Intégration par séries des équation différentielles linéaires

Giuseppe Peano

Mathematische Annalen XXXII (1888), pp.450-456.*

1. L'object principal de cette Note est la démonstration du théorème suivant:
"Soient données les équations différentielles linéaires homogènes

$$\frac{dx_1}{dt} = r_{11}x_1 + \cdots + r_{1n}x_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = r_{n1}x_1 + \cdots + r_{nn}x_n$$

où les r_{ij} sont des fonctions réelles de la variable t, continues dans l'intervalle (p, q), auquel appartiennent toutes les valeurs t_r que nous allons considérer. Que l'on substitue dans les seconds membres des équations proposées, à la place de $x_1 ... x_n$, n constantes arbitraires $a_1 ... a_n$, et que l'on intégre entre t_0 et t; on obtiendra n fonctions $a'_1 ... a'_n$ de t. Que l'on substitue de même dans les seconds membres des équations proposées, à la place de $x_1 ... x_n$ des fonctions $a'_1 ... a'_n$, et que l'on intégre de t_0 a t; on obtiendra n fonctions $a''_1 ... a''_n$. En opérant sur $a''_1 ... a''_n$ comme on a fait sur $a'_1 ... a'_n$, on obtiendra les fonctions $a'''_1 ... a'''_n$, et ainsi de suite.

*Cette Note est, avec peu de modifications, la traduction d'un travail publié dans les *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino,* 20. *Febbraio* 1887

Les n séries

$$x_1 = a_1 + a_1' + a_1'' + \cdots, \quad ..., \quad x_n = a_n + a_n' + a_n'' + \cdots$$

seront convergentes pour toutes les valeurs de t dans l'intervalle (p, q); leurs sommes sont des fonctions de t qui satisfont aux équations données, et qui, pour $t = t_0$, prennent les valeurs $a_1 ... a_n$."

Pour démontrer cette proposition, et en général pour l'étude des équations différentielles linéaires, il est très-utile d'introduire la considération des nombres complexes, ou nombres formés aves plusieurs unités, et de leur substitutions. Ces questions ont été étudiées, sous différents points de vue, par GRASSMANN, HAMILTON, CAYLEY, SYLVESTER, etc. Pour notre but il faut énoncer les définitions principales, et les propriétés qui en découlent immédiatement[1].

2. On appelle *nombre complexe*, ou *complexe*, d'ordre n, la suite de n nombres réels $x_1 ... x_n$, et on le désigne par la notation $[x_1, ..., x_n]$. Les nombres $x_1 ... x_n$ se nomment les éléments du nombre complexe donné. Nous indiquerons aussi un nombre complexe par une seule lettre $\mathbf{x} = [x_1, ..., x_n]$, $\mathbf{y} = [y_1, ..., y_n]$, etc.

Définition de l'égalité $\mathbf{x} = \mathbf{y}$:

$$(\mathbf{x} = \mathbf{y}) = (x_1 = y_1)(x_2 = y_2) \cdots (x_n = y_n).^2$$

Déf. de la somme:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n].$$

Déf. du produit $k\mathbf{x}$, où k est un nombre réel:

$$k[x_1, ..., x_n] = [kx_1, ..., kx_n].$$

Déf. de la differénce:

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{y}.$$

Déf. du nombre complexe 0:

$$0 = [0, 0, ..., 0].$$

On déduit que si $\mathbf{x}, \mathbf{y}, ...$ sont des complexes d'ordre n, k, k',... des nombres réels, $k\mathbf{x} + k'\mathbf{y} + \cdots$ répresente toujours un complexe. L'addition des nombres

[1]Une exposition moins sommaire de cette théorie est contenue dans mon *calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H.Grassmann*, etc. *Torino* 1888.

[2]Dans cette formule, et dans quelques-unes de celles qui suivent, le signe = entre deux propositions indique leur équivalence; la conjonction de plusieurs propositions est indiquée en écrivant ces propositions l'une après l'autre. Ainsi cette formule signifie: "nous dirons que deux nombres complexes sont égaux entre eux, si les éléments des deux nombres sont respectivement égaux."

complexes est commutative et associative; son module est 0; le produit $k\mathbf{x}$ est distributif par rapport aux deux facteurs.

Si l'on pose

$$\mathbf{i}_1 = [1, 0, 0, ..., 0], \quad \mathbf{i}_2 = [0, 1, 0, ..., 0], \quad \cdots \mathbf{i}_n = [0, 0, 0, ..., 1],$$

tout nombre complexe $\mathbf{x} = [x_1, ..., x_n]$ pourra se réduire à la forme

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + \cdots + x_n\mathbf{i}_n.$$

3. On appelle *substitution* des nombres complexes d'ordre n une opération par laquelle à tout nombre complexe $\mathbf{x} = [x_1, ..., x_n]$ correspond un autre complexe

$$[r_{11}x_1 + \cdots + r_{1n}x_n, ..., r_{n1}x_1 + \cdots + r_{nn}x_n]$$

dont les éléments sont des fonctions linéaires et homogènes des éléments du complexe donné. Nous désignerons une substitution par la matrice

$$\begin{Bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{Bmatrix} = \{r_{ij}\}$$

formée avec les n^2 coefficients de la substitution; nous indiquerons aussi une substitution par une seule lettre $\mathbf{R}, \mathbf{S}, ...$. Si $\mathbf{x}$ est un nombre complexe, $\mathbf{R}$ une substitution, $\mathbf{Rx}$ représente le complexe qui dans la substitution $\mathbf{R}$ correspond à $\mathbf{x}$.

Définition de l'égalité de deux substitutions:

$$(\mathbf{R} = \mathbf{S}) = (\text{pour tout complexe } \mathbf{x} \text{ on a } \mathbf{Rx} = \mathbf{Sx}).$$

Déf. de l'égalité d'une substitution et d'un nombre réel k

$$(\mathbf{R} = k) = (\text{pour tout complexe } \mathbf{x} \text{ on a } \mathbf{Rx} = k\mathbf{x}).$$

Déf. $$(\mathbf{R} + bS)\mathbf{x} = \mathbf{Rx} + \mathbf{Sx}.$$

L'operation $\mathbf{R} + \mathbf{S}$ est une substitution qu'on appelle *somme* de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{S}$.

Déf. $$\mathbf{RSx} = \mathbf{R}(\mathbf{Sx}).$$

L'operation $\mathbf{RS}$ est une substitution qu'on nomme *produit* de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{S}$.

On déduit:

$$(\mathbf{R} = \mathbf{S}) = (\text{les coefficients de } \mathbf{R} \text{ et } \mathbf{S} \text{ sont respectivement égaux}).$$

$$\begin{Bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{Bmatrix} = k$$

$\{r_{ij}\} + \{s_{ij}\} = \{t_{ij}\}$, où $t_{ij} = r_{ij} + s_{ij}$.
$\{r_{ij}\} \cdot \{s_{ij}\} = \{t_{ij}\}$, où $t_{ij} = r_{i1}s_{1j} + r_{i2}s_{2j} + \cdots + r_{in}s_{nj}$.

Les sommes des substitutions sont commutatives et associatives; les produits d'une substitution par un complexe, ou de deux substitutions, sont distributifs; mais, en général, ils ne sont pas commutatifs. Deux substitutions $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$, telles que $\mathbf{RS} = \mathbf{SR}$, se nomment *échangeables* entre elles. Une substitution égale à un nombre est échangeable avec toute substitution.

On pose aussi $\mathbf{R}^2 = \mathbf{RR}$, etc. Si le déterminant formé avec les coefficients de $\mathbf{R}$ n'est pas nul, il résulte determinée une substitution $\mathbf{R}^{-1}$, qu'on appelle l'*inverse* de $\mathbf{R}$, telle que $\mathbf{RR}^{-1} = 1$.

4. Nous dirons qu'un variable complexe $\mathbf{x}$, ou une substitution variable $\mathbf{R}$, a pour *limite* le complexe constant $\mathbf{a}$, ou la substitution constante $\mathbf{A}$, si les élements de $\mathbf{x}$, ou les coefficients de $\mathbf{R}$, ont pour limites les éléments de $\mathbf{a}$, ou les coefficients de $\mathbf{A}$. On prouve tout de suite les théorèmes sur les limites des sommes, des produits, etc. On définit la convergence des séries dont les termes sont des nombres complexes, ou des substitutions, comme pour les séries à termes réels ou imaginaires. La convergence d'une série dont les termes sont des nombres complexes, ou des substitutions, emporte la convergence des n séries formées avec les éléments des termes complexes, ou des n^2 séries formées avec les coefficients des substitutions.

Si le complexe, ou la substitution, $\mathbf{x}(t)$ est fonction de la variable numerique t, on pose

$$\mathbf{x}'(t) = \lim \frac{1}{h}[\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)], \qquad \text{pour } h = 0.$$

On déduit les définitions des dérivées successives, des différentielles, des intégrales définies et indéfinies, etc. On a les formules

$$\begin{aligned} d(\mathbf{R}+\mathbf{S}) &= d\mathbf{R}d\mathbf{S}, & d\cdot\mathbf{RS} &= d\mathbf{R}\cdot\mathbf{S} + \mathbf{R}\cdot d\mathbf{S},\\ d\cdot\mathbf{R}^2 &= d\mathbf{R}\cdot\mathbf{R} + \mathbf{R}\cdot d\mathbf{R}, & d\cdot\mathbf{R}^{-1} &= -\mathbf{R}\cdot d\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}^{-1}, \text{etc.}\end{aligned}$$

5. Pour simplifier les recherches sur les limites, nous introduirons les *modules* des complexes et des substitutions.

Déf. $\quad \operatorname{mod}.\mathbf{x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}; \qquad \operatorname{mod}.\mathbf{x} \geq 0.$

On déduit:

$$(\lim \mathbf{x} = \mathbf{a}) = (\lim(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0).$$

Une série à termes complexes est convergente si la série formée avec les modules des termes est convergente.

De l'identité

$$\begin{aligned}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) - ((x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2\\ = \sum(x_iy_j - x_jy_i)^2\end{aligned}$$

on déduit

$$(a) \qquad x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \le \operatorname{mod}.\mathbf{x} \operatorname{mod}.\mathbf{y}$$

Multiplions par 2, ajoutons $(\operatorname{mod}.\mathbf{x})^2 + (\operatorname{mod}.\mathbf{y})^2$, et extrayons la racine carrée; on a

$$\operatorname{mod}.(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \le \operatorname{mod}.bx + \operatorname{mod}.\mathbf{y}.$$

Soit $\mathbf{x}$ une fonction de la variable réelle t; on a:

$$\frac{d \cdot \operatorname{mod}.\mathbf{x}}{dt} = \frac{1}{\operatorname{mod}.\mathbf{x}} \left(x_1 \frac{dx_1}{dt} + \cdots x_n \frac{dx_n}{dt} \right),$$

d'où, par la (a),

$$\frac{d \cdot \operatorname{mod}.\mathbf{x}}{dt} \le \operatorname{mod}.\frac{d\mathbf{x}}{dt}.$$

Posons $\mathbf{x}$ au lieu de $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$, et intégrons de t_0 à $t_1 > t_0$; on déduit

$$(c) \qquad \operatorname{mod}.\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{x} dt \le \int_{t_0}^{t_1} (\operatorname{mod}.\mathbf{x}) dt.$$

Déf.

$$\operatorname{mod}.\mathbf{R} = \text{maximum de } \frac{\operatorname{mod}.(\mathbf{Rx})}{\operatorname{mod}.\mathbf{x}},$$

où $\mathbf{x}$ est un complexe quelconque.

Ce maximum est déterminé et fini, car $\left(\frac{\operatorname{mod}.(\mathbf{Rx})}{\operatorname{mod}.\mathbf{x}}\right)^2$ est le quotient de deux formes quadratiques dans les éléments de $\mathbf{x}$, et le dénominateur est une forme définie. On déduit:

$$(d) \qquad \operatorname{mod}.(\mathbf{Rx}) \le \operatorname{mod}.\mathbf{R} \cdot \operatorname{mod}.\mathbf{x}$$

On a:

$$\begin{aligned} \operatorname{mod}.(\mathbf{R} + \mathbf{S}) &= \max.\frac{\operatorname{mod}.[(\mathbf{R} + \mathbf{S})\mathbf{x}]}{\operatorname{mod}.\mathbf{x}} = \max.\frac{\operatorname{mod}.(\mathbf{Rx} + \mathbf{Sx})}{\operatorname{mod}.\mathbf{x}} \\ &\le \max.\frac{\operatorname{mod}.(\mathbf{Rx}) + \operatorname{mod}.(\mathbf{Sx})}{\operatorname{mod}.\mathbf{x}} \\ &\le \max.\frac{\operatorname{mod}.\mathbf{R} \cdot \operatorname{mod}.\mathbf{x} + \operatorname{mod}.\mathbf{S} \cdot \operatorname{mod}.\mathbf{x}}{\operatorname{mod}.\mathbf{x}} \\ &= \operatorname{mod}.\mathbf{R} + \operatorname{mod}.\mathbf{S} \end{aligned}$$

en vertu des formules (b) et (d), et d'identités connues. On déduit:

$$(e) \qquad \operatorname{mod}.(\mathbf{R} + \mathbf{S}) \le \operatorname{mod}.\mathbf{R} + \operatorname{mod}.\mathbf{S}.$$

On a:

$$\begin{aligned}\operatorname{mod}.(\mathbf{RS}) &= \max.\frac{\operatorname{mod}.(\mathbf{RSx})}{\operatorname{mod}.\mathbf{x}} \leq \max.\frac{\operatorname{mod}.\mathbf{R}\cdot\operatorname{mod}.(\mathbf{Sx})}{\operatorname{mod}.\mathbf{x}}\\ &\leq \max.\frac{\operatorname{mod}.\mathbf{R}\cdot\operatorname{mod}.\mathbf{S}\cdot\operatorname{mod}\mathbf{x}}{\operatorname{mod}.\mathbf{x}} = \operatorname{mod}.\mathbf{R}\cdot\operatorname{mod}.\mathbf{S},\end{aligned}$$

d'où

$$\operatorname{mod}.(\mathbf{RS}) \leq \operatorname{mod}.\mathbf{R}\cdot\operatorname{mod}.\mathbf{S}. \tag{f}$$

On déduit

$$\operatorname{mod}.\mathbf{R}^n \leq (\operatorname{mod}.\mathbf{R})^n.$$

Les formules précédentes suffisént pour notre but. On peur encore ajouter que le carré de $\operatorname{mod}.\mathbf{R}$ est la plus grande racine de l'équation en λ:

$$\begin{vmatrix} r_{11}^2+r_{21}^2+\cdots+r_{n1}^2-\lambda & r_{11}r_{12}+\cdots+r_{n1}r_{n2} & \cdots\\ r_{11}r_{12}+\cdots+r_{n1}r_{n2} & r_{12}^2+r_{22}^2+\cdots+r_{n2}^2-\lambda & \cdots\\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\end{vmatrix} = 0,$$

dont les racines sont toutes positives, ou nulles. On déduit

$$\operatorname{mod}.\mathbf{R} \leq \sqrt{r_{11}^2+\cdots+r_{1n}^2+\cdots+r_{n1}^2+\cdots+r_{nn}^2}.$$

car la quantité sous le signe radical est la somme des racines de l'équation en λ.

6. Démonstrons maintenant le théorème énoncé. Posons

$$\mathbf{x} = [x_1, ..., x_n], \qquad \mathbf{R} = \begin{Bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ r_{n1} & \cdots & r_{nn}\end{Bmatrix}.$$

Le système d'équations données se reduira à l'équation unique

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Rx} \tag{1}$$

Soit $\mathbf{a}$ un complexe constant quelconque. Posons:

$$\mathbf{a}' = \int \mathbf{Ra}dt, \qquad \mathbf{a}'' = \int \mathbf{Ra}'dt, \qquad \mathbf{a}''' = \int \mathbf{Ra}''dt, \qquad \cdots,$$

où les intégrales s'étendent de t_0 à t. On doit prouver que la série

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{a}' + \mathbf{a}'' + \cdots \tag{2}$$

est convergente, et que sa somme $\mathbf{x}$ est une fonction de t (qui, évidemment, a la valeur $\mathbf{a}$ pour $t = t_0$) satisfaisant à l'équation (1). En effet puisque les r_{ij} sont des fonctions continues de t dans l'intervalle (p, q), $\mathrm{mod}\,.\mathbf{R}$ sera aussi une fonction continue de t, et soit m son maximum. En supposant, pour simplifier, $t > t_0$, on a:

$$\mathrm{mod}\,.\mathbf{a}' \leq \int \mathrm{mod}\,.(\mathbf{R}\mathbf{a})dt \leq \int \mathrm{mod}\,.\mathbf{R}\cdot\mathbf{a}\cdot dt \leq m\cdot \mathrm{mod}\,.\mathbf{a}(t-t_0),$$

$$\mathrm{mod}\,.\mathbf{a}'' \leq \int \mathrm{mod}\,.(\mathbf{R}\mathbf{a}')dt \leq \int \mathrm{mod}\,.\mathbf{R}\cdot\mathbf{a}'\cdot dt \leq \frac{1}{2}m^2\cdot \mathrm{mod}\,.\mathbf{a}(t-t_0)^2, \text{etc.}$$

$$\mathrm{mod}\,.\mathbf{a}^{(n)} \leq \frac{1}{n!}m^n\cdot \mathrm{mod}\,.\mathbf{a}(t-t_0)^n.$$

Donc la série (2) est uniformément convergente, car les modules des termes sont moindres que des quantités constantes qui forment une série convergente. En différentiant les termes de (2) on obtient la série $0+\mathbf{R}\mathbf{a}+\mathbf{R}\mathbf{a}'+\cdots$, qui converge uniformément vers $\mathbf{R}\mathbf{x}$. Donc $\mathbf{x}$ satisfait bien a l'équation proposée.

7. Substituons dans la (2) aux termes $\mathbf{a}'$, $\mathbf{a}''$, $\mathbf{a}'''$, ... leurs valeurs; on obtient:

$$\mathbf{x} = \left(1 + \int \mathbf{R}dt + \int \mathbf{R}\int \mathbf{R}dt^2 + \cdots\right)\mathbf{a}.$$

Posons

$$\mathbf{E}\binom{t_1}{t_0} = 1 + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{R}dt + \int_{t_0}^{t_1}\mathbf{R}\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{R}dt^2 + \int_{t_0}^{t_1}\mathbf{R}\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{R}\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{R}dt^3 + \cdots$$

Alors, $\mathbf{E}\binom{t_1}{t_0}$ représente une substitution telle, que si $\mathbf{x}_0$ et $\mathbf{x}_1$ sont les valeurs, pour $t = t_0$ et $t = t_1$, d'un complexe $\mathbf{x}$ qui satisfait à l'équation (1), on a:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{E}\binom{t_1}{t_0}\cdot\mathbf{x}_0.$$

On déduit:

$$\mathbf{E}\binom{t_1}{t_0}\cdot\mathbf{E}\binom{t_0}{t_1} = 1,$$

$$\mathbf{E}\binom{t_2}{t_0} = \mathbf{E}\binom{t_2}{t_1}\mathbf{E}\binom{t_1}{t_0}.$$

Si l'on pose $s = r_{11}+r_{22}+\cdots+r_{nn}$, le déterminant de la substitution $\mathbf{E}\binom{t_1}{t_0}$ a pour valeur $e^{\int_{t_0}^{t_1} sdt}$. Ce déterminant est donc toujours positif.

En posant $\mathbf{E} = \mathbf{E}\binom{t_1}{t_0}$, on déduit

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt_1} = \mathbf{RE}, \qquad -\frac{d\mathbf{E}}{dt_0} = \mathbf{ER}.$$

Si dans les équations différentielles proposées, les coefficients r_{ij} sont des constantes, on peut calculer les intégrales: en supposant $t_0 = 0$ on a:

$$\mathbf{x} = \left[1 + \mathbf{R}t + \frac{1}{2!}(\mathbf{R}t)^2 + \cdots\right]\mathbf{a},$$

ou, en posant $e^{\mathbf{R}} = 1 + \mathbf{R} + \frac{1}{2!}\mathbf{R}^2 + \cdots$,

$$\mathbf{x} = e^{\mathbf{R}t}\mathbf{a}.$$

Si la substitution $\mathbf{R}$ est variable. mais que ses différentes valeurs sont échangeables entre elles, on obtient

$$\mathbf{x} = e^{\int \mathbf{R}dt}\mathbf{a}.$$

L'équation différentielle $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Rx} + \mathbf{p}$, où $\mathbf{p}$ est un complexe fonction de t, équivaut à n équations différentielles linéaires non homogènes. Son intégral est

$$\mathbf{x} = \mathbf{Ea} + \mathbf{E}\int \mathbf{E}^{-1}\mathbf{p}dt,$$

qu'on peut aussi représenter par la série

$$\mathbf{x} = \mathbf{Ea} + \int \mathbf{p}dt + \int \mathbf{R}\int \mathbf{p}dt^2 + \int \mathbf{R}\int \mathbf{R}\int \mathbf{p}dt^3 + \cdots.$$

Turin, Avril 1888.