Capitolo 6

SPAZI NORMATI ED OPERATORI LINEARI

I principali esempi di spazi vettoriali di dimensione infinita sono tutti spazi di funzioni: come abbiamo visto, questi spazi sono in genere anche spazi metrici, e spesso possiedono la proprietà di essere completi rispetto alla loro metrica: si può dare una teoria generale per gli spazi vettoriali che soddisfino queste proprietà, che generalizza profondamente quella degli spazi con prodotto scalare in dimensione finita. In questo capitolo gettiamo le fondamenta di questa teoria, e diamo numerosi esempi.

6.1 Spazi di Hilbert e di Banach

6.1.1 Definizione *Uno spazio vettoriale* $\mathcal{H}$ *sul campo* $\mathbb{C}$ *dei numeri complessi si dice* spazio pre-hilbertiano *se è data una funzione* $\mathcal{H}\times\mathcal{H}\longrightarrow\mathbb{C}$*, il cui valore scriveremo come* (x,y)*, tale che, se* $x,y,z\in\mathcal{H}$ *e* $a,b\in\mathbb{C}$*:*

- $(x,y)=\overline{(y,x)}$
- $(ax+by,z)=a(x,z)+b(y,z)$
- $x\neq 0 \implies (x,x)>0$

La mappa $(-,-)$ *si dice* prodotto hilbertiano *in* $\mathcal{H}$*.*

Notiamo che la (3) ha senso, dato che $(x,x)=\overline{(x,x)}$ è un numero reale. In generale, se V e W sono spazi vettoriali complessi, una funzione $f:V\times W\longrightarrow\mathbb{C}$ che soddisfi le (1)–(2) si dice *funzione sesquilineare*: le (1)–(2) equivalgono alla

$$f(au+bv,cw+dz)=acf(u,w)+a\overline{d}f(u,z)+\overline{b}cf(v,w)+\overline{bd}f(v,z)$$

6.1.2 Esempio *I seguenti sono spazi pre-hilbertiani:*

- *Lo spazio vettoriale complesso* $\mathbb{C}^n$ *con il prodotto*

$$(z, z') := \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{z_i}$$

- *Lo spazio delle funzioni a quadrato sommabile* $L^2(\mathbb{R}, ds)$ *rispetto alla misura di Lebesgue sulla retta reale rispetto al prodotto*

$$(f, g) := \int_{\mathbb{R}} f(s)\overline{g(s)}ds$$

- *lo spazio* $l^2(\mathbb{N})$ *delle funzioni* $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ *non nulle solo in un numero finito di punti con il prodotto*

$$(\varphi, \psi) := \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)\overline{\psi(n)}$$

Se $x, y \in X$ (spazio pre-hilbertiano) e $a, b \in \mathbb{C}$ allora

$$(ax + by, ax + by) \geq 0$$

(l'eguaglianza vale, con a e b opportuni, se x e y sono linearmente dipendenti). Si osservi che

$$(ax + by, ax + by) = a\overline{a}(x, x) + a\overline{b}(y, x) + \overline{a}b(x, y) + b\overline{b}(y, y)$$

è la forma quadratica associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} (x, x) & (x, y) \\ (y, x) & (y, y) \end{pmatrix}$$

e quindi

$$0 \leq \det(A) = (x, x)(y, y) - \overline{(x, y)}(y, y)$$

(il segno = vale se x e y sono linearmente dipendenti) cioè abbiamo la *diseguaglianza di Cauchy–Schwartz*:

$$(x, x)(y, y) \geq |(x, y)|^2$$

6.1.3 Definizione *La* norma *di* $x \in X$ *(spazio pre-hilbertiano) è il numero* $||x|| := \sqrt{(x, x)}$.

6.1.4 Proposizione *Se X è uno spazio pre-hilbertiano:*

- *Per ogni $x \in X$: $||x|| \geq 0$ e, se $x \neq 0$ allora $||x|| > 0$.*
- *Per ogni $x \in X$ e $a \in \mathbb{C}$: $||ax|| = |a| \cdot ||x||$.*
- *Per ogni $x, y \in X$:*
$$||x+y||^2 \leq (||x|| + ||y||)^2$$

Si tratta di riformulare le proprietà precedenti in termini della norma.

6.1.5 Definizione *Uno spazio vettoriale X sul campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ si dice* spazio normato *se è data una mappa $||-|| : X \longrightarrow \mathbb{C}$ (la* norma *di X) che verifichi le (1)–(3) della proposizione precedente.*

Ponendo $z = x + y$ nella (3) si ottiene

$$\big|||x|| - ||z||\big| \leq ||z - x||$$

Quindi se $(X, ||-||)$ è uno spazio normato possiamo renderlo uno spazio metrico con la distanza
$$d(x, y) = ||x - y||$$

Dunque possiamo considerare in uno spazio normato il concetto di *convergenza*: in particolare ha senso chiedersi se la convergenza relativa alla distanza d indotta dalla norma sia o meno completa.

6.1.6 Esempio *Lo spazio pre-hilbertiano X delle successioni $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ di numeri complessi a supporto finito (cioè $s_n \neq 0$ per un numero finito di n: possiamo dunque immaginarle come successioni di numeri complessi definitivamente nulle) rispetto al prodotto*
$$(s, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n \overline{t_n}$$
(la serie è in realtà una somma finita) non è completo, dato che la successione $\{s_n\}$ degli elementi di X dati da $s_n(m) = 0$ se $n \neq m$ e $1/2^n$ se $n = m$ è di Cauchy ma non ammette limite in X.

6.1.7 Definizione *Uno spazio normato completo si dice* spazio di Banach *ed uno spazio pre-hilbertiano completo si dice* hilbertiano *o* spazio di Hilbert.

6.1.8 Esempio

- *Lo spazio $\mathbb{C}^n$ è di Hilbert, come noto dall'Analisi elementare.*

- *Lo spazio $l^2(\mathbb{N})$ delle successioni $\{a_n\}$ di numeri complessi tali che*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 < \infty$$

  è uno spazio pre-hilbertiano rispetto al prodotto

$$(\{a_n\}, \{b_n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \overline{b_n}$$

  Dimostreremo fra breve che si tratta di uno spazio di Hilbert[1]*.*

- *Lo spazio $l^p(\mathbb{N})$ delle successioni $\{a_n\}$ di numeri complessi tali che*

$$||a||_p := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

  e lo spazio $l^\infty(\mathbb{N})$ delle successioni complesse limitate con la norma

$$||a||_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

  sono pure spazi normati: sempre fra breve dimostreremo che si tratta di spazi di Banach.

- *In generale, se A è un insieme qualsiasi possiamo definire $l^p(A)$ come l'insieme delle successioni generalizzate indicizzate da A di numeri complessi che verifichino le condizioni di finitezza precedenti: si tratterà sempre di spazi di Banach.*

Come noto, ogni spazio metrico (X, d) ammette un unico completamento $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ ed è dotato di una isometria $\Psi : X \longrightarrow \widetilde{X}$ la cui immagine sia densa in $\widetilde{X}$: applicando questa costruzione al caso di uno spazio normato (o pre-hilbertiano) si ottiene un unico spazio di Banach (o di Hilbert) che si dice *completamento* di X, con relativa isometria Ψ.

6.1.9 Proposizione *Uno spazio normato X è di Banach se e solo se ogni serie assolutamente convergente in X è convergente.*

Dimostrazione: Per definizione la serie $\sum_n x_n$ è assolutamente convergente in X se la serie numerica $\sum_n ||x_n||$ è convergente.

[1]Non è difficile dimostrarlo "a mano", cfr. [20], pp. 24–25.

Ora, sia X uno spazio di Banach e sia la serie $\sum_n x_n$ assolutamente convergente; allora per

$$z_N := \sum_{n=1}^{N} x_n$$

si ha

$$||z_N - z_M|| = ||\sum_{n=N}^{M} x_n|| \leq \sum_{n=M}^{N} ||x_n||$$

da cui segue la convergenza della serie per il criterio di Cauchy.

Supponiamo invece che ogni serie assolutamente convergente in X sia convergente: vogliamo dimostrare che ogni successione $\{x_n\}$ di Cauchy sia convergente in X. Ma se poniamo $y_n = x_{m_n}$ ove la sottosuccessione $\{m_n\}$ venga scelta dalla definizione di successione di Cauchy:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m_n\ \forall i, j > m_n \quad ||x_i - x_j|| < \frac{1}{2^{n+1}}$$

allora la successione $\{y_n\}$ converge: infatti la serie

$$y - 1 + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + ...$$

converge (perché converge assolutamente).

QED

Possiamo ad esempio, usando questo criterio, dimostrare il teorema di Riesz–Fischer secondo il quale gli spazi L^p sono di Banach.

Ricordiamo che se $(X, \mathcal{B}, \mu)$ è uno spazio di misura completo lo spazio vettoriale $L^p(X, \mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ è l'insieme delle funzioni misurabili e tali che

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty$$

modulo la relazione che identifica due funzioni che coincidano quasi ovunque.

6.1.10 Teorema (RIESZ–FISCHER) *Rispetto alle norme*

$$||f||_p := \left(\int_X |f|^P d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

e

$$||f||_\infty := \operatorname{esssup} |f|$$

$L^p(X, \mu)$ sono spazi di Banach.

Dimostrazione: Il caso $p = \infty$ è elementare: si tratta di applicare la disuguaglianza triangolare per i moduli delle somme.

Sia quindi $1 \leq p < \infty$. Le diseguaglianze di Minkowski e di Hölder implicano che L^p è uno spazio normato rispetto a $||-||_p$. Basta dimostrarne la completezza. Sia dunque $\{f_n\}$ una successione assolutamente convergente in L^p:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||f_n||_p = M < \infty$$

e definiamo

$$g_n(x) := \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|$$

Per la diseguaglianza di Minkowski:

$$||g_m|| \leq \sum_{k=0}^{n} ||f_k|| \leq M$$

i.e.

$$\int (g_n)^p \leq M^p$$

Per ogni x la successione $\{g_n(x)\}$ è crescente (a valori in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) e quindi deve convergere ad un elemento $g(x) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. La funzione così definita g è misurabile e, dato che $g_n \geq 0$ si ha che

$$\int g^p \leq m^p$$

(per il Lemma di Fatou). Quindi g^p è integrabile (i.e. sta in L^1) e $g(x)$ è finita quasi ovunque.

Nei valori di x per i quali g è finita, la serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge assolutamente ad un numero reale $s(x)$. Ponendo $s(x) = 0$ per gli x tali che $g(x) = \infty$ abbiamo definito così una funzione s che è quasi ovunque limite delle somme parziali $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. È quindi misurabile e

$$|s_n(x)| \leq g(x) \Rightarrow |s(x)| \leq g(x)$$

Dunque $s \in L^p$ e

$$|s_n(x) - s(x)|^p \leq 2^p (g(x))^p$$

Ma $2^p g^p \in L^1$ e $|s_n(x) - s(x)| \longrightarrow 0$ per quasi ogni x sicché per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue:

$$\int |s_n - s|^p \longrightarrow 0$$

Dunque $||s_n - s||^p \longrightarrow 0$ i.e. $||s_n - s|| \longrightarrow 0$. La serie $\{f_n\}$ converge quindi in L^p che è quindi uno spazio di Banach.

QED

6.1.11 Esempio *La stessa tecnica, applicata allo spazio di misura $(A, \mathcal{P}(A), \#)$ con la misura che conta # consente di dimostrare che gli spazi $l^p(A)$ sono spazi di Banach.*

6.1.12 Esempio *L'insieme $C(X)$ delle funzioni continue a valori reali (o complessi) definite su uno spazio topologico compatto di Hausdorff X, è uno spazio di Banach rispetto alla norma:*

$$||f|| := \max_{x\in X} |f(x)|$$

Evidentemente si tratta di uno spazio normato, e la completezza segue dal fatto che la condizione $||f_n - f_m|| \longrightarrow 0$ implica la convergenza uniforme della successione $\{f_n\}$ che tende quindi ad una funzione continua, cioè ad un elemento di $C(X)$.

Infine osserviamo che ogni spazio vettoriale (reale o complesso) di dimensione finita è uno spazio di Banach:

6.1.13 Teorema (TICHONOV) *Se X è uno spazio vettoriale di dimensione finita allora tutte le norme possibili su di esso lo rendono uno spazio di Banach e sono equivalenti.*

DIMOSTRAZIONE: Possiamo fissare una base $(e_1, ..., e_n)$ di X, e le coordinate indotte da questa base:

$$\forall x \in X \exists x_1, ..., x_n \in \mathbb{R} \quad x = x_1e_1 + .. + x_ne_n$$

stabiliscono un isomorfismo di spazi vettoriali $\iota : X \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$. Dimostriamo che questo isomorfismo è un omeomorfismo rispetto alle topologie indotte dalle norme. Per ogni $x \in X$:

$$||x|| = ||\sum_{i=1}^n x_ie_i|| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \; ||e_i|| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n ||e_i||^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = c||\iota(x)||$$

i.e.

$$||x - y|| \leq c||\iota(x) - \iota(y)||$$

ove c è una costante che non dipende né da x né da y.

Stabiliamo la disuguaglianza opposta: sulla sfera unitaria $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ consideriamo la funzione

$$f(\iota(x)) = f(x_1, ..., x_n) = ||x||$$

Evidentemente $f > 0$ perché $\sum x_i^2 = 1$ e e_i sono una base; la disuguaglianza

$$|f(x_1, ..., x_n) - f(y_1, ..., y_n)| = \big| ||x|| - ||y|| \big| \leq ||x - y|| \leq c||\iota(x) - \iota(y)||$$

mostra la continuità di f, che quindi, sul compatto $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ammette un minimo α, che deve ovviamente essere positivo. Quindi, se $i(x) \in S^{n-1}$ si ha che $f(\iota(x)) = ||x|| \geq \alpha$ e, per ogni $x \in X$:

$$f(\iota(x)) = ||\iota(x)|| \left\| \sum_{i=1}^n \frac{x_i e_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}} \right\| \geq \alpha||\iota(x)||$$

Quindi la ι è un omeomorfismo.

QED

6.1.14 Corollario *Un sottospazio vettoriale di uno spazio normato di dimensione finita è chiuso.*

6.1.15 Corollario *Ogni spazio normato localmente compatto è di dimensione finita.*

DIMOSTRAZIONE: Se X è localmente compatto e U è un intorno dello zero a chiusura compatta e tale che, per ogni $|\alpha| < 1$ si abbia $\alpha U \subset U$, allora, possiamo ricoprire $\overline{U}$ con un numero finito di intorni ottenuti traslando U per degli elementi $x_1, ..., x_n \in X$:

$$\overline{U} \subset x_1 + \frac{1}{3}U \cup ... \cup x_n + \frac{1}{3}U$$

Allora, ogni elemento di X si ottiene come combinazione lineare degli $\{x_1, ..., x_n\}$. Scegliendo n minimo, questi elementi formano quindi una base di X.

QED

6.2 Somme e complementi ortogonali

Abbiamo visto in precedenza una caratterizzazione degli spazi di Banach fra gli spazi normati: un altro quesito che è naturale porsi è quando uno spazio di Banach sia di Hilbert: la risposta è data dalla seguente

6.2.1 Proposizione *Uno spazio normato* $(X, ||-||)$ *è uno spazio pre-hilbertiano rispetto ad un prodotto scalare* $(-)$ *se e solo se vale la seguente* identità di polarizzazione, *che definisce il prodotto* $(-)$*:*

$$\sum_{\varepsilon} \overline{\varepsilon}||x + \varepsilon y||^2 = 4(x, y)$$

ove ε *varia nell'insieme* $\{1, -1, i, -i\}$.

Dimostrazione: Si tratta di osservare che, nell'ovvia identità

$$||ax + by||^2 = |a|^2(x, x) + |b|^2(y, y) + 2\,\mathrm{Re}\,(\overline{a}b(x, y))$$

ponendo $a = 1$ e $b = \pm 1$ e sommando, si ottiene

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right)$$

(*identità del parallelogramma*). Moltiplicando per $\pm 1, \pm i$ e ripetendo il ragionamento per $b = \pm i$ si ottiene l'identità di polarizzazione.

QED

Se $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ sono spazi di pre-hilbertiani anche la loro somma diretta $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ lo è rispetto al prodotto

$$(x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2) := (x_1, y_1)_1 + (x_2, y_2)_2$$

Se $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ sono di Hilbert anche $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ lo è, dato che

$$\begin{aligned} ||x_n \oplus y_n - x_m \oplus y_m||^2 &= ||(x_n - x_m) \oplus (y_n - y_m)||^2 \\ &= \left|(x_n - x_m) + (y_n - y_m)\right|^2 \end{aligned}$$

In modo analogo la somma diretta di spazi di Banach è uno spazio di Banach con una delle norme

$$\begin{aligned} ||x \oplus y||_p &:= (||x||^p + ||y||^p)^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \leq p \leq \infty \\ ||x \oplus y||_\infty &:= \sup(||x||, ||y||) \end{aligned}$$

Tutte queste norme sono *equivalenti*, nel senso che inducono le medesime topologie).

Possiamo generalizzare questa costruzione nel modo seguente: sia A un insieme arbitrario di indici e $\{\mathcal{H}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia di spazi di Hilbert indicizzata da A. Allora[2]

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{\alpha \in A} \mathcal{H}_\alpha = \{x : A \longrightarrow \bigcup_{\alpha} \mathcal{H}_\alpha | x(\alpha) \in \mathcal{H}_\alpha \text{ e } \sum_{\alpha \in A} ||x(\alpha)||^2 < \infty\}$$

[2]Per definizione si ha $\sum_{\alpha \in A} ||x(\alpha)||^2 := \sup_{I \subset A} \sum_{i \in I} ||x(i)||^2$ ove gli insiemi I sono finiti.

è uno spazio di Hilbert. Le operazioni di somma e prodotto sono definite punto per punto: $(ax+by)(\alpha) = ax(\alpha)+by(\alpha)$ e l'identità del parallelogramma implica che rendono $\mathcal{H}$ uno spazio vettoriale. Il prodotto si definisce pure punto per punto:

$$(x, y) := \sum_{\alpha\in A}(x(\alpha), y(\alpha))$$

Questo ha senso, dato che $|(x, y)| \leq ||x||\ ||y|| \leq \frac{1}{2}\left(||x||^2 + ||y||^2\right)$ e quindi

$$\sum_{\alpha\in A} |(x, y)| \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha\in A} ||x(\alpha)||^2 + ||y(\alpha)||^2\right)$$

col che (x, y) è definita da una somma assolutamente convergente. La completezza del prodotto segue osservando che, se[3] $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per $n, m > n_\varepsilon$ si abbia $||x_n - x_m||^2 < \varepsilon^2$ allora

$$\sum_{\alpha\in A} ||x_n(\alpha) - x_m(\alpha)||^2 < \varepsilon^2$$

e quindi, per ogni $\alpha\in A$: $||x_n(\alpha)-x_m(\alpha)||^2 < \varepsilon^2$. Dunque, fissato α la successione $\{x(\alpha)\}$ è di Cauchy in $\mathcal{H}_\alpha$ e, per completezza di $\mathcal{H}_\alpha$, converge ad un elemento $x(\alpha) \in \mathcal{H}_\alpha$. Allora

$$\sup_{I\subset A} \sum_{i\in I} ||x_n(i) - x_m(i)||^2 < \varepsilon^2$$

sicché

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 &< \lim_m \sup_{I\subset A} \sum_{i\in I} ||x_n(i) - x_m(i)||^2 = \sum_{\alpha\in A} \lim_m ||x_n(\alpha) - x_m(\alpha)||^2 \\ &= \sum_{\alpha\in A} ||x_n(\alpha) - x(\alpha)||^2 \leq \varepsilon^2\end{aligned}$$

Dunque la funzione $\alpha \longmapsto (x_n(\alpha) - x(\alpha))$ appartiene a $\mathcal{H}$: $x_n - x \in \mathcal{H}$, da cui $x \in \mathcal{H}$ (dato che $x_n \in \mathcal{H}$).

Infine[4]

$$||x_n - x||^2 = \sum_{\alpha\in A} ||x_n(\alpha) - x(\alpha)||^2 \leq \varepsilon^2$$

e quindi $x_n \longmapsto x$ appartiene a $\mathcal{H}$ che risulta per questo essere completo.

[3] Osserviamo che la cardinalità dell'insieme $\{\alpha|\ ||x(\alpha)|| \neq 0\}$ è numerabile, dato che $\{\alpha|\ ||x(\alpha)|| \neq 0\} = \bigcup_n A_n$ ove $A_n = \{\alpha|\ ||x(\alpha)|| > \frac{1}{n}\}$ sono ovviamente finiti.

[4] È un fatto generale che dalla $||x_n - x|| \longrightarrow 0$ seguano le $y + x_n \longrightarrow x + y$ e $||x_n|| \longrightarrow ||x||$.

Osserviamo che gli spazi $\mathcal{H}_\alpha$ si immergono isometricamente in $\mathcal{H}$: infatti se $x \in \mathcal{H}_\alpha$ e se, per $\alpha' \in A$, poniamo

$$\psi_\alpha(x)(\alpha') := \delta_{\alpha\alpha'} x$$

(delta di Kronecker) allora le $\psi_\alpha : \mathcal{H}_\alpha \longrightarrow \mathcal{H}$ sono isometrie. Naturalmente, per completezza di $\mathcal{H}$, i sottoinsiemi $\mathcal{H}_\alpha \subset \mathcal{H}$ sono chiusi.

Inoltre, se $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ i sottospazi $\psi_{\alpha_1}(\mathcal{H}_{\alpha_1})$ e $\psi_{\alpha_2}(\mathcal{H}_{\alpha_2})$ sono ortogonali fra loro.

Osserviamo che il sottospazio vettoriale di $\mathcal{H}$ generato dai sottospazi $\{\psi_\alpha(\mathcal{H}_\alpha)\}$ (cioè la somma $\sum \psi_\alpha(\mathcal{H}_\alpha)$ definita come insieme delle funzioni a supporto finito $: A \longrightarrow \bigcup_\alpha \psi_\alpha(\mathcal{H}_\alpha)$) è denso in $\mathcal{H}$. Infatti se $\varepsilon > 0$ allora esiste un sottoinsieme $A_\varepsilon \subset A$ finito e tale che[5]

$$\sum_{\alpha \in A \setminus A_\varepsilon} ||x(\alpha)||^2 < \varepsilon^2$$

Quindi, la

$$x_\varepsilon(\alpha) := \begin{cases} x(\alpha) & \text{se } \alpha \in A_\varepsilon \\ 0 & \text{se } \alpha \notin A_\varepsilon \end{cases}$$

è una funzione a supporto finito (dunque in $\sum \psi_\alpha(\mathcal{H}_\alpha)$) tale che

$$||x - x_\varepsilon||^2 < \varepsilon^2$$

Questo significa che $\overline{\sum \psi_\alpha(\mathcal{H}_\alpha)} = \mathcal{H}$.

Ad esempio, se per ogni $\alpha \in A$, si ha che $\mathcal{H}_\alpha = \mathbb{C}$ allora la somma diretta $\mathcal{H}$ è lo spazio

$$l^2(A) := \{f : A \longrightarrow \mathbb{C} | \sum |f(\alpha)|^2 < \infty\}$$

che dunque risulta essere uno spazio di Hilbert.

In modo perfettamente analogo si definisce la somma di spazi di Banach e si dimostra essere uno spazio di Banach.

6.2.2 Definizione *Se $S \subset \mathcal{H}$ è un sottoinsieme di uno spazio di Hilbert, il suo* ortogonale *è l'insieme*

$$S^\perp := \{y \in \mathcal{H} | \ \forall x \in S \ (y, x) = 0\}$$

Evidentemente, se $S \subset \mathcal{H}$ è M è il sottospazio vettoriale generato da S in $\mathcal{H}$ allora

$$S^\perp = M^\perp$$

[5]Si ricordi che $\sum_\alpha ||x(\alpha)||^2 = ||x||^2 < \infty$.

e possiamo dunque limitarci a considerare sottospazi vettoriali, nelle questioni di ortogonalità.

Si osservi inoltre che la diseguaglianza di Cauchy–Schwartz implica che, se x_n converge a x in $\mathcal{H}$ allora, per ogni $y \in \mathcal{H}$:

$$(y, x_n) \longrightarrow (y, x)$$

(questo significa semplicemente che il prodotto hilbertiano (x, y) è una funzione continua nelle due variabili x e y). Quindi

$$M^\perp = \overline{M}^\perp$$

e il sottospazio vettoriale $M^\perp$ risulta sempre essere chiuso.

I sottospazi chiusi di uno spazio di Hilbert sono interessanti e naturali da considerare, in virtù del seguente

6.2.3 Teorema (RIESZ) *La somma diretta*[6] *di un sottospazio $M \subset \mathcal{H}$ e del suo ortogonale $M^\perp$ esaurisce l'intero spazio di Hilbert: $M + M^\perp = \mathcal{H}$.*
DIMOSTRAZIONE: Basta ovviamente dimostrare che per ogni $x \in \mathcal{H}$ esista un $x_M \in M$ tale che $(x - x_M, M) = 0$; questo equivale a dimostrare che esiste una successione $\{x_n\}$ *di Cauchy* in M tale che[7] $d(x, x_n) \longrightarrow d(x, M) =: d$.Infatti, in questo caso, detto x_M il limite di $\{x_n\}$, (che esiste perché $\mathcal{H}$ è completo), si avrebbe $x - x_M \in M^\perp$ (dato che $d(x - x_M) = 0$ e M è chiuso).

Dimostriamo dunque che

- Se $x_n \longrightarrow x$ allora $x - x_M \in M^\perp$.
- $\{x_n\}$ è di Cauchy.

(1) L'ipotesi significa che $\lim ||x - x_n|| = d$ e quindi, se $y \in M$, $x_M + y \in M$, da cui $||x - (x_m + y)||^2 \geq d^2$, e

$$d^2 \leq ||(x - x_M) + y||^2 = ||y||^2 + 2\,\mathrm{Re}(y, x - x_M) + ||x - x_M||^2$$

Ma, per ogni $a \in \mathbb{C}$: $||ay||^2 + 2\,\mathrm{Re}(ay, x - x_M) \geq 0$ e quindi $\mathrm{Re}(y, x - x_M) = 0$ (per arbitrarietà di a). In modo analogo si vede che $\mathrm{Im}(y, x - x_M) = 0$, e quindi $(y, x - x_M) = 0$ per $y \in M$.

(2) Si ha che $||x_n - x_m||^2 = ||(x_n - x) - (x_m - x)||^2$ e quindi

$$||x_n - x_m||^2 + ||x_n + x_m - 2x||^2 = s||x - x_n||^2 + 2||x - x_m||^2$$

[6] Come spazi vettoriali e non di Hilbert.

[7] Ricordiamo che la distanza $d(x, M)$ di un punto da un insieme è definita come l'$\inf_{y \in M}\{d(x, y)\}$ e che un punto x che abbia distanza nulla da un insieme M appartiene a M se e solo se $M = \overline{M}$.

Ma $\{x_n\} \subset M$, quindi $\frac{x_n+x_m}{2} \in M$, i.e.

$$4d^2 \leq 4\left|\left|\frac{x_n + x_m}{2} - x\right|\right|^2 = ||x_n + x_m - 2x||^2$$

col che si ha

$$||x_n - x_m||^2 \leq 2(||x - x_n||^2 - d^2) + 2(||x - x_m||^2 - d^2)$$

e, dato che $d = \lim ||x - x_n||$:

$$||x_n - x_m||^2 \longrightarrow 0$$

QED

Osserviamo che la somma diretta nel teorema di Riesz risulta essere in realtà una somma di spazi di Hilbert: infatti se $x = x_M + x_{M^\perp}$ è ovvio che $(x_M, x_{M^\perp}) = 0$ e quindi che $||x||^2 = ||x_M||^2 + ||x_{M^\perp}||^2$ (che $M \cap M^\perp = \{0\}$ è ovvio).

Se M è un sottospazio vettoriale chiuso di $\mathcal{H}$, dato che per ogni $S \subset \mathcal{H}$: $S \subset S^{\perp\perp}$, si ha che $M \subset M^{\perp\perp}$; ma per il teorema di Riesz è $M \oplus M^\perp = \mathcal{H} = M^\perp \oplus M^{\perp\perp}$ e quindi $M = M^{\perp\perp}$. Rileviamo esplicitamente che, come conseguenza di questo fatto, se $S \subset \mathcal{H}$ allora

$$S^{\perp\perp} = \{\text{sottospazio di } \mathcal{H} \text{ generato da } S\}$$

6.3 Funzionali lineari

6.3.1 Definizione *Se X è uno spazio normato, un* funzionale lineare *è una mappa lineare $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ di spazi vettoriali. Se, come applicazione fra spazi topologici, f è continua, si dice* funzionale lineare continuo *e se, come applicazione fra spazi metrici, è limitata, si dice* funzionale lineare limitato.

Osserviamo che un funzionale lineare è limitato se, per definizione, esiste una costante L tale che

$$\forall x \in X \quad |f(x)| \leq L||x||$$

Ovviamente questo implica la continuità nel punto $0 \in X$ e, dato che la somma è una applicazione continua e ogni punto si scrive come somma di se stesso e dello zero, in tutto lo spazio. Quindi

6.3.2 Proposizione *Un funzionale lineare limitato è continuo.*

Ad esempio, in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, per $y \in \mathcal{H}$ fissato, il funzionale $f(x) := (y, x)$ è limitato; si tratta in un certo senso del caso più generale, come afferma il

6.3.3 Teorema di Rappresentazione (RIESZ) *Se $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ è un funzionale lineare limitato su uno spazio di Hilbert, allora esiste un unico elemento $x_f \in \mathcal{H}$ tale che*

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad f(x) = (x_f, x)$$

DIMOSTRAZIONE: f è continuo, essendo limitato, quindi l'insieme

$$\mathcal{N}_f := \{x \in \mathcal{H} \,|\, f(x) = 0\}$$

(il *nucleo* di f) è un sottospazio vettoriale *chiuso*. Possiamo supporre che sia $\mathcal{N}_f \neq \mathcal{H}$ (altrimenti il teorema è banalmente verificato con $x_f = 0$) e quindi

$$\mathcal{N}_f^\perp \neq 0$$

Se $x_0 \in \mathcal{N}_f^\perp$ possiamo supporre, a meno di normalizzare dividendo per uno scalare, che sia $f(x_0) = 1$. Ora sia

$$g(x) := (x_0, x)$$

Si tratta di un funzionale lineare limitato, tale che $\mathcal{N}_f \subset \mathcal{N}_g$ (ovvio!) e quindi f deve essere proporzionale[8] a g, dato che dodim$\mathcal{N}_f = 1$ per ogni funzionale lineare (evidentemente l'insieme degli zeri di un funzionale è un iperpiano di $\mathcal{H}$):

$$g(x) = (x_0, x) = (x_0, x_0)f(x)$$

cioè $f(x) = (x_f, x)$ se $x_f := \frac{x_0}{(x_0, x_0)}$.

QED

6.3.4 Corollario *Se f è un funzionale lineare, $||f|| = ||x_f||$.*

Come notevole applicazione di questo teorema diamo la dimostrazione di von Neumann[9] del teorema di Radon–Nikodym.

6.3.5 Definizione *Se μ e ν sono misure definite su uno spazio misurabile $(X, \mathcal{A})$ si dice che ν è* assolutamente continua *rispetto a μ se per ogni A tale che $\mu(A) = 0$ si ha che $\nu(A) = 0$. Si scrive in questo caso $\nu \ll \mu$.*

In caso di misure con segno, l'assoluta continuità si riferisce ai loro valori assoluti.

Ad esempio, se μ è una misura su $(X, \mathcal{A})$ e f una funzione misurabile non negativa su X, la misura

$$\nu(E) := \int_E f d\mu$$

(che è finita se e solo se f è integrabile) è assolutamente continua rispetto a μ. Il teorema di Radon–Nikodym fornisce delle condizioni per le quali ogni misura assolutamente continua è di questo tipo.

[8] Infatti $x = x - f(x)x_0 + f(x)x_0$ e $x - f(x)x_0 \in \mathcal{N}_f \subset \mathcal{N}_g$, i.e. $g(x) = f(x)g(x_0)$.

[9] *On Rings of Operators III* Ann. Math. 41 (1950) pp. 124–130.

6.3.6 Teorema (Radon–Nikodym) *Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di misura σ-finito e $\nu \ll \mu$ allora esiste una funzione non negativa misurabile su X tale che, per ogni $E \in \mathcal{A}$:*

$$\nu(E) = \int_E f d\mu$$

La funzione f è unica μ-q.o.

Dimostrazione: (von Neumann) Osserviamo che, assumendo il risultato vero nel caso di misure finite, segue facilmente il caso σ-finito: infatti decomponiamo $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ con $\mu A_i < \infty$ e $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ con $\nu B_i < \infty$ ove possiamo assumere che le successioni $\{A_i\}$ e $\{B_i\}$ siano formate da insiemi a due a due disgiunti. Dato che

$$X = \bigcup_{i,j} (A_i \cap B_j)$$

possiamo assumere che $X = \bigcup_i X_i$ con $\mu X_i, \nu X_i < \infty$. Ora definiamo le σ-algebre

$$\mathcal{A}_n := \{E \cap X_n\}_{E \in \mathcal{A}}$$

sugli insiemi X_n e le restrizioni μ_n, ν_n si μ e ν agli spazi misurabili $(X_n, \mathcal{A}_n)$. Supponendo vero il teorema nel caso finito, esistono le funzioni misurabili non negative $\{f_n\}$ tali che

$$\forall F \in \mathcal{A}_n \quad \nu(F) = \int_F f_n d\mu$$

Allora decomponendo un insieme $E \in \mathcal{A}$ come $E = \bigcup E_n$ ed $E_n \in \mathcal{B}_n$ definendo una funzione f in modo che $f|_{X_n} = f_n$ si ottiene un funzione non negativa e misurabile (l'unione delle funzioni $\{f_n\}$) tale che

$$\forall E \in \mathcal{A} \quad \nu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

Basta quindi dimostrare il teorema nel caso di misure finite.

Per prima cosa si osservi che, se μ e ν sono misure finite sullo spazio misurabile $(X, \mathcal{A})$ tali che $\lambda = \mu + \nu$, allora il funzionale

$$F(f) := \int f d\mu$$

è lineare e continuo sullo spazio di Hilbert $L^2(X, d\lambda)$. Infatti, se $f \in L^2(X, d\lambda)$, per la disuguaglianza di Schwartz:

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu \leq \int_X |f| d\lambda \leq \left(\int_X |f|^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\lambda(X)}$$

e $\lambda(X) < \infty$. Quindi $F(f) := \int_X f d\mu$ è lineare e continuo su $L^2(X, \lambda)$.

Ora, per il teorema di Riesz, esiste una $g \in L^2(X, \lambda)$ tale che $F(f) = (f, g) := \int_X f g d\lambda$; inoltre $0 \le g \le 1$: infatti, per $f = \chi_E$ (ove E sia misurabile con $\lambda E > 0$)

$$\mu E = \int_X \chi_E d\mu = \int_E g d\lambda$$

per cui (avendosi $0 \le \mu \le \lambda$):

$$0 \le \frac{1}{\lambda E} \int_E g d\lambda = \frac{\mu E}{\lambda E} \le 1$$

Dunque $g \in [0, 1]$ λ-q.o. Possiamo allora scrivere

$$\nu E = \int_E (1 - g) d\lambda$$

Osserviamo che, se $\nu \ll \mu$ allora $\lambda \ll \mu$ e $g \neq 0$ μ-q.o. In questo caso

$$\lambda E = \int_E g^{-1} d\mu$$

In effetti

$$\int_E g^{-1} d\mu = \int_X \chi_E g^{-1} d\mu = \int_X \chi_E g^{-1} g d\lambda = \int_E d\lambda = \lambda E$$

Infine, se $\nu \ll \mu$ allora $(1 - g) g^{-1} \in L^1(X, \mu)$: infatti

$$\begin{aligned} \left| \int_X (1-g) g^{-1} d\mu \right| &\le \int_X |1 - g| \, |g|^{-1} d\mu \\ &\le \left(\int_X |1 - g|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X |g|^{-2} d\mu \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \end{aligned}$$

(si rammenti che $g \in L^2(\lambda)$ e che $\mu \le \lambda$, quindi $g \in L^2(\mu)$). Si trova allora che

$$\begin{aligned} \nu E &= \int_E (1 - g) d\lambda = \lambda E - \int_E g d\lambda = \int_E g^{-1} d\mu - \int_E 1 d\mu \\ &= \int_E (1 - g) g^{-1} d\mu \end{aligned}$$

QED

La funzione f si dice *derivata di Radon–Nikodym* e si denota

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}$$

Il nome si giustifica esaminandone alcune proprietà elementari.

6.3.7 Proposizione *Se μ, ν e λ sono misure σ-finite allora:*

- *Se $\nu \ll \mu$ e f è misurabile non negativa:*

$$\int f d\nu = \int f \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$$

- $$\frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu}$$

- *Se $\nu \ll \mu \ll \lambda$ allora*

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}$$

- *Se $\nu \ll \mu$ e $\mu \ll \nu$ allora*

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \left(\frac{d\mu}{d\nu}\right)^{-1}$$

6.4 Operatori lineari

I funzionali lineari sono un caso particolare degli *operatori lineari*: è noto dall'Algebra Lineare che un operatore lineare fra due spazi vettoriali qualsiasi è una applicazione $A : X \longrightarrow Y$ tale che

$$A(ax + by) = aA(x) + bA(y)$$

Se gli spazi X e Y sono normati ha senso chiedersi se A è continuo o meno. Ovviamente, se A è continuo allora se $x_n \longrightarrow 0$ anche $A(x_n) \longrightarrow 0$.

6.4.1 Definizione *Un operatore lineare $A : X \longrightarrow Y$ fra spazi normati è* limitato *se esiste un $L \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\forall x \in X \quad ||Ax||_Y \leq L||x||_X$$

6.4.2 Teorema *Le tre seguenti condizioni sono equivalenti per un operatore $A : X \longrightarrow Y$ fra spazi normati:*

- *A è continuo.*
- *A è continuo nell'origine $0 \in X$.*
- *A è limitato.*

DIMOSTRAZIONE: (1) $\Rightarrow$ (2) è ovvio.

(3) $\Rightarrow$ (1) segue dal fatto che $||A(x-x_0)|| \leq L||x-x_0||$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Per ipotesi, se $x \in X$ è tale che $||x|| < \delta$ allora $||Ax|| < 1$ e quindi

$$||A\delta(||x|| + \varepsilon)^{-1}x|| < 1$$

i.e. $||Ax|| < \delta^{-1}(||x|| + \varepsilon) \Rightarrow ||Ax|| < \delta^{-1}||x||$.

QED

Lo spazio vettoriale[10]

$$\mathcal{B}(X,Y) := \{A : X \longrightarrow Y \,|\, A \text{ operatore lineare limitato}\}$$

è normato dalla

$$||A|| := \inf\{M \,|\, \forall x \in X \ ||Ax|| \leq L||x||\}$$

che può scriversi come

$$\begin{aligned} ||A|| :&= \sup\{||Ax|| \,|\, \forall x \in X \ ||x|| \leq 1\} = \sup\{||Ax|| \,|\, \forall x \in X \ ||x|| = 1\} \\ &= \sup\{||Ax|| \,|\, \forall x \in X \ ||x|| < 1\} \end{aligned}$$

Naturalmente se A è limitato lo è pure aA e

$$||aA|| = |a| \cdot ||A||$$

Inoltre

$$||(A+B)x|| \leq ||Ax|| + ||Bx||$$

da cui (per $||x|| = 1$)

$$||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$$

e

$$||A|| = 0 \Rightarrow A = 0$$

6.4.3 Teorema *Se Y è uno spazio di Banach, anche $\mathcal{B}(X,Y)$ è uno spazio di Banach.*

DIMOSTRAZIONE: Se $\{A_n\}$ è una successione di Cauchy in $\mathcal{B}(X,Y)$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che se $n, m > n_\varepsilon$ allora

$$||A_n - A_m|| < \varepsilon$$

[10] Ovviamente si pone $(aA + bB)(x) = aAx + bBx$.

i.e.

$$\forall x \in X \quad ||A_n(x) - A_m(x)|| < \varepsilon||x||$$

Ma allora $\{A_n x\}$ è una successione di Cauchy in Y (per ogni x), che è uno spazio completo, quindi deve esistere un $y_x \in Y$ che ne sia il limite.

Evidentemente la mappa $x \longmapsto y_x$ è lineare e quindi possiamo scrivere

$$y = Ax$$

ove A è un operatore lineare $A : X \longrightarrow Y$.

Mostriamo che A è continuo: per continuità della norma in uno spazio normato si ha che, per $n > n_\varepsilon$:

$$\varepsilon||x|| \geq \lim_m ||A_n x - A_m x|| = ||A_n x - |x|| = ||(A_n - A)x||$$

Dunque $A_n - A$ è limitato e $||A_n - A|| \leq \varepsilon$, i.e

$$A = A_n - (A_n - A) \in \mathcal{B}(X, Y)$$

e si ha $||A_n - A|| < \varepsilon$, cioè $\lim_n A_n = A$.

QED

Il seguente risultato spiega perché nel teorema precedente non interviene la completezza dello spazio X:

6.4.4 Teorema *Se X è uno spazio normato e $\widetilde{X}$ il suo completamento (rispetto alla distanza indotta dalla norma di X) allora per ogni $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ esiste $\widetilde{A} \in \mathcal{B}(\widetilde{X}, Y)$ tale che $\widetilde{A}|_X = A$ e $||\widetilde{A}|| = ||A||$. In altri termini, la mappa*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\widetilde{X}, Y) &\longmapsto \mathcal{B}(X, Y) \\ \widetilde{A} &\longmapsto \widetilde{A}|_X \end{aligned}$$

è un operatore lineare isometrico e suriettivo.

Dimostrazione: Consideriamo la mappa $A \longmapsto \widetilde{A}$: che sia lineare è ovvio. Dimostriamo che $||\widetilde{A}|| = ||A||$. Se $x \in \widetilde{X}$ allora esiste una successione $\{x_n\} \subset X$ che converge ad X e quindi

$$||\widetilde{A}x|| = \lim ||\widetilde{A}x_n|| = \lim ||Ax_n|| \leq ||A|| \, ||x||$$

(per continuità di $||-||$, $\widetilde{A}$). Cioè $||\widetilde{A}|| \leq ||A||$.

Ma $\widetilde{A}$ estende A e quindi $||A|| \leq ||\widetilde{A}||$ (per definizione di estremo superiore!) dunque $||\widetilde{A}|| = ||A||$.

Dimostriamo infine la suriettività: sia $A\in\mathcal{B}(X,Y)$ allora per $x\in\widetilde{X}$ e per una successione di Cauchy $\{x_n\}$ in X che converga a x in $\widetilde{X}$ la successione $\{Ax_x\}$ è di Cauchy in Y, che è completo, dunque converge ad un elemento $y_x\in Y$. La mappa $x\longmapsto y_x$ è manifestamente lineare e quindi possiamo scrivere

$$y = Ax$$

in modo che

$$||y|| \leq ||A||\;||\lim x_n|| = ||A||\;||x||$$

Cioè A è la restrizione a X di un $\widetilde{A}\in\mathcal{B}(\widetilde{X},Y)$.

QED

Due casi particolari ma notevoli si hanno per $Y = \mathbb{C}$ ovvero per Y e X ambedue spazi di Banach.

6.4.5 Definizione *Il* duale topologico *di uno spazio normato X è lo spazio di Banach $X^* := \mathcal{B}(X,\mathbb{C})$.*

La norma in X^* è definita come

$$||f|| = \sup_{||x||=1}\{|f(x)|\}$$

Osserviamo esplicitamente che, nel caso di spazi di Hilbert, il teorema di Riesz implica che

$$\mathcal{H} \text{ spazio di Hilbert } \Rightarrow \mathcal{H}^* \text{ spazio di Hilbert e } \mathcal{H}^* \cong \overline{\mathcal{H}}$$

In particolare uno spazio di Hilbert è *riflessivo*, cioè è canonicamente isomorfo al suo biduale

$$\mathcal{H} \cong \mathcal{H}^{**}$$

In generale, lo spazio normato $X^{**} = \mathcal{B}(\mathcal{B}(X,\mathbb{C}),\mathbb{C})$ è sempre di Banach e l'immersione naturale (che ha luogo per X spazio vettoriale qualsiasi)

$$\begin{aligned} X &\hookrightarrow X^{**} \\ x &\longmapsto (f \longmapsto f(x)) \end{aligned}$$

è ovviamente una isometria.

In vista del prossimo esempio enunciamo il[11]

[11] Non dimostreremo questo teorema, perché in seguito ne daremo una versione più generale, dovuta a Markov, che caratterizza i funzionali lineari e continui su $C(X)$ ove X è un qualsiasi spazio di Hausdorff compatto.

6.4.6 Teorema (Riesz) *Un elemento $F \in C([0,1])^*$ è sempre della forma*

$$F(f) = \int_0^1 f(t)dg(t)$$

ove g è una funzione a variazione limitata (integrale di Stieltjes).

6.4.7 Esempio *Lo spazio di Banach $C([0,1])$ delle funzioni continue a valori reali sull'intervallo compatto [0,1] non è riflessivo. Infatti, supponiamo per assurdo che lo sia: allora ogni funzionale lineare definito sullo spazio V delle funzioni a variazione limitata deve essere della forma*

$$\forall F \in C[0,1]^* \quad \varphi_f(F) = F(f)$$

ove $f \in C[0,1]$. Ma usando il teorema di Riesz otteniamo

$$\varphi_f(F) = F(f) = \int_0^1 f(t)dg(t)$$

Consideriamo allora

$$\psi(F) := g(t_0 + 0) - g(t_0 - 0)$$

Si tratta di un funzionale additivo e

$$|\psi(F)| = |g(t_0 + 0) - g(t_0 - 0)| \leq V_0^1(g)$$

Quindi $\psi(F)$ è limitato e di norma ≥ 1. Evidentemente non è il funzionale nullo: basti calcolarlo sulla

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t \leq t_0 \\ 1 & \text{se } t_0 < t \leq 1 \end{cases}$$

Di nuovo per il teorema di Riesz, deve esistere una $f_0 \in C[0,1]$ tale che

$$\psi(f) = \varphi_{f_0}(f) = \int_0^1 f_0(t)dg(t)$$

Se ora consideriamo la funzione

$$F_0(t) = \int_0^t f_0(\tau)d\tau$$

dato che è continua si ha $\varphi_{f_0}(F_0) = 0$. Ma da $\psi(F) \neq 0$ segue $f_0 \neq 0$ e

$$\Phi_{f_0}(F_0) = \int_0^1 f_0(t)df_0(t) = \int_0^1 f_0^2(t)dt > 0$$

Questo assurdo dimostra che non ogni funzionale su $C[0,1]^*$ è della forma Φ_F e quindi che $C[0,1]$ non è riflessivo.

Esempi di spazi riflessivi sono gli $L^p(X,\mu)$ per $1 < p < \infty$. Di nuovo il risultato fondamentale è dovuto a Riesz:

6.4.8 Teorema (RIESZ) *Se F è un funzionale lineare continuo su $L^p(X,\mu)$ con $1 \le p < \infty$ e μ misura σ-finita, allora esiste un unico $g \in L^q(X,\mu)$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ tale che*

$$F(f)=\int_X fg d\mu$$

e tale che $||F|| = ||g||_q$.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo prima il caso di misure finite. Allora ogni funzione misurabile limitata sta in L^p e possiamo definire una funzione definita sui sottoinsiemi misurabili di X come

$$\nu E := F(\chi_E)$$

Se E è unione numerabile degli insiemi misurabili e disgiunti $\{E_n\}$, poniamo $\alpha_n = \operatorname{sgn} F(\chi_E)$ e $f = \sum \alpha_n \chi_{E_n}$. Allora, dato che F è limitato:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\nu E_n| = F(f) < \infty$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu E_n = F(\chi_E) = \nu E$$

Quindi ν è una misura con segno che, per definizione, è assolutamente continua rispetto a μ: allora per il teorema di Radon–Nikodym, esiste una funzione misurabile g tale che, per ogni insieme misurabile, E si abbia

$$\nu E = \int_E g d\mu$$

Ma ν è finita e quindi g integrabile.

Ora dimostriamo che g soddisfa la relazione dell'enunciato. Prima verifichiamolo sulle funzioni semplici: se φ è semplice, per linearità si ha

$$F(\varphi) = \int_X \varphi g d\mu$$

Ma il $|F(\varphi)| \le ||F||\ ||\varphi||_p$ e, se $\{\psi_n\}$ è una successione crescente di funzioni semplici non negative che tende a $|g|^q$, per $\varphi_n = \psi_n^{1/p} \operatorname{sgn} g$ si ha

$$\begin{aligned}\int \psi_n \le \int \varphi_n g &\le ||F||\ ||\varphi_n||_p \\ &\le ||F|| \left(\int \psi_n\right)^{1/p}\end{aligned}$$

i.e. $\int \psi_n \leq ||F||^q$ e, per il teorema della convergenza monotona:

$$\int |g|^q d\mu \leq ||F||^q$$

e quindi $g \in L^q$.

Ora se G è un funzionale lineare limitato che si annulla sul sottospazio delle funzioni semplici, per densità di queste in L^P, deve aversi $F = G$, i.e. per ogni $f \in L^p$:

$$F(f) = \int_X fgd\mu$$

Che sia $||F|| = ||G|| = ||g||_q$ è ovvio.

Passiamo ora al caso σ-finito: sia $\{X_n\}$ una successione crescente di spazi misurabili di misura finita la cui unione sia X. Per il risultato nel caso di misura finita, per ogni n esiste una funzione $g_n \in L^q$ che si annulla fuori da X_n e tale che

$$\forall f \in L^p(X_n) \quad F(f) = \int_X fg_n d\mu$$

Inoltre, $||g_n||_q \leq ||F||$ e dato che ogni g_n con questa proprietà è unica su X_n (a meno di insiemi di misura nulla) possiamo assumere che su X_n sia $g_n = g_{n+1} = ...$ (essendo $X_n \subset X_{n+1}$).

Così possiamo porre $g(x) = g_n(x)$ se $x \in X_n$ ed ottenere una funzione misurabile ben definita tale che $\{|g_n\}$ tenda a $|g|$. Quindi per il teorema ella convergenza monotona:

$$\int |g|^q d\mu = \lim \int |g_n|^q d\mu \leq ||F||^q$$

i.e. $g \in L^q$. Infine, da $f \in L^p$ e f_n è definita essere uguale a f su X_n e zero fuori da X_n allora $f_n \longrightarrow f$ in L^p, e dato che $|fg|$ è integrabile e $|f_n g| \leq |fg|$ per il teorema della convergenza dominata:

$$\int fgd\mu = \lim \int f_n gd\mu = \lim \int f_n g_n d\mu = \lim F(f_n) = F(f)$$

QED

Questo dimostra la riflessività di $L^p(X, \mu)$ per $1 < p < \infty$: nel caso $p = 1$ possiamo dire che $(L^1(x, \mu)^* = L^\infty(X, \mu)$ ma non abbiamo la riflessività: lo dimostreremo nel prossimo paragrafo dopo aver discusso il teorema di Hahn–Banach.

Osserviamo inoltre che la riflessività degli L^p implica che siano spazi di Banach, dato che li presenta come duali di spazi normati.

Nei casi generali, sui funzionali lineari, partendo solo dalla definizione, sappiamo molto poco: in realtà non è chiara nemmeno la loro esistenza, in uno spazio normato qualsiasi. Un principio fondamentale che è indispensabile al loro studio è il teorema di Hahn–Banach, sul quale faremo una digressione nel prossimo paragrafo.

6.5 I tre principi di Banach

Trattando con spazi di dimensione infinita, seppure normati, molti fatti che, in dimensione finita sono evidenti o facilmente verificabili usando le coordinate, risultano ardui da dimostrare e talvolta cessano di essere validi. Per procedere nella teoria, classicamente si enunciano tre principi, dovuti a S. Banach, che costituiscono gli strumenti più indispensabili per uno studio più approfondito degli spazi di Banach.

Il primo di questi principi ha validità estremamente generale, e per enunciarlo ci occorre una definizione, peraltro interessante di per sé.

6.5.1 Definizione *Una* seminorma *su uno spazio vettoriale reale X è una funzione $p : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tale che*

- $\forall x, y \in X \quad p(x + y) \le p(x) + p(y)$.

- $\forall x \in X \ \forall a \ge 0 \quad p(ax) = ap(x)$.

Osserviamo che la (2) implica che $p(0) = 0$.

Ad esempio, ogni norma $|| - ||$ su uno spazio vettoriale è una seminorma. Precisamente, una seminorma p è una norma se e solo se per ogni $x \in X \setminus (0)$ $p(x)$ è un numero reale non nullo.

6.5.2 Esempio *Se B è un sottoinsieme di X, il suo* funzionale di Minkowski *è la seminorma*

$$p_B(x) := \inf_{\substack{a>0 \\ x\in aB}} a$$

(se $x \notin aB$ poniamo $p_B(x) := \infty$).

6.5.3 Lemma *Se B è un insieme convesso ed equilibrato*[12]*, allora p_B è una seminorma, e viceversa, se p è una seminorma, l'insieme $B_p := \{x \in X \mid p(x) \le 1\}$ è convesso ed equilibrato.*

[12]Cioè per ogni $a \in \mathbb{R}$ con $|a| \le 1$ si ha che se $x \in U$ anche $ax \in U$.

Dimostrazione: La (2) nella definizione di seminorma è ovviamente verificata. Resta solo da dimostrare la (1): per questo useremo la convessità.

Siano $x, y \in X$; se $p_B(x)$ o $p_B(y)$ sono ∞ non c'è nulla da dimostrare. Se $p_B(x) = 0$ allora per ogni $a > 1$ $ax \in B$ e quindi se $y \in B$ allora

$$\forall \varepsilon \in (0,1) \quad (1-\varepsilon)y + x(1-\varepsilon)y + \varepsilon\frac{y}{\varepsilon} \in B$$

e dunque la $p_B(y) < 1$ implica che $p_B((1-\varepsilon)y + x) \leq 1$ e quindi la (1).

Resta solo il caso in cui sia $p_B(x)$ che $p_B(y)$ sono diversi da zero. Allora prendiamo gli elementi di X:

$$x_\varepsilon := \frac{1-\varepsilon}{p_B(x)}x \quad \text{e} \quad y_\varepsilon := \frac{1-\varepsilon}{p_B(y)}$$

Per definizione di p_b si ha che $x_\varepsilon, y_\varepsilon \in B$ se $\varepsilon > 0$. Ma B è convesso e quindi

$$\forall t \in [0,1] \quad tx_\varepsilon + (1-t)y_\varepsilon \in B$$

Per $t = \frac{p_B(x)}{p_B(x)+p_B(y)}$ si ha

$$\frac{1-\varepsilon}{p_B(x) + p_b(y)}(x+y) \in B$$

Quindi

$$p_B(x+y) \leq \frac{p_B(x) + p_B(y)}{1-\varepsilon}$$

per $\varepsilon > 0$, da cui segue la (1).

Così abbiamo dimostrato la prima asserzione; il viceversa è ovvio.

QED

6.5.4 Teorema (Hahn–Banach) *Se p è una seminorma su uno spazio vettoriale reale X e f un funzionale lineare definito su un sottospazio S di X tale che*

$$\forall s \in S \quad f(s) \leq p(s)$$

allora esiste un funzionale lineare $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

- $\forall x \in X \quad F(x) \leq p(x)$.
- $\forall s \in S \quad F(s) = f(s)$.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo l'insieme $\mathcal{F}$ dei funzionali lineari g definiti su un sottospazio di X e tali che, per ogni punto x ove g sia definito, si abbia $g(x) \leq p(x)$. L'insieme $\mathcal{F}$ è parzialmente ordinato dalla relazione

$$g < g' \iff g' \text{ estende } g$$

i.e. se e solo se il dominio di definizione di g' contiene quello di g e sul dominio di definizione di g si abbia $g = g'$.

Osserviamo intanto che $\mathcal{F} \neq \emptyset$ dato che certamente $f \in \mathcal{F}$. Inoltre l'insieme ordinato $(\mathcal{F}, <)$ soddisfa alle ipotesi del lemma di Zorn, dato che se $\{f_\alpha\}$ è un sottoinsieme totalmente ordinato di $\mathcal{F}$, la funzione $\bigcup_\alpha f_\alpha$ (che ristretta al dominio si f_α coincide per definizione con f_α per ogni α) è evidentemente un confine superiore per l'insieme $\{f_\alpha\}$.

Quindi l'insieme $\mathcal{F}$ ha un massimale F. Sia L il sottoinsieme di X sul quale F è definito. Per dimostrare il teorema basta dunque far vedere che F è definito per su tutto X, i.e. che $L = X$. Supponiamo allora che esista un $x \in X \setminus L$. Dimostreremo allora che, sullo spazio vettoriale $L \oplus x\mathbb{R}$, è possibile costruire una estensione del funzionale F contraddicendone così la massimalità. Una tale estensione F' di F dovrebbe soddisfare l'equazione

$$F'(l + ax) := F(l) + aF(x)$$

Dunque per determinarlo basta dire quanto vale sull'elemento x.

Per $l, l' \in L$ abbiamo:

$$F(l) + F(l') = f(l + l') \leq p(l + l') \leq p(l - x) + p(x - l')$$

Dunque

$$-p(l - x) + F(l) \leq p(l' + x) - F(l')$$

sicché

$$\sup_{l \in L} (-p(l - x) + F(l)) \leq \inf_{l \in L} (p(l + x) - F(l))$$

Definiamo allora $F'(x) = a$ ove a è un numero reale tale che

$$\sup_{l \in L} (-p(l - x) + F(l)) \leq a \leq \inf_{l \in L} (p(l + x) - F(l))$$

Dobbiamo a questo punto solo dimostrare che, se $b \in \mathbb{R}$

$$F'(l + bx) = ba + F(l) \leq p(l + bx)$$

Ma, per $b > 0$:

$$\begin{aligned} ab + F(l) &= b(a + F(l/b)) \leq b(((p(l/b + x) - F(l/b)) + F(l/b) \\ &= bp(l/b + x) = p(l + bx) \end{aligned}$$

mentre per $b = -c < 0$:

$$-ac + F(l) = c(-a + F(l/c)) \leq c((p(l/c - x) - F(l/c)) + F(l/c))$$
$$= cp(l/c - x) = p(l - cx)$$

e quindi $F'(l + ax) \leq p(l + ax)$, contro la massimalità di F.

QED

Questo risultato è estremamente potente: ad esempio ci dice che ogni spazio normato ha "abbastanza funzionali lineari per separare i suoi punti":

6.5.5 Corollario *Se $x, y \in X$ sono punti distinti allora esiste un funzionale f tale che $f(x) \neq f(y)$.*

Dimostrazione: Infatti, dato che $x \neq y$, esiste un intorno U dello zero in X che non contiene $x - y$. Possiamo supporre che questo intorno sia convesso ed equilibrato e quindi, per il lemma, il suo funzionale di Minkowski p_U è una seminorma. Ora applichiamo il teorema di Hahn–Banach al funzionale f definito sul sottospazio $(x - y)\mathbb{R}$ come $f(x - y) = 1$. Allora esiste un funzionale F su X tale che $f(x) - f(y) = 1$ e $|f(x)| \leq p_U(x)$.

QED

6.5.6 Corollario *Se $x \in X$ spazio normato allora esiste un funzionale lineare f su X tale che*

$$f(x) = ||f||\ ||x||$$

Dimostrazione: Definiamo su $x\mathbb{R}$ il funzionale $f(cx) = c||x||$. Per il teorema di Hahn–Banach (applicato alla seminorma $p = || - ||$) esiste una estensione di f a X in modo che $f(y) \leq ||y||$. Ma si ha pure $f(-y) \leq ||y||$ i.e. $||f|| \leq 1$. Inoltre $f(x) = ||x|| \leq ||f||\ ||x||$ e quindi $||f|| = 1$ e $f(x) = ||f||\ ||x||$.

QED

6.5.7 Esempio *Possiamo ora dimostrare quanto avevamo promesso in precedenza parlando della dualità negli spazi $L^p[0,1]$, e cioè che il duale di $L^\infty[0,1]$ non è isomorfo a $L^1[0,1]$; in particolare non possiamo rappresentare, come avviene nel caso $1 < p < \infty$, un funzionale lineare su L^∞ per mezzo di elementi di L^1: l'idea è che le funzioni continue $C[0,1]$ sono un sottospazio chiuso di $L^\infty[0,1]$ e che se f è il funzionale lineare su $C[0,1]$ che al punto $x \in C[0,1]$ assegna il numero $x(0)$, questo funzionale ha norma 1 e possiamo estenderlo ad un funzionale limitato F su tutto $L^\infty[0,1]$. Ma non esiste alcun $y \in L^1[0,1]$ tale che*

$$\forall x \in C[0,1] \quad F(x) = \int_0^1 xydt$$

Infatti se $\{x_n\}$ *è una successione in* $C[0,1]$ *di funzioni limitate da 1 e tali che* $x_n(o) = 1$ *e per ogni* $t \neq 0$ $x_n(t) \longrightarrow 0$*, allora per ogni* $y \in L^1[0,1]$ *si ha che*

$$\int_0^1 x_n y \longrightarrow 0$$

mentre $F(x_n) \longrightarrow 1$.

Tornando al concetto generale di riflessività, è semplice ora dimostrare come l'immersione $j : X \longrightarrow X^{**}$ che all'elemento x associa il funzionale su X^*: $f \longmapsto f(x)$ sia in realtà una isometria:

$$||j(x)|| = \sup_{||f||=1} |j(x)(f)| \geq ||x|| \geq ||j(x)||$$

Osserviamo, a proposito del concetti di riflessività di uno spazio normato X, che X può essere isometrico con X^{**} senza essere tuttavia riflessivo, cioè senza che la mappa canonica $j : X \longrightarrow X^{**}$ sia un isomorfismo isometrico.

Concludiamo la discussione del teorema di Hahn–Banach osservando che ne esiste una versione per spazi vettoriali complessi, che poggia su quella reale: in questo caso una seminorma è una funzione $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

- $\forall x, y \in X \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.
- $\forall x \in X \ \forall a \in \mathbb{C} \quad p(ax) = |a|p(x)$.

6.5.8 Teorema (HAHN–BANACH COMPLESSO) *Se* p *è una seminorma su uno spazio vettoriale complesso* X *e* f *un funzionale lineare definito su un sottospazio* S *di* X *tale che*

$$\forall s \in S \quad |f(s)| \leq p(s)$$

allora esiste un funzionale lineare $F : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *tale che*

- $\forall x \in X \quad |F(x)| \leq p(x)$.
- $\forall s \in S \quad F(s) = f(s)$.

DIMOSTRAZIONE: Vogliamo usare il teorema di Hahn–Banach reale, e possiamo farlo osservando che uno spazio vettoriale complesso è anche uno spazio vettoriale reale, nel quale semplicemente si ignora la moltiplicazione per scalari complessi. Dato che anche $\mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale reale, il funzionale $F : X \longrightarrow \mathbb{C}$ può vedersi come una applicazione lineare fra spazi vettoriali reali. Osserviamo che, viceversa, una applicazione $\mathbb{R}$-lineare $F : X \longrightarrow \mathbb{C}$ è anche un funzionale lineare (complesso) se e solo se per ogni $x \in X$ $F(ix) = iF(x)$.

Ora, il funzionale f definito su S come nelle ipotesi del teorema, dà luogo a due funzionali reali g e h su S, semplicemente ponendo

$$f(x) = g(x) + ih(x)$$

Ma allora, per ogni $s \in S$, $g(s) \leq |f(s)| \leq p(s)$ e così possiamo estendere g ad un funzionale $G : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $G(x) \leq p(x)$. Poniamo

$$F(x) := G(x) - iG(ix)$$

Evidentemente $F(s) = f(s)$ per ogni $s \in S$, e dato che

$$F(ix) = G(ix) - iG(i^2x) = i(G(x) - iG(ix)) = iF(x)$$

F è un funzionale lineare complesso su X.

Infine scegliamo, per ogni $x \in X$, un numero complesso z_x tale che $|z_x| = 1$ e $z_xF(x) = |F(x)$. Allora

$$|F(x)| = z_xF(x) = F(z_xx) = G(z_xx) \leq p(z_xx) = p(x)$$

il che dimostra completamente il teorema.

QED

Il secondo principio che vogliamo esporre vale negli spazi di Banach, ed è il cosiddetto *teorema del grafo chiuso*; per dimostrarlo avremo bisogno di qualche preliminare. Intanto ricordiamo che, in uno spazio normato, la *palla* di centro $x \in X$ e raggio $r \in \mathbb{R}$ è il sottospazio

$$B(r, x) = B_r(x) := \{y \in X \mid ||y - x|| < r\}$$

La palla $B_1(0)$ si dice *palla unitaria* di X.

6.5.9 Lemma *Se $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ è un operatore lineare continuo e suriettivo fra gli spazi di Banach X e Y, allora l'immagine di A della palla unitaria di X contiene una palla di centro l'origine di Y.*

DIMOSTRAZIONE: Siano

$$S_n := \{x \mid ||x|| < \frac{1}{2^n}\}$$

Dato che A è suriettivo, e che, come spazio metrico, $X = \bigcup_{k \geq 1} kS_1$, si ha che

$$Y = \bigcup_{k \geq 1} kA(S_1)$$

Ora usiamo il fatto che lo spazio completo Y non è di prima categoria, e quindi che $A(S_1)$ non può essere mai denso, sicché $\overline{A(S_1)}$ deve contenere qualche palla, ad esempio la

$$B_\eta(z) = \{y \mid ||y - z|| < \eta\}$$

Quindi $\overline{A(S_1)} - z$ deve contenere la palla $B_\eta(0)$. Ma

$$\overline{A(S_1)} - z \subset \overline{A(S_1)} - \overline{A(S_1)} \subset 2\overline{A(S_1)} = \overline{A(S_0)}$$

e quindi $\overline{A(S_0)}$ contiene una palla di centro l'origine e raggio η. Ma A è lineare, sicché $\overline{A(S_n)}$ contiene una palla di centro 0 e raggio $\eta/2^n$.

Ora dimostriamo che $A(S_0)$ contiene una palla di centro l'origine e raggio $\eta/2$: sia $y \in Y$ con $||y|| < \eta/2$. Dato che $y \in \overline{A(S_1)}$ possiamo scegliere $x_1 \in S_1$ tale che

$$||y - A(x_1)|| < \frac{\eta}{4}$$

e, proseguendo, un $x_2 \in S_2$ tale che

$$||y - A(x_1) - A(x_2)|| < \frac{\eta}{8}$$

è così via (usando l'assioma di scelta) per ogni $n \in \mathbb{N}$; il generico $x_n \in S_n$ è tale che

$$\Big|\Big|y - \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\Big|\Big| < \frac{\eta}{2^{n+1}}$$

Ma $||x_n|| < 1/2^n$ e quindi la serie $\sum_k x_k$ converge assolutamente[13] ad un elemento $x \in S_0$. Inoltre

$$Ax = A\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} A(x_k) = y$$

da cui $y \in A(S_0)$ e quindi $B_{\frac{\eta}{2}}(0) \subset A(S_0)$.

QED

6.5.10 Teorema della mappa aperta (BANACH) *Un operatore lineare continuo e suriettivo $A : X \longrightarrow Y$ fra spazi di Banach è necessariamente aperto, come mappa fra spazi topologici. In particolare, se A è biunivoco allora è un isomorfismo di spazi di Banach.*

[13]Evidentemente in uno spazio normato la convergenza di una serie si definisce in termini della convergenza della successione delle ridotte.

DIMOSTRAZIONE: Sia S un aperto si X e $y \in A(S)$. Allora esiste $x \in S$ tale che $y = Ax$ per suriettività di A, e, dato che S è aperto, deve contenere una palla di centro x. Ma allora, per il lemma, $A(S - x)$ deve contenere una palla di centro l'origine, i.e. $A(S)$ deve contenere una palla di centro y.

Così, per ogni $y \in A(S)$ abbiamo esibito una palla di centro y completamente contenuta in $A(S)$, che risulta dunque essere aperto.

Ne segue che la controimmagine per tramite dell'operatore A di un aperto di Y è un aperto di X.

QED

6.5.11 Corollario *Se X è uno spazio vettoriale e $||-||_1$, $||-||_2$ sono norme per le quali X è di Banach, e se esiste una costante C tale che*

$$\forall x \in X \quad ||x||_1 \le C||x||_2$$

allora le norme sono equivalenti, i.e. esiste un'altra costante C' tale che

$$\forall x \in X \quad ||x||_2 \le C'||x||_1$$

DIMOSTRAZIONE: La mappa identità fra gli spazi di Banach $(X, ||-||_1)$ e $(X, ||-||_2)$ è lineare, continua e biunivoca, quindi un isomorfismo, i.e. la sua inversa pure è continua.

QED

6.5.12 Teorema del grafo chiuso (BANACH) *Supponiamo che $A : X \longrightarrow Y$ sia un operatore lineare fra gli spazi di Banach X e Y, che goda della seguente proprietà: se per ogni successione $\{x_n\} \subset X$ convergente ad un $x \in X$ e la successione $\{Ax_n\} \subset Y$ converge ad un punto $y \in Y$ allora $y = Ax$. Allora A è continuo.*

DIMOSTRAZIONE: Definiamo in X una norma

$$||x||_1 := ||x|| + ||Ax||$$

Dimostriamo che lo spazio X è completo anche per la norma $||-||_1$: se $||x_n - x_m||_1 \longrightarrow 0$ allora $||x_n - x_m|| \longrightarrow 0$ e $||Ax_n - Ax_m|| \longrightarrow 0$; dunque ($X$ e Y sono completi) esistono $x \in X$ e $y \in Y$ tali che $||x_n - x|| \longrightarrow 0$ e $||Ax_n - y|| \longrightarrow 0$. Ma l'operatore A soddisfa la proprietà enunciata nell'ipotesi del teorema, sicché $y = Ax$, il che vuol dire $||x_n - x||_2 \longrightarrow 0$. Quindi X è completo per la norma $||-||_2$.

Ora possiamo applicare il corollario del teorema della mappa aperta alle norme $||-||$ e $||-||_1$ ottenendone l'equivalenza:

$$\exists C \quad ||x|| + ||Ax|| \le C||x||$$

Dunque A è limitato.

QED

Se $A : X \longrightarrow Y$ è una applicazione, il suo *grafo* è l'insieme $\{(x, Ax)\}_{x\in X} \subset X \times Y$. Allora l'ipotesi del teorema precedente equivale a dire che il grafo di A è chiuso in $X \times Y$.

Il terzo pilastro sul quale poggia la teoria degli spazi di Banach è il *principio di uniforme limitatezza*, che segue dalla teoria della categoria negli spazi metrici. Per dimostrarlo utilizziamo un principio analogo di natura puramente topologica:

6.5.13 Lemma *Se $\mathcal{F}$ è una famiglia di funzioni continue reali definite su uno spazio metrico X, tale che, per ogni $x \in X$ esista una costante M_x in modo che*

$$\forall f \in \mathcal{F} \quad |f(x)| \leq M_x$$

allora esistono un aperto non vuoto $S \subset X$ ed una costante M tali che

$$\forall f \in \mathcal{F} \forall s \in S \quad |f(s)| \leq M$$

DIMOSTRAZIONE: Sia, per ogni $m \in \mathbb{N}$:

$$E_f^m := \{x \,|\, |f(x)| \leq m\}$$

e poniamo

$$E^m := \bigcap_{f\in\mathcal{F}} E_f^m$$

Per continuità di f ciascun E_f^m è chiuso e dunque anche E^m lo è. Per conseguenza esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che $x \in E^m$, i.e.

$$X = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E^m$$

Ma X è uno spazio metrico completo, e quindi, per il teorema di Baire, deve esistere un m per il quale E^m non sia mai denso. Dato che questo E^m è chiuso, deve contenere qualche palla S, e, per ogni $s \in S$ deve aversi

$$\forall f \in \mathcal{F} \quad |f(s)| \leq m$$

QED

6.5.14 Teorema di Uniforme Limitatezza (Banach–Steinhaus) *Se X è uno spazio di Banach, Y uno spazio normato e $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(X, Y)$ una famiglia di operatori lineari limitati da X in Y tale che, per ogni $x \in X$ esista una costante M_x tale che*

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad ||Ax|| \leq M_x$$

Allora gli operatori di $\mathcal{F}$ sono uniformemente limitati, cioè esiste una costante M tale che

$$\forall f \in \mathcal{F} \quad ||A|| \leq M$$

Dimostrazione: Per ogni $A \in \mathcal{F}$, la funzione

$$f(x) := ||Ax||$$

è continua su X e dato che la famiglia di queste funzioni (al variare di $A \in \mathcal{F}$) soddisfa le ipotesi del teorema precedente e X è completo, ne segue che esistono un aperto $S \subset X$ ed una costante M tali che

$$\forall s \in S \quad ||As|| \leq M$$

Sia ora $y \in S$. Dato che S è aperto, esiste una palla $B_\delta(y)$ contenuta in S; se $||z|| \leq \delta$ allora $Az = A(z + y) - Ay$ con $z + y \in B_\delta(y) \subset S$ e quindi

$$||Az|| \leq ||A(z + y)|| + ||Ay|| \leq M + M_y$$

in modo che

$$\forall f \in \mathcal{F} \quad ||A|| \leq \frac{M + M_y}{\delta}$$

QED