioè $E_1 \cup E_2$ è misurabile per la legge di de Morgan. Quindi $\mathcal{B}$ è un'algebra di insiemi.

Ora consideriamo $E = \bigcup E_n$ unione di insiemi misurabili disgiunti; poniamo

$$F_n := \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

F_n è misurabile e, dato che $\complement E \subset \complement F_n$:

$$\mu^*(F \cap F_n) + \mu^*(F \cap \complement E) \leq \mu^*(F \cap F_n) + \mu^*(F \cap \complement F_n) = \mu^* F$$

Ma $F_n \cap E_n = E_n \in \mathcal{B}$ e $F_n \cap \complement E_n = F_{n-1}$ sicché

$$\mu^*(F \cap F_n) = \mu^*(F \cap E_n) + \mu^*(F \cap F_{n-1})$$

e, per induzione:

$$\mu^*(F \cap F_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(F \cap E_i)$$

da cui (dato che $F \cap E = \bigcup_{i=1}^{\infty}(F \cap E_i)$

$$\mu^*(F \cap \complement E) + \mu^*(F \cap E) \leq \mu^*(F \cap \complement E) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(F \cap E_i) \leq \mu^* A$$

QED

4.1.12 Definizione *Una* misura μ *su uno spazio misurabile* $(X, \mathcal{B})$ *è una funzione* $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow [0, \infty]$ *tale che*

(1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(2) *Se* $\{E_n\}$ *è una successione di insiemi misurabili disgiunti allora*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu E_i$$

(Additività numerabile).

Uno spazio di misura *è una tripla* $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *ove* μ *è una misura sullo spazio misurabile* $(X, \mathcal{B})$.

4.1.13 Esempio *Se* X *è un insieme non vuoto a* $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$ *l'insieme delle parti, data una funzione* $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ *poniamo*

$$\forall E \in \mathcal{B} \quad \mu E := \sum_{x \in E} f(x)$$

ove si intende che

$$\sum_{x \in E} f(x) = \sup_{\substack{x_1,\dots,x_n \in E \\ n \in \mathbb{N}}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

Evidentemente si tratta di una misura. Ad esempio, per $f = 1$ *otteniamo la* misura $\#$ che conta, *i.e. tale che*

$$\#E = \begin{cases} \mathrm{Card}(E) & \text{se } E \text{ è finito} \\ \infty & \text{se } E \text{ è infinito} \end{cases}$$

Se $x_0 \in X$ *è fissato, per* $f(x) = \delta_{xx_0}$ *otteniamo la* misura δ_{x_0} di Dirac concentrata in x_0*:*

$$\delta_{x_0} E = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{se } x_0 \notin E \end{cases}$$

Un esempio notevole di misura è ottenuto a partire da misure esterne:

4.1.14 Teorema *Se* μ^* *è una misura esterna su un insieme* X *e* $\mathcal{B}$ *è la* σ*-algebra degli insiemi misurabili rispetto a* μ^* *allora la restrizione* μ *di* μ^* *a* $\mathcal{B}$ *è una misura su* $\mathcal{B}$.

DIMOSTRAZIONE: Dato che $\mu = \mu^*|_{\mathcal{B}}$ è una misura esterna, per dimostrare che è una misura basta far vedere che soddisfa l'additività numerabile. Intanto dimostriamo che soddisfa l'additività finita: se E_1 e E_2 sono misurabili e disgiunti, la misurabilità di E_2 implica

$$\begin{aligned} \mu(E_1 \cup E_2) &= \mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^*((E_1 \cup E_2) \cap E_2) + \mu^*((E_1 \cup E_2) \cap \complement E_2) \\ &= \mu^* E_2 + \mu^* E_1 \end{aligned}$$

Ora, se $\{E_n\}$ sono misurabili e disgiunti allora

$$\sum_{i=1}^{n} \mu E_i = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leq \mu E$$

per ogni n, quindi

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu E_i \leq \mu E$$

Ma la disuguaglianza opposta vale sempre dato che μ è una misura esterna e quindi (tenendo conto che $\mu\emptyset = \mu^*\emptyset = 0$) si ha la tesi.

QED

4.1.15 Esempio *Sulla retta reale, partendo dalla misura esterna di Lebesgue l^* associata alla lunghezza degli intervalli, la misura indotta sull'insieme degli insiemi misurabili è la* misura di Lebesgue *in $\mathbb{R}$; dato che gli intervalli sono misurabili, la classe degli insiemi misurabili secondo Lebesgue contiene i boreliani della retta reale.*

Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione monotona, possiamo definire una misura esterna sulla retta reale come

$$s_f^*(E) = \inf_{E \subset \bigcup I_n} s_f(I)$$

ove $s_f([a,b] = f(b) - f(a)$ (osserviamo che se f è la funzione identità s_f è la lunghezza dell'intervallo). La misura esterna e la misura che ne derivano si chiamano di *Lebesgue–Stieltjes* e sono fondamentali nel calcolo delle probabilità: le approfondiremo in séguito.

4.2 Completamenti ed estensioni di misure

Diamo alcune proprietà essenziali delle misure.

4.2.1 Proposizione *Se $(X, \mathcal{B}, \mu)$ è uno spazio di misura:*

(1) *Se $A \subset B$ sono misurabili allora $\mu A \leq \mu B$.*

(2) *Se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono misurabili e $\mu E_1 < \infty$ e $E_n \subset E_{n+1}$ allora*

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu E_n$$

(3) *Se* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sono misurabili allora*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu E_i$$

DIMOSTRAZIONE:
(1) Segue da $B = A \cup (B \setminus A)$ e $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$.
(2) Se $E = \bigcap E_i$ allora

$$E_1 = E \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \setminus E_{i+1}\right)$$

(unione disgiunta) e quindi $\mu E_1 = \mu E + \sum \mu(E_i \setminus E_{i+1})$. Ma $E_i = E_{i+1} \cup (E_i \setminus E_{i+1})$ quindi

$$\mu E_1 = \mu E + \sum_{i=1}^{\infty}(\mu E_i - \mu E_{i+1}) = \mu E + \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=1}^{n-1}(\mu E_i - \mu E_{i+1}) = \mu E + \mu E_1 - \lim \mu E_n$$

(3) Se $F_n = E_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right)$ allora $F_n \subset E_n$ e gli F_n sono disgiunti. Quindi $\mu F_n \leq \mu E_n$ e

$$\mu\left(\bigcup E_i\right) = \sum \mu F_i \leq \sum \mu E_i$$

QED

4.2.2 Definizione *Una misura* μ *su uno spazio* X *si dice* finita *se* $\mu(X) < \infty$ *e* σ*-finita se è possibile ricoprire l'insieme* X *con insiemi misurabili* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*:*

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

tali che per ogni i: $\mu X_i < \infty$*.*

Un insieme misurabile E è di *misura finita* se $\mu E < \infty$ ed è di misura σ-finita se è unione di una famiglia numerabile di insiemi di misura finita.

4.2.3 Definizione *Uno spazio* $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *è* completo *(e la misura* μ *si dice* completa*) se* $\mathcal{B}$ *contiene tutti i sottoinsiemi degli insiemi di misura nulla:*

$$\forall E \in \mathcal{B}\ \forall A \subset E \quad \mu E = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{B}$$

4.2.4 Esempio *La misura* μ *indotta (per restrizione) da una misura esterna* μ^* *sulla* σ*-algebra dei suoi insiemi misurabili è completa.*

4.2.5 Teorema *Se $(X, \mathcal{B}, \mu)$ è uno spazio di misura allora esiste uno spazio di misura $(X, \widetilde{\mathcal{B}}, \widetilde{\mu})$ tale che*

(1) $\mathcal{B} \subset \widetilde{\mathcal{B}}$.

(2) *Se $E \in \mathcal{B}$ allora $\mu E = \widetilde{\mu} E$.*

(3) *$E \in \widetilde{\mathcal{B}}$ se e solo se esistono $B \subset \mathcal{B}$ e $A \subset C$ con $C \in \mathcal{B}$ tali che $\mu C = 0$ e $E = A \cup B$.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo la σ-algebra $\mathcal{B}_0$ generata da $\mathcal{B}$ e $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ ove

$$\mathcal{N} := \{N \in \mathcal{B} \mid \mu N = 0\}$$

Mostriamo che questa σ-algebra è $\widetilde{\mathcal{B}}$, i.e. che è caratterizzata dalla (3). Che sia $\widetilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}_0$ è ovvio. Dimostriamo allora che $\widetilde{\mathcal{B}}$ è una σ-algebra: dovrà quindi contenere $\mathcal{B}_0$ per definizione di σ-generata da una famiglia di insiemi.

Un elemento di $\widetilde{\mathcal{B}}$ può scriversi come $E = A \cup B$ con $A \cap B = \emptyset$ (sostituendo se necessario C con $E \setminus C$. Allora il complementare di E è

$$\complement(B \cup C) \cup (\complement A \cap C)$$

Ma $B, C \in \mathcal{B}$ e quindi $\complement A \cap N \subset N$ i.e. $\complement A \cap C \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$, cioè il complementare di E sta in $\widetilde{\mathcal{B}}$. Infine, che l'unione numerabile di elementi di $\widetilde{\mathcal{B}}$ stia in $\widetilde{\mathcal{B}}$ è ovvio.

Ora definiamo $\widetilde{\mu}$: se $\mathcal{B}$ è completa allora $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$ e basta porre $\widetilde{\mu} = \mu$. Altrimenti, se $E \in \widetilde{\mathcal{B}}$ è $E = A \cup B$, con $B \in \mathcal{B}$ e $A \subset C$ e $\mu C = 0$; poniamo

$$\widetilde{\mu}(E) := \mu(B)$$

Questa definizione è ben posta: se $E = A' \cup B'$ con $A' \subset C'$ allora

$$B \subset B \cup A = B' \cup A' \subset B' \cup C' \in \mathcal{B}$$

e quindi $\mu B \leq \mu B'$. Scambiando B on B' si ha $\mu B = \mu B'$.

Verifichiamo che si tratta di una misura: se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono disgiunti, allora ciascuno è della forma $E_n = A_n \cup B_n$ e quindi gli B_n debbono essere disgiunti, quindi

$$\widetilde{\mu}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\mu}(E_n)$$

QED

4.2.6 Esempio *La misura di Lebesgue è il completamento della misura di Borel ottenuta restringendo la misura esterna di Lebesgue alla classe dei boreliani.*

Per concludere stabiliamo un risultato fondamentale, che ci fornisce un metodo molto potente per costruire misure.

4.2.7 Definizione *Se $\mathcal{A}$ è un'algebra di insiemi, una* misura *su $\mathcal{A}$ è una funzione $\overline{\mu} : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ tale che*

(1) $\overline{\mu}\emptyset = 0$.

(2) *Se $\{A_n\}$ è una successione di elementi di $\mathcal{A}$ disgiunti tale che $\bigcup A_n \in \mathcal{A}$ allora*

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu} A_n$$

L'unica differenza con le misure propriamente dette è che queste ultime sono definite sulle σ-algebre.

Osserviamo ora che, data una misura $\overline{\mu}$ su un'algebra $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di un insieme X, esiste su X una misura esterna μ^* associata a $\overline{\mu}$. Infatti basta porre, per ogni $E \subset X$:

$$\mu^*(E) := \inf_{E \subset \bigcup_i A_i} \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu} A_i$$

(l'inf varia su tutte le successioni $\{A_i\}$ in $\mathcal{A}$).

4.2.8 Lemma *μ^* è una misura esterna e $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \overline{\mu}$.*

DIMOSTRAZIONE: L'unica cosa da dimostrare è la subadditività numerabile. Sia quindi $E = \bigcup_n E_n$ con gli $\{E_n\}$ disgiunti; se per ogni E_n si ha che $\mu^* E_n = \infty$ la subadditività è ovvia. Supponiamo quindi che, per ogni $\varepsilon > 0$ ed ogni n esista la successione $\{A_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ tale che $E_n \subset \bigcup_i A_{n_i}$ e

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu} A_{n_i} < \mu^* E_n + \frac{\varepsilon}{2}$$

Quindi

$$\mu^* E \leq \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu} A_{n_i} < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* E_n + \varepsilon$$

Per arbitrarietà di ε segue allora la subadditività di μ^*.

La seconda parte del lemma è ovvia.

QED

4.2.9 Teorema di Estensione di Carathéodory *Se $\overline{\mu}$ è una misura su un'algebra $\mathcal{A}$ è μ^* la misura esterna indotta da $\overline{\mu}$ allora la restrizione μ di μ^* alla σ-algebra dei suoi insiemi misurabili è una misura sulla σ-algebra (contenente $\mathcal{A}$) di questi insiemi. Se $\overline{\mu}$ è una misura finita, anche μ lo è, e se $\overline{\mu}$ è una misura σ-finita allora μ è l'unica misura definita sulla σ-algebra generata da $\mathcal{A}$ tale che $\mu|_{\mathcal{A}} = \overline{\mu}$.*

DIMOSTRAZIONE: La prima parte è praticamente già stata dimostrata: data una misura sull'algebra $\mathcal{A}$ abbiamo costruito una misura esterna che quindi dà luogo ad una misura sulla σ-algebra dei suoi insiemi misurabili; l'unica cosa da dimostrare, per avere che effettivamente $\mu|_{\mathcal{A}} = \mu^*$ è che gli elementi di $\mathcal{A}$ sono misurabili rispetto a μ^*. Per questo basta far vedere che, per ogni $A \in \mathcal{A}$, se E è un insieme qualsiasi allora

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \complement A) \leq \mu^* E$$

(la disuguaglianza opposta è vera sempre per subadditività di μ^*). Sia dunque $\{A_n\}$ una successione in $\mathcal{A}$ tale che $E \subset \bigcup_n A_n$ tale che, per ogni $\varepsilon > 0$ (se ciò non è possibile ogni E_i ha misura esterna infinita è non abbiamo nulla da dimostrare):

$$\sum \overline{\mu} A_n < \mu^* E + \varepsilon$$

Per additività di $\overline{\mu}$ su $\mathcal{A}$ abbiamo

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \complement A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n \cap \complement A) < \mu^* E + \varepsilon$$

(dato che $E \cap A \subset \bigcup (A_n \cap A)$ e $E \cap \complement A \subset \bigcup (A_n \cap \complement A)$). Per arbitrarietà di ε si ha quindi la misurabilità di A.

Che μ sia finita non appena lo sia $\overline{\mu}$ è ovvio. Resta quindi solo da dimostrare l'unicità di μ nel caso in cui $\overline{\mu}$ sia σ-finita.

Sia dunque ν una misura definita sulla σ-algebra $\mathcal{B}$ generata dall'algebra $\mathcal{A}$, che coincida con μ su $\mathcal{A}$. Se $\mathcal{A}_\sigma$ denota l'insieme delle unioni numerabili di elementi di $\mathcal{A}$, ogni suo elemento può esprimersi come unione numerabile di elementi disgiunti di $\mathcal{A}$: sia ora $B \in \mathcal{B}$ di misura esterna finita e dimostriamo che esiste un $A \in \mathcal{A}_\sigma$ tale che $B \subset A$ e

$$\mu^* A \leq \mu^* B + \varepsilon$$

(basta prendere A come unione di una successione $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ tale che $B \subset \bigcup A_n$). Quindi, dato che $B \subset A$:

$$\nu B \leq \nu A = \mu^* A \leq \mu^* B + \varepsilon$$

e, per arbitrarietà di ε:
$$\forall B \in \mathcal{B} \quad \nu B \leq \mu^* B$$

Ma gli insiemi misurabili rispetto a μ^* sono una σ-algebra contenente $\mathcal{A}$, quindi ogni tale B è misurabile.

Ora, se B è misurabile, $A \in \mathcal{A}_\sigma$, $B \subset A$ e $\mu^* A \leq \mu^* B + \varepsilon$ allora, se $\mu^* B < \infty$:

$$\mu^* A = \mu^* B + \mu^*(A \setminus B) \Rightarrow \nu(A \setminus B) \leq \mu^*(A \setminus B) \leq \varepsilon$$

Per arbitrarietà di ε si ha quindi

$$\mu^* A \leq \nu B \Rightarrow \mu^* B = \nu B$$

A questo punto facciamo intervenire l'ipotesi di σ-finitezza della misura $\overline{\mu}$: se $\{X_i\}$ è una successione di elementi di $\mathcal{A}$ tali che $X = \bigcup_i X_i$ con, per ogni i, $\overline{\mu} X_i < \infty$ allora, per ogni $B \in \mathcal{B}$:

$$B = \bigcup_i (X_i \cap B) \Rightarrow \nu B = \sum_i \nu(X_i \cap B) \qquad \text{e} \qquad \mu B = \sum_i \mu(X_i \cap B)$$

(perché $(X_i \cap B) \cap (X_j \cap B) = \emptyset$). Ma $\mu^*(X_i \cap B) < \infty$ e quindi

$$\mu(X_i \cap B) = \nu(X_i \cap B)$$

QED

4.3 Integrazione

Assumeremo d'ora innanzi che le misure prese in considerazione siano sempre complete, ed adotteremo la seguente efficace terminologia: una proprietà qualsiasi che si riferisca a spazi di misura si dice valere *quasi ovunque* (q.o.) se non vale al più su un insieme di misura nulla.

4.3.1 Definizione *Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ sono spazi di misura, una funzione $f : X \longrightarrow Y$ si dice* misurabile *se per ogni insieme $E \in \mathcal{B}$ l'insieme $f^{-1}(E)$ appartiene alla σ-algebra $\mathcal{A}$.*

Ad esempio, se X e Y sono spazi topologici, una funzione continua è anche misurabile rispetto alle misure di Borel; in particolare, una funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definita su uno spazio misurabile è misurabile se la controimmagine di un aperto è misurabile, e quindi se $g : Y \longrightarrow Z$ è una mappa continua fra spazi topologici e $f : X \longrightarrow Y$ è misurabile dallo spazio misurabile X allo spazio topologico Y allora la composta $g \circ f$ è misurabile.

4.3.2 Proposizione *Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di misura, una funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ è misurabile se e solo se vale uno dei seguenti enunciati equivalenti:*

(1) *Per ogni a $\{x \mid f(x) > a\}$ è misurabile.*

(2) *Per ogni a $\{x \mid f(x) \geq a\}$ è misurabile.*

(3) *Per ogni a $\{x \mid f(x) < a\}$ è misurabile.*

(4) *Per ogni a $\{x \mid f(x) \leq a\}$ è misurabile.*

In questi casi, l'insieme $\{x \mid f(x) = a\}$ è misurabile.

DIMOSTRAZIONE: Si tratta di ovvie verifiche, per le quali è utile osservare che, ad esempio

$$\{x \,|\, f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \,|\, f(x) > a - \frac{1}{n} \right\}$$

e così via, ed il fatto che ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ è unione di intervalli

QED

Ad esempio la funzione caratteristica χ_E di un insieme misurabile è misurabile; viceversa se la funzione caratteristica di un insieme A è misurabile, l'insieme è misurabile.

Usando il teorema precedente è immediato verificare che somme, prodotti e limiti di funzioni misurabili sono ancora funzioni misurabili.

Vogliamo ora definire nel contesto generale degli spazi di misura il concetto di integrale: per farlo considereremo classi sempre più generali di funzioni. Partiamo dalle *funzioni semplici*, cioè quelle della forma

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x)$$

ove c_i sono costanti e gli insiemi E_i sono misurabili.

4.3.3 Teorema *Se $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ è una funzione misurabile allora esiste una successione monotona $\{\varphi_n\}$ di funzioni semplici che converge puntualmente a f. Se la misura su X è σ-finita, possiamo scegliere le φ_n a supporto in insiemi di misura finita.*

DIMOSTRAZIONE: Dato che, per ogni intero positivo n ed ogni numero reale t esiste un unico intero $k_{t,n}$ tale che

$$\frac{k_{t,n}}{2^n} \leq t \leq \frac{k_{t,n} + 1}{2^n}$$

possiamo definire

$$s_n(t) := \begin{cases} k_{t,n}2^{-n} & \text{se } 0 \le t < n \\ n & \text{se } n \le t \le \infty \end{cases}$$

Evidentemente si tratta di funzioni misurabili sull'insieme $[0, \infty]$ (sono addirittura boreliane) e tali che, per ogni t: $0 \le s_1(t) \le s_2(t) \le ... \le t$. è anche ovvio che $\lim_{n \longrightarrow \infty} s_n(t) = t$ in $[0, \infty]$ e quindi le funzioni

$$\varphi_n(x) := s_n(f(t))$$

soddisfano la tesi del teorema

QED

Se φ è una funzione semplice non negativa e E un insieme misurabile, definiamo

$$\int_E \varphi d\mu := \sum_{i=1}^n c_i \mu(E \cap E_i)$$

Se $E = X$ si omette ed in genere si omette anche la misura.

Evidentemente una funzione semplice ammette diverse rappresentazioni in termini di diversi insiemi E_i, ma è ovvio verificare che l'integrale così definito non dipende dalla rappresentazione scelta per φ.

Osserviamo che una funzione semplice può definirsi come una funzione misurabile che assume solo un numero finito di valori $\{a_1, ..., a_N\}$; allora possiamo rappresentarla sempre come

$$\varphi = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{A_i}$$

ove $A_i = \{x \mid \varphi(x) = a_i\}$. In questa rappresentazione gli A_i sono disgiunti e gli a_i distinti e non nulli. La adotteremo sistematicamente.

4.3.4 Proposizione *Se φ e ψ sono funzioni semplici i cui supporti abbiano misure finite, allora*

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \qquad \int (a\varphi + b\psi) = a \int \varphi + b \int \psi$$

e, se $\varphi \ge \psi$ q.o. allora

$$\int \varphi \ge \int \psi$$

DIMOSTRAZIONE: Se consideriamo gli insiemi $E_k = A_i \cap B_j$ ottenuti intersecando in tutti i modi possibili gli insiemi delle rappresentazioni canoniche di φ e ψ, allora

$$\varphi = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{E_k} \qquad \text{e} \qquad \psi = \sum_{k=1}^N b_k \chi_{E_k}$$

quindi

$$a\varphi + b\psi = \sum (aa_k + bb_k)\chi_{E_k}$$

e, per additività della misura si ha il primo enunciato. Per dimostrare il secondo basta notare che

$$\int \varphi - \int \psi = \int (\varphi - \psi) \geq 0$$

QED

4.3.5 Proposizione *Se f è una funzione reale definita e limitata su un insieme misurabile E di misura finita allora*

$$\inf_{f \leq \psi} \int_E \psi = \sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi$$

per tutte le funzioni semplici φ e ψ se e solo se f è misurabile.

DIMOSTRAZIONE: Se $|f| \leq M$ e f è misurabile allora gli insiemi

$$E_k := \left\{ x \,|\, \frac{(k-1)M}{n} < f(x) \leq \frac{kM}{n} \right\}_{-n \leq k \leq n}$$

sono disgiunti, misurabili e la loro unione è E. Quindi

$$\mu(E) = \sum_{i=-n}^{n} \mu(E_k)$$

Evidentemente le funzioni semplici

$$\psi_n(x) := \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} k\chi_{E_k}(x) \qquad \text{e} \qquad \varphi_n(x) := \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k-1)\chi_{E_k}(x)$$

sono tali che $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ e quindi

$$\inf \int_E \psi \leq \int_E \psi_n = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} k\mu(E_k)$$

e

$$\sup \int_E \varphi \leq \int_E \varphi_n = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k-1)\mu(E_k)$$

Quindi, per ogni n:

$$0 \leq \inf \int_E \psi - \sup \int_E \varphi \leq \frac{M}{n} \mu E$$

i.e.

$$\inf \int_E \psi = \sup \int_E \varphi$$

Viceversa, se vale la

$$\inf_{f\leq\psi} \int_E \psi = \sup_{\varphi\leq f} \int_E \varphi$$

allora, per ogni n, esistono funzioni semplici φ_n e ψ_n tali che $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ e

$$\int \psi_n - \int \varphi < \frac{1}{n}$$

Allora le funzioni $\psi^* = \inf \psi_n$ e $\varphi^* = \sup \varphi_n$ sono misurabili e $\varphi^* \leq f \leq \psi^*$. Dunque se

$$D := \{x \mid \varphi^*(x) < \psi^*(x)\}$$

è unione degli insiemi

$$D_\nu = \left\{x \mid \varphi^*(x) < \psi^*(x) - \frac{1}{\nu}\right\}$$

Ogni tale insieme è contenuto in $\{x \mid \varphi_n(x) < \psi_n(x) - 1/\nu\}$ che ha misura minore di ν/n. Allora, per arbitrarietà di n:

$$\forall\nu \quad \mu D_\nu = 0 \Rightarrow \mu D = 0$$

Dunque $\varphi^* = \psi^*$ q.o. e $\varphi^* = f$ q.o. Ma una funzione uguale q.o. ad una funzione misurabile è pure misurabile, per definizione.

QED

4.3.6 Definizione *Se* $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ *è misurabile sullo spazio di misura* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *allora definiamo l'*integrale *di* f *come*

$$\int f d\mu := \sup_{0\leq\varphi\leq f} \int \varphi d\mu$$

ove φ *varia fra le funzioni semplici.*

Una conseguenza immediata della definizione è che

$$f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$$

e che

$$\forall c \in \mathbb{R} \quad c \int f = \int cf$$

Vogliamo ora dimostrare i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale per l'integrale che abbiamo appena definito.

4.3.7 Lemma di Fatou *Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni misurabili non negative che converge q.o in un insieme E ad una funzione f allora*

$$\int_E f \leq \underline{\lim} \int_E f_n$$

DIMOSTRAZIONE: Possiamo assumere che $f_n \longrightarrow f$ ovunque. Allora basta mostrare che se φ è una funzione semplice non negativa tale che $\varphi \leq f$ allora

$$\int_E \varphi \leq \underline{\lim} \int_E f_n$$

Se $\int_E \varphi = \infty$ allora esiste un insieme misurabile $A \subset E$ con $\mu A = \infty$ e tale che su A $0 < a < \varphi$. Poniamo allora

$$A_n = \{x \in E \mid \forall k \geq n \ f_k(x) > a\}$$

ottenendo così una successione crescente di insiemi misurabili la cui unione contiene A, dato che $\varphi \leq \lim f_n$. Quindi $\lim \mu A = \infty$ e, essendo

$$\int_E f_n \geq a\mu A_n$$

allora

$$\lim \int_E f_n = \infty = \int_E \varphi$$

Se $\int_E \varphi < \infty$ allora l'insieme $A = \{x \in E \mid \varphi(x) > 0\}$ è misurabile ed ha misura finita; se $\varphi \leq M$ e $\varepsilon > 0$, gli

$$A_n := \{x \in E \mid \forall k \geq n \ f_k(x) > (1-\varepsilon)\varphi(x)\}$$

definiscono una successione crescente di insiemi la cui unione contiene A; quindi $\{A \setminus A_n\}$ è una successione descrescente di insiemi la cui intersezione è vuota. Ne segue che $\mu(A \setminus A_n) = 0$ e quindi esiste n tale che, per $k \geq n$ $\mu(A \setminus A_n) < \varepsilon$. Quindi, per $k \geq n$:

$$\begin{aligned}\int_E f_k \geq \int_{A_k} f_k \geq (1-\varepsilon)\int_{A_k} \varphi \geq (1-\varepsilon)\int_E \varphi - \int_{A \setminus A_k} \varphi \\ \geq \int_E \varphi - \varepsilon\left(\int_E \varphi + M\right)\end{aligned}$$

Dunque

$$\underline{\lim} \int_E f_n \geq \int_E \varphi - \varepsilon\left(\int_E \varphi + M\right)$$

e, per arbitrarietà di ε:

$$\underline{\lim} \int_E f_n \geq \int_E \varphi$$

QED

4.3.8 Teorema della Convergenza Monotona (B.LEVI) *Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni misurabili non negative che converge q.o. ad una funzione f e tale che per ogni n $f_n \leq f$ allora*

$$\int f = \lim \int f_n$$

DIMOSTRAZIONE: Dato che $f_n \leq f$ si ha $\int f_n \leq \int f$ e quindi, per il lemma di Fatou:

$$\int f \leq \underline{\lim} \int f_n \leq \overline{\lim} \int f_n \leq \int f$$

QED

4.3.9 Proposizione *Se f e g sono funzioni misurabili non negative e $a, b > 0$ costanti allora*

$$\int (af + bg) = a \int f + b \int g$$

Inoltre si ha q.o:

$$0 \leq \int f$$

con $\int f = 0$ se e solo se $f = 0$ q.o.

DIMOSTRAZIONE: Per dimostrare il primo asserto usiamo il teorema di convergenza monotona: consideriamo due successioni $\{\varphi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ crescenti di funzioni semplici non negative convergenti a f e g, col che la successione $\{a\varphi_n + b\psi_n\}$ soddisfa le stesse ipotesi e converge a $af + bg$. Allora

$$\int (af + bg) = \lim \int (a\varphi_n + b\psi) = \lim \left(a \int \varphi_n + b \int \psi_n \right) = a \int f + b \int g$$

Che sia $0 \leq \int f$ è ovvio; se poi è $\int f = 0$ presi gli insiemi

$$A_n = \{x \,|\, f(x) > \frac{1}{n}\}$$

si ha che, essendo $\chi_A/n \leq f$ è $\mu A_n = \int \chi_{A_n} = 0$ e quindi l'insieme dei valori positivi di f ha misura nulla.

QED

4.3.10 Corollario *Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni misurabili non negative allora*

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$$

4.3.11 Definizione *Una funzione non negativa f si dice* integrabile *su un insieme E misurabile se*

$$\int_E f < \infty$$

Se f non è non negativa possiamo comunque dire se è integrabile: lo è se e solo se lo sono la sua parte positiva f_+ e parte negativa f_- definite come

$$f_+(x) = \max(f(x), 0) \qquad \text{e} \qquad f_-(x) = \min(f(x), 0)$$

L'integrale di una funzione integrabile qualsiasi è

$$\int f = \int f_+ - \int f_-$$

4.3.12 Teorema della convergenza dominata (LEBESGUE) *Se g è integrabile e $\{f_n\}$ è una successione di funzioni misurabili convergenti q.o. a f su un insieme E e tali che, su E si abbia*

$$|f_n| \leq g$$

allora

$$\int_E f = \lim \int_E f_n$$

DIMOSTRAZIONE: Basta applicare il lemma di Fatou alle successioni $\{g + f_n\}$ e $\{g - f_n\}$.

QED

Osserviamo infine che, avendo a disposizione il concetto di integrale per funzioni positive, possiamo estenderlo a funzioni reali e complesse qualsiasi, semplicemente ponendo, se f è una funzione misurabile reale:

$$\int_E f d\mu = \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu$$

e, se $f = u + iv$ è una funzione misurabile complessa:

$$\int_E f d\mu = \int_E u d\mu + i \int_E v d\mu$$

4.4 Misure con segno, complesse e misure prodotto.

Osserviamo che, se μ_1 e μ_2 sono misure definite sullo stesso spazio $(X, \mathcal{A})$ possiamo considerare una loro combinazione lineare a coefficienti positivi:

$$\mu(E) := c_1\mu_1(E) + c_2\mu_2(E)$$

per $c_1, c_2 \geq 0$. Quello a cui vogliamo dare senso, sono tuttavia anche misure del tipo

$$\nu(E) := \mu_1(E) - \mu_2(E)$$

Ovviamente, dobbiamo supporre che sia μ_1 che μ_2 siano *misure finite*[1].

4.4.1 Definizione *Una* misura con segno *sullo spazio misurabile* $(X, \mathcal{A})$ *è una funzione* $\nu : \mathcal{A} \longrightarrow [-\infty, \infty]$ *tale che*

(1) ν *assume al più uno fra i due valori* $\pm\infty$*.*

(2) $\nu(\emptyset) = 0$*.*

(3) *Se* $\{E_n\}$ *è una successione di insiemi misurabili e disgiunti allora*

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$$

ove il segno = significa che la serie converge assolutamente se $\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$ *è finito e diverge positivamente altrimenti.*

Quindi una misura con segno non è una misura nel senso fin qui inteso. Un insieme A è *positivo* (*negativo*) se è misurabile e per ogni suo sottoinsieme $E \subset A$ misurabile si ha che $\nu(E) \geq 0$ (≤ 0). Un insieme è *nullo* se è sia positivo che negativo., ovvero se ogni suo sottoinsieme misurabile ha misura nulla: evidentemente un insieme nullo è di misura nulla, mentre un insieme di misura nulla può benissimo essere unione di un insieme positivo ed un insieme negativo.

4.4.2 Lemma

(1) *Ogni sottoinsieme misurabile di un insieme positivo è positivo.*

(2) *L'unione numerabile di insiemi positivi è positivo.*

(3) *Se E è misurabile e $0 < \nu(E) < \infty$ allora esiste un insieme positivo $A \subset E$ con $\nu(A) > 0$.*

[1] è impossibile dare senso, anche a livello puramente convenzionale, ad espressioni della forma $\infty - \infty$!

DIMOSTRAZIONE: La (1) è ovvia. La (2) segue facilmente considerando una successione $\{a_n\}$ di insiemi positivi la cui unione sia A; allora per ogni insieme $E \subset A$ misurabile si ha che

$$E_n := E \cap A_n \cap \complement A_{n-1} \cap ... \cap \complement A_1$$

sono misurabili e quindi $\nu(E_n) \geq 0$; sono anche disgiunti e la loro unione è E, da cui

$$\nu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) \leq 0$$

Qundi A è positivo.

Dimostriamo la (3): E è positivo oppure deve contenere un insieme di misura negativa in modo che $n-1$ sia il più piccolo intero positivo tale che esista un insieme misurabile $E_1 \subset E$ con $\nu(E_1) < -1/n_1$; ricorsivamente, se $E \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i$ non è positivo, sia n_k il più piccolo intero positivo tale che esista un insieme misurabile $E_k \subset E \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i$ e $\nu(E_k) < -1/n_k$.

Ponendo

$$A := E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

allora E è unione disgiunta di A e degli E_i, quindi

$$\nu(E) = \nu(A) + \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i)$$

(la serie converge assolutamente per finitezza di $\nu(E)$. Quindi la serie $\sum 1/n_k$ converge ed in particolare $n_k \longrightarrow \infty$.

Ora dimostriamo che A è positivo. Sia $\varepsilon > 0$; allora possiamo scegliere k tale che

$$\frac{1}{n_k - 1} < \varepsilon$$

(perché n_k tende ad ∞). Ma $A \subset E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} E_i$ e quindi non può contenere insiemi misurabili di misura minore di $-1/(n_k - 1)$ che è maggiore di $-\varepsilon$. Per arbitrarietà di ε A non può quindi contenere insiemi misurabili di misura negativa.

QED

4.4.3 Teorema (DECOMPOSIZIONE DI HAHN) *Se ν è una misura con segno su uno spazio misurabile $(X, \mathcal{A})$ allora esiste un insieme positivo A ed un insieme negativo B tali che $X = A \cup B$ con $A \cap B = \emptyset$.*

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo ad esempio che ν non assuma il valore $+\infty$; se λ è il sup di $\nu(A)$ al variare di tutti gli insiemi positivi A, dato che $\emptyset$ è positivo, si ha che $\lambda \geq 0$. Se $\{A_n\}$ è una successione di insiemi positivi tali che

$$\lambda = \lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(A_n)$$

e se A è l'unione degli A_n allora per il lemma 4.4.2(2) A è positivo e quindi $\lambda \geq \nu(A)$. Ma $A \setminus A_i \subset A$ e quindi $\nu(A \setminus A_i) \geq 0$ col che

$$\nu(A) = \nu(A_i) + \nu(A \setminus A_i) \geq \nu(A_i) \geq \lambda$$

Quindi $\nu(A) = \lambda < \infty$.

Se $B = \complement A$ e $E \subset B$ è positivo allora $A \cap E = \emptyset$ e $E \cup A$ è positivo, sicché

$$\lambda \geq \nu(E \cup A) = \nu(E) + \nu(A) = \nu(E) + \lambda$$

i.e. $\nu(E) = 0$ dato che $\lambda \in [0, \infty)$. Allora B non può contenere nessun insieme positivo di misura positiva e quindi per il lemma 4.4.2(3) nessun sottoinsieme di misura positiva. Quindi B è negativo.

QED

La decomposizione di Hahn non è necessariamente unica. Lo è a meno di insiemi nulli, come si può facilmente osservare.

4.4.4 Definizione *Due misure μ_1 e μ_2 su uno spazio misurabile $(X, \mathcal{A})$ si dicono* mutuamente singolari *se esistono insiemi A e B disgiunti tali che $X = A \cup B$ e $\mu_1(A) = \mu_2(B) = 0$. Si scrive in tal caso $\mu_1 \perp \mu_2$.*

4.4.5 Teorema (DECOMPOSIZIONE DI JORDAN) *Se ν è una misura con segno sullo spazio misurabile $(X, \mathcal{A})$ allora esistono uniche due misure mutuamente singolari ν^* e ν^- su $(X, \mathcal{A})$ tali che $\nu = \nu^+ - \nu^-$.*

DIMOSTRAZIONE: Se $X = A \cup B$ è una decomposizione di Hahn definiamo

$$\nu^+(E) := \nu(E \cap A) \qquad \text{e} \qquad \nu^-(E) := -\nu(E \cap B)$$

Per definizione queste misure sono mutuamente singolari. La loro unicità è pure un fatto semplice: se μ^+ e μ^- sono due misure che pure soddisfano la decomposizione di Jordan, allora possiamo considerare gli insiemi C e D disgiunti e tali che $X = C \cup D$ e $\mu^+(C) = \mu^-(D) = 0$. Evidentemente questi insiemi danno luogo ad una decomposizione di Hahn, e quindi le misure μ^+, ν^+ e μ^- e ν^- differiscono solo su insiemi di misura nulla.

QED

La decomposizione di Jordan di una misura ci consente di definire il *valore assoluto* (o *variazione totale*) di una misura con segno ν come

$$|\nu|(E) := \nu^+(E) + \nu^-(E)$$

Si tratta ovviamente di una misura; gli insiemi nulli sono esattamente gli insiemi E tali che $|\nu|(E) = 0$.

4.4.6 Definizione *Se μ e ν sono misure definite su uno spazio misurabile $(X, \mathcal{A})$ si dice che ν è* assolutamente continua *rispetto a μ se per ogni A tale che $\mu(A) = 0$ si ha che $\nu(A) = 0$. Si scrive in questo caso $\nu \ll \mu$.*

In caso di misure con segno, la mutua singolarità e l'assoluta continuità si riferiscono ai loro valori assoluti.

Il risultato fondamentale sull'assoluta continuità delle misure, il teorema di Radon–Nikodym, verrà dimostrato usando il teorema di rappresentazione di Riesz per funzionali lineari su uno spazio di Hilbert.

Considerando le misure di Lebesgue su $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$,...,$\mathbb{R}^n$ è lecito chiedersi se non si possano definire tutte in termini della misura su $\mathbb{R}$ utilizzando la decomposizione $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$. Ci chiediamo cioè se si possa effettuare il prodotto nella categoria degli spazi di misura.

Siano quindi $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ spazi di misura *completi* e consideriamo l'insieme $X \times Y$. Se $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$ chiamiamo l'insieme $A \times B$ un *rettangolo misurabile*. La famiglia dei rettangoli misurabili

$$\mathcal{R} := \{A \times B\}_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}}$$

non è una σ-algebra e nemmeno un'algebra in generale: tutto quello che possiamo dire è che l'intersezione di elementi di $\mathcal{R}$ appartiene a $\mathcal{R}$ dato che

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \times D)$$

e che il complementare di un elemento di $\mathcal{R}$ è unione disgiunta di elementi di $\mathcal{R}$[2], avendosi:

$$\complement(A \times B) = (\complement A \times B) \cup (A \times B) \cup (\complement A \times \complement B)$$

Possiamo comunque definire una funzione su $\mathcal{R}$ come

$$\lambda(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$$

[2]Si dice che $\mathcal{R}$ è una *semialgebra di insiemi*.

4.4.7 Lemma *Se $\{(A_n \times B_n)\}$ è una successione di elementi di $\mathcal{R}$ a due a due disgiunti, la cui unione sia $A \times B$ allora*

$$\lambda(A \times B) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_n \times B_n)$$

DIMOSTRAZIONE: Se $x \in A$ allora, per ogni $y \in B$ esiste un unico n_y tale che $(x, y) \in A_{n_y} \times B_{n_y}$ e quindi

$$\sum \nu B_n \cdot \chi_{A_n}(x) = \nu B \cdot \chi_A(x)$$

(per additività numerabile di ν). Per il corollario 4.3.10 si ha quindi

$$\sum \int \nu B_i \chi_{A_i} d\mu = \int \nu B \chi_A d\mu$$

i.e.

$$\sum \nu B_n \cdot \mu A_n = \nu B \cdot \mu A$$

QED

4.4.8 Lemma *Esiste un'unica misura $\overline{\lambda}$ sull'algebra $\mathcal{A}$ generata dalla famiglia $\mathcal{R}$.*

DIMOSTRAZIONE: $\mathcal{A}$ contiene l'insieme vuoto, e ogni suo elemento è unione finita disgiunta di elementi di $\mathcal{R}$. Definiamo allora

$$\overline{\lambda} A := \sum_{i=1}^{n} \lambda R_i$$

se $A = R_1 \cup ... \cup R_n$ e $R_i \in \mathcal{R}$. Dato che la decomposizione di A in elementi disgiunti di $\mathcal{R}$ non è unica bisogna dimostrare che questa definizione è ben posta e dà luogo ad un'unica $\overline{\lambda}$.

Intanto notiamo che la funzione λ è non negativa e ovviamente $\lambda\emptyset = 0$. Inoltre, per il lemma, se $A \in \mathcal{A}$ è unione disgiunta di due famiglie $\{R_i\}$ e $\{S_i\}$ in $\mathcal{R}$ allora

$$\sum \lambda C_i = \sum \lambda D_i$$

(infatti $\lambda C_i = \sum \lambda(C_i \cap D_i)$). Inoltre, sempre per il lemma, $\overline{\lambda}$ è numerabilmente additiva su $\mathcal{A}$; quindi l'estensione $\overline{\lambda}$ è ben definita e unica.

QED

Abbiamo quindi una misura $\overline{\lambda}$ su un'algebra, e quindi, per il teorema di estensione di Carathéodory, una misura *completa* λ sulla σ-algebra $\mathcal{S}$ generata da $\mathcal{A}$: questa misura si dice *misura prodotto* delle μ e ν e si denota con $\mu \otimes \nu$: è finita (o σ-finita) se lo sono μ e ν.

La misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^2$ è definita quindi come $dx \otimes dy$, ove dx e dy sono misure di Lebesgue sui fattori $\mathbb{R}$.

Il teorema fondamentale sulle misure prodotto è dovuto a Fubini. Per dimostrarlo avremo bisogno di alcuni lemmi preliminari: il seguente è un sottoprodotto della dimostrazione del teorema di estensione di Carathéodory.

4.4.9 Lemma *Se $\overline{\mu}$ è una misura su un'algebra $\mathcal{A}$ e μ^* la misura esterna indotta da μ, allora per ogni insieme $E \subset X$ e $\varepsilon > 0$ esiste un $A \in \mathcal{A}_\sigma$ (l'insieme delle unioni numerabili di elementi di $\mathcal{A}$) tale che $E \subset A$ e*

$$\mu^* A \leq \mu^* E + \varepsilon$$

ed esiste un $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ (l'insieme delle intersezioni numerabili di elementi di $\mathcal{A}_\sigma$) tale che $E \subset B$ e

$$\mu^* E = \mu^* B$$

DIMOSTRAZIONE: La prima parte del lemma è provata nel corso della dimostrazione del teorema di Carathéodory.

Il secondo enunciato si dimostra considerando, per ogni numero naturale n, un insieme $A_n \in \mathcal{A}$ con $E \subset A_n$ e $\mu^* A_n \leq \mu^* E + 1/n$, e ponendo $B = \bigcap A_n$. Ovviamente $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ e $E \subset B$. Infine

$$\mu^* E \leq \mu^* B \leq \mu^* A_n \leq \mu^* E + \frac{1}{n}$$

e, per arbitrarietà di n, $\mu^* E = \mu^* B$.

QED

Definiamo, se $E \subset X \times Y$ le *sezioni* di E in x e y come

$$E_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in E\} \qquad \text{e} \qquad E_y := \{x \in X \mid (x, y) \in E\}$$

Osserviamo che se $E \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ allora è ν-misurabile. Se $E \in \mathcal{R}$ questo è ovvio. Se $E = \bigcup E_n \in \mathcal{R}_\sigma$ segue da

$$\chi_{E_x}(y) = \chi_E(x, y) = \sup_n \chi_{E_n}(x, y) = \sup_n \chi_{(E_n)_x}(y)$$

(gli $E_n \in \mathcal{R}$ sono misurabili). Analogamente se $E = \bigcap_n E_n \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ segue da

$$\chi_{E_x}(y) = \chi_E(x, y) = \inf_n \chi_{E_n}(x, y) = \inf_n \chi_{(E_n)_x}(y)$$

(gli $E_n \in \mathcal{R}_\sigma$ sono misurabili come si è appena visto).

4.4.10 Lemma *Se $E \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ e $\mu \otimes \nu(E) < \infty$ allora la funzione $g(x) := \nu E_x$ è misurabile in $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e*

$$\int g d\mu = \mu \otimes \nu(E)$$

DIMOSTRAZIONE: Se $E \in \mathcal{R}$ il lemma è banale. Se $\{E_n\}$ è una successione in $\mathcal{R}$ di insiemi a due a due disgiunti e se

$$g_n(x) := \nu(E_n)_x \qquad \text{e} \qquad g := \sum_n g_n$$

allora g è misurabile e, dato che $g_n \geq 0$, per il teorema della convergenza monotona di B.Levi:

$$\int g d\mu = \sum_n \int g_n d\mu = \sum_n \mu \otimes \nu(E_n) = \mu \otimes \nu(E)$$

quindi il lemma è vero per $E \in \mathcal{R}_\sigma$. Infine, se $E \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ ha misura finita, allora esiste una successione $\{E_n\} \subset \mathcal{R}_\sigma$ con $E_{n+1} \subset E_n$ e $E = \bigcap_n E_n$. Quindi, per il lemma precedente, possiamo assumere $\mu \otimes \nu(E_1) < \infty$. Poniamo

$$g_n(x) := \nu(E_n)_x$$

Dato che

$$\int g_1 d\mu = \mu \otimes \nu(E_1) < \infty$$

si ha $g_1 < \infty$ q.o: se dunque x è tale che $g(x) < \infty$ allora la successione $\{(E_n)_x\}$ è descrescente e la sua intersezione è E_x. Per la proposizione 4.2.1(2) si ha

$$g(x) = \nu(E_x) = \lim_n \nu(E_n)_x = \lim_n g_n(x)$$

i.e. $g_n \longrightarrow g$ q.o., da cui la misurabilità di g. Infine, essendo $0 \leq g_n \leq g_1$, per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue (e di nuovo per la proposizione 4.2.1(2)):

$$\int g d\mu = \lim_n \int g_n d\mu = \lim_n \mu \otimes \nu E_n = \mu \otimes \nu E$$

QED

Diciamo che una funzione misurabile $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ su uno spazio di misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è *integrabile* se

$$\int_X |f| d\mu < \infty$$

L'insieme delle funzioni integrabili modulo la relazione che identifica due funzioni se sono uguali quasi ovunque è uno spazio vettoriale (rispetto alla somma e moltiplicazione per uno scalare delle classi di equivalenza definite come $[f]+[g] = [f+g]$ e $a[f] = [af]$, che si indica con $L^1(X, \mu)$.

4.4.11 Teorema (FUBINI) *Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(X, \mathcal{B}, \nu)$ sono spazi completi di misura e $f \in L^1(X \times Y, \mu \otimes \nu)$ allora*

(1) *per quasi ogni x la funzione $f_x(y) := f(x, y)$ appartiene a $L^1(Y, \nu)$ e*

$$\int_Y f_x(y) d\nu(y) \in L^1(X, \mu)$$

(2) *per quasi ogni y la funzione $f_y(x) := f(x, y)$ appartiene a $L^1(Y, \mu)$ e*

$$\int_X f_y(x) d\mu(x) \in L^1(Y, \nu)$$

(3)
$$\int_X \int_Y f_x d\nu d\mu = \int_{X\times Y} f d\mu \otimes \nu = \int_Y \int_X f_y d\mu d\nu$$

DIMOSTRAZIONE: Data la simmetria fra x e y nell'enunciato basta dimostrare la (1) e la prima uguaglianza della (3); inoltre basta limitarsi a funzioni non negative, perché se il teorema vale per funzioni qualsiasi, evidentemente vale anche per le loro differenze.

L'idea della dimostrazione è di verificare il teorema per classi sempre più vaste di funzioni. Iniziamo col verificarne la validità per le funzioni caratteristiche di insiemi misurabili di misura finita.

Per il lemma 4.4.9 esiste un $F \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ contenente E e tale che $\mu \otimes \nu(F) = \mu \otimes \mu(E)$: l'insieme $G := F \setminus E$ è misurabile (lo sono E e F) e

$$\mu \otimes \nu(F) = \mu \otimes \nu(E) + \mu \otimes \nu(G)$$

e quindi $\mu \otimes \nu(G) = 0$. Ora, a sua volta, esiste un insieme $H \subset \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ contenente G e con $\mu \otimes \nu(H) = \mu \otimes \nu(G) = 0$; quindi, per il lemma 4.4.10, $\nu(H_x) = 0$ per quasi ogni $x \in X$ e quindi $(G_x \subset H_x)$ $\nu(G_x) = 0$ (per completezza di ν). Quindi

$$g(x) = \nu(E_x) = \nu(F_x) \qquad \text{q.o.}$$

e quindi (ancora per il lemma 4.4.10) g è misurabile e

$$\int g d\mu = \mu \otimes \nu(F) = \mu \otimes (E)$$

Ne segue:
$$\int_X \int_Y (\chi_E)_x d\nu d\mu = \int_{X\times Y} \chi_E d\mu \otimes \nu$$

Il teorema è quindi dimostrato per funzioni caratteristiche di insiemi misurabili di misura finita, e quindi (per linearità) per funzioni semplici nulle fuori da insiemi di misura finita; ma, per il teorema 4.3.3, ogni ogni funzione *integrabile* non negativa è limite di una successione crescente di tali funzioni: $f = \lim_n \varphi_n$ e quindi $f_y = \lim_n (\varphi_n)_y$, dunque, per il teorema della convergenza monotona di B. Levi (si noti che le φ_n sono integrabili, essendolo la f):

$$\int_Y f_x(y) = d\nu(y) = \lim_n \int_Y (\varphi_n)_x(y)dy$$

In altri termini questo integrale è una funzione misurabile della x e, di nuovo per il teorema della convergenza monotona:

$$\int_X \int_Y f d\nu d\mu = \lim_n \int_X \int_Y (\varphi_n)_y d\nu d\mu = \lim_n \int_{X\times Y} \varphi d\mu \otimes \nu = \int_{X\times Y} f d\mu \otimes \nu$$

QED

Questo teorema è visibilmente di fondamentale importanza: tuttavia spesso non è immediata la verifica della sua applicabilità. A questo scopo è spesso utile considerare un criterio che permette di dedurre le ipotesi del teorema di Fubini:

4.4.12 Teorema (TONELLI) *Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(X, \mathcal{B}, \nu)$ sono spazi di misura σ-finiti e f è una funzione misurabile su $X \times Y$ e non negativa, allora*

(1) *per quasi ogni x la funzione $f_x(y) := f(x, y)$ è misurabile e*

$$\int_Y f_x(y)d\nu(y) \qquad \text{è misurabile}$$

(2) *per quasi ogni y la funzione $f_y(x) := f(x, y)$ è misurabile e*

$$\int_X f_y(x)d\mu(x) \qquad \text{è misurabile}$$

(3)

$$\int_X \int_Y f_x d\nu d\mu = \int_{X\times Y} f d\mu \otimes \nu = \int_Y \int_X f_y d\mu d\nu$$

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo semplicemente che, nella dimostrazione del teorema di Fubini l'unico punto nel quale si usa l'ipotesi di integrabilità della f (rispetto a $\mu\otimes\nu$) è per dedurre l'integrabilità delle funzioni semplici $\varphi_n\}$ che approssimano la f: nel nostro caso non è necessario, perché basta la σ-finitezza degli spazi di misura in questione per dedurre l'esistenza delle $\{\varphi_n\}$. Quindi la stessa dimostrazione del teorema di Fubini fornisce, con questa modifica, il teorema di Tonelli.

QED

4.5 Misure di Borel, Radon e integrale di Stieltjes.

Vogliamo qui accennare a qualche procedimento che consente la costruzione di misure di Borel.

Consideriamo uno spazio topologico X localmente compatto di Hausdorff: in questo paragrafo ogni spazio topologico sarà di questo tipo. Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, il suo *supporto* è l'insieme

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$$

L'insieme $C_c(X)$ delle funzioni reali continue a supporto compatto è uno spazio vettoriale, e costituisce il protagonista della teoria dell'integrazione su X.

4.5.1 Definizione *La σ-algebra degli* insiemi di Radon *è la σ-algebra $\mathcal{R}(X)$ di sottoinsiemi di X tali che gli elementi di $C_c(X)$ siano funzioni misurabili.*

Quindi $\mathcal{R}(X)$ è generata da insiemi della forma

$$\{x \mid f(x) \geq a\}$$

con $f \in C_c(X)$. Se $a > 0$ questi sono insiemi compatti G_δ e, dato che i compatti G_δ sono evidentemente insiemi di Radon, $\mathcal{R}(X)$ è generata da essi.

Ricordiamo che

4.5.2 Definizione *La σ-algebra degli* insiemi di Borel *è la σ-algebra $\mathcal{B}(X)$ generata dagli insiemi chiusi.*

Quindi $\mathcal{R}(X) \subset \mathcal{B}(X)$. Il viceversa vale se X è uno spazio metrico separabile localmente compatto.

4.5.3 Definizione *Una* misura di Radon *su X è una misura completa sulla σ-algebra $\mathcal{R}(X)$ tale che ogni insieme compatto abbia misura finita.*

(Come sappiamo la richiesta di completezza può sempre soddisfarsi, completando la misura data). Ricordiamo che una misura di Borel è una misura sui boreliani di X: spesso considereremo il suo completamento e lo chiameremo sempre misura di Borel.

4.5.4 Definizione *Una misura μ su una σ-algebra $\mathcal{A}$ contenente $\mathcal{R}(X)$, si dice* quasi-regolare *se*

$$\forall E \in \mathcal{A} \quad \mu E = \inf_{\substack{E \subset A \\ A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{T}}} \mu A \tag{1}$$

($\mathcal{T}$ denota la topologia di X) e

$$\forall A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{T} \quad \mu A = \inf_{\substack{K \subset A \\ K \in \mathcal{A} \text{ compatto}}} \mu K \tag{2}$$

Se la (2) vale per ogni $A \in \mathcal{A}$ la misura si dice regolare.

Ad esempio, la misura di Lebesgue sulla retta reale è regolare. Mimando la costruzione della misura di Lebesgue vogliamo ora definire delle misure quasi-regolari sul nostro spazio X localmente compatto di Hausdorff.

4.5.5 Definizione *Una misura esterna μ^* su X si dice* topologicamente regolare *se*

$$\forall E \subset X \quad \mu^* E = \inf_{\substack{E \subset A \\ A \subset \mathcal{T}}} \mu^* A \tag{1}$$

$$\forall A_1, A_2 \in \mathcal{T} \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow \mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^* A_1 + \mu^* A_2 \tag{2}$$

$$\forall A \in \mathcal{T} \quad \mu^* A = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ compatto}}} \mu^* K \tag{3}$$

4.5.6 Teorema *Se μ^* è una misura esterna topologicamente regolare su X allora ogni boreliano è μ^*-misurabile.*

Dimostrazione: Dato che gli insiemi misurabili rispetto ad una misura esterna formano una σ-algebra, basterà mostrare che i chiusi F sono μ^*-misurabili.

Sia A un aperto di misura finita e $\varepsilon > 0$; allora $A \cap \complement F$ è aperto e ha misura esterna finita. Ora, per la (3) nella definizione di regolarità topologica della μ^*, si ha che

$$\forall A \in \mathcal{T} \quad \mu^* A = \sup_{\substack{\overline{U} \subset A \\ U \in \mathcal{T} \\ \overline{U} \text{ compatto}}} \mu^* U$$

i.e. esiste un U aperto tale che $\overline{U} \subset A \cap \complement F$ e

$$\mu^* U > \mu^*(A \cap \complement F) - \varepsilon$$

Allora, se $V := A \setminus \overline{U}$, $V \cap U = \emptyset$ e $A \cap F \subset V$, quindi

$$\mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap \complement F) < \mu^* V + \mu^* U + \varepsilon < \mu^*(U \cup V) + \varepsilon < \mu^* A + \varepsilon$$

(per la (2) nella definizione di regolarità topologica). Per arbitrarietà di ε si ha dunque la misurabilità di F:

$$\mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap \complement F) \leq \mu^* A$$

(la disuguaglianza opposta è vera per monotonia della μ^*).

QED

4.5.7 Teorema *Se $\overline{\mu} : \mathcal{T} \longrightarrow [0,\infty]$ è una funzione definita sugli aperti di X tale che*

(1) *Se $\overline{A}$ è compatto allora $\overline{\mu}A < \infty$.*

(2) *Se $A_1 \subset A_2$ allora $\overline{\mu}A_1 \le \overline{\mu}A_2$.*

(3) *Se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ allora $\overline{\mu}(A_1 \cup A_2) = \overline{\mu}A_1 + \overline{\mu}A_2$.*

(4) $\overline{\mu}\left(\bigcup_n A_n\right) \le \sum_n \overline{\mu}A_n$.

(5) $\overline{\mu}A = \sup_{\substack{\overline{U}\subset A \\ \overline{U}\ compatto}} \overline{\mu}U$.

Allora la funzione

$$\mu^* E := \inf_{E\subset A\subset\mathcal{T}} \overline{\mu}A$$

è una misura esterna topologicamente regolare.

DIMOSTRAZIONE: La monotonia e subadditività numerabile della μ^* sono immediate per le (2) e (4); inoltre, se $A \in \mathcal{T}$:

$$\mu^* A = \overline{\mu}A$$

e quindi, per la (5), la (3) della definizione di regolarità topologica è vera per i K che siano chiusure di aperti, e quindi è vera per ogni compatto. Infine le (1) e (2) della definizione di regolarità topologica seguono dalla definizione di μ^* e dalla (3).

QED

Quindi, a partire da una funzione definita sugli aperti, possiamo definire una misura sui boreliani associata alla misura esterna del teorema precedente: la regolarità topologica della misura esterna garantisce la quasi-regolarità della misura indotta.

Alternativamente, si può partire da una funzione definita sui compatti e cercare di estenderla ad una funzione che soddisfi le ipotesi del teorema precedente; per questi ed altri approfondimenti si rimanda ai testi specialistici di teoria della misura.

Consideriamo ora le misure di Radon sulla retta reale $\mathbb{R}$: si tratta evidentemente di misure finite sui sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}$; quindi, ad ogni tale misura μ possiamo associare una funzione

$$F(x) := \mu(-\infty, x]$$

che si dice[3] *funzione di distribuzione* della misura μ. Viceversa, data una funzione F possiamo definire

$$\mu(a, b] := F(b) - F(a)$$

[3]Dato l'esteso utilizzo che se ne fa in teoria delle probabilità, usiamo il termine probabilistico.

4.5.8 Teorema *La distribuzione associata ad una misura di Radon è una funzione monotona crescente, limitata, continua da destra e tale che*

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} F(x) = 0$$

Viceversa, una funzione F monotona crescente e continua da destra induce una misura di Radon la cui distribuzione è esattamente la F.

DIMOSTRAZIONE: Per le proprietà di μ è evidente che F è una funzione monotona crescente a valori reali. Inoltre

$$\mu(a,b] = F(b) - F(a)$$

e, dato che $(a,b] = \bigcap_n (a, b+1/n]$, per la proposizione 4.2.1(2):

$$\mu(a,b] = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\left(a, b+\frac{1}{n}\right]$$

i.e.

$$F(b) = \lim_{n\longrightarrow\infty} F\left(b+\frac{1}{n}\right) = F(b+)$$

il che significa che la funzione di distribuzione è *continua da destra* (o *superiormente*). Si noti che

$$\mu\{b\} = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(b-\frac{1}{n}, b\right] = F(b) - F(b-)$$

Quindi F è continua in b se e solo se l'insieme $\{b\}$ ha misura nulla. Nel caso $x=-\infty$ si trova, dato che $\bigcap_n (-\infty, -n) = \emptyset$:

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} F(x) = 0$$

Viceversa, sia F una funzione monotona crescente e continua da destra: allora la

$$\mu(a,b] = F(b) - F(a)$$

definisce una funzione sulla classe $\mathcal{I}$ degli intervalli aperti a sinistra e chiusi a destra; questa classe non è una σ-algebra (non è neanche un'algebra) tuttavia, procedendo come nel lemma 4.4.2, possiamo estendere μ ad una misura sull'algebra generata da $\mathcal{I}$, dato che, se $(a,b] \subset \bigcup_n (a_n, b_n]$, allora

$$F(b) - F(a) \leq \sum_{n=1}^{\infty} F(b_n) - F(a_n)$$

Allora, usando il teorema di estensione di Carathéodory, abbiamo una misura sulla σ-algebra dei boreliani (che è quella generata da $\mathcal{I}$) il cui completamento è una misura di Radon; questa estensione è unica, dato che $\mathbb{R}$ è unione numerabile di elementi di $\mathcal{I}$ e quindi μ è σ-finita.

QED

Quindi, se φ è una funzione boreliana su $\mathbb{R}$ possiamo integrarla rispetto ad una funzione F monotona crescente continua da destra ponendo

$$\int \varphi dF := \int \varphi d\mu$$

ove μ è la misura di Radon associata a F; questo integrale si dice *integrale di Lebesgue–Stieltjes*.

Uno spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tale che $P(\Omega) = 1$ si dice *spazio di probabilità* e la misura P si dice *probabilità* su Ω; ad esempio, l'intervallo $[0, 1]$ con la misura di Lebesgue è uno spazio di probabilità. In questo caso le distribuzioni delle misure di Radon soddisfano alla

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} F(x) = 1$$

Una funzione misurabile $X : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice in questo contesto *variabile aleatoria*: ad una variabile aleatoria possiamo associare una funzione di distribuzione ponendo

$$F(x) = P(X < x) := P\{y \mid X(y) < x\}$$

La F permette di calcolare le grandezze fondamentali associate ad una variabile aleatoria, come la *speranza matematica*

$$\mathbb{E}X := \int x dF(x)$$

e la *varianza*

$$\mathbb{D}X := \int (x - \mathbb{E}X)^2 dF(x)$$

che infatti valgono

$$\mathbb{E}X = \int x F'(x) dx$$

e

$$\mathbb{D}X = \int (x - \mathbb{E}X) F'(x) dx$$

Se ad esempio $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione boreliana, avremo una nuova variabile aleatoria $Y = \varphi \circ X$, la cui speranza è

$$\int x dG(x)$$

(ove G è la distribuzione di Y): ma se φ è integrabile rispetto alla misura di Radon associata alla funzione di distribuzione di X, allora

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}\varphi(X) = \int \varphi(x)dF(x)$$

Quindi la conoscenza di F determina la conoscenza delle distribuzioni di tutte le variabili aleatorie ottenute trasformando X con funzioni boreliane.

4.6 Spazi L^p.

Da ultimo introduciamo gli *spazi* L^p: sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura; definiamo, per $1 \leq p < \infty$.

$$L^p(X, \mu) := \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{C} \,|\, f \text{ misurabile e } \int |f|^p d\mu < \infty \right\} / \equiv$$

come lo spazio delle classi di equivalenza (modulo la relazione $f \equiv g \iff f = g$ q.o.) di funzioni la cui potenza p-sima abbia integrale finito in modulo. Per $p = \infty$ definiamo

$$L^\infty(X, \mu) := \{ f : X \longrightarrow \mathbb{C} \,|\, f \text{ misurabile e misurabile} \}$$

Si tratta ovviamente di spazi vettoriali.

Per brevità scriviamo

$$||f||_p := \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

e

$$||f||_\infty := \operatorname{esssup}_{x \in X} |f(x)|$$

ove il *supremo essenziale* è l'inf del sup di g per ogni g che sia uguale a f q.o:

$$\operatorname{esssup}_{x \in X} g(x) := \inf\{ M \,|\, \mu\{ x \,|\, M < f(x) \} \}$$

Nel séguito gli spazi L^p costituiranno l'esempio classico di spazi di Banach: per il momento limitiamoci a dimostrare i risultati classici che permettono di effettuare il calcolo in L^p: ricordiamo intanto la

4.6.1 Definizione *Una* funzione convessa *è una funzione* $\varphi : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *(con* $-\infty \leq a < b \leq \infty$*) tale che*

$$\forall x, y \in (a, b)\ \forall \lambda \in [0, 1] \quad \varphi((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y)$$

Ovviamente φ è convessa se e solo se

$$(C) \qquad \forall s,t,u \in [a,b] \quad \frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \leq \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}$$

Da questo segue la continuità di φ in (a,b).

4.6.2 Lemma (DISUGUAGLIANZA DI JENSEN) *Se $(X,\mathcal{A},\mu)$ è uno spazio di misura con $\mu(X)=1$ e $f\in L^1(X,\mu)$ ha valori in (a,b) e φ è convessa in (a,b) allora*

$$\varphi\left(\int_X fd\mu\right) \leq \int_X \varphi\circ fd\mu$$

DIMOSTRAZIONE: Poniamo

$$t := \int_X fd\mu$$

(da cui $t\in(a,b)$) e $\beta=\sup_{s\in(a,b)}(t-s)$. Allora

$$\forall s\in(a,b) \quad \varphi(t)+\beta(s-t)\leq\varphi(s)$$

i.e.

$$\forall x\in X \quad \varphi(f(x))-\varphi(t)-\beta(f(x)-t)\geq 0$$

Dato che φ è continua, $\varphi\circ f$ è misurabile e quindi, integrando la disuguaglianza precedente abbiamo

$$\varphi(t)\mu(X)+\beta(\int_X fd\mu - t\mu(X)) \leq \int_X \varphi\circ fd\mu$$

i.e. la tesi, dato che $\mu(X)=1$ e $t=\int_X fd\mu$.

QED

4.6.3 Teorema (DISUGUAGLIANZA DI HÖLDER) *Se $p,q>0$ sono tali che $1/p+1/q=1$ (oppure se $p=1$ e $q=\infty$) e $(X,\mathcal{A},\mu)$ uno spazio di misura, per ogni coppia di funzioni $f,g:X\longrightarrow[0,\infty]$ misurabili si ha*

$$\int_X fgd\mu \leq \left(\int_X f^pd\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_X g^qd\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

DIMOSTRAZIONE: Siano

$$A := \left(\int_X f^pd\mu\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{e} \qquad B := \left(\int_X g^qd\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

Se $A = 0$ allora $f = 0$ q.o. quindi $fg = 0$ q.o. ed il teorema è dimostrato; se $A > 0$ e $B = \infty$ pure il teorema è banale. Possiamo dunque supporre che siano $A, B \in (0, \infty)$. Poniamo

$$F := \frac{f}{A} \qquad \text{e} \qquad G = \frac{g}{B}$$

in modo che

$$\int_X F^p d\mu = \int_X G^q d\mu = 1$$

Ora, se $F(x), G(x) \in (0, \infty)$, allora esistono $s, t \in \mathbb{R}$ tali che $F(x) = e^{s/p}$ e $G(x) = e^{t/q}$; ma $1/p + 1/q = 1$ e la funzione esponenziale è convessa: quindi

$$e^{\frac{s}{p} + \frac{t}{q}} \leq \frac{e^s}{p} + \frac{e^t}{q}$$

i.e.

$$\forall x \in X \quad F(x)G(x) \leq \frac{F(x)^p}{p} + \frac{G(x)^q}{q}$$

e, integrando:

$$\int_X FG d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

cioè la tesi.

QED

4.6.4 Corollario (DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ) *Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, per ogni coppia di funzioni $f, g : X \longrightarrow [0, \infty]$ misurabili si ha*

$$\int_X fg d\mu \leq \sqrt{\int_X f^2 d\mu} \sqrt{\int_X g^2 d\mu}$$

4.6.5 Teorema (DISUGUAGLIANZA DI MINKOWSKI) *Se $p, q > 0$ sono tali che $1/p + 1/q = 1$ (oppure se $p = 1$ e $q = \infty$) e $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, per ogni coppia di funzioni $f, g : X \longrightarrow [0, \infty]$ misurabili si ha*

$$\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

DIMOSTRAZIONE: Applichiamo all'identità

$$(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$$

la disuguaglianza di Hölder:

$$\int_X f(f+g)^{p-1}d\mu \le \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X (f+g)^{(p-1)q}d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

ma $(p-1)q = p$ e quindi

$$\int_X (f+g)^p d\mu \le \left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

Ora, supponiamo che in questa disuguaglianza la parte sinistra sia non nullo e la parte destra non infinito (altrimenti il teorema è banale): dato che la funzione t^p è convessa per $t \in (0, \infty)$:

$$\left(\frac{f+g}{2}\right)^p \le \frac{1}{2}(f^p + g^p)$$

e quindi

$$\frac{\int_X (f+g)^p d\mu}{\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}} \le \left(\left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

cioè, dato che $1 - 1/q = 1/p$, la disuguaglianza di Minkowski.

QED

Vogliamo infine dimostrare dei risultati molto utili di approssimazione per le funzioni in L^p: consideriamo uno spazio di Hausdorff localmente compatto X, $\mathcal{A}$ una σ-algebra su X contenente i boreliani e μ una misura regolare su X.

4.6.6 Teorema *Se $1 \le p < \infty$ per ogni funzione $f \in L^p(X, \mu)$ esiste una funzione continua a supporto compatto g tale che*

$$||f - g||_p \longrightarrow 0$$

Cioè ogni funzione L^p è approssimabile con funzioni continue a supporto compatto.

DIMOSTRAZIONE: Dimostreremo in realtà di più: ogni funzione L^p si approssima con funzioni "di salto", cioè con funzioni semplici s che hanno supporto in insiemi di misura finita. Sia S l'insieme delle funzioni $s : X \longrightarrow \mathbb{C}$ misurabili semplici tali che

$$\mu(\{x \in X \mid s(x \neq 0)\} < \infty$$

Dimostriamo che gli elementi di questo insieme approssimano L^p. Intanto è ovvio che $S \subset L^p(X, \mu)$; consideriamo poi, data $f : X \longrightarrow [0, \infty)$ in $L^p(X, \mu)$, una successione $\{s_n\}$ monotona di funzioni semplici che converga a f (teorema 4.3.3); dato che $f - s_n \leq f$ (stiamo considerando funzioni reali positive in L^p: basta dimostrare il teorema per esse):

$$|f - s_n|^p \leq f^p$$

Quindi possiamo usare il teorema della convergenza dominata:

$$\lim ||f - s_n||_p = \int_X \lim |f - s_n|^p d\mu = 0$$

Per dimostrare il teorema ci basta sapere che, dato $\varepsilon > 0$, per ogni funzione $s \in S$ esiste $g \in C_c(X)$ tale che

$$\mu\{x \mid g(x) \neq f(x)\} < \varepsilon$$

e $|g| \leq ||s||_\infty$: infatti in questo caso

$$||f - g||_p = ||f - g + s - s|| \leq ||f - s||_p + ||g - s||_p < \varepsilon + 2\varepsilon^{\frac{1}{p}} ||s||_\infty$$

Ora consideriamo la nostra $s \in S$ e l'insieme $A = \{x \mid s(x) \neq 0\}$: sappiamo che è diversa da zero su un insieme di misura finita, quindi, per regolarità della misura, possiamo supporre che esista un compatto K un aperto U tali che $K \subset U$, $s|_U = 0$ e $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$. Allora, per il lemma di Uryshon, esiste una funzione continua h tale che $h|_K = 1$ e $g|_{\complement U} = 0$: evidentemente

$$\mu\{x \mid g(x) \neq s(x)\} < \varepsilon$$

La g è la funzione cercata.

QED

Implicita nella dimostrazione di questo risultato è quella del seguente

4.6.7 Teorema (Lusin) *Una funzione misurabile su un insieme di misura finita è approssimabile con funzioni continue a supporto compatto.*