# Strutture di Poisson
# e strutture complesse

Paolo Caressa

Sassari, 6 dicembre 2001

In questi appunti informali si introducono le strutture di Poisson sulle varietà differenziabili per mezzo di esempi, cercando di illustrare i risultati fondamentali della teoria. Ci si concentra infine su alcune questioni particolari relative alle varietà di Poisson regolari, legate anche alle strutture complesse e kähleriane.

## 1 Strutture simplettiche

Le strutture di Poisson sulle varietà differenziabili sono studiate da circa venticinque anni, sebbene gli esempi principali siano emersi già nella matematica ottocentesca, ad opera di Lagrange, Poisson e Lie.

La classe di esempi più notevole è data dalle varietà simplettiche.

**Definizione 1.1** *Una varietà simplettica è una varietà differenziabile $S$ equipaggiata di una 2-forma $\omega \in \bigwedge^2 T^*S$ chiusa e non degenere.*

Che la forma sia non degenere vuol dire che, se $w \in TS$:

$$\forall v \in TS \quad \omega(v, w) = 0 \Rightarrow w = 0$$

Ciò equivale a richiedere che la mappa $\omega^\flat : TS \to T^*S$ indotta da $\omega$ e definita come[1]

$$\langle \omega^\flat(v), w \rangle = \omega(v, w)$$

[1] Con $\langle \alpha, X \rangle$ denotiamo la contrazione della 1-forma $\alpha$ sul campo vettoriale $X$.

sia un isomorfismo di fibrati vettoriali.

Questa definizione è chiara in dimensione finita: in dimensione infinita (ad esempio se $S$ è uno spazio di Banach) ci sono due possibili concetti di "non degenere": la forma si dice *debolmente non degenere* se la mappa $\omega^\flat$ è iniettiva, mentre si dice *fortemente non degenere* se è iniettiva e suriettiva. Ad esempio nel caso di uno spazio di Banach $S$, il teorema della mappa aperta garantisce che una mappa fortemente non degenere è in realtà un isomorfismo di spazi di Banach: per esempi di interesse nelle applicazioni meccaniche si confronti [2]. Qui ci limitiamo al caso di dimensione finita.

Su una varietà differenziabile la condizione di non degenerazione implica l'esistenza di un volume: se $\omega$ è non degenere allora $\omega^{\text{top}}$ definisce un volume sulla varietà. In particolare una varietà simplettica è orientabile. Si noti inoltre che si tratta di una condizione topologica: è infatti equivalente a richiedere l'orientabilità della varietà e la riducibilità del gruppo strutturale del fibrato principale dei riferimenti al gruppo simplettico.

La forma $\omega$ si dice *forma simplettica* o *struttura simplettica* sulla varietà. Ovviamente una varietà simplettica ha dimensione pari, ad esempio ogni superficie è simplettica, ma non ogni varietà di dimensione pari sopporta strutture simplettiche.

**Esempio 1.2** *Consideriamo la sfera $S^4$ e supponiamo che ammetta una forma simplettica $\omega$: dato che $H^2(S^4) = 0$, deve esistere una 1-forma $\vartheta$ tale che $d\vartheta = \omega$. Ma $\omega \wedge \omega$ è un volume, e dato che $\omega \wedge \omega = d\vartheta \wedge d\vartheta = d(\vartheta \wedge d\vartheta)$ troviamo che*

$$\int_{S^4} \omega \wedge \omega = \int_{S^4} d(\vartheta \wedge d\vartheta) = 0$$

*che è assurdo. Quindi una 2-forma non degenere e chiusa non può esistere su $S^4$.*

Visibilmente lo stesso ragionamento vale per una qualsiasi varietà compatta senza bordo e il cui secondo gruppo di coomologia di de Rham sia zero.

Altri classi di esempi di varietà simplettiche sono i fibrati cotangenti delle varietà differenziabili e le varietà kähleriane.

L'esempio più semplice si ottiene come segue: consideriamo uno spazio vettoriale $V$ e la somma diretta $V \oplus V^*$. Allora possiamo definire una 2-forma non degenere come

$$\omega(v + \varphi, w + \psi) = \varphi(w) - \psi(v)$$

Dato che si tratta di una forma a coefficienti costanti, è ovviamente chiusa.

Se fissiamo delle coordinate $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ su $V \oplus V^*$ possiamo scrivere

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$$

Chiamiamo *coordinate canoniche* le coordinate in cui una forma simplettica ha questa espressione su uno spazio vettoriale: il teorema di Darboux, che verrà discusso più in generale in séguito, permette sempre di trovare coordinate canoniche su uno spazio vettoriale.

La 2-forma $\omega$ su uno spazio vettoriale rispetto alle coordinate canoniche si può scrivere come una matrice del tipo

$$\omega = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Una costruzione analoga si può dare intorno ad ogni punto del fibrato tangente di una qualsiasi varietà differenziabile (per una discussione dettagliata si veda [1] o il capitolo 6 di [7]).

Una classe di esempi di varietà simplettiche assai rilevante è data dalle varietà kähleriane: si tratta di varietà complesse $(M, J)$ dotate di una metrica riemanniana $g$ compatibile

$$g(JX, Y) + g(X, JY) = 0$$

e tale che la struttura complessa sia parallela rispetto alla connessione indotta dalla metrica: $\nabla J = 0$. Possiamo allora definire una 2-forma differenziale come

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y)$$

Dato che $g$ è una metrica riemanniana la forma $\omega$ è non degenere, e la condizione $\nabla J = 0$ implica $d\omega = 0$: infatti $\omega$ è parallela perché lo sono $g$ e $J$, quindi è chiusa (cfr. [6] Vol.II). Dunque, se $g^\# : T^*M \to TM$ è l'isomorfismo indotto dal tensore non degenere $g$, i campi hamiltoniani $X_f$ sono della forma $Jg^\# df$; cioè le parentesi di Poisson si scrivono in termini della metrica e della struttura complessa.

L'esempio elementare di varietà kähleriana è uno spazio di Hilbert complesso $\mathcal{H}$, equipaggiato del suo prodotto scalare hilbertiano $(,)$; in questo caso la metrica riemanniana è la parte reale del prodotto hilbertiano e la forma simplettica ne è la parte immaginaria:

$$(v, w) = g(v, w) + i\omega(v, w)$$

L'altro esempio fondamentale è lo spazio proiettivo complesso, cioè lo spazio $\mathbb{P}\mathcal{H}$ delle rette complesse per l'origine in uno spazio di Hilbert complesso $\mathcal{H}$.

Lo spazio $\mathbb{P}\mathcal{H}$, come $\mathcal{H} \setminus \{0\}$, è una varietà complessa (con spazio tangente in $v$ isomorfo a $\mathcal{H}/v\mathbb{C}$) e la proiezione canonica $\pi : \mathcal{H} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}\mathcal{H}$ che al vettore $v \in \mathcal{H}$ assegna la retta $v\mathbb{C}$ da esso generata è una sottoimmersione suriettiva. La metrica hermitiana (*metrica di Fubini-Study*) su $\mathbb{P}\mathcal{H}$ è data da

$$h((d\pi)_v(w_1), (d\pi)_v(w_2)) = (w_1, w_2)$$

(per $v \in \mathcal{H}$ con $||v|| = 1$, $w_1, w_2 \in T_v\mathbb{P}\mathcal{H} \cong (v\mathbb{C})^\perp$); la sua parte reale è una metrica riemanniana e la sua parte complessa una forma simplettica (cfr. [6] Vol. II).

# 2 Strutture di Poisson

Su una varietà simplettica è possibile definire il formalismo hamiltoniano introducendo le parentesi di Poisson fra funzioni: il procedimento risale a Poisson (1809) che era interessato a produrre integrali primi di sistemi hamiltoniani.

In generale, data una varietà simplettica $(S, \omega)$ possiamo considerare l'isomorfismo di fibrati vettoriali $\omega^\flat$ che, in quanto tale, avrà un inverso $\omega^\# : T^*S \to TS$. Dunque possiamo trasformare una 1-forma in un campo di vettori per mezzo della mappa $\omega^\#$: in particolare le 1-forme esatte, del tipo $df$ con $f \in C^\infty(S)$, danno luogo ai *campi hamiltoniani* che denotiamo con $X_f$:

$$X_f = \omega^\# df$$

Ora possiamo definire una operazione bilineare antisimmetrica sullo spazio delle funzioni lisce $C^\infty(S)$ come segue:

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$$

Diciamo che $\{,\}$ sono le *parentesi di Poisson* indotte dalla struttura simplettica $\omega$. Un calcolo immediato mostra che

$$\{,\} \text{ è una parentesi di Lie} \iff d\omega = 0$$

Quindi su una varietà simplettica lo spazio delle funzioni infinitamente differenziabili è un'algebra di Lie: inoltre vale l'identità di Leibniz

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$$

(dato che $X_f$ è un campo di vettori, quindi una derivazione dell'algebra $C^\infty(S)$).

Ad esempio calcoliamo le parentesi di Poisson nel caso della struttura simplettica su uno spazio vettoriale $V \oplus V^*$: rammentiamo che

$$\omega(v+\varphi, w+\psi) = \varphi(w) - \psi(v)$$

Consideriamo due funzioni $F, G \in C^\infty(V \oplus V^*)$, e sfruttiamo l'isomorfismo di spazi vettoriali topologici $C^\infty(V \oplus V^*) \cong C^\infty(V) \otimes C^\infty(V^*)$: limitiamoci al caso $F = f \otimes \varphi$ e $G = g \otimes \psi$; allora

$$\{f \otimes \varphi, g \otimes \psi\} = d\varphi(dg) - d\psi(dg)$$

Fissate le solite coordinate canoniche $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ otteniamo

$$\{f \otimes \varphi, g \otimes \psi\} = \langle \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}, \sum_i \frac{\partial g}{\partial q_i} \rangle - \langle \sum_i \frac{\partial \psi}{\partial p_i}, \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \rangle$$

$$= \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i} \right)$$

che è esattamente la formula data da Poisson per le parentesi da lui definite.

L'algebra di Lie $(C^\infty(S), \{,\})$ gode comunque di proprietà particolari: ad esempio il suo centro è dato dal gruppo di coomologia di de Rham $H^0(S)$, cioè dalle funzioni localmente costanti.

Inoltre, un po' come per le algebre semisemiplici di dimensione finita, $C^\infty(S)$ ammette una "forma di Killing", definita in realtà sulle funzioni a supporto compatto:

$$(\varphi, \psi) = \int_S \varphi\, \psi\ \omega^{\mathrm{top}}$$

Si tratta di un prodotto scalare non degenere ed invariante, nel senso che vale l'identità seguente:

$$(\{f, g\}, h) = (f, \{g, h\})$$

La motivazione per l'introduzione delle strutture di Poisson è data dal seguente teorema di Pauli–Jost:

**Teorema 2.1** *Una struttura simplettica su una varietà $S$ equivale ad una struttura di algebra di Lie su $C^\infty(S)$ che soddisfi all'identità di Leibniz e tale che il prodotto scalare $(,)$ sia invariante.*

Facendo cadere una delle condizioni di questa caratterizzazione troviamo la definizione di struttura di Poisson.

**Definizione 2.2** *Una varietà di Poisson è una varietà differenziabile $P$ equipaggiata di una struttura di algebra di Lie $\{,\}$ sullo spazio $C^\infty(P)$ in modo che valga l'identità di Leibniz $\{fg,h\} = f\{g,h\} + \{f,h\}g$.*

L'esempio più banale si ottiene considerando la struttura di Lie identicamente nulla. Un esempio interessante, che risale a Sophus Lie, è il seguente.

**Esempio 2.3** *Consideriamo uno spazio vettoriale $V$ il cui duale sia un'algebra di Lie $(\mathfrak{g}, [,])$, e lo spazio $C^\infty(V)$: vogliamo mostrare che $V$ è una varietà di Poisson, quindi definiamo*

$$\{f,g\}(v) = [(df)_v, (dg)_v](v)$$

*Questa definizione ha senso, dato che se $f,g \in C^\infty(V)$ allora possiamo valutarle su un punto $v \in V$; inoltre i differenziali $(df)_v, (dg)_v \in T_v^* \cong V^*$ sono funzionali lineari su $V$, cioè elementi di $\mathfrak{g}$, dunque possiamo calcolarne il commutatore e valutare il risultato su $v$ stesso.*

Si definisce così una struttura di algebra di Lie su $C^\infty(v)$ (dato che lo è $[,]$ su $\mathfrak{g}$) che soddisfa all'identità di Leibniz (come segue dalla regola $d(fg) = dfg + fdg$). Questa struttura di Poisson si dice *parentesi di Lie–Poisson* su $V$ (in dimensione finita si può partire da un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ e considerare lo spazio $V = \mathfrak{g}^*$).

Notiamo che una struttura di Lie–Poisson non è mai simplettica: infatti se consideriamo l'origine $0 \in V$, troviamo che, per ogni $f,g \in C^\infty(V)$:

$$\{f,g\}(0) = 0$$

e quindi la struttura non può essere non degenere.

# 3 Struttura di una varietà di Poisson

Partendo dagli esempi fondamentali che abbiamo dato possiamo dare qualche informazione generale sulla struttura di una varietà di Poisson: cominciamo col richiamare il risultato base della geometria simplettica.

**Teorema 3.1** *Se $(S,\omega)$ è una varietà simplettica e $x \in S$ allora esiste una carta locale intorno a $x$ con coordinate $(q_1,...,q_n,p_1,...,p_n)$ tali che la forma simplettica si scriva come*

$$\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$$

In altri termini le strutture simplettiche sono tutte localmente isomorfe: l'elegante argomento dato da Moser per dimostrare questo teorema procede come segue (argomento valido anche in dimensione infinita quando la forma è fortemente non degenere, ad esempio nel caso di spazi riflessivi): poiché l'enunciato del teorema si riferisce ad una carta locale possiamo supporre che $M$ sia uno spazio vettoriale simplettico e $x = 0$. Se $\omega_0 = \omega(0)$ e $\tilde{\omega} = \omega - \omega_0$ allora, per il lemma di Poincaré e la simpletticità di $\omega$, esiste una 1-forma $\alpha$ tale che $d\alpha = \tilde{\alpha}$ e, a meno di sostituire $\alpha$ con $\alpha - \alpha(0)$, possiamo supporre che $\alpha(0) = 0$. Ora entra in gioco l'ipotesi di non degenerazione della forma $\omega$, che consente di definire un campo vettoriale dipendente dal tempo $X_t$ come

$$\mathbf{i}_{X_t}\omega_t = -\alpha$$

ove $\omega_t = \omega + t\tilde{\omega}$ è ovviamente chiusa e non degenere. La condizione $\alpha(0) = 0$ implica $X_t(0) = 0$ e quindi possiamo integrare l'equazione differenziale associata al campo $X_t$ intorno a 0: il flusso del campo $\varphi_t$ sarà tale che $\varphi_0 =$identità, pertanto

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^*\omega_t) = \varphi_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t) + \varphi_t^*\frac{d}{dt}\omega_t = \varphi_t^* d\mathbf{i}_{X_t}\omega_t + \varphi_t^*\tilde{\omega} = \varphi_t^*(d(-\alpha) + \tilde{\omega}) = 0$$

sicché $\varphi_1$ è un diffeomorfismo che trasforma $\omega$ in $\omega_0$.

Un risultato analogo possiamo darlo per una varietà di Poisson qualsiasi: per enunciare questo risultato dobbiamo fare qualche ulteriore osservazione.

Per prima cosa notiamo che sarebbe estremamente utile avere una caratterizzazione geometrica delle strutture di Poisson: infatti la definizione è puramente algebrica. Per farlo osserviamo che, se $(P, \{,\})$ è una varietà di Poisson allora, date $f, g \in C^\infty(P)$, la funzione $\{f, g\}$ non dipende che dai differenziali di $f$ e $g$, dato che vale l'identità di Leibniz. Possiamo cioè scrivere

$$\{f, g\} = \pi(df, dg)$$

dove $\pi$ è una funzione bilineare alternante, cioè un tensore controvariante $\pi \in TP \wedge TP$.

Viceversa un tensore di questo tipo induce delle parentesi bilineari che tuttavia non definiscono una struttura di Poisson a meno che una certa condizione di integrabilità, equivalente all'identità di Jacobi, non sia verificata: per scriverla occorrono le parentesi di Schouten–Nijenhuis definite sull'algebra dei tensori controvarianti, e per le quali si rimanda ad esempio a [7].

Possiamo comunque dare una caratterizzazione locale della struttura di Poisson in termini del tensore $\pi$ come segue: consideriamo un punto $x \in M$

della varietà e una carta locale $(U; x_1, ..., x_n)$ intorno a questo punto, nella quale il tensore $\pi$ si scrive come

$$\pi = \sum_{i<j} \pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$$

con $\pi_{ij} = -\pi_{ji}$ (essendo il tensore antisimmetrico).

Ora $\pi$ definisce una struttura di Poisson, per mezzo della $\{f, g\} = \pi(df, dg)$ se e solo se

$$(\dagger) \qquad \sum_l \left( \pi_{li} \frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_l} + \pi_{lj} \frac{\partial \pi_{ki}}{\partial x_l} + \pi_{lk} \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_l} \right) = 0$$

Questa condizione risale ai lavori di Sophus Lie. Si noti che

$$\pi_{ij} = \{x_i, x_j\}$$

Il tensore $\pi$ che caratterizza la struttura di Poisson su una varietà si dice *tensore di Poisson*.

Ad esempio, nel caso di una struttura di Lie–Poisson, il tensore $\pi$ è determinato come segue: consideriamo una base $(e_1, ...e_n)$ di $V$ e quindi la base duale $(e^1, ..., e^n)$ dell'algebra di Lie $\mathfrak{g} = V^*$: se $(x_1, ..., x_n)$ sono le coordinate relative alla base $(e_1, ...e_n)$, possiamo scrivere, in un punto $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$:

$$\pi_{ij}(\mathbf{y}) = \{x_i, x_j\}(\mathbf{y}) = [dx_i, dx_j](\mathbf{y}) = \sum_k c_{ij}^k y_k$$

ove $c_{ij}^k$ sono le costanti di struttura di $\mathfrak{g}$ rispetto alla base $(e^1, ..., e^n)$.

Quindi il tensore di Poisson per le parentesi di Lie–Poisson ha componenti lineari omogenee nelle coordinate fissate che hanno come coefficienti le costanti di struttura dell'algebra di Lie $V^*$: notiamo che la condizione di integrabilità $(\dagger)$ diviene in questo caso l'usuale equazione quadratica che esprime l'identità di Jacobi in termini delle costanti di struttura di un'algebra di Lie rispetto ad una base fissata.

In sostanza si ha il seguente

**Teorema 3.2** *Una struttura di Poisson è univocamente determinata da un tensore controvariante antisimmetrico $\pi \in TP \wedge TP$ che soddisfi, attorno ad ogni punto della varietà, la condizione* $(\dagger)$.

Per questo motivo una varietà di Poisson si indica spesso come $(P, \pi)$. Notiamo che, a parte la condizione $(\dagger)$, nessun'altra condizione è imposta sul tensore $\pi$: in particolare, il rango di questo tensore non deve necessariamente essere costante.

**Definizione 3.3** *Il rango di una struttura di Poisson in un punto è il rango del tensore di Poisson in quel punto.*

In generale il rango è soltanto una funzione semicontinua inferiormente, cioè nell'intorno di un punto non può decrescere.

Ad esempio, nel caso della struttura di Lie–Poisson, c'è sempre almeno un punto che ha rango zero, vale a dire l'origine.

Se invece consideriamo una struttura simplettica, il rango del suo tensore di Poisson è ovunque massimo (pari alla dimensione della varietà): in effetti una varietà di Poisson il cui rango sia ovunque massimo è simplettica e la forma simplettica si ottiene, localmente, invertendo il tensore di Poisson.

**Definizione 3.4** *Un punto $x \in P$ di una varietà di Poisson $(P, \pi)$ si dice regolare se esiste un intorno di $x$ nel quale il rango del tensore di Poisson è costante; altrimenti il punto si dice singolare.*

Ad esempio il punto origine di uno spazio vettoriale con la struttura di Lie–Poisson è singolare: l'insieme dei punti regolari è comunque un aperto denso nella varietà. Il caso in cui ogni punto sia regolare è quindi di interesse anche per lo studio delle varietà di Poisson qualsiasi.

**Definizione 3.5** *Una varietà di Poisson è regolare se il rango del tensore di Poisson è costante.*

Le varietà di Poisson regolari sono molto più semplici da studiare, e la struttura di Poisson su di esse può definirsi come una $G$-struttura, a differenza del caso generale.

In ogni caso, per mezzo del tensore di Poisson, possiamo introdurre i campi hamiltoniani su una varietà di Poisson qualsiasi come segue: consideriamo la mappa $\pi^\# : T^*P \to TP$ definita come

$$\langle \pi^\#(\alpha), \beta \rangle = \pi(\alpha, \beta)$$

(denotiamo con $\langle , \rangle$ l'accoppiamento bilineare fra 1-forme e campi). Allora il campo hamiltoniano di hamiltoniana $f \in C^\infty(P)$ è definito come

$$X_f = \pi^\#(df)$$

Notiamo che lo spazio dei campi hamiltoniani è una sottoalgebra di Lie dell'algebra dei campi di vettori, dato che

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$$

Fra l'altro questa è esattamente la forma che Jacobi diede all'identità che porta il suo nome quando l'introdusse per la prima volta (1821).

Possiamo ora finalmente enunciare il teorema di Weinstein che estende al caso delle strutture di Poisson il teorema di Darboux:

**Teorema 3.6** *Se $(P,\pi)$ è una varietà di Poisson, allora intorno a ciascun suo punto $x \in P$ esiste una carta locale $(U; q_1, ..., q_r, p_1, ..., p_r, z_1, ..., z_k)$ tale che il tensore di Poisson assuma la forma*

$$\pi = \sum_{i=1}^{r} \left( \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial q_i} \right) + \sum_{i<j}^{1,...,k} \rho_{ij} \frac{\partial}{\partial z_i} \wedge \frac{\partial}{\partial z_j}$$

*ove $\rho_{ij}$ sono funzioni che si annullano in $x$, $2r$ è il rango della struttura di Poisson in $x$ e $2r + k$ la dimensione della varietà.*

Per una dimostrazione si confronti [8].

Evidentemente nel caso di una struttura simplettica (cioè $k = 0$) ritroviamo il classico teorema di Darboux. Nel caso di strutture di Poisson regolari l'enunciato del teorema si semplifica notevolmente, dato che è possibile annullare le funzioni $\rho_{ij}$ nell'intero intorno, e scrivere

$$\pi = \sum_{i=1}^{r} \left( \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial q_i} \right)$$

Vale la pena di notare che in questo caso il risultato è sostanzialmente dovuto a Sophus Lie.

L'altro pilastro sul quale poggia la teoria delle varietà di Poisson è il teorema di fogliazione simplettica di Lie–Kirillov.

Stavolta la motivazione viene dall'esempio delle strutture di Lie–Poisson, per le quali possiamo enunciare il seguente risultato, alla base del metodo delle orbite di Kirillov in teoria delle rappresentazioni (per una dimostrazione si consulti [7]):

**Teorema 3.7** *Se $\mathfrak{g} = V^*$ è un'algebra di Lie, allora le orbite dell'azione coaggiunta $ad^* : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}\,(V)$ sono varietà simplettiche rispetto alla restrizione del tensore di Lie–Poisson.*

Il tensore di Lie–Poisson è il tensore di Poisson lineare che abbiamo più sopra scritto in termini delle costanti di struttura: dunque questo tensore è tangente alle orbite coaggiunte (che sono sottovarietà immerse, sebbene non necessariamente dotate della topologia indotta) e su di esse definisce una struttura di Poisson di rango massimo, quindi simplettica.

Questo risultato è valido per ogni varietà di Poisson, il che fa somigliare la teoria di Poisson ad una "teoria non lineare delle rappresentazioni", una volta che si siano identificati gli analoghi delle orbite coaggiunte.

**Definizione 3.8** *Se $(P, \pi)$ è una varietà di Poisson, la foglia simplettica per un punto $x$ è la sottovarietà $S_x \subset M$ i cui punti sono quelli congiungibili a $x$ per mezzo di una curva liscia a tratti il cui vettore tangente sia hamiltoniano.*

Usando tecniche di teoria dei controlli si può allora dimostrare il seguente risultato, che rende conto dell'aggettivo "simplettico" riservato alle sottovarietà $S_x$ (si veda [8] o [7] per una dimostrazione):

**Teorema 3.9** *Se $(P, \pi)$ è una varietà di Poisson allora si decompone nell'unione disgiunta delle sue foglie simplettiche, che sono sottovarietà simplettiche rispetto alla restrizione del tensore di Poisson di $P$.*

Possiamo interpretare le foglie simplettiche come le sottovarietà integrali della distribuzione dei campi hamiltoniani: precisamente consideriamo l'immagine della mappa $X : C^\infty(P) \to \mathfrak{X}(P)$ che associa ad una funzione il suo campo hamiltoniano; questa immagine è lo spazio dei campi hamiltoniani, che è una sottoalgebra di Lie dello spazio di tutti i campi: si tratta, inoltre, dello spazio delle sezioni di un sottofascio $H \subset TP$ del fibrato tangente.

Nel caso regolare questo sottofascio $H$ è un sottofibrato vettoriale di $TP$, ed il fatto che le sue sezioni siano un'algebra di Lie implica l'involutività e quindi, per il teorema di Frobenius, l'integrabilità di $H$. Le foglie integrali di $H$ sono esattamente le foglie simplettiche coinvolte nel teorema precedente, che dunque nel caso regolare si riduce al teorema di Frobenius.

Ad esempio, nel caso di una varietà simplettica, le foglie simplettiche sono esattamente le componenti connesse; nel caso di una varietà con struttura di Poisson nulla ogni punto è esso stesso una singola foglia mentre nel caso delle strutture di Lie–Poisson, come abbiamo già detto, le foglie sono esattamente le orbite della rappresentazione coaggiunta.

# 4 Strutture di Poisson regolari e strutture complesse

Consideriamo d'ora in avanti il caso di una varietà di Poisson regolare, cioè una coppia $(P, \pi)$ ove il tensore $\pi$ soddisfa la condizione di integrabilità ed ha rango costante. Le varietà simplettiche rientrano in questa casistica, mentre quelle di Lie–Poisson no.

Si può dare una descrizione molto più vicina a quella delle varietà simplettiche per una varietà di Poisson regolare: precisamente, dato che l'algebra di Lie dei campi hamiltoniani è data dalle sezioni di un sottofibrato $H$ di $TP$, e dato che questo sottofibrato è involutivo, le foglie simplettiche costituiscono una fogliazione nel senso usuale del termine, con foglie di dimensione pari al rango del tensore di Poisson.

Ogni volta che si ha una fogliazione su una varietà è possibile considerare oggetti tangenti alle foglie: ad esempio il tensore di Poisson $\pi \in TP \wedge TP$ è tangente alle foglie, nel senso che per ogni $x \in P$ si ha che $\pi_x$ appartiene al sottospazio vettoriale $H_x \subset T_xP$ dei vettori tangenti alla foglia $S_x$ passante per $x$.

In generale, data una varietà $M$ con una fogliazione $\mathcal{F}$, possiamo definire il complesso di de Rham tangente alle foglie come la somma diretta degli spazi

$$\Omega^k(M, \mathcal{F}) := \left\{\alpha \in \wedge^k T^*M \,|\, \forall x \in M \ \alpha_x \in \wedge^k T^*_x S_x\right\}$$

(ove $S_x$ è la foglia per $x \in M$) i cui elementi si dicono *$k$-forme fogliate.*

Si ottiene così un sottocomplesso dell'usuale complesso di de Rham: inoltre è possibile definire un differenziale esterno fogliato $d_{\mathcal{F}} : \Omega^k(M, \mathcal{F}) \to \Omega^{k+1}(M, \mathcal{F})$ usando la stessa formula del differenziale usuale solo applicata a forme fogliate: ad esempio, ogni funzione (anche non localmente costante) che sia costante sulle foglie ha differenziale nullo.

**Teorema 4.1** *Una struttura di Poisson regolare $\pi$ di rango $2r$ su una varietà $P$ equivale al dato di una fogliazione $\mathcal{F}$ e di una 2-forma fogliata chiusa e di rango $2r$.*

Naturalmente non basta una fogliazione su una varietà le cui foglie, prese singolarmente, siano simplettiche per indurre una struttura di Poisson: queste strutture simplettiche devono infatti incollarsi lungo la parte trasversale perché ciò accada. Precisamente

**Lemma 4.2** *Una struttura di Poisson su una varietà $P$ è equivalente al dato di una fogliazione le cui foglie siano simplettiche e tale che, per ogni funzione $f \in C^\infty(P)$, la mappa $x \mapsto X_{f|_{S_x}}$ che ad un punto associa il campo hamiltoniano di $f$ rispetto alla struttura simplettica della foglia $S_x$ passante per $x$ definisca un campo di vettori sulla varietà.*

Un'altra descrizione geometrica che è possibile dare per una struttura di Poisson regolare è come $G$-struttura: si rimanda per questo a [3].

Diamo ora una classe di esempi notevoli di varietà di Poisson regolari: le varietà con struttura di Dirac[2].

[2] La terminologia non è standard: il termine "varietà di Dirac" è usato in un contesto essenzialmente più generale, quello degli algebroidi: tuttavia le strutture di Dirac come sono qui definite sono state essenzialmente introdotte da Dirac per descrivere il formalismo hamiltoniano in presenza di vincoli, si veda ad esempio [4].

**Definizione 4.3** *Una struttura di Dirac su una varietà $D$ è data da una fogliazione $\mathcal{F}$ e da una 2-forma non degenere $\omega$ tale che i pull-back di questa forma sulle foglie $S_x$ (rispetto alle immersioni delle foglie in $D$) inducano strutture simplettiche.*

In particolare una struttura di Dirac $(D, \mathcal{F}, \omega)$ definisce una fogliazione con foglie simplettiche: se $f \in C^\infty(D)$ è una funzione su tutta la varietà $D$ allora possiamo considerare, in ciascun punto, il campo vettoriale $X_{f|_{S_x}}$ hamiltoniano associato alla restrizione di $f$ alla foglia $S_x$ rispetto alla struttura simplettica della foglia, che è $\imath^*_{S_x}\omega$, ove con $\imath_{S_x} : S_x \to D$ denotiamo l'immersione della foglia $S_x$ in $D$.

Ma $\omega$ è non degenere, quindi induce un isomorfismo $\omega^\# : T^*D \to TD$ (esattamente come nel caso simplettico) che possiamo usare per trasformare $df$ in un campo $\omega^\#(df)$: ora se consideriamo lo spezzamento $TD = T\mathcal{F} \oplus \mathcal{N}$ del fibrato tangente a $D$ nel sottofibrato tangente alla fogliazione e nel suo complemento $\omega$-ortogonale, troviamo immediatamente che la proiezione su $T\mathcal{F}$ del campo $\omega^\#(df)$ è esattamente la sezione $x \mapsto X_{f|_{S_x}}$ del lemma precedente, che quindi implica il

**Teorema 4.4** *Una struttura di Dirac $(D, \mathcal{F}, \omega)$ induce una struttura di Poisson sulla varietà $D$.*

Ovviamente la struttura di Poisson indotta da una struttura di Dirac è regolare e la sua fogliazione simplettica coincide con la fogliazione della struttura di Dirac.

L'interesse per le strutture di Dirac è motivato dal seguente teorema di Vaisman (si confronti [8, §3])

**Teorema 4.5** *Ogni varietà di Poisson regolare si immerge come sottovarietà di Poisson in una varietà la cui struttura di Poisson è indotta da una struttura di Dirac.*

Esempi di strutture di Dirac si hanno facilmente considerando varietà simplettiche fogliate: ad esempio si prenda $\mathbb{R}^{2n}$ con la struttura simplettica standard $\sum_i dq_i \wedge dp_i$ e con la fogliazione in piani paralleli definita dalle equazioni $\{q_{k+i} = c_i,\, p_{k+i} = d_i\}$ per $i = 1, ..., n-k$ e $c_i, d_i$ costanti.

Una classe di esempi di varietà di Dirac non necessariamente simplettiche può ottenersi come segue: consideriamo una varietà di contatto compatta $C$ con forma di contatto $\alpha$, vale a dire una 1-forma tale che $\alpha \wedge d\alpha^n \neq 0$ (ove $2n+1$ è la dimensione di $C$). Allora sulla varietà $D = C \times S^1$ resta indotta una struttura di Dirac di rango due, ottenuta considerando il sottofibrato di

$TD$ generato dal campo $X$ ottenuto sollevando a $D$ il campo di Reeb su $C$, caratterizzato dalle equazioni

$$\langle R_\alpha, \alpha \rangle = 1 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{i}_{R_\alpha} d\alpha = 0$$

e dal campo vettoriale $Y$ ottenuto sollevando a $D$ un qualsiasi campo mai nullo tangente a $S^1$. Si tratta di un fibrato involutivo, dato che i due campi che lo generano commutano, e quindi si integra ad una fogliazione $\mathcal{F}$ con foglie bidimensionali.

Se consideriamo la 2-forma su $D$ definita come

$$\omega = d\alpha + \alpha \wedge \lambda$$

ove $\lambda$ è l'elemento di lunghezza su $S^1$ allora abbiamo una forma non degenere, i cui pull-back sulle foglie di $\mathcal{F}$ sono forme simplettiche: infatti sono certamente chiuse (2-forme su varietà bidimensionali!) e non degeneri dato che $\omega(X, Y) \neq 0$. Abbiamo dunque una struttura di Dirac $(D, \mathcal{F}, \omega)$.

Rammentiamo che una *struttura quasi complessa* su una varietà differenziabile è un operatore $J : TM \to TM$ tale che $J^2 = -\mathbf{I}$: come noto, su una varietà esiste una struttura quasi complessa se e solo se esiste una 2-forma non degenere (non necessariamente simplettica: ad esempio $S^6$ possiede la struttura quasi complessa indotta dalla moltiplicazione degli ottetti di Cayley, ma non possiede strutture simplettiche perché è compatta e il suo secondo gruppo di omologia è nullo).

Sembra quindi naturale se possano darsi strutture quasi complesse compatibili con strutture di Dirac.

**Definizione 4.6** *Se $(M, \mathcal{F})$ è una varietà fogliata allora una 2-forma fogliata non degenere $\omega$ ed una struttura quasi complessa fogliata $J$ si dicono compatibili (ovvero si dice che $\omega$ è calibrata su $J$) se:*

(1) $\omega(JX, JY)(x) = \omega(X, Y)(x)$

(2) $\omega(JX, X)(x) > 0$

(3) $\imath^*(d\omega)(x) = 0$

*ove $\imath$ denota l'immersione della foglia $S_x$ in $M$.*

Con struttura quasi complessa fogliata intendiamo una struttura quasi complessa che rimanga tale se ristretta alle foglie.

In modo analogo a quanto si fa nel caso simplettico è possibile allora dimostrare il

**Teorema 4.7** *Se* $(D, \mathcal{F}, \omega)$ *è una struttura di Dirac allora esiste sempre una struttura quasi complessa fogliata che la calibra.*

Questo teorema non si inverte, nel senso che esistono strutture quasi complesse su varietà fogliate che non ammettono strutture di Dirac calibrate.

Ostruzioni possono darsi nel modo seguente: consideriamo ad esempio lo spazio $\mathbb{R}^{2(k+n)}$: vogliamo scrivere qui le condizioni di calibrazione, che divengono

$$\begin{cases} J^T \omega J = 0 \\ X \neq 0 \Rightarrow \omega(JX, X) > 0 \\ \imath^*(d\omega) = 0 \end{cases}$$

Supponiamo che una tale forma esista, consideriamo l'origine di $\mathbb{R}^{2(k+n)}$ e la forma simplettica standard $\omega_0$ su $\mathbb{R}^{2k}$, e valutiamo $\omega(0)$ ottenendo una matrice numerica del tipo

$$\omega(0) = \begin{pmatrix} \omega_0 & \epsilon_0 \\ -\epsilon_0^T & \eta_0 \end{pmatrix}$$

Ma se abbiamo una struttura quasi complessa fogliata calibrata su $\omega$, possiamo sempre scriverla come

$$\begin{aligned} J(x) &= \begin{pmatrix} A(x) & B(x) \\ 0 & D(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0 & 0 \\ 0 & J_{2r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(x) & B(x) \\ 0 & D(x) \end{pmatrix}^{-1} \\ &:= \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ 0 & J_{22} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e supporre che

$$J(0) = \begin{pmatrix} \omega_0 & 0 \\ 0 & J_{2r} \end{pmatrix}$$

soddisfi alla

$$J^T(0)\omega(0)J(0) = \omega(0)\,.$$

Ora, ogni foglia è una sottovarietà simplettica di $\mathbb{R}^{2(k+n)}$: consideriamo la foglia $S_0$ passante per l'origine. In base al teorema di Darboux deve esistere un diffeomorfismo locale $\varphi : S_0 \to S_0$ tale che $\varphi^*\imath^*(\omega) = \omega_0$: estendiamo questo diffeomorfismo ad un diffeomorfismo $\psi : \mathbb{R}^{2(k+n)} \to \mathbb{R}^{2(k+n)}$ in modo che $\psi_*(0)$ sia l'identità, e scriviamo la sua jacobiana come

$$\psi_*(x) = \begin{pmatrix} P(x) & R(x) \\ \mathbf{0} & Q(x) \end{pmatrix}$$

Allora, dato che supponiamo $\omega$ calibrata su $J$, la struttura quasi complessa

$$\psi_*^{-1} \circ J \circ \psi_*$$

deve essere compatibile con $\omega(0)$, e quindi, definendo

$$\tilde{\omega}(X, Y) = \omega(\psi_*^{-1} \circ J \circ \psi_*(X), \psi_*^{-1} \circ J \circ \psi_*(Y))$$

dobbiamo avere

$$\left.\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_i}\right|_0 = \left.\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right|_0$$

Da questa equazione troviamo delle condizioni necessarie per la compatibilità di $\omega$ e $J$, ad esempio, nelle notazioni precedenti, la

$$\left[\omega_0, \frac{\partial P}{\partial x_i}\right] + \frac{\partial P}{\partial x_i}^T \omega_0 - \omega_0^T \frac{\partial P}{\partial x_i}^T - \frac{\partial J_{11}}{\partial x_i}^T + \frac{\partial J_{11}}{\partial x_i} = 0$$

che permette facilmente di costruire strutture quasi complesse non calibrabili.

# 5 Esempi

Consideriamo qui qualche esempio di struttura di Dirac che ammette strutture quasi complesse compatibili.

**Esempio 5.1** *Consideriamo $S^3$ immersa in $\mathbb{R}^4$ con coordinate globali $(x_1, ..., x_4)$ e la sua struttura di contatto standard*

$$\alpha = x_1 dx_2 - x_2 dx_1 + x_3 dx_4 - x_4 dx_3$$

*Consideriamo anche $S^1$ immerso in $\mathbb{R}^2$ con coordinate globali $(x_5, x_6)$: il suo modulo dei campi di vettori è generato ad esempio da*

$$V = -x_6 \frac{\partial}{\partial x_5} + x_5 \frac{\partial}{\partial x_6}$$

*Ora costruiamo la struttura di Dirac su $S^3 \times S^1$ che avevamo considerato nel paragrafo precedente: la 2-forma non degenere è data da*

$$\omega = d\alpha + \alpha \wedge d\lambda$$

*ove $\lambda$ è la 1-forma su $S^1$ tale che $\langle \lambda, V \rangle = 1$:*

$$\lambda = -x_6 dx_5 + x_5 dx_6$$

*Consideriamo anche una base del modulo dei campi di vettori su $S^3$ (che è parallelizzabile) e scegliamo quella standard:*

$$\begin{cases} X = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_4} \\ Y = -x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - x_4\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1\frac{\partial}{\partial x_3} + x_2\frac{\partial}{\partial x_4} \\ Z = -x_4\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3} + x_1\frac{\partial}{\partial x_4} \end{cases}$$

*Notiamo che $X$ è il campo di Reeb, e quindi scegliamo la distribuzione involutiva su $S^3 \times S^1$ generata dai sollevamenti di $X$ e $V$, via le mappe di proiezione e la corrispondente fogliazione $\mathcal{F}$ fornita dal teorema di Frobenius.*

Con ciò abbiamo definito la struttura di Dirac: se ora consideriamo la struttura quasi complessa su $S^3 \times S^1$ definita come

$$\begin{cases} J(X) = V \\ J(Y) = Z \\ J(Z) = -Y \\ J(V) = -X \end{cases}$$

è facile verificare che si tratta di una struttura fogliata (cioè che la fogliazione è $J$-invariante: $J\mathcal{F} \subset \mathcal{F}$) compatibile con $\omega$: di più notiamo, sebbene sia ovvio, che *le foglie sono kähleriane* rispetto ai pull-back di $\omega$ ed alle restrizioni di $J$. Questo è interessante perché la varietà $S^3 \times S^1$ non è kähleriana per motivi coomologici.

Rammentiamo infatti che esistono forti restrizioni sulla topologia di una varietà compatta di dimensione $2n$ affinché questa possa essere kähleriana: ne enumeriamo qualcuna.

(1) I numeri di Betti pari $b_{2k}(M)$ sono positivi ($k = 1, ...,\dim M$).

(2) I numeri di Betti dispari $b_{2k-1}(M)$ sono pari ($k = 1, ...,\dim M$).

(3) $b_k(M) \leq b_{k+2}(M)$ per $k = 0, ..., n-1$.

(la prima è necessaria anche per l'esistenza di strutture simplettiche).

Comunque nel caso di foglie di dimensione due la kählerianità è in qualche modo implicita: diamo un esempio interessante di varietà simplettica ma non kähleriana, sulla quale definiremo tuttavia una struttura di Dirac compatibile con una struttura quasi complessa in modo che le foglie, che saranno di dimensione quattro, siano kähleriane.

**Esempio 5.2** *Consideriamo la varietà di Iwasawa $I(3)$ che è definita come un quoziente di gruppi $N/\Gamma$, ove*

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_3 \\ 0 & 1 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{z_i \in \mathbb{C}} \qquad e \qquad \Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m_1 & m_3 \\ 0 & 1 & m_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{m_i \in \mathbb{Z}^3[\sqrt{-1}]}$$

*agisce su $N$ per moltiplicazione.*

Sebbene questa varietà compatta e parallelizzabile abbia tutti i numeri (di Betti) per essere kähleriana, in realtà non può esserlo perché non soddisfa alla condizione di Lefschetz forte (si veda [5]).

Comunque possiamo costruire una struttura di Dirac calibrata su una struttura complessa fogliata nel modo seguente: lavoriamo sul gruppo $N$ e consideriamolo come una varietà complessa con coordinate

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + \sqrt{-1}x_2 \\ z_2 = x_3 + \sqrt{-1}x_4 \\ z_3 = x_5 + \sqrt{-1}x_6 \end{cases}$$

Scegliamo inoltre la seguente base per il modulo dei campi di vettori su $I(3)$

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} & \xi_4 &= \frac{\partial}{\partial x_4} - x_2\frac{\partial}{\partial x_5} + x_1\frac{\partial}{\partial x_6} \\ \xi_2 &= \frac{\partial}{\partial x_5} & \xi_5 &= \frac{\partial}{\partial x_6} \\ \xi_3 &= \frac{\partial}{\partial x_3} + x_1\frac{\partial}{\partial x_5} + x_2\frac{\partial}{\partial x_6} & \xi_6 &= \frac{\partial}{\partial x_2} \end{aligned}$$

ed una sua base duale per il modulo delle 1-forme

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= dx_1 & \alpha_4 &= dx_4 \\ \alpha_2 &= dx_5 - x_1 dx_3 + x_2 dx_4 & \alpha_5 &= dx_6 - x_2 dx_3 - x_1 dx_4 \\ \alpha_3 &= dx_3 & \alpha_6 &= dx_2 \end{aligned}$$

Finalmente possiamo definire la 2-forma come

$$\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_6 - \alpha_2 \wedge \alpha_5 - \alpha_3 \wedge \alpha_4$$

Evidentemente è non degenere, ad esempio la sua matrice associata

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è invertibile. Ora consideriamo la distribuzione $\mathcal{F}$ generata da $\{\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5\}$: dato che le regole di commutazione per i campi $\xi_i$ sono

$$[\xi_1, \xi_4] = \xi_5 \qquad [\xi_1, \xi_3] = \xi_2 \qquad [\xi_3, \xi_6] = -\xi_5 \qquad [\xi_4, \xi_6] = \xi_2$$

(i rimanenti commutatori sono zero), otteniamo una distribuzione involutiva: inoltre si verifica che

$$d\omega(\xi_i, \xi_j, \xi_k) = 0$$

per ogni $i, j, k \in \{2, 3, 4, 5\}$, cioè che i pull-back di $\omega$ alle foglie della fogliazione che integra $\mathcal{F}$ sono chiuse e, dato che questi pull-back sono non degeneri, abbiamo che le foglie sono simplettiche, e la nostra struttura di Dirac è completamente definita.

Infine consideriamo la struttura quasi complessa su $I(3)$ definita come

$$\begin{array}{ccc} J(\xi_1) = -\xi_6 & J(\xi_2) = \xi_5 & J(\xi_3) = \xi_4 \\ J(\xi_4) = -\xi_3 & J(\xi_5) = -\xi_2 & J(\xi_6) = \xi_1 \end{array}$$

**Teorema 5.3** *$J$ è una struttura complessa (cioè è integrabile) sulla varietà di Iwasawa che induce una struttura complessa fogliata sulla fogliazione che integra $\mathcal{F}$, e la cui restrizione rende le foglie kähleriane rispetto alle strutture simplettiche indotte da $\omega$ per pull-back.*

Notiamo che la struttura complessa $J$ su $I(3)$ è calibrata sulla 2-forma non degenere (che ovviamente non può essere chiusa):

$$\omega(JX, JY) = \omega(X, Y) \qquad \text{and} \qquad \omega(JX, X) > 0$$

Dunque esiste una metrica hermitiana globale $h(X, Y) = \omega(JX, Y)$.

Inoltre le foglie sono tutte compatte, precisamente dei tori, e possiamo identificarli con le fibre della fibrazione $p : I(3) \longrightarrow \mathbb{T}^2$ definita come

$$p\left(\left[\begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_3 \\ 0 & 1 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\right) = [z_1]$$

Notiamo infine che la compatibilità con strutture quasi complesse può essere definita anche per strutture di Poisson regolari qualsiasi, non necessariamente indotte da strutture di Dirac: in questo caso la dimensione della varietà può essere dispari, quindi richiederemo che la struttura quasi complessa sia solo fogliata, cioè che sia un operatore $J : T\mathcal{F} \to T\mathcal{F}$ di quadrato $-\mathbf{Id}$ definito solo sul tangente alle foglie (in definitiva che sia una struttura CR). La motivazione per l'introduzione di queste strutture può rintracciarsi nel seguente risultato (si confronti [3]):

**Teorema 5.4** *Se $(P, \pi)$ è una varietà di Poisson regolare e $H \subset TP$ è il sottofibrato immagine della mappa $\pi^{\#} : T^*P \to TP$ allora lo spazio delle strutture quasi complesse fogliate (rispetto alla fogliazione che integra $H$) compatibili con $\pi$ non è vuoto.*

La compatibilià cui si riferisce l'enunciato si riduce alla seguente richiesta: sulle singole foglie, la struttura di Poisson e la struttura quasi complessa fogliata debbono dar luogo ad una struttura simplettica e ad una struttura quasi complessa compatibile con essa. Cioè le foglie sono quasi kähleriane.

**Definizione 5.5** *Una varietà di Poisson–Kähler è una varietà differenziabile $M$ su cui siano date una struttura di Poisson regolare $\pi$ ed una struttura quasi complessa fogliata (rispetto alla fogliazione indotta da $\pi$) in modo che le loro restrizioni alle foglie diano luogo a strutture kähleriane.*

Abbiamo già dato degli esempi di varietà di Poisson–Kähler, che anzi avevano una struttura quasi complessa globale e non semplicemente definita sulla fogliazione.

Comunque anche in questo caso il teorema precedente non si inverte, nel senso che è possibile dare strutture quasi complesse fogliate che non ammettono strutture di Poisson regolari compatibili.

**Esempio 5.6** *Consideriamo $\mathbb{R}^7$ con coordinate globali $(x_1, ..., x_7)$ e su di esso la fogliazione di codimensione uno in iperpiani paralleli definita dall'equazione*

$$x_7 = costante$$

*e su questa fogliazione la struttura quasi complessa definita dalla matrice*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \psi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \psi_2 \\ \varphi(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \psi_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_5 \\ 0 & 0 & 1 & -\varphi(x) & 0 & 0 & \psi_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_7 \end{pmatrix}$$

*ove $\varphi, \psi_1, ..., \psi_7$ sono funzioni in $C^\infty(\mathbb{R}^7)$ tali che*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(0) \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \psi_7(x) \neq 0$$

Usando una condizione necessaria per l'esistenza di strutture di Poisson compatibili con strutture quasi complesse fogliate ([3]) del tutto analoga a quella che abbiamo dato per il caso delle strutture di Dirac si verifica immediatamente che $J$ non ammette nessuna struttura di Poisson (la cui fogliazione indotta sia quella ove $J$ è definita) compatibile. Considerando funzioni periodiche questo esempio si estende al toro $\mathbb{T}^7$.

Esempi simili possono darsi per fogliazioni con foglie di dimensione maggiore o uguale a quattro: per foglie di dimensione uguale a quattro, le condizioni citate sono sempre verificate.

# Bibliografia


[1] R. Abraham, J.E. Marsden J.E, *Foundations of Mechanics,* Addison-Wesley, 1978.

[2] P.R. Chernoff, J.E. Marsden, *Properties of Infinite Dimensional Hamiltonian systems,* Lecture Notes in Mathematics **425**, Springer, 1974.

[3] P. Caressa, A. Tomassini, *On Poisson–Kähler Structures,* `preprint` Università di Parma

[4] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics,* Yeshiva University, 1964.

[5] M. Fernández, A. Gray, *The Iwasawa manifold,* in *Differential Geometry,* Proc. Second Int. Symp. Peniscola (Spain), Lecture Notes in Mathematics **1209**, Springer, 1986, p.157–159.

[6] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry,* Wiley, 1963.

[7] J.E. Marsden, T. Ratiu, *Mechanics and Symmetry,* Springer, 1994.

[8] I. Vaisman, *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds,* Progress in Mathematics **118**, Birkhäuser, 1994.