Cenni di Analisi Complessa

Paolo Caressa

Raccolgo qui alcuni richiami sulle nozioni essenziali di Analisi Complessa in una variabile, stabilendo solo i teoremi fondamentali e non nella loro massima generalità, e senza usare nozioni topologiche in modo essenziale.

1 Funzioni e integrali complessi

Definizione 1.1 *Una funzione $f : U \to \mathbb{C}$ definita in un aperto U del piano complesso si dice* olomorfa *nel punto $z_0 \in U$ se esiste finito il limite*

$$f'(z_0) := \lim_{|\delta z| \to 0} \frac{f(z_0 + \delta z) - f(z_0)}{\delta z}$$

Scriviamo

$$f(z) = u(z) + iv(z)$$

($u = Re\,(f)$ e $v = Im\,(f)$), osservando le che funzioni u e v dipendono dalle variabili reale x e y tali che $z = x + iy$. Allora possiamo dare la seguente caratterizzazione:

Teorema (Cauchy–Riemann) **1.2** *Una funzione $f : U \to \mathbb{C}$ è olomorfa in z_0 se e solo se*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad e \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Dimostrazione: Consideriamo il limite che definisce l'olomorfia di f e, scrivendo $z = x + iy$, poniamo $\delta z = \delta x$ (il limite dipende solo dal fatto che il modulo di δz tende a zero, indipendentemente dall'argomento):

$$f'(z_0) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\delta x} + i \lim_{\delta x \to 0} \frac{v(x_0 + \delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\delta x}$$

Quindi se f è olomorfa in z_0 le derivate parziali di u e v rispetto a x esistono e $f' = u_x + iu_y$ (indichiamo le derivate parziali con un indice che denota la variabile rispetto alla quale si deriva).

Analogamente, per $\delta z = i\delta y$:

$$f'(z_0) = -iu_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0)$$

Confrontando le due espressioni di $f'(z_0)$ così ottenute, abbiamo el equazioni di Cauchy–Riemann nel punto z_0.

Viceversa, supponiamo che le u e v ammettano derivate parziali rispetto alle x e y e che valgano le relazioni di Cauchy–Riemann: allora,

$$\begin{aligned}
u(x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0) - u(x_0, y_0) &= \\
&= u_x(x_0, y_0)\delta x + u_y((x_0, y_0)\delta y + o((\delta x)^2 + (\delta y)^2) \\
v(x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0) - v(x_0, y_0) &= \\
&= v_x(x_0, y_0)\delta x + v_y((x_0, y_0)\delta y + o((\delta x)^2 + (\delta y)^2)
\end{aligned}$$

Quindi, per $\delta z = \delta x + i\delta y$ e le relazioni di Cauchy–Riemann:

$$\begin{aligned}
\frac{f(z_0 + \delta z) - f(z_0)}{\delta z} &= u_x(x_0, y_0)\frac{\delta x + i\delta y}{\delta x + i\delta y} + v_x(x_0, y_0)\frac{i\delta x - \delta y}{\delta x + i\delta y} + \\
&\qquad + \frac{o((\delta x)^2 + (\delta y)^2)}{\delta x + i\delta y} \\
&= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) + \frac{o((\delta x)^2 + (\delta y)^2)}{\delta z}
\end{aligned}$$

e quindi la funzione f è olomorfa in z_0.

QED

Esempio 1.3 *Sono olomorfe: le funzioni lineari (complesse), le funzioni razionali complesse e la funzione $f(z) = \exp z$, mentre* non è *olomorfa la funzione $g(z) = |z|^2$.*

Ci limiteremo qui a considerare come insiemi di definizione delle funzioni olomorfe i *domini regolari U* cioè gli aperti connessi del piano complesso la cui frontiera sia una curva regolare (non necessariamente connessa, cioè i nostri domini potranno avere dei "buchi"). Il numero di componenti connesse della curva ∂U si dice *ordine di connessione del dominio*[1]: se la curva che delimita il dominio è connessa (e quindi il dominio non ha "buchi"), è semplicemente connesso.

[1] Si tratta del primo numero di Betti di U incrementato di uno.

Evidentemente se Γ è una curva regolare nel piano complesso è chiaro cosa debba intendersi con

$$\int_\Gamma f(z)dz$$

per una funzione $f : \Gamma \to \mathbb{C}$: l'integrale si calcola infatti per mezzo di una qualsiasi rappresentazione parametrica $c = c(t)$ (con $c : [a, b] \to \mathbb{C}$ continua e regolare) della curva Γ:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b f(c(t))c'(t)dt$$

Esempio 1.4 *Vogliamo calcolare l'integrale*

$$\int_{\Gamma_\rho} \frac{dz}{z - z_0}$$

ove Γ_ρ è il cerchio di centro z_0 e raggio ρ. Rappresentando la curva in coordinate polari per mezzo della funzione $c(t) = z_0 + e^{it}$, troviamo:

$$\int_{\Gamma_\rho} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}dt}{\rho e^{it}} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

Una ipotesi che faremo spesso è che $f : U \to \mathbb{C}$ sia una funzione olomorfa in U e continua in $\overline{U}$: esprimeremo questa ipotesi con la notazione $f \in \mathcal{O}(\overline{U})$.

Teorema di Cauchy 1.5 *Se $f \in \mathcal{O}(\overline{U})$ nel dominio semplicemente connesso U e se derivata $f' : U \to \mathbb{C}$ continua, allora per ogni curva chiusa Γ contenuta in U:*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

Dimostrazione: Per definizione:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma (udx - vdy) + i\int_\Gamma (udy + vdx)$$

(diamo per nota la teoria elementare delle forme differenziali nel piano ed il teorema di Gauss–Green) ove, per ipotesi e per il teorema precedente, le u e v sono parzialmente derivabili dunque, per il teorema di Gauss–Green (la curva regolare connessa Γ è la frontiera di un dominio semplicemente connesso $\mathfrak{G}$ del piano)

$$\int_\Gamma f(z)dz = \iint_{\mathfrak{G}} (-v_x - u_y)dxdy + i\iint_{\mathfrak{G}} (u_x - v_y)dxdy$$

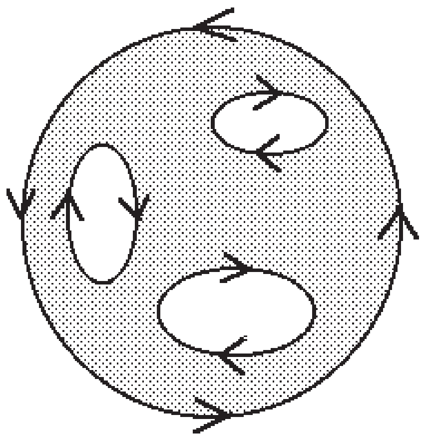
Ma questi integrali sono zero per le relazioni di Cauchy–Riemann. QED

Il caso realmente interessante è quando $\Gamma = \partial U$.

Osserviamo che, dalla definizione e dalla sua caratterizzazione, non discende immediatamente la continuità della derivata di una funzione olomorfa: abbiamo dunque dovuto supporla nelle ipotesi del teorema di Cauchy[2].

Il teorema di Cauchy può estendersi ad un dominio non semplicemente connesso, osservando che un tale dominio può sempre rendersi semplicemente connesso a meno di effettuarne dei tagli[3]:

Supponiamo cioè che U sia delimitato da una curva Γ con $n+1$ componenti connesse $\Gamma_0, ..., \Gamma_n$ (quattro nella figura) e consideriamo dei segmenti che uniscano le componenti "interne" al dominio con la componente "esterna"[4]. Se $\gamma_1, ..., \gamma_n$ sono questi segmenti, il dominio che si ottiene dopo il taglio è semplicemente connesso e ha come frontiera $\Gamma \cup \gamma_1 \cup ... \cup \gamma_n$.



Allora il teorema di Cauchy applicato a questo nuovo dominio implica che (tenendo conto delle diverse orientazioni fra le componenti "interne" e quelle "esterne" della curva Γ, e del fatto che i segmenti $\gamma_1, ..., \gamma_n$ sono presenti due volte e con segni opposti nell'integrazione):

$$\sum_{i=1}^{n+1} \int_{\Gamma_i} f(z)dz = \int_{\Gamma_0} f(z)dz$$

[2]In realtà, questa supposizione è superflua, come dimostrato da Goursat nel 1904; si rimanda, per questa versione più generale del teorema di Cauchy (che infatti ne rivela la natura topologica) ai testi specialistici.

[3]Precisamente il numero di tagli che bisogna effettuare per renderlo semplicemente connesso è pari al primo numero di Betti del dominio stesso.

[4]Dovrebbe essere chiaro al lettore come rendere rigoroso questo ragionamento intuitivo.

il che si esprime (tenendo conto che l'orientazione su Γ_0 è opposta a quella delle restanti componenti connesse) ancora come

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

Teorema (Formula di Cauchy) **1.6** *Se $f \in \mathcal{O}(\overline{U})$ nel dominio regolare semplicemente connesso U allora, per ogni $z_0 \in U$:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

Dimostrazione: Consideriamo un disco $D_r = \{z \mid |z - z_0| < \rho\}$ di centro z_0 e completamente contenuto in U (ciò è possibile perché U è aperto. Allora la funzione

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$$

è olomorfa in $U \setminus \{z_0\}$ (che non è un dominio regolare, dato che una componente connessa della sua frontiera si riduce al solo punto $\{z_0\}$), e quindi è pure olomorfa in $U \setminus \overline{D_r}$ che è un dominio regolare (non semplicemente connesso, ma tale che il suo bordo sia $\partial U \cup \partial D_r$): allora per il teorema di Cauchy in questo dominio:

$$\int_{\partial U} \varphi(z)dz = \int_{\partial D_r} \varphi(z)dz$$

Questo vale per ogni scelta di r tale che $D_r \subset U$: quindi l'integrale a primo membro non dipende da r: in particolare la relazione precedente vale per $r \to 0$ e quindi, dato che un elemento sul bordo $\partial D_r = \{z \mid |z - z_0| = r\}$ si scrive come $z = z_0 + re^{it}$ al variare di $t \in [0, 2\pi)$, otteniamo

$$\int_{\partial U} \varphi(z)dz = \lim_{r\to 0}\int_{\partial D_r} \varphi(z)dz = \lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}}re^{it}dt = 2\pi i f(z_0)$$

QED

Il teorema precedente, del pari del teorema di Cauchy, vale per un dominio regolare qualsiasi, anche non semplicemente connesso.

Se il dominio U è un disco aperto di centro z_0 e raggio r evidentemente la formula di Cauchy diviene

Teorema (FORMULA DEL VALOR MEDIO) **1.7**

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|z-z_0|=r} f(z_0 + re^{it})dt$$

Dunque i valori di una funzione olomorfa all'interno di un disco sono determinati dai valori che assume sul bordo: esaminando ulteriormente questo fenomeno giungeremo al principio del massimo per funzioni olomorfe.

2 Sviluppi in serie di potenze

Le funzioni olomorfe sono talvolta chiamate *analitiche*: questo perché possiamo confonderle con le funzioni sviluppabili in serie di potenze.

Definizione 2.1 *Una* serie di potenze *è una serie della forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

con $c_n \in \mathbb{C}$ costanti, $z_0 \in \mathbb{C}$ e z variabile complessa.

Ricordiamo[5] che una serie di funzioni si dice *uniformemente convergente* in un dominio U se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un n_ε tale che per ogni $n \geq n_\varepsilon$ si abbia:

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z) \right| < \varepsilon$$

e che una condizione necessaria per la convergenza uniforme è la possibilità di maggiorare i termini della serie di funzioni con quelli di una serie numerica assolutamente convergente (criterio di Weierstrass).

In generale sarà interessante stabilire il dominio di convergenza uniforme di una serie di potenze:

Definizione 2.2 *Il* raggio di convergenza *di una serie di potenze è il valore ρ tale che, per ogni disco di centro z_0 e raggio $r < \rho$ la serie converga uniformamente in quel disco e per ogni $r > \rho$ la serie non converga in nessun punto esterno al disco chiuso di centro z_0 e raggio r.*

Definizione 2.3 *Se una serie di potenze converge in un aperto U, la funzione che a $z \in U$ associa il valore della serie in z si dice* analitica*.*

Cioè le funzioni analitiche sono le funzioni definite da serie di potenze convergenti.

[5] Assumiamo la conoscenza della teoria elementare delle serie di funzioni.

Teorema (CAUCHY–HADAMARD) **2.4** *Il raggio di convergenza ρ di una serie di potenze vale*[6]

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}$$

(inverso del massimo limite della successione $|a_n|^{1/n}$.)

DIMOSTRAZIONE: Se $0 < r < \rho$ allora

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} |a_n r^n|^{1/n} = r \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < 1$$

Dunque la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n|$$

converge (per il criterio della radice per serie numeriche), e per ogni z tale che $|z - z_0| < r$:

$$|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n r^n|$$

Così il termine generico della serie di potenze è maggiorato dal termine generico di una serie assolutamente convergente.

Rimane il caso $\rho < \infty$. Consideriamo in questo caso z tale che $|z - z_0| > \rho$ e quindi

$$1 < |z - z_0| \overline{\lim}_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \overline{\lim}_{n\to\infty} |a_n(z - z_0)^n|^{1/n}$$

Quindi il termine generico della serie di potenze non è infinitesimo e, come noto, questo implica che la serie non può convergere.

QED

Esempio 2.5 *Consideriamo la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n$$

(i coefficienti sono tutti 1). Per il criterio del rapporto per la convergenza delle serie numeriche, la serie converge nel cerchio di centro z_0 e raggio 1 a qualche funzione analitica f: allora, per definizione di convergenza di una serie:

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (z - z_0)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - (z - z_0)^n}{q - (z - z_0)} = \frac{1}{1 - (z - z_0)}$$

(per la formula di sommazione di una serie geometrica con un numero finito di addendi).

Il teorema fondamentale sulla convergenza delle serie di potenze è il

[6] Il valore di ρ è in $[0, \infty]$ con la convenzione simbolica che $1/0 = \infty$ e $1/\infty = 0$.

Teorema (ABEL) **2.6** *Se una serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

converge in un punto $z_1 \neq z_0$ *allora converge assolutamente in ogni punto interno al disco di centro* z_0 *e raggio* $|z_1 - z_0|$ *ed in un disco chiuso di centro* z_0 *e raggio* $r < |z_1 - z_0|$ *la serie converge uniformemente.*

DIMOSTRAZIONE: Se z è tale che $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ definiamo $q < 1$ come

$$q = \frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|}$$

Poiché la serie converge in z_1 il suo termine generico è infinitesimo, i.e. esiste una costante M tale che

$$|a_N|\ |z_1 - z_0|^n \leq M$$

e quindi

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\ |z-z_0|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n$$
$$= M\sum_{n=0}^{\infty} |q|^n = \frac{M}{1-q}$$

($q < 1$ e quindi la serie geometrica converge). Questo dimostra la convergenza della serie.

Per vedere l'uniforme convergenza nel disco di centro z_0 e raggio $r < |z_1 - z_0|$ usiamo il criterio di Weierstrass: infatti la serie

$$M\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{|z_1 - z_0|^n}$$

(che ovviamente converge perché è una serie geometrica con $r/|z_1 - z_0| < 1$) maggiora la serie di potenze per costruzione. QED

Nel suo dominio di convergenza, una funzione analitica può integrarsi e derivarsi un numero arbitrario di volte, ottenendo sempre funzioni analitiche nel medesimo dominio. Inoltre i termini generici di una serie di potenze soddisfano in modo ovvio le relazioni di Cauchy–Riemann: quindi

Corollario 2.7 *Una funzione analitica è olomorfa.*

Quello che ci proponiamo di dimostrare è che vale anche il viceversa.

Teorema 2.8 *Una funzione olomorfa è analitica nel suo dominio di olomorfia.*

Dimostrazione: Sia $f : U \to \mathbb{C}$ olomorfa nell'aperto U; se $z_0 \in U$ allroa esiste un disco D_r di centro z_0 e raggio r interamente contenuto in U. Usando la formula integrale di Cauchy ed i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale (usando la teoria di Lebesgue oppure la convergenza uniforme delle serie):

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r}\frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r}\frac{f(w)}{w-z_0-(z-z_0)}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r}\frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\ (z-z_0)^n \end{aligned}$$

Quindi, intorno a z_0 la funzione f è analitica. QED

Lo sviluppo in serie di una funzione analitica è ovviamente unico: i coefficienti dello sviluppo sono

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$$

e devono quindi coincidere con i termini della serie di Taylor della funzione f intorno a z_0:

$$\frac{d^n}{dz^n}f(z_0) = n!a_n$$

Dunque

Teorema 2.9 *Una funzione olomorfa è infinitamente derivabile e*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$$

in un opportuno disco D_r di centro z_0 e raggio r.

Esempio 2.10 *La funzione*

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

è analitica in tutto il piano complesso eccettuati i punti[7] $\pm i$. *Considerando la formula di sommazione di una serie geometrica che abbiamo stabilito in precedenza*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

troviamo che f *che deve quindi essere l'espansione di Taylor in ogni disco del piano complesso che non contenga i punti* $\pm i$.

Applichiamo ora le formule precedenti per calcolare l'espansione di Taylor intorno al punto 1 in un disco di raggio $r = \sqrt{2}$. *Scrivendo*

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$$

ed utilizzando ancora la formula di sommazione della serie geometrica:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\frac{\pi}{4}(n+1)}{2^{(n+1)/2}}(z-1)^n$$

(abbiamo usato le rappresentazioni polari $1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm i\pi/4}$*). Il raggio di convergenza di questa serie è, per la formula di Cauchy–Hadamard,* $\sqrt{2}$.

3 Continuazione Analitica

Il seguente principio è di fondamentale importanza: stabilisce infatti una proprietà determinante delle funzioni olomorfe.

Teorema 3.1 *Se* $f \in \mathcal{O}(\overline{U})$ *nell'aperto connesso* U *allora, se l'insieme degli zeri di* f *contiene un punto di accumulazione,* $f = 0$.

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo per assurdo che esista una successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di zeri di f (i.e. $f(z_n) = 0$) convergente ad uno zero z di f. Intorno a z possiamo scrivere

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w-z)^n$$

[7] Osserviamo che non si tratta di un dominio regolare, ma basta prendere $\mathbb{C}$ a cui si tolgano due dischi chiusi intorno a questi punti per ottenere un dominio regolare.

Consideriamo il più piccolo intero m tale che $a_m \neq 0$. Allora

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n)}{(z_n - z)^m} = \lim_{n\to\infty} (a_m + a - m + 1(z_n - z) + ...) = a_m$$

Questo assurdo dimostra che f deve essere identicamente nulla intorno a z, e quindi l'insieme dei punti di accumulazione dell'insieme degli zeri di f è aperto (osserviamo che questo insieme non è vuoto, perché contiene z e non esaurisce tutto U perché f non è identicamente nulla). Ma questo insieme è anche chiuso, dato che contiene (per definizione) i suoi punti di accumulazione. Quindi U contiene un insieme chiuso e aperto e questo è impossibile, dato che lo si era supposto connesso. QED

Corollario 3.2 *Se $f \in \mathcal{O}(\overline{U})$ in un aperto connesso del piano complesso $\mathbb{C}$ e se $|f|$ è una funzione costante in U allora anche f è costante in U.*

Dimostrazione: Osserviamo che, se $f = u + iv$, per le relazioni di Cauchy–Riemann:

$$\begin{aligned} f'\overline{f} &= (u_x + iv_x)(u - iv) = (uu_x + vv_x) + i(uv_x - vu_x) \\ &= \frac{\partial u^2 + v^2}{\partial x} - i\frac{\partial u^2 + v^2}{\partial y} = \frac{\partial |f|}{\partial x} - i\frac{\partial |f|}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

(infatti $(uv_x - vu_x = -uu_y - vv_y)$). ma il implica che se un prodotto di funzioni olomorfe è nullo, almeno una delle due funzioni deve essere identicamente zero, e quindi $f = 0$ oppure f è costante in U. QED

Corollario (Principio di identità delle funzioni olomorfe) **3.3** *Se $f, g \in \mathcal{O}(\overline{U})$ e se l'insieme dove $f = g$ ha un punto di accumulazione allora $f = g$ su tutto U.*

In particolare, mentre una funzione olomorfa è certamente infinitamente differenziabile, non è detto che una funzione C^∞ sia olomorfa: può benissimo darsi che una funzione infinitamente differenziabile sia, ad esmpio, nulla in un intero intervallo, ma non identicamente nulla in tutto l'insieme di definizione.

Se un insieme A è unione di due insiemi B e C e se sono date due funzioni $f : B \to X$ e $g : C \to X$ tali che $f_{B\cap C} = g|_{B\cap C}$ allora esiste una sola funzione $f \cup G : A \to X$ che ristretta a B e C coincide con f e g. Usando questa ovvia definizione possiamo dare un altro corollario del teorema:

Corollario 3.4 *Se $f_1 \in \mathcal{O}(\overline{U_1})$ e $f_2 \in \mathcal{O}(\overline{U_2})$ e se $f_1|_V = f_2|_V$ ove V è un aperto connesso contenuto in $U_1 \cap U_2$ allora la funzione $f1 \cup f_2$ è univocamente ben definita e analitica.*

L'applicazione di questo corollario per estendere il dominio di definizione di una funzione si dice *continuazione analitica*. Ad esempio, non appena una serie di potenze sia definita sull'asse reale, possiamo estenderla in modo unico ad una funzione olomorfa in un aperto del piano complesso.

Esempio 3.5 *Le classiche funzioni*

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

danno luogo a funzioni olomorfe in opportuni aperti del piano complesso.

Evidentemente, il dominio (connesso) di olomorfia di una funzione può rendersi massimale in virtù del principio di continuazione analitica.

Definizione 3.6 *Una funzione olomorfa si dice* intera *se il suo dominio di olomorfia è l'intero piano complesso $\mathbb{C}$.*

Torniamo ora a considerare funzioni olomorfe ed il loro comportamento al bordo dei dischi chiusi.

Teorema (PRINCIPIO DEL MASSIMO) **3.7** *Se $f \in \mathcal{O}(\overline{U})$ nel dominio regolare U allora la funzione reale $|f|$ (se non è costante) assume il suo valore massimo sul bordo $\partial U = \overline{U} \setminus U$ di U.*

DIMOSTRAZIONE: La funzione reale che stiamo considerando

$$|f(z)| = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)}$$

è continua in $\overline{U}$. Dunque assume un massimo M in qualche punto $z_0 = (x_0, y_0) \in \overline{U}$. Supponiamo per assurdo che $z_0 \in U$ non sia un punto del bordo di U: esiste allora un disco D_r di centro z_0 e raggio r interamente contenuto in U, per il quale la formula del valor medio, ed il fatto che per ogni $z \in U$ $|f(z)| \leq M$, implicano che

$$2\pi M = \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|dt \leq 2\pi M$$

cioè che

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|dt = 2\pi M$$

da cui, per continuità di f in $\overline{U}$ e per la definizione di massimo M:

$$\forall z \quad |z - z_0| = r \Rightarrow |f(z)| = M$$

Quindi f è costante in modulo su in intorno di f e, per continuazione analitica, è costante in tutto U, il che è assurdo. QED

Possiamo ora dimostrarre il teorema che, in un certo senso, inverte il teorema di Cauchy:

Teorema (MORERA) **3.8** *Una funzione continua $f : U \to \mathbb{C}$ definita in un dominio regolare semplicemente connesso tale che, per ogni curva regolare chiusa $\Gamma \subset U$ si abbia*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

è necessariamente olomorfa in U.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo, per $z_0, z \in U$ e per un cammino $\gamma \subset U$ che connetta z_0 e z (i.e. se $\gamma : [a, b] \in U$ allora $\gamma(a) = z_0$ e $\gamma(b) = z$), la funzione

$$F(z) := \int_\gamma f(w)dw$$

Dimostriamo che si tratta di una funzione olomorfa: se scriviamo $f = u + iv$ e $F = U + iV$, allora (per le relazioni di Cauchy–Riemann):

$$U_x = \int_\gamma u_x d\xi - v_x d\eta = \int_\gamma v_y d\xi + u_y d\eta = V_y$$
$$U_y = \int_\gamma u_y d\xi - v_y d\eta = -\int_\gamma v_x d\xi + u_x d\eta = -V_x$$

Quindi F soddisfa alle equazioni di Cauchy–Riemann e dunque è olomorfa. Ovviamente

$$\begin{aligned} F'(z) = U_x(x,y) + iV_x(x,y) &= \int_\gamma u_x d\xi - v_x d\eta + i \int_\gamma v_x d\xi + u_x d\eta \\ &= \int_\gamma f'(z)dw = f(z) \end{aligned}$$

QED

Il teorema si generalizza in modo ovvio a domini non semplicemente connessi.

Teorema (LIOUVILLE) **3.9** *Una funzione intera e limitata (in modulo) è costante.*

DIMOSTRAZIONE: Usiamo la formula di Taylor per la derivata di $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$

(ove D_r è il solito disco di centro z e raggio r). Ora sfruttiamo la limitatezza di $|f|$:

$$|f'(z)| \le \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r} \frac{|f(w)|}{r^2} dw \le \frac{M}{R}$$

Ma r può essere scelto arbitrariamente grande (perché f è intera) e $|f'|$ è indipendente da R: quindi $|f'| = 0$ su tutto il piano complesso, quindi $|f|$ è costante. QED

Ad esempio, la funzione $\sin z$, continuazione analitica della funzione reale $\sin x$ non può essere limitata (come accade nel caso reale), perché ovviamente non è costante.

Una notevole applicazione è la seguente:

Teorema fondamentale dell'Algebra 3.10 *Un polinomio a coefficienti complessi e di grado positivo ammette sempre almeno uno zero.*

DIMOSTRAZIONE: Un polinomio complesso è una funzione della forma

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0$$

Si noti che, per $|z|$ abbastanza grande, possiamo scrivere

$$|p(z)| \ge |z^n| \left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{z^{n-1}} - ... - |a_0| \right) > |a^n| \, |z^n|$$

Ora supponiamo che p non abbia zeri nel piano complesso: allora la funzione $1/p(z)$ è intera e, per la disugaglianza precedente:

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{|p(z)|} \leq \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{|a_n|\ |z^n|} = 0$$

Quindi $|1/p(z)|$ è limitata e, per il teorema di Liouville, deve essere costante, il che è assurdo. QED

4 Residui

Definizione 4.1 *Una serie di potenze bilatera*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

si dice serie di Laurent.

Per deteterminare il dominio di convergenza di una serie di Laurent, spezziamola come

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n}$$

Il dominio di convergenza della serie di Laurent sarà l'intersezione dei domini di convergenza delle due serie che figurano a secondo membro; nel caso della prima di queste serie si tratta di un disco di centro z_0 e raggio ρ. Mostriamo che nel caso della seconda serie il dominio è il complementare di un disco di centro z_0. Poniamo

$$\zeta = \frac{1}{z-z_0}$$

in modo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\zeta^n$$

Si tratta quindi di una serie di potenze di centro 0; sia $\frac{1}{R}$ il suo raggio di convergenza: evidentemente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ ha come dominio di convergenza il complementare del disco di centro z_0 e raggi R.

Dunque una serie di Laurent definisce una funzione olomorfa nella corona circolare $C_{R,\rho} = \{z \in \mathbb{C} \mid R < |z-z_0| < \rho\}$. Ovviamente può benissimo accadere che sia $\rho <\leq R$ e quindi $C_{R,\rho} = \emptyset$: in questo caso la serie di Laurent non definisce alcuna funzione olomorfa.

Teorema (LAURENT) **4.2** *Una funzione $f \in \mathcal{O}(C_{R,\rho})$ è univocamente determinata in $C_{R,\rho}$ dal suo sviluppo in serie di Laurent.*

DIMOSTRAZIONE: Se $z \in C_{R,\rho}$ consideriamo due cerchi Γ_1 e Γ_2 di centro z_0 e raggi tali che $R < r_2 < |z - z_0| < r_1 < Er$. Per la formula di Cauchy (in un dominio non semplicemente connesso) si trova

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}dw$$

Ora, sul cerchio Γ_1 vale la

$$\frac{|z-z_0|}{|w-z_0|} < 1$$

quindi

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$$

Integrando e scambiando il segno di integrale con quello della serie (per la teoria di Lebesgue o per uniforme convergenza)[8]:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

con, per $n \geq 0$:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$$

In modo analogo, dalla

$$\frac{|w-z_0|}{|z-z_0|} < 1$$

sul cerchio Γ_2 si trova

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n}$$

con, per $n \geq 0$:

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}}dw$$

[8] Il ragionamento è il medesimo che abbiamo svolto nel dimostrare l'analiticità delle funzioni olomorfe.

Le a_n e a_{-n} così ottenute sono olomorfe in $C_{R,\rho}$ e quindi, i corrispondenti integrali non dipendono dai cammini di integrazione: dunque possiamo combinare le formule per a_n e a_{-n} ottenendo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

con $n \in \mathbb{Z}$ e Γ qualsiasi curva regolare chiusa contenuta nell'anello $C_{R,\rho}$. Quindi

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

ove la serie converge nella corona circolare $C_{R,\rho}$ ed uniformemente nella corona circolare chiusa $\{z \in \mathbb{C} \mid r_2 \leq |z - z_0| \leq r_1\}$.

Dimostriamo infine l'unicità dell'espansione di Laurent della f; supponiamo che sia

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

ove esista almeno un $n \in \mathbb{Z}$ tale che $a_n \neq b_n$. Quindi in $C_{R,\rho}$ abbiamo che

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

Considerando il cerchio Γ_r di centro z_0 e raggio $R < r < \rho$, queste serie vi convergono uniformemente e, moltiplicandole per $(z - z_0)^{n-m-1}$ (per $m \in \mathbb{Z}$ fissato) ed integrando termine a termine otteniamo:

$$\int_{\Gamma_r} (z - z_0)^{n-m-1} dz = i r^{n-m} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt = 2\pi i \delta_{nm}$$

Così, dopo aver integrato le serie in a_n e b_n, avremo solo un termine non nullo per ciascuna serie, e precisamente

$$a_m = b_m$$

Ma m può scegliersi arbitrariamente, e quindi le serie debbono coincidere. QED

Definizione 4.3 *Se una funzione olomorfa f è definita in un dominio U privato di un punto z_0 interno a U, si dice che z_0 è* singolare *per f.*

Dato che U è aperto esiste un disco D centrato in z_0 e completamente contenuto in U tale che la funzione sia olomorfa in $D \setminus \{z_0\}$ e quindi in una corona circolare di centro z_0 e contenuta in D. Possiamo dunque limitarci a studiare i punti singolari come se fossero centri di corone circolari.

Definizione 4.4 *Un punto singolare z_0 per una funzione olomorfa f si dice:*

(1) singolarità eliminabile *se la serie di Laurent di f intorno a z_0 non contiene termini di esponente negativo (i.e. se $a_n = 0$ per $n < 0$);*

(2) polo di ordine m *se la serie di Laurent di f intorno a z_0 non contiene termini di esponente minore di $-m$ (i.e. se $a_n = 0$ per $n < -m$);*

(3) singolarità essenziale *se la serie di Laurent di f intorno a z_0 contiene termini di esponente negativo arbitrariamente basso (i.e. se per ogni $n < 0$ esiste un $m < n$ con $a_m \neq 0$);*

Se z_0 è una singolarità eliminabile, la funzione f può estendersi ad una funzione olomorfa in z_0: infatti facendo tendere z a z_0 (da qualunque direzione) otteniamo come limite della serie di Laurent il valore a_0; definendo allora $f(z_0) = a_0$ otteniamo l'estensione voluta.

Se z_0 è una singolarità essenziale, il comportamento della funzione olomorfa in un suo intorno può essere estremamente bizzarro, in particolare, profondi teoremi dovuti a Casorati, Weierstrass e Picard dimostrano che non è possibile controllare in alcun modo il comportamento di f intorno ad una singolarità essenziale.

Infine, se z_0 è un polo di ordine m possiamo scrivere, in una corona circolare centrata in z_0:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

In questo caso non possiamo eliminare la singolarità, dato che per z che tende a z_0 il valore di $|f(z)|$ cresce arbitrariamente: infatti

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + ... + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= (z - z_0)^m (a_{-m} + ... + a_{-1}(z - z_0)^{m-1}) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= (z - z_0)^m \varphi(z) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \end{aligned}$$

ove φ è olomorfa in z_0. è immediato ora che per $z \to z_0$ $|f(z)|$ cresce arbitrariamente.

Definizione 4.5 *Il* residuo *di una funzione olomorfa in una sua singolarità z_0 è il valore del coefficiente a_{-1} nel suo sviluppo di Laurent intorno a z_0.*

Per unicità della serie di Laurent il residuo è ben definito ed è pari a

$$Res_{\,z_0} f(z) := c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(w)dw$$

per ogni curva regolare chiusa Γ nel dominio di olomorfia di f che racchiuda il punto z_0 (e nessun altro punto singolare di f).

Il calcolo dei residui è estremamente utile, e, nel caso di poli, può effettuarsi in modo semplice.

Sia infatti z_0 un polo di ordine m: i.e.

$$f(z) = (z - z_0)^{-m}(a_{-m} + ... + a_{-1}(z - z_0)^{m-1}) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

Moltiplicando ambo i membri per $(z-z_0)^m$, derivando $(m-1)$ volte e passando al limite per $z \to z_0$ si ottiene

$$Res_{\,z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z - z_0)^m f(z))$$

Definizione 4.6 *Una funzione olomorfa in un dominio U e che abbia in questo dominio al più singolarità polari si dice* meromorfa *in U.*

Ad esempio una funzione razionale (un quoziente di polinomi) è memomorfa nel piano complesso.

Teorema dei Residui 4.7 *Se f è meromorfa nel dominio regolare chiuso $\overline{U}$ con un numero finito di singolarità $z_1, ..., z_n \in U$ allora*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} f(z)dz = \sum_{z_0\in U} Res_{\,z_0} f(z)$$

(la somma è finita perché le uniche singolarità non eliminabili della f sono i poli $z_1, ..., z_n$).

DIMOSTRAZIONE: Poiché i punti $z_1, ...z_n$ sono isolati possiamo trovare dei dischi $D_1, ..., D_n$ centrati in essi e che non contengano altri punti singolari (di più: i dischi D_i sono a due a due disgiunti): l'idea è di applicare il teorema di Cauchy al dominio $U \setminus \cup_{i=1}^n \overline{D}_i$, nel quale la funzione è olomorfa, ottenendo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_k} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} Res_{\,z_k} f(z) = \sum_{z_0\in U} Res_{\,z_0} f(z)$$

QED

Non ci soffermiamo sulle applicazioni di questo teorema, in particolare al calcolo di integrali definiti per mezzo di una scelta opportuna dei domini di integrazione: per questo rimandiamo ai testi specialistici. Concludiamo con qualche semplice ma notevole conseguenza.

Corollario 4.8 *Se f è una funzione meromorfa nel dominio regolare U e $g \in \mathcal{O}(U)$ allora, per $z_0 \in U$:*

$$Res_{z_0}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}g(z)\right) = \nu_{z_0}(f)g(z_0)$$

ove $\nu_{z_0}(f)$ è l'ordine di f in z_0 (minimo intero per il quale il coefficiente dello sviluppo di Laurent non è nullo).

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo che U sia un disco centrato in z_0 (possiamo assumerlo senza ledere la generalità). Sia

$$f(z) = (z - z_0)^n h(z)$$

con $h(z)$ olomorfa e mai nulla in U. Allora $n = \nu_{z_0}(f)$ e

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)}g(z) &= \frac{n(z-z_0)^{n-1}h(z) + (z-z_0)^n h'(z))}{(z-z_0)^n}\frac{g(z)}{h(z)} \\ &= n\frac{g(z)}{z-z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)}g(z) \end{aligned}$$

ma $h'g/h$ è olomorfa, quindi il suo residuo è zero in z_0 e

$$Res_{z_0}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}g(z)\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{ng(z)}{z-z_0}dz = ng(z_0)$$

QED

Corollario (TEOREMA DELL'INDICATORE LOGARITMICO) **4.9** *Sia U un dominio regolare, una funzione f meromorfa in $\overline{U}$ e $z_1, ..., z_n$ gli zeri di f in U e $p_1, ..., p_m$ i poli di f in U: supponendo che f non abbia zeri su ∂U e che g sia olomorfa in U allora*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f'(z)}{f(z)}g(z)dz = \sum_{k=1}^{n} g(z_k)\nu_{z_k}(f) - \sum_{k=1}^{m} g(p_k)\nu_{p_k}(f)$$

In particolare, per $g = z$ si ha

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f'(z)}{f(z)}z\,dz = \sum_{k=1}^{n} z_k \nu_{z_k}(f) - \sum_{k=1}^{m} p_k \nu_{p_k}(f)$$

e per $g = 1$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^{n} \nu_{z_k}(f) - \sum_{k=1}^{m} \nu_{p_k}(f) = \#\{\text{zeri di } f\} - \#\{\text{poli di } f\}$$