Capitolo 17

SISTEMI QUANTISTICI

In questo capitolo introduciamo l'approccio di von Neumann alla Meccanica Quantistica (cfr. [24]) e mostriamo come questo possa inquadrarsi nella teoria delle rappresentazioni delle C*-algebre da noi precedentemente trattata (capitolo **??**). Introdurremo nel nostro linguaggio i concetti di base della Meccanica Quantistica, ponendo l'accento sul concetto di simmetria, ed utilizzandolo per dare la formulazione relativistica dell'equazione di Schrödinger, data da Dirac. Utilizzeremo alcune nozioni di Relatività Ristretta, almeno una familiarità con i termini: talora utilizzeremo risultati della letteratura non completamente dimostrati in queste note; comunque, come si vedrà, il formalismo delle algebre di Lie introdotto nel capitolo **??** interverrà pesantemente.

17.1 Stati ed osservabili

Consideriamo di un sistema fisico un numero molto grande N di copie, che per definizione si chiama *ensemble*: si consideri inoltre un numero $N' \ll N$ di copie dell'ensemble, e si immagini di eseguire N' misure secondo le procedure di misura in modo da ottenere $\ell_1, \dots, \ell_{N'}$ valori, che sono proprietà dell'ensemble, posto che gli N' campioni siano scelti a caso e N' sia abbastanza grande.

Il valore ottenuto si dice *attesa* (*expectation*), e si denota Exp.

17.1.1 Definizione *Dato un sistema fisico definiamo:*

- *Gli* stati *del sistema sono le classi di equivalenza di ensemble modulo la relazione*

$$\Omega \approx \Omega' \iff \textit{per ogni procedura } A \quad \mathrm{Exp}(\Omega, A) = \mathrm{Exp}(\Omega', A)$$

- *Gli* osservabili *sono le classi di equivalenza di procedure modulo la relazione*

$$A \approx A \iff \textit{per ogni ensemble } \Omega \quad \mathrm{Exp}(\Omega, A) = \mathrm{Exp}(\Omega, A')$$

Denotiamo l'insieme degli stati con $\mathcal{S}$ e l'insieme degli osservabili con $\mathcal{O}$.

Possiamo supporre che $\mathcal{S}$ sia un insieme convesso: infatti

$$\forall\Omega,\Omega'\in\mathcal{S}\ \forall\alpha,\beta\geq 0\quad \alpha+\beta=1\Rightarrow\alpha\Omega+\beta\Omega'\in\mathcal{S}$$

Questo può vedersi nel seguente modo: se $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$ allora è

$$\alpha=\frac{N_1}{N}\qquad\text{e}\qquad\beta=\frac{N_2}{N}$$

e, preso $N\gg 0$ tale che N_1 e N_2 siano le cardinalità di due ensemble Ω_1 e Ω_2 e se Ω_1 e Ω_2 sono le rispettive classi di equivalenza, allora

$$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$$

è ancora un ensemble: dunque, se Ω è la sua classe di equivalenza:

$$\Omega=\alpha\Omega_1+\beta\Omega_2$$

La funzione

$$\varphi\longmapsto\operatorname{Exp}(\varphi,A)$$

è convessa. Infatti se si considerano n_1 campioni in Ω_1 e n_2 campioni in Ω_2, il numero di campioni prelevati in Ω è $n=n_1+n_2<N$, sicché

$$\frac{n_1}{n}=\frac{N_1}{N}\qquad\text{e}\qquad\frac{n_2}{n}=\frac{N_2}{N}$$

Se i campioni sono scelti a caso, abbiamo che

$$\begin{aligned}\operatorname{Exp}(\varphi,A)=&\frac{\ell_1+...+\ell_{n_1}+\ell'_1+...+\ell'_{n_2}}{n}=\frac{n_1}{n}\frac{\ell_1+...+\ell_{n_1}}{n_1}+\frac{n_2}{n}\frac{\ell'_1+...+\ell'_{n_2}}{n_2}\\=&\frac{n_1}{n}\operatorname{Exp}(\Omega_1,A)+\frac{n_2}{n}\operatorname{Exp}(\Omega_2,A)=\alpha\operatorname{Exp}(\Omega_1,A)+\beta\operatorname{Exp}(\Omega_2,A)\end{aligned}$$

Avrà interesse considerare i punti estremali di questo insieme convesso $\mathcal{S}$, che chiameremo *stati puri*.

Ora consideriamo gli osservabili: se $A\in\mathcal{O}$, consideriamo lo *spettro fisico* di A, vale a dire l'insieme $\sigma_{ph}(A)$ dei valori (si tratta di numeri reali) delle possibili misurazioni di A. Compatibilmente con la nozione di misurazione di una grandezza, questo insieme sarà supposto limitato in $\mathbb{R}$, ed anziché considerare i suoi punti, sarà fisicamente più significativo limitarsi a parlare degli intorni dei suoi punti, per tener conto dell'errore sistematico che affligge ogni misura. (Come regola empirica osserviamo anche che due misure *immediatamente successive* di uno stesso osservabile devono coincidere).

L'altra ipotesi che si farà su $\sigma_{ph}(S)$ è che sia chiuso in $\mathbb{R}$, e quindi compatto. Ora è chiaro che, per calcolare il valore di una funzione f su un osservabile A, bisognerà misurare A per trovare $\ell \in \sigma_{ph}(A)$ e quindi calcolare $f(\ell)$: poiché come abbiamo detto, consideriamo i punti dello spettro fisico sempre associati ad un proprio intorno, diciamo l'intorno di raggio ϵ del punto ℓ, la funzione f deve essere uniformemente continua, in modo che se ℓ e ℓ' differiscono per δ_ε, si avrà $|f(\ell)-f(\ell')| < \varepsilon$. Dato che $\sigma_{ph}(A)$ è compatto la richiesta su f è che sia continua, così

$$\sigma_{ph}(f(A)) = f(\sigma_{ph}(A))$$

Quindi, fissati $A \in \mathcal{O}$ e $\Omega \in \Sigma$ possiamo calcolare $Exp(\Omega, f(A))$ per una qualsiasi funzione continua f ed avere così un funzionale lineare positivo:

$$f \longmapsto \mathrm{Exp}(\Omega, f(A))$$

Positivo significa che $\sigma_{ph}(A) \subset [0,\infty)$ e $\mathrm{Exp}(\Omega, A) \geq 0$ per ogni Ω. Allora il teorema di Riesz–Markov ci dice che

$$\mathrm{Exp}(\Omega, f(A)) = \int f(\ell) d\mu_{\Omega,A}(\ell)$$

In particolare, se $Q \in \mathcal{O}$ è tale che sia $\sigma_{ph}(Q) \in \{0,1\}$, si dice una *questione*, e verifica la

$$\mathrm{Exp}(\Omega, Q) = \frac{n_1}{n}$$

ove n_1 è il numero di volte in cui si trova il valore 1 in n misurazioni e quindi l'attesa della questione è la probabilità che la risposta alla questione sia "sì" ($Q = 1$). Ora, se $A \in \mathcal{O}$, l'insieme

$$\{f(A) \mid f \in C(\sigma_{ph}(A))\}$$

è una $\mathbb{R}$-sottoalgebra di $\mathbb{R}$: se f è boreliana, ad esempio $f = \chi_\Delta$ ove Δ è un boreliano, si ha

$$\mathrm{Exp}(\Omega, \chi_\Delta(A)) = \mu_{\Omega,A}(\Delta)$$

Notiamo che se A e B sono osservabili qualsiasi può non aver senso considerare $A + B$ o AB: ma se A e B sono *compatibili* (cioè se le misurazioni nelle classi A e B si possono eseguire simultaneamente in modo non contraddittorio) allora $A + B$ e AB hanno come misurazioni la somma ed il prodotto delle misurazioni di A e B: in particolare, se $A + B$ è definita si ha

$$(A, B) \longmapsto \frac{1}{2}(A + B)^2 - A^2 - B^2 =: A \circ B$$

che si dice *prodotto di Jordan* di A e B.

Per procedere dovremo ora, dopo questi preliminari, fare delle ipotesi sulla natura matematica degli oggetti che andiamo considerando: postuleremo quindi che[1]

17.1.2 Assiomi

- $\Sigma = \Sigma(\mathcal{A})$ *sia l'insieme degli stati di una* C^**-algebra* $\mathcal{A}$.
- $\mathcal{O} = \mathcal{A}_{aa}$ *sia la parte autoaggiunta di* $\mathcal{A}$.
- $\mathrm{Exp}(\Omega, A) = \langle\Omega|A\rangle$.

(scriviamo $\langle\Omega|A\rangle$ *per* $\Omega(A)$.*)*

Quindi Extr $\Sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(\mathcal{A})$ sono gli stati puri di $\mathcal{A}$, $\sigma_{ph}(A) = \sigma(A)$ ed il calcolo di funzioni sullo spettro altro non è che il calcolo funzionale.

Per giustificare quest'ultima asserzione si può procedere nel seguente modo: $\ell \in \sigma_{ph}(A)$ se esiste un Ω tale che A misurato nello stato Ω dia con certezza il valore ℓ, cioè, considerando lo scarto medio

$$(\Delta_\Omega A)^2 := \langle\Omega|(A - \langle\Omega|A\rangle I)^2\rangle$$

(qui I è l'identità che corrisponde al non fare misurazione alcuna) la certezza di trovare ℓ si esprime come

$$\Delta_\Omega = 0$$

cioè

$$(\Delta_\Omega A)^2 = \langle\Omega|A^2\rangle - (\langle\Omega|A\rangle)^2 = 0$$

e quindi, considerando la rappresentazione GNS

$$(\xi, \pi((A - \Omega(A)I)^2)\xi) = ||\pi(A)(\xi - \Omega(A)\xi)||^2$$

si trova che

$$(\Delta_\Omega A)^2 = 0 \iff \xi - \Omega(A)\xi \text{ è un autovettore di } \pi(A)$$

cioè se e solo se Ω è uno stato puro: $\pi(f(A))\xi = f(\Omega(A))(\xi)$, ovvero $\langle\Omega|f(A)\rangle = f(\Omega(A))$, ovvero $\Omega(A) \in \sigma(A)$.

Ne concludiamo che

$$\ell \in \sigma_{ph}(A) \iff \exists\Omega \in \Sigma \quad \Delta_o A = 0,\, \Omega(A) = \ell \iff \ell \in \sigma_(A)$$

e quindi che $\sigma_{ph}(A) = \sigma(A)$.

[1]Si rammentino le nozioni del capitolo **??**.

Osserviamo che, se $\mathcal{A}$ è commutativa, allora può vedersi come l'insieme delle funzioni continue su uno spazio topologico compatto Ω (ammettendo che $1 \in \mathcal{A}$) e quindi gli osservabili sono funzioni continue e gli stati misure regolari di probabilità su Ω e

$$\mathrm{Exp}(\Omega, A) = \int_\Omega A(\varphi) d\mu(\varphi)$$

L'insieme Ω corrisponde cioè allo spazio delle fasi e gli stati puri alle misure di Dirac: come si vede, in questo caso in ogni stato puro ogni osservabile assume un valore certo.

In generale, per motivi fisici, l'insieme degli stati puri non sarà l'intero $\Sigma(\mathcal{A})$, ma un suo sottoinsieme Σ. Se consideriamo l'algebra inviluppante di von Neumann $\mathcal{A}^{**}$ di $\mathcal{A}$, allora gli elementi di $\mathcal{A}^{**}_{aa}$ saranno considerati osservabili generalizzati, dato che, per $B \in \mathcal{A}^{**}_{aa}$, in virtù del Teorema di Kaplanski 11.4.2, B è limite forte delle immagini, via la rappresentazione universale $\widehat{\pi}$ di elementi $A_\alpha \in \mathcal{A}_{aa}$ e $||a_\alpha|| \leq ||B||$. Quindi per ogni stato $\Omega \in \Sigma(\mathcal{A})$ esiste un'unica estensione normale $\widehat{\Omega} \in \widehat{\pi}(\mathcal{A})''_* = \mathcal{A}^*$ tale che $\widehat{\Omega}(B)$ sia il limite forte degli $\Omega(A_\alpha)$, che si dice *valor medio* dell'osservabile.

Se ora E è un elemento di $\mathcal{A}$ tale che $E = E^2 = E^*$ allora è una questione e, per ogni stato Ω, $\Omega(E)$ è la misura di probabilità che E abbia risposta affermativa nello stato Ω. Se $\Omega(E) = 1$ si dice che Ω possiede la proprietà descritta da E.

Denotando con $P_\Omega \in \mathcal{A}^{**}$ il più piccolo idempotente autoaggiunto che verifichi la

$$\widehat{\Omega}(P) = 1$$

(si dice *proprietà caratteristica* di Ω), ricordiamo che la probabilità di transizione da uno stato φ ad uno stato Ω è la

$$P_{\varphi,\Omega} = \widehat{\varphi}(P_\Omega)$$

(si tenga presente che $P_{\varphi,\Omega} = 1$ *non* implica che $\varphi = \Omega$ a meno che non si tratti di stati puri).

17.1.3 Lemma *$P_\Omega \in \mathcal{A}^{**}$ è minimale fra i proiettori di $\mathcal{A}^{**}$ se e solo se Ω è uno stato puro.*

DIMOSTRAZIONE: È noto che

$$P_\Omega \widehat{\mathcal{H}} = \{\xi \in \widehat{\mathcal{H}} \,|\, (\xi, \widehat{\pi}(-)) \in \overline{\mathcal{C}_\Omega}\}$$

ove $\overline{\mathcal{C}_\Omega}$ denota la chiusura in norma degli stati dominati da Ω. Ricordiamo inoltre che $\mathcal{C}_\Omega = \{\Omega\}$ se e solo se Ω è puro.

Ora, sia Ω puro e $P \le P_\Omega$ un proiettore. Ne segue che, se $\xi \in P\widehat{\mathcal{H}} \subset P_\Omega\widehat{\mathcal{H}}$ si ha che $(\xi, \widehat{\pi}(-)\xi) = \Omega$ (per quanto appena ricordato) e $\widetilde{\Omega}(P) = (\xi, P\xi) = 1$. Ma P_Ω è il più piccolo proiettore che verifichi questa relazione e quindi $P_\Omega \subset P$.

Viceversa, se P_Ω è minimale, allora $P_\Omega\widehat{\pi}(\mathcal{A})''P_\Omega$ è un'algebra di von Neumann, alla quale possiamo applicare il

Lemma. *Se $\mathcal{R}$ è un'algebra di von Neumann, e per $E\in\mathcal{R}$ definiamo $\mathcal{R}_E := E\mathcal{R}E$ e $\mathcal{R}'_E := \mathcal{R}'E$, allora $\mathcal{R}_E$ e $\mathcal{R}'_E$ sono algebre di von Neumann e sono l'una il commutante dell'altra.*

e dedurre che $P_\Omega\widehat{\pi}(\mathcal{A})''P_\Omega = \mathcal{A}P_\Omega$. Quindi per ogni ξ nell'immagine di P_Ω ed ogni T in $P_\Omega\widehat{\pi}(\mathcal{A})''P_\Omega$ si ha

$$(\xi, T\xi) = \widetilde{\Omega}(T)P_\Omega$$

cioè

$$(\xi, \widehat{\pi}(A)\xi) = \Omega(A)$$

e quindi Ω è uno stato puro.

QED

Possiamo allora dedurre che

$$\widehat{\varphi}(P_\Omega) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \Omega$$

Ora siano $A, B \in \mathcal{A}_{aa}$, e definiamo $C \in \mathcal{A}_{aa}$ come

$$iC := AB - BA$$

Se $\Omega \in \Sigma(\mathcal{A})$ vogliamo associare a Ω le indeterminazioni in A e B: $\Delta_\Omega A$ e $\Delta_\Omega B$: queste grandezze sono importanti, perché se $\Delta_\Omega A \neq 0$ si dice che A subisce una *fluttuazione quantistica* in Ω.

17.1.4 Teorema (RELAZIONI DI HEISENBERG)

$$\Delta_\Omega A \cdot \Delta_\Omega B \ge \frac{1}{2}|\Omega(C)|$$

DIMOSTRAZIONE: Se definiamo $A' := A - \Omega(A)I$ allora:

$$A'B' - B'A' = iC$$

e quindi

$$|\Omega(A'B' - B'A')| = |\Omega(C)|$$

Ma, osservando che se A è autoaggiunto, anche A' lo è, e che $\overline{\Omega(A'B')} = \Omega((A'B')^*) = \Omega(B'A')$ si trova

$$\begin{aligned} 2|\operatorname{Im}\Omega(A'B')| =& |\Omega(A'B') - \overline{\Omega(A'B')}| = |\Omega(A'B') - \Omega(B'A') \\ \leq & |\Omega(A'B')| + |\Omega(B'A')| \end{aligned}$$

per cui, tenendo conto della diseguaglianza di Schwartz e dell'autoaggiunzione di A e B:

$$\frac{1}{2}|\Omega(C)| \leq |\Omega(A'B')| \leq \Omega(A'^2)^{\frac{1}{2}}\Omega(B'^2)^{\frac{1}{2}} = \Delta_\Omega A \cdot \Delta_\Omega B$$

QED

Osserviamo che, avendosi per $||\pi_\Omega(T)\xi_\Omega|| = \Omega(T^*T)^{\frac{1}{2}}$:

$$\Delta_\Omega A = ||\pi_\Omega(A)\xi_\Omega - \Omega(A)\xi_\Omega||$$

lo scarto quadratico è zero se e solo se ξ_Ω è un autovettore.

17.1.5 Corollario *A e B sono osservabili compatibili se e solo se* $[A, B] = 0$.

DIMOSTRAZIONE: Che la condizione sia sufficiente segue dal teorema di Heisenberg. Dimostriamo che è necessaria: siano dapprima $\sigma(A)$ e $\sigma(B)$ insiemi finiti, cioè

$$A = \sum_i \ell_i P_i \qquad \text{e} \qquad B = \sum_i \mu_i F_i$$

con $\{P_i, F_j\}$ idempotenti autoaggiunti. Dimostriamo che A e B sono compatibili, cioè che esiste un $G \in \mathcal{A}_{aa}$ tale che, per opportune funzioni f e g si abbia

$$A = f(G) \qquad \text{e} \qquad B = g(G)$$

Ma se $G := A + aB$, e se poniamo

$$f(\ell_i + a\mu_j) := \ell_i \qquad \text{e} \qquad g(\ell_i + a\mu_j) := \mu_j$$

allora $f(G) = A$ e $g(G) = B$.

Il caso generale si dimostra in modo analogo per mezzo del seguente risultato di analisi reale:

Teorema. *Per ogni coppia di operatori autoaggiunti A e B in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ tali che $AB = BA$ esiste un operatore G autoaggiunto e due funzioni boreliane f e g tali che $f(G) = A$ e $f(G) = B$.*

che non dimostreremo.

QED

La non-commutatività di una C*-algebra è equivalente all'esistenza di sue rappresentazioni irriducibili di dimensione maggiore di uno, come è ovvio osservare se si considera la rappresentazione

$$A \longmapsto \bigoplus_{\xi \in \widehat{\mathcal{A}}} \pi_\xi(A)$$

che è fedele: in effetti, se ogni rappresentazione irriducibile fosse di dimensione 1, renderebbe $\mathcal{A}$ sottoalgebra di un'algebra commutativa e quindi a sua volta commutativa.

Fatta questa precisazione, consideriamo una rappresentazione π della nostra C*-algebra $\mathcal{A}$ nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}_\pi$: sappiamo che questo dato ci fornisce una famiglia di stati puri

$$\mathbb{P}\mathcal{H}_\pi \longleftrightarrow \mathcal{V}_\pi \subset \mathcal{P}(\mathcal{A})$$

(stati vettoriali), ove con $\mathbb{P}$ indichiamo lo spazio proiettivo associato ad uno spazio vettoriale dato. Se $\xi, \eta \in \mathcal{H}_\pi$ hanno norma 1, e se definiamo gli stati associati

$$\xi \longmapsto \Omega := (\xi, \pi(-)\xi)\,, \qquad \eta \longmapsto \varphi := (\xi, \pi(-)\xi)$$

è ovvio che se ξ e η sono linearmente indipendenti allora $\Omega \neq \varphi$ e quindi

$$\dim \mathcal{H}_\pi > 1 \iff \#\mathcal{V}_\pi > 1$$

Se ξ e η sono linearmente indipendenti e $x = a\xi + b\eta$ con $a, b \in \mathbb{C}$ in modo che $||x|| = 1$ allora abbiamo uno stato puro $(x, \pi(-)x)$ e

$$(x, \pi(A)x) = |a|^2(\xi, \pi(A)\xi) + |b|^2(\eta, \pi(A)\eta) + 2\,\mathrm{Re}\,\overline{a}b(\xi, \pi(A)\eta)$$

Il terzo termine del secondo membro di questa eguaglianza è l'*interferenza* nella somma degli stati (in analogia con la teoria delle onde).

Ora, se $\Omega, \varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ sono associate a rappresentazioni non equivalenti allora le sovrapposizioni di Ω e φ non sono stati puri, cioè esiste una rappresentazione π che estende le π_Ω e π_φ per cui esistono $\xi, \eta \in \mathcal{H}_\pi$ tali che

$$(\xi, \pi(-)\xi) = \Omega\,, \qquad (\eta, \pi(-)\eta) = \varphi$$

Allora, se $x = a\xi + b\eta$ $(a, b \in \mathbb{C})$ si ha $(x, \pi(-)x) = |a|^2\Omega + |b|^2\varphi$. Ora dimostriamo che se le rappresentazioni associate agli stati Ω e φ non sono equivalenti, non si ha interferenza.

17.1.6 Proposizione $\forall A \in \mathcal{A} \quad (\xi, \pi(A)\eta) = 0$

DIMOSTRAZIONE: Dato che le rappresentazioni π_Ω e π_φ sono irriducibili, non sono equivalenti se e solo se sono disgiunte cioè se e solo se $(\pi_\Omega, \pi_\varphi) = 0$. Ma sappiamo che sono estese ambedue da una rappresentazione π, i.e. che

$$\pi_\Omega \cong \pi|_{\mathcal{H}_1} \qquad \text{e} \qquad \pi_\varphi \cong \pi|_{\mathcal{H}_2}$$

e quindi i proiettori E_1 ed E_2 su questi sottospazi di Hilbert sono elementi di $\pi(\mathcal{A})'$, per cui

$$(\pi_\Omega, \pi_\varphi) = E_1 \pi(\mathcal{A})' E_2$$

Allora le rappresentazioni non sono equivalenti se e solo se

$$E_1 \pi(\mathcal{A})' E_2 = 0$$

e quindi ciò implica che i proiettori E_1 e E_2 sono ortogonali: $E_1 E_2 = 0$. Ma allora, dato che E_2 è π-stabile, si ha l'asserto.

QED

Osserviamo in particolare che, se le rappresentazioni associate a due stati sono disgiunte, allora $(x, \pi(-)x) = |a|^2\Omega + |b|^2\varphi$, e che quindi si possono sovrapporre solo stati puri di una stessa famiglia $\mathcal{V}_\pi$.

17.1.7 Definizione *Le famiglie* $\mathcal{V}_\pi$ *si dicono* settori di superselezione.

Possiamo riassumere nel seguente modo le osservazioni che abbiamo fin qui collezionato:

17.1.8 Teorema *Se* $\mathcal{A}$ *è una* C^**-algebra e* $\Sigma(\mathcal{A})$ *sono i suoi stati, allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- $\mathcal{A}$ *non è commutativa.*
- *Esistono stati puri con fluttuazioni quantistiche.*
- *Non tutti gli osservabili sono fra loro compatibili.*
- *Esistono rappresentazioni irriducibili di dimensione maggiore di uno.*
- *Esistono settori di superselezione nei quali vale il principio di sovrapposizione.*

Per questo motivo, nel caso commutativo parliamo di teorie classiche, e nel caso non commutativo di teorie quantistiche.

17.1.9 Esempio *Supponiamo di avere un solo settore di superselezione (il che vuol dire che stiamo trattando sistemi dinamici con un numero finito di gradi di libertà), di modo che esista un'unica rappresentazione irriducibile e sia*

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$$

con $\mathcal{H}$ spazio di Hilbert separabile *e $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^{**} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ora, gli osservabili sono elementi autoaggiunti di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e gli stati sono gli stati normali su $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, cioè funzionali positivi normalizzati nel preduale*[2] *$\mathcal{B}(\mathcal{H})_*$, quindi*

$$\Omega(A) = \operatorname{tr}(AT)$$

ove $T \geq 0$ ha traccia 1. Dunque Ω è puro se e solo se T ha rango 1 i.e. se $T = T^* = T^2$ (ed è minimale rispetto a queste condizioni) ed in tal caso $T = P_\Omega$. Inoltre la transizione fra stati è data da

$$P_{\Omega,\varphi} = \operatorname{tr}(TR)$$

ove $\Omega = \operatorname{tr}(T-)$ e $\varphi = \operatorname{tr}(R-)$.

Si noti che gli osservabili $\{A_1, ..., A_n, ...\}$ sono compatibili se e solo se commutano a due a due, e formano un insieme completo se, per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{aa}$ e per ogni i $A_i B = B A_i$, allora $B = f(A_1, ..., A_n, ...)$, cioè se l'algebra di von Neumann generata dalla famiglia $\{A_i\}$ degli osservabili in questione è abeliana massimale.

17.1.10 Esempio *Consideriamo lo spazio di Hilbert $\mathcal{H} = L^2(X, d\mu)$ ove X è lo spettro congiunto degli osservabili $\{A_i\}$ e $d\mu$ è la misura basica, allora a $f(A_1, ...)$ corrisponde l'operatore di moltiplicazione M_f in L^2: in altri termini, la famiglia di osservabili si può simultaneamente diagonalizzare.*

Chiediamoci quale sia il significato di $x \in L^2(X, d\mu)$, ove

$$\int_X |x(\xi)|^2 d\mu(\xi) = 1$$

(identifichiamo gli x e x' se esiste una numero complesso a di modulo 1 tale che $x = ax'$).

Intanto osserviamo che il valor medio di B in x è (x, Bx), e che, se B è una questione, allora questo numero rappresenta la probabilità di trovare la proprietà

[2]Si rammenti che il duale dello spazio degli operatori compatti è lo spazio degli operatori nucleari, cioè quelli per i quali è definita la traccia: il duale dello spazio degli operatori nucleari è esattamente $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

B nello stato puro x. Consideriamo allora $B = M_{\chi_\Delta}$ ove Δ è un insieme μ-misurabile. Così B descrive la proprietà che le misure simultanee degli osservabili $\{A_i\}$ diano un valore ξ in Δ, e la probabilità che ciò sia vero è

$$(x, Bx) = \int_X \overline{x(\xi)} f(\xi) x(\xi) d\mu(\xi) = \int_\Delta \overline{x(\xi)} x(\xi) d\mu(\xi) = \int_\Delta |x(\xi)|^2 d\mu(\xi)$$

Quindi x è una funzione d'onda generalizzata, e se è il vettore ciclico che definisce la misura basica, la densità di probabilità è

$$|x(\xi)|^2 d\mu(\xi)$$

17.2 Gruppi di simmetria

Una *simmetria sugli osservabili* è una trasformazione

$$\eta : \Omega \longrightarrow \Omega$$

che deve godere delle seguenti proprietà:

- essere 1–1 su $\mathcal{O}$.
- essere $\mathbb{R}$-lineare.
- soddisfare alla $\eta(A^2) = \eta(A)^2$.

Se, come stiamo postulando, $\mathcal{O} = \mathcal{A}_{aa}$, allora

$$\eta(A + iB) = \eta(A) + i\eta(B)$$

In particolare

$$\eta\left(\frac{1}{2}(AB + BA)\right) = \frac{1}{2}\left(\eta(A)\eta(B) + \eta(B)\eta(A)\right)$$

Se ora scriviamo $A = A_1 + iA_2$ e $B = B_1 + iB_2$ si ha

$$\{A, B\} := AB + BA = \{A_1, B_1\} - \{A_2, B_2\} + i\left(\{A_1, B_2\} + \{A_2, B_1\}\right)$$

(prodotto di Jordan) e quindi $\eta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ deve essere un isomorfismo di spazi vettoriali complessi tale che

$$\eta(\{A, B\}) = \eta(A)\eta(B) + \eta(B)\eta(A)$$

dunque un automorfismo di algebre di Jordan.

Citiamo, rimandando a [12] per la dimostrazione, il

Teorema. *Se $\mathcal{A}$ è una C*-algebra con centro $\mathbb{C} \cdot I$ allora ogni automorfismo di Jordan η è un automorfismo oppure un antiautomorfismo della C*-algebra (un antiautomorfismo è semplicemente uno *-isomorfismo di spazi vettoriali tale che $\eta(AB) = \eta(B)\eta(A)$).*

17.2.1 Esempio *Se $\mathcal{A} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ (al solito $\mathcal{H}$ spazio di Hilbert separabile) allora*

$$\widetilde{\eta}(A) = UAU^{-1}$$

ove η è un automorfismo antilineare e U un operatore unitario o antiunitario.

E. Wigner ha formulato una definizione di simmetria come una biiezione $\Omega \longrightarrow \Omega'$ sugli stati puri tale che

$$P_{\Omega,\varphi} = P_{\Omega',\varphi'}$$

Il Teorema di Wigner afferma che se $\Omega(A) = (\psi, A\psi)$ allora $\Omega'(A) = (\psi', A\psi')$ ove $\psi' = U\psi$.

17.2.2 Definizione *Un gruppo G si dice* gruppo di simmetrie *di una teoria quantistica se esiste un omomorfismo*

$$\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{A}) \cup \mathrm{AntiAut}(\mathcal{A})$$

(Osserviamo che $\mathrm{AntiAut}(\mathcal{A})$ *non è un gruppo, e che Aut($\mathcal{A}$)* $\lhd$ $\mathrm{Aut}(\mathcal{A}) \cup \mathrm{AntiAut}(\mathcal{A})$ *con indice 2).*

Se $\Omega \in \Sigma$ allora $\Omega\alpha_{g^{-1}}$ è l'azione di $g \in G$ su Ω: $G \times \Sigma \longrightarrow \Sigma$. Quindi, se $A \longmapsto \alpha_g(A) = A'$ si trova che $\Omega'(A') = \Omega(A)$.

17.2.3 Esempio *Consideriamo il gruppo generato da $\{g^2\}_{g\in G}$: allora*

$$\forall g \in G \qquad \alpha_g \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$$

dato che $\alpha_{g^2} = \alpha_g^2$ e quindi gli antiautomorfismi dell'algebra non intervengono.

Tratteremo il caso in cui G sia un gruppo di Lie connesso. È noto che $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ è un gruppo topologico, (è un sottospazio di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$), ed è quindi naturale chiedersi se α sia continua o meno. Se lo è, allora

$$||\alpha_g - 1|| \xrightarrow[g\longrightarrow e]{} 0 \implies \forall\Omega \quad ||\Omega \cdot \alpha_g - \Omega|| \xrightarrow[g\longrightarrow e]{} 0$$

il che fisicamente è inaccettabile. Per chiarire diamo la

17.2.4 Definizione Ω *si dice* stato regolare *per* α *se la sua* orbita è continua*, cioè se, preso* $A \in \mathcal{A}$ *la mappa* $g \longmapsto \alpha_a(A)$ *è continua (vale a dire* $||\alpha_g(A) - A|| \longrightarrow 0$ *per* $g \longrightarrow e$*) sull'orbita di* A*.*

Consideriamo ora l'insieme $U = \{g \mid ||\Omega\alpha_g - \Omega|| < 2\}$, ed osserviamo che se Ω è regolare per α, allora U è un intorno dell'identità del gruppo di Lie G, e che quindi genera G come gruppo (dato che è connesso per ipotesi, cfr. lemma 16.3.22).

Se oltre ad essere regolare, Ω è anche puro, allora gli stati $\Omega\alpha_g$ sono stati vettoriali della rappresentazione GNS π di Ω, cioè: se $g \in U$, la rappresentazione $\pi \circ \alpha_g = \pi_{\Omega\alpha_g}$ è unitariamente equivalente a π, dunque esiste un operatore unitario V_g tale che

$$V_g \pi(A) V_g^{-1} = \pi(\alpha_a(A))$$

e quindi, dato che U genera G, per ogni $g = g_1 ... g_n \in G$ con $\{g_i\} \subset U$, ponendo $V_g = V_{g_1} ... V_{g_n}$ abbiamo ancora un operatore unitario.

In definitiva, quello che richiederemo sarà al più la continuità dell'orbita di un operatore.

Consideriamo di nuovo l'operatore V_g unitario, che è definito a meno di multipli complessi di modulo 1 (e quindi a rigore sullo spazio proiettivo associato allo spazio di Hilbert in questione): ciò significa che, se $V'_g = z(g)V_g$ per $z(g) \in \{|z| = 1\} = \mathbb{T}$ è ancora un operatore unitario (in effetti $V_{g_1 g_2}^{-1} V_{g_1} V_{g_2} \in \pi(\mathcal{A})'' = \mathbb{C}$).

17.2.5 Definizione *Una rappresentazione* π *di* $\mathcal{A}$ *si dice* covariante *se esiste una rappresentazione unitaria* U *di* G *tale che*

$$U(g)\pi(A)U(g)^{-1} = \pi(\alpha_g(A))$$

cioè che

$$Ad\ U(g)\pi = \pi \circ \alpha_g$$

Diciamo che $\pi : \mathrm{Aut}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi))$ *è un* operatore di allacciamento *fra questi due spazi.*

È ora facile rendersi conto che l'operatore V_g è di allacciamento: resta solo da capire se e quando V sia una rappresentazione, cioè che

$$V_{g_1} V_{g_2} = w(g_1, g_2) V_{g_1 g_2}$$

ove $w : G \times G \longrightarrow \mathbb{T}$ è un valore complesso di modulo 1. Ora,

$$\begin{aligned} V'_{g_1} V'_{g_2} &= z(g_1)z(g_2)V_{g_1}V_{g_2} = z(g_1)z(g_2)w(g_1,g_2)V_{g_1g_2} \\ &= z(g_1)z(g_2)w(g_1,g_2)z(g_1g_2)^{-1}V'_{g_1g_2} = \delta z(g_1,g_2)w(g_1,g_2)V'_{g_1g_2} \end{aligned}$$

ove abbiamo definito

$$\delta z(g_1, g_2) = z(g_1)g(z_2)z(g_1 g_2)^{-1}$$

Quindi $\delta z : G \times G \longrightarrow \mathbb{T}$. Il simbolo δ indica il cobordo di un complesso di cocatene per il quale w è un 2-cociclo, nel senso seguente:

$$w(g_1, g_2)w(g_1 g_2, g_3) = w(g_1, g_2 g_3)w(g_2, g_3) \tag{†}$$

(in virtù dell'identità $(V_{g_1}V_{g_2})\,V_{g_3} = V_{g_1}\,(V_{g_2}V_{g_3})$).

Se cioè denotiamo con $C^n(G, \mathbb{T})$ le funzioni da G^n in $\mathbb{T}$ abbiamo le mappe di cobordo:

$$C^1(G, \mathbb{T}) \xrightarrow{\delta} C^2(G, \mathbb{T}) \xrightarrow{\delta} C^3(G, \mathbb{T})$$

ove la $\delta : C^1(G, \mathbb{T}) \longrightarrow C^2(G, \mathbb{T})$ è definita come

$$\delta z(g_1, g_2) = z(g_1)z(g_2)z(g_1 g_2)^{-1}$$

e la $\delta : C^2(G, \mathbb{T}) \longrightarrow C^3(G, \mathbb{T})$ è definita come

$$\delta w(g_1, g_2, g_3) = w(g_1, g_2)w(g_1 g_2, g_3)w(g_1, g_2 g_3)^{-1}w(g_2, g_3)^{-1}$$

Quindi, dato che se z è un omomorfismo di gruppi allora $(\delta z)(g_1, g_2) = 1$, δz "misura quanto z non è un omomorfismo"; analogamente δw "misura quanto w non soddisfa la (†)". Inoltre

$$\begin{aligned}
\delta(\delta z)(g_1, g_2, g_3) &= (\delta z)(g_1, g_2)(\delta z)(g_1 g_2, g_3)(\delta z)(g_1, g_2 g_3)^{-1}(\delta z)(g_2, g_3)^{-1} \\
&= z(g_1)z(g_2)z(g_1 g_2)^{-1}z(g_1 g_2)z(g_3)z(g_1 g_2 g_3)^{-1} \\
&\qquad z(g_1 g_2 g_3)z(g_2 g_3)^{-1}z(g_1)^{-1}z(g_2 g_3)z(g_3)^{-1}z(g_2)^{-1} = 1
\end{aligned}$$

cioè

$$\delta \circ \delta = 1$$

Il che ci dice che esiste una coomologia $H^2(G, \mathbb{T})$ che misura "quanto un cociclo non è esatto". In particolare, dalle relazioni precedenti, abbiamo che

$$H^2(G, \mathbb{T}) = 0 \implies V'_g \text{ è una rappresentazione di } G$$

Osserviamo esplicitamente che se $\omega \in \mathbb{V}_\pi$ allora $\omega\alpha_g$ converge fortemente a ω per $g \longrightarrow e$, e quindi le funzioni z e w sono continue: questo significa che stiamo considerando la coomologia continua del gruppo, cioè consideriamo solo le mappe continue come cocatene.

Notiamo che se G è connesso e $\mathfrak{g} = L(G)$ è la sua algebra di Lie, allora possiamo far corrispondere ad ogni elemento di $C^k(G, \mathbb{T})$ un elemento di $C^k(\mathfrak{g})$, lo spazio vettoriale delle cocatene di $\mathfrak{g}$ a coefficienti nella rappresentazione banale. Infatti, il diagramma

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "z"] & \mathbb{T} \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\widetilde{z}"'] & \mathbb{R} \arrow[u, "e^{2\pi i}"'] \end{tikzcd}$$

è commutativo: l'immagine di exp è un intorno di $e \in G$ che genera G (poiché è connesso). Possiamo analogamente sollevare una 2-cocatena:

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "w"] & \mathbb{T} \\ \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp \times \exp"] \arrow[r, "\widetilde{w}"] & \mathbb{R} \arrow[u, "e^{2\pi i}"'] \end{tikzcd}$$

In generale i gruppi di coomologia saranno diversi: questo perché la coomologia di G riflette informazioni topologiche che $\mathfrak{g}$ non può contenere; in generale, il sollevamento di un elemento di G a $\mathfrak{g}$ per tramite della mappa esponenziale non è unico: in effetti in ogni rivestimento di gruppi $G_1 \longrightarrow G_2$ le algebre di Lie coincidono. Per avere l'unicità bisogna limitarsi al rivestimento universale, cioè ai gruppi semplicemente connessi. In questo caso, la teoria di Lie ci dice che esiste un unico gruppo (connesso) semplicemente connesso del quale $\mathfrak{g}$ è l'algebra di Lie e che quindi i morfismi da G in $\mathbb{T}$ si sollevano in modo unico.

17.2.6 Teorema (Bargmann–Wigner) *Se la mappa $g \longmapsto \alpha_g$ è fortemente continua, G è semplicemente connesso e $H^2(L(G), \mathbb{R}) = 0$ allora $H^2(G, \mathbb{T}) = 1$ e quindi π è covariante.*

Dimostrazione: Consideriamo un cociclo w del gruppo di Lie G, e scriviamo

$$e^{ic(X,Y)} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t} w(\exp tX, \exp tY) \tag{$*$}$$

Dimostriamo che c è un cociclo per l'algebra di Lie. Per vederlo ci mettiamo in un intorno dell'identità del gruppo nel quale la mappa esponenziale sia invertibile, e quindi nel quale possiamo scrivere $g_i = \exp tX_i$; la condizione $\delta w = 1$ diviene:

$$\begin{aligned} 1 =& w(\exp tX_1, \exp tX_2) w(\exp -tX_2, \exp -tX_3) \\ & w(\exp tX_1 \exp tX_2, \exp tX_3) w(\exp tX_1, \exp tX_2 \exp tX_3)^{-1} \\ =& w(\exp tX_1, \exp tX_2) w(\exp -tX_2, \exp -tX_3) \\ & w\left(\exp\left(tX_1 + tX_2 + \frac{1}{2}t^2[X_1, X_2] + o(t^3)\right), \exp tX_3\right) \\ & w\left(\exp tX_1, \exp\left(tX_2 + tX_3 + \frac{1}{2}t^2[X_2, X_3] + o(t^3)\right)\right)^{-1} \end{aligned}$$

e quindi, usando la (*) e la

$$(**) \qquad \exp(tX_1 + tX_2 + t^2/2[X_1, X_2] + o(t^3)) = \exp tX_1 \exp tX_2$$

(cfr. proposizione 15.4.7) otteniamo

$$1 = e^{-ic([X_1,X_3],X_2)} e^{ic([X_1,X_2],X_3)} e^{-ic(X_1,[X_2,X_3])}$$

che implica

$$0 = c([X_1, X_2], X_3) - c([X_1, X_3], X_2) + c([X_2, X_3], X_1) = \delta c(X_1, X_2, X_3)$$

Quindi c è un 2-cociclo per $\mathfrak{g}$; ma, per ipotesi, ogni 2-cociclo per $\mathfrak{g}$ è un cobordo, i.e. esiste un $f \in \mathfrak{g}^*$ tale che

$$c(X, Y) = -f([X, Y])$$

sicché

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t} w(\exp tX_1, \exp tX_2) = e^{-if([X_1,X_2])}$$

Ma, di nuovo per la (**):

$$\begin{aligned} w(\exp X_1, \exp X_2) =& e^{if(X_1)} e^{if(X_2)} e^{-if(X_1 - itX_2 - i\frac{1}{2}t^2([X_1,X_2]) - io(t^3))} \\ =& z(g_1)z(g_2)z(g_1g_2)^{-1} = (\delta z)(g_1, g_2) \end{aligned}$$

con $z(g) = e^{if(X)}$. Abbiamo cioè dimostrato, assumendo la forte continuità di w, che se $H^2(\mathfrak{g}) = 0$ allora $H^2(G, \mathbb{T}) = 1$, dato che il ragionamento svolto è valido in un intorno di G che genera tutto il gruppo (essendo G connesso).

QED

L'ipotesi di forte continuità della α implica che, per ogni stato ω puro e regolare:

$$||\omega \circ \alpha_g - \omega|| \xrightarrow{g \longrightarrow e} 0$$

Se $\omega_g := \omega \circ \alpha_{g^{-1}}$ allora

$$P_{\omega,\omega_g} \xrightarrow{g \longrightarrow e} 1 \iff ||\omega \circ \alpha_g - \omega|| \xrightarrow{g \longrightarrow e} 0$$

Pertanto la formula di Roberts–Elkstrom[3]

$$P_{\omega,\varphi} = 1 - \frac{1}{4}||\omega - \varphi||^2$$

e la forte continuità di α implicano la continuità di P_{ω',ω_g} per ogni ω', ω.

[3]Per una discussione più approfondita si veda: D.J. Simms, *Lect. Notes in Math.* #52, oppure le lezioni di Les Houches (1961) di A.S. Wightman.

17.2.7 Esempio

- *Questo teorema si applica ai gruppi ad un parametro ($G = \mathbb{R}$), cioè $\pi : t \longmapsto \alpha_t$ è covariante e quindi $U(t) = \exp(itH)$ ove l'operatore hamiltoniano H non è in generale limitato.*

- *Invece il teorema non vale per $\mathbb{R}^2$, che non soddisfa l'ipotesi $H^2(L(G), \mathbb{R}) = 0$, né per $SO(3)$ che non è semplicemente connesso. Tuttavia, per il secondo lemma di Whitehead 16.3.13 ogni gruppo semisemplice semplicemente connesso soddisfa le ipotesi del teorema.*

Osserviamo che il gruppo $H^2(G)$ parametrizza, come nel caso delle algebre di Lie, le estensioni centrali di G; un caso fondamentale, che ricorre nelle applicazioni alla Meccanica Quantistica, è quello del prodotto semidiretto con un gruppo abeliano.

In generale il prodotto semidiretto è una generalizzazione del prodotto $G \times H$. Nel caso del prodotto, G e H divengono sottogruppi normali $G \times \{e\}$ e $\{e\} \times H$ di $G \times H$; nel caso del prodotto semidiretto non abbiamo questa condizione ma una più debole: un sottogruppo è effettivamente normale, mentre l'altro non lo è ma agisce per automorfismi sul primo.

Precisamente, siano H e N gruppi (nel nostro caso gruppi di Lie connessi) e consideriamo un omomorfismo (di gruppi di Lie)

$$\eta : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$$

cioè $\eta(hh')(n) = (\eta h)((\eta h')(n))$. Allora il *prodotto semidiretto* $N \ltimes H$ di N e H rispetto alla rappresentazione η è l'insieme (varietà differenziabile) $N \times H$ equipaggiata della struttura di gruppo (di Lie) data dal prodotto

$$(h, n) \cdot (h', n') = (hh', n\eta(h)(n'))$$

L'inverso è dato da

$$(h, n)^{-1} = (h^{-1}, \eta(h^{-1})(n^{-1}))$$

Nel caso in cui $N = \mathbb{R}$, abbiamo ad esempio che il prodotto semidiretto equivale ad una estensione centrale

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ltimes G \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

Se G è un gruppo di Lie connesso ma non semplicemente connesso, è sempre possibile considerare il suo rivestimento universale $\widetilde{G}$ (come varietà differenziabile) che è un gruppo di Lie a sua volta:

$$\eta : \widetilde{G} \longrightarrow G$$

(η è un diffeomorfismo locale, quindi G e $\widetilde{G}$ hanno la stessa algebra di Lie, che è determinata da un intorno dell'identità).

Allora possiamo sostituire $\widetilde{G}$ a G nei nostri ragionamenti, per avere almeno una delle ipotesi del teorema di Bargmann–Wigner sempre verificate: in effetti, se α è la solita rappresentazione del gruppo G, evidentemente $\widetilde{\alpha} := \alpha \circ \eta$ è una rappresentazione del gruppo $\widetilde{G}$, e se

$$U|_{\ker(\eta)} = I$$

allora la rappresentazione (π, V) è covariante per $\widetilde{G}$.

Fino al termine della sezione ci occuperemo di un esempio importantissimo: il *gruppo di Lorentz* $O(1, n-1)$. Ricordiamo che si tratta del gruppo di trasformazioni lineari nello spazio $\mathbb{R}^n$ che preservano la forma

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 - \sum_{i=2}^{n} x_i y_i$$

Questo gruppo non è connesso: ad esempio, nel caso $n = 2$, i suoi elementi sono matrici delle forme

$$\begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ \sinh t & -\cosh t \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -\cosh t & \sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & -\cosh t \end{pmatrix}$$

e ciascun tipo corrisponde ad una componente connessa distinta. In generale $O(1, n-1)$ ha quattro componenti connesse: per vedere che ne possiede almeno quattro basta osservare che esiste l'omomorfismo di gruppi

$$\Phi : O(1, n-1) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

definito come

$$\Phi(A) = (\det A, \operatorname{sgn}\langle e_1, Ae_1\rangle)$$

ove e_1 è il versore dell'asse x_1.

Qui ci interessa il caso delle trasformazioni dello spazio della Relatività Ristretta $\mathbb{R}^4$ con la metrica di Minkowski: $O(1, 4)$; richiamiamo qualche nozione sullo spazio di Minkowski $\mathbb{R}^4_1$.

17.2.8 Definizione *Se $v \in \mathbb{R}^4_1$ è un vettore non nullo, v e la retta $v\mathbb{R}$ generata da v si dicono*

- spaziali *(*space-like*) se* $\langle v, v\rangle < 0$.

- isotropi *(*light-like*) se* $\langle v, v\rangle = 0$.
- temporali *(*time-like*) se* $\langle v, v\rangle > 0$.

Vettori dello stesso tipo formano un cono nello spazio di Minkowski: così abbiamo la decomposizione in unione disgiunta

$$\mathbb{R}^4_1 = S \cup V \cup T$$

ove $V = V_+ \cup V_-$ è il cono di luce, che consta di due componenti connesse: si tratta della superficie di equazione

$$x_1^2 = x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

Anche il cono T dei vettori temporali ha due componenti connesse, mentre il cono dei vettori spaziali è connesso: la differenza si spiega considerando le superficie in $\mathbb{R}^4_1$ definite dalle

$$\Omega_m := \{v \in \mathbb{R}^4_1 \,|\, \langle x, x\rangle = m^2\} \quad \text{e} \quad \Omega_{im} := \{v \in \mathbb{R}^4_1 \,|\, \langle x, x\rangle = -m^2\}$$

che si dicono *iperboloidi di massa*: Ω_m è un iperboloide a due falde $\Omega_m = \Omega_m^+ \cup \Omega_m^-$ (omeomorfe a $\mathbb{R}^3$), mentre Ω_{im} è un iperboloide ad una falda (omeomorfo a $S^2 \times \mathbb{R}^2$).

Definiamo anche i semiconi $C_\pm = T_\pm \cup V_\pm$, che sono chiusi convessi i cui punti estremali sono $V_\pm$: si tratta dei semiconi dei vettori che orientati al futuro (C_+) e orientati al passato (C_-).

Consideriamo ora il gruppo di Lorentz omogeneo L di tutte le trasformazioni dello spazio di Minkowski (che ne preservano la metrica); abbiamo la decomposizione, esattamente come nel caso delle rotazioni, in trasformazioni proprie e improprie, secondo che il determinante sia 1 o -1:

$$L = L_+ \cup L_-$$

Inoltre abbiamo anche una decomposizione in *trasformazioni ortocrone* e antiortocrone, secondo che preservino V_- e V_+ oppure li scambino:

$$L = L^\uparrow \cup L^\downarrow$$

Abbiamo cioè la decomposizione nelle quattro componenti connesse di L data da

$$L = L_+^\uparrow \cup L_-^\uparrow \cup L_+^\downarrow \cup L_-^\downarrow$$

Ad esempio $L_+^\uparrow$ è la componente connessa dell'identità, cioè è il sottogruppo delle trasformazioni di determinante 1 che conservano il segno della variabile temporale: dato che questo gruppo contiene $SO(3)$, non è semplicemente connesso.

Se $\Lambda \in L_+^\uparrow$ è una trasformazione (non identica) che lascia fisso punto per punto un piano P, ci sono tre possibilità:

- P è un sottospazio di vettori temporali (Λ è una rotazione);
- P è un sottospazio di vettori spaziali;
- P è un sottospazio di vettori isotropi (Λ è una "rotazione isotropa");

Procedendo come per i gruppi delle rotazioni, possiamo determinare delle forme canoniche per gli elementi di $L_+^\uparrow$, vedendo i suoi elementi come matrici 4×4. Una rotazione si può sempre scrivere nella forma

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

ove $t \in [0, \pi)$ è un angolo. Un $\Lambda \in L_+^\uparrow$ di tipo (2) si può sempre scrivere nella forma

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} \cosh r & \sinh r & 0 & 0 \\ \sinh r & \cosh r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ove $r > 0$ è una "rapidità". Una rotazione isotropa si può sempre scrivere nella forma

$$\Lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Infine una trasformazione Λ può essere della forma $VR = RV$ ove R è una rotazione e V di tipo (2); in questo caso

$$\Lambda_4 = \begin{pmatrix} \cosh r & \sinh r & 0 & 0 \\ \sinh r & \cosh r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Queste trasformazioni sono diagonalizzabili nello spazio di Minkowski complessificato. Il seguente teorema appartiene agli elementi della Teoria della Relatività Ristretta:

17.2.9 Teorema *Ogni trasformazione di Lorentz propria ortocrona $\Lambda \in L_+^\uparrow$ ($\neq I$) è della forma $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_4$.*

Il *gruppo inomogeneo* di $L_+^\uparrow$ è il gruppo di Poincarè $\mathcal{P}_+^\uparrow$, che per definizione è il prodotto semidiretto di $L_+^\uparrow$ con $\mathbb{R}^4$, ed ha quindi come moltiplicazione la:

$$(a, \Lambda) \cdot (a', \Lambda') := (a + \Lambda a', \Lambda\Lambda')$$

Determiniamo ora il rivestimento universale di $L_+^\uparrow$: se $\Lambda \in M_4(\mathbb{R})$ è un elemento di $L_+^\uparrow$ e se

$$\forall x \in \mathbb{R}^4 \qquad (\Lambda x, g\Lambda x) = (x, gx)$$

ove $g(x, y) = \langle x, y\rangle$ è la metrica di Lorentz con segnatura $(+ - --)$, cioè se

$$\Lambda^T g\Lambda = g$$

allora $\det \Lambda = 1$ e $\Lambda_{00} > 0$. Ora osserviamo che lo spazio delle matrici 2×2 complesse autoaggiunte è, come spazio vettoriale, un $\mathbb{R}^4$, con coordinate

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & c \end{pmatrix}$$

$(a, c \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{C})$ ed identificazione data da

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^4 &\longrightarrow M_2(\mathbb{C}) \\ (x_0, ..., x_4) &\longmapsto \widetilde{x} := \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi

$$\det \widetilde{x} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

mentre

$$\mathrm{tr}(\widetilde{x}) = x_0$$

(consideriamo la traccia normalizzata: se $A \in M_n$, $\mathrm{tr}(A) = \frac{1}{n}\sum_i A_{ii}$).

Evidentemente la trasformazione

$$H \longmapsto AHA^*$$

è un automorfismo delle matrici hermitiane ($\cong \mathbb{R}^4$) che preserva il determinante se $\det A = \pm 1$ (la condizione di ortocronia $\mathrm{tr}(AA^*) \geq 0$ è sempre vera). Con ciò abbiamo che una matrice $A \in SL(2, \mathbb{C})$ dà luogo ad una trasformazione che preserva il determinante.

Allora abbiamo l'omomorfismo delle matrici speciali nel gruppo di Lorentz

$$\begin{aligned} SL(2, \mathbb{C}) &\longrightarrow L \\ A &\longmapsto \Lambda(A) \end{aligned}$$

ove $\Lambda(A)x := A\widetilde{x}A^*$, che ha nucleo $\{\pm 1\}$: si tratta cioè di un rivestimento doppio e, dato che $SL(2,\mathbb{C})$ è semplicemente connesso, del rivestimento universale del gruppo di Lorentz [4].

Osserviamo che

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & 0 \\ 0 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} &= x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= x_0 I + x \cdot \sigma\end{aligned}$$

ove $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sono le matrici di Pauli. È un esercizio verificare che per ogni vettore di norma 1 u si ha $(u \cdot \sigma)^2 = 1$, e quindi osservare che

$$U := e^{i\frac{\vartheta}{2}u\cdot\sigma}$$

è una matrice unitaria per ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$. Viceversa, ogni matrice unitaria è di questo tipo, e si ha:

$$U\widetilde{x}U^* = \widetilde{R(U)x}$$

ove $R(U)$ è una rotazione di un angolo ϑ attorno all'asse individuato dal versore u. I valori $L_u = u \cdot \sigma$ si dicono *momenti angolari*.

17.3 Rappresentazioni del gruppo di Lorentz

Abbiamo visto alla fine del paragrafo precedente che per studiare le rappresentazioni del gruppo di Lorentz possiamo concentrarci sulle rotazioni e sulle traslazioni.

Consideriamo ora una rappresentazione covariante π e la rappresentazione di G indotta $\mathcal{U}(a, A)$. Alle matrici unitarie U dell'esempio precedente corrispondono i generatori infinitesimali del gruppo delle rotazioni

$$\mathcal{U}\left(0, e^{\frac{i}{2}\varphi u\cdot\sigma}\right) = e^{iL_u\varphi}$$

[4] Ricordiamo per quale motivo il gruppo speciale *complesso* sia semplicemente connesso: intanto abbiamo la decomposizione polare $A = VH$ di ogni matrice speciale A in una matrice V unitaria ed una H hermitiana positiva, entrambe di determinante 1. H è una trasformazione di Lorentz pura, in quanto $H = UDU^*$, ove $U \in SU(2)$ e D è diagonale definita positiva e di determinante 1, i.e. $D = \begin{pmatrix} e^\gamma & 0 \\ 0 & e^{-\gamma} \end{pmatrix}$, per $\gamma \in \mathbb{R}$. Se ora $t \longmapsto A(t)$ è una curva (continua) chiusa ($A(0) = A(1)$) in $SL(2,\mathbb{C})$, la possiamo deformare in una curva $V(t)$ in $SU(2)$, dato che la mappa $(t,s) \longmapsto A(t,s) := V(t)H(t)^s$ è evidentemente l'omotopia che realizza questa deformazione. Quindi $\pi_1(SL(2,\mathbb{C})) = \pi_1(SU(2)) = 1$, dato che $SU(2)$ altri non è che la sfera S^3.

Per studiare le rappresentazioni del gruppo delle rotazioni studiamo quelle irriducibili del gruppo SU(2), che è il suo rivestimento universale: sia j un indice variabile nell'insieme dei seminteri non negativi $\{\frac{n}{2}\}_{n\in\mathbb{N}}$, e sia

$$D^{(j)}(U) := \left(U^{\otimes 2j}\right)|_{\mathrm{Sym}^{2j}(\mathbb{C}^2)}$$

(ove $\mathrm{Sym}^n(V)$ denota i tensori simmetrici di grado n su V). Consideriamo ad esempio una rotazione di un angolo φ intorno all'asse x_3:

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} = e^{i\frac{\varphi}{2}\sigma_3}$$

Se $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, si ha (per $k \in \{-2j, ...2j\}$):

$$D^{(j)}(U)u^k v^{2j-k} = \left(e^{i\frac{\varphi}{2}}\right)^k \left(e^{-i\frac{\varphi}{2}}\right)^{2j-k} u^k v^{2j-k} = e^{ik\frac{\varphi}{2}-ij\varphi+ik\frac{\varphi}{2}} = e^{i(k-j)\varphi}$$

e quindi (scrivendo il momento angolare L_{x_k} come L_k):

$$L_3 u^k v^{2j-k} = (k-j)u^k v^{2j-k}$$

Osserviamo esplicitamente che $\dim D^{(j)} = 2j+1$. Lo spettro di L_3 è

$$\sigma(L_3) = \{j, j-1, ..., -j\}$$

Quindi, L_3 è un operatore con molteplicità uniforme pari a uno, ed i suoi autovalori sono tutti interi o tutti seminteri secondoché lo sia o meno j. Ciò naturalmente può dirsi anche per L_2 e L_3. Se

$$L^2 := L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$$

questo operatore è invariante per rotazioni, dato che

$$\mathcal{U}(0,U)L^2\mathcal{U}(0,U)^{-1} = L^2$$

17.3.1 Proposizione *Nella decomposizione della rappresentazione U di $SU(2)$ in rappresentazioni irriducibili*

$$\mathcal{U}(0,U) = \bigoplus \mathcal{U}_n(U)$$

l'operatore L^2 si decompone in somma di scalari:

$$L^2 = \bigoplus k_n I$$

DIMOSTRAZIONE: Ognuna delle componenti di $\mathcal{U}_n(U)$ è $\mathcal{U}_n(U) = D^{j_n}(U)$, e si ha

$$k_n = j_n(j_n + 1)$$

Ora lavoriamo sull'algebra di Lie $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(3)$, che è determinata dai generatori infinitesimali

$$e^{i\frac{\varphi}{2}\sigma_k} \longmapsto \frac{1}{2}\sigma_k$$

(matrici di Pauli) e ricordiamo le regole di moltiplicazione

$$\begin{aligned} \sigma_j\sigma_k &= i\sigma_l \\ \sigma_j^2 &= I \\ \sigma_j\sigma_k &= -\sigma_k\sigma_j\,, \qquad \text{se } k \neq 0 \end{aligned}$$

ove (j, k, l) è una permutazione ciclica di (123), da cui

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2\sigma_j\sigma_k = 2i\sigma_l$$

Quindi l'algebra di Lie è determinata da

$$[\mathcal{U}_k, \mathcal{U}_l] = \sum_m \epsilon_{kl}^m \mathcal{U}_m$$

ove ϵ_{kl}^m è zero se (klm) non è una permutazione ciclica, altrimenti ne è il segno. Ora consideriamo

$$\mathcal{U}\left(e^{\frac{i}{2}\varphi\sigma_k}\right) = e^{i\varphi L_k}$$

in modo che

$$[L_k, L_j] = iL_m$$

(al solito (klm) è una permutazione ciclica). Calcoliamo allora L^2:

$$[L_3, (L_1 + iL_2)] = iL_2 + L_1 = L_1 + iL_2 =: A$$

Quindi

$$L_3A = A(L_3 + I)$$

Se Φ è un autovettore di L_3 di autovalore j, si ha che

$$L_3A\Phi = (j + 1)A\Phi$$

Cioè, se Φ sta in un sottospazio di Hilbert $\mathcal{H}_j$ ove la rappresentazione sia irriducibile, per $\Phi = u^{2j}v^0$ si trova

$$L_j\Phi = j\Phi$$

e quindi $A\Phi = 0$ (per irriducibilità). Dunque $L^2|_{\mathcal{H}_j} = k_j I$ con

$$L^2\Phi = L_3^2\Phi + (L_1^2 + L_2^2)\Phi = j^2\Phi + (L_1^2 + L_2^2)\Phi$$

Ora, $A^* = L_1 - iL_2$, il che ci consente di calcolare $L_1^2 + L_2^2$:

$$A^*A = L_1^2 + L_2^2 + i[L_1, L_2] = L_1^2 + L_2^2 + iL_3 = L_1^2 + L_2^2 - L_3$$

ed infine

$$L^2\Phi = j^2\Phi + (A^*A + L_3)\Phi = j^2\Phi + j\Phi = j(j+1)\Phi$$

QED

Osserviamo che si potrebbe dimostrare anche una formula di Clebsh–Gordan:

$$D^{(j)} \otimes D^{(j')} = \bigoplus_{|j-j'|\leq s\leq j+j'} D^{(s)}$$

Ora consideriamo il sottogruppo delle traslazioni dato dalla formula spettrale

$$a \longmapsto \mathcal{U}(a, I) = \int e^{ip\cdot a} dE(p)$$

ove la misura $\Delta \longmapsto E(\Delta)$ sui boreliani di $\mathbb{R}^4$ è invariante per trasformazioni di Lorentz:

$$\mathcal{U}(0, A)E(\Delta)\mathcal{U}(0, A)^{-1} = E(\Lambda(A)\Delta)$$

(le trasformazioni $a \longmapsto \mathcal{U}(a, I)$ e $a \longmapsto \mathcal{U}(\Lambda(A)a, I)$ sono unitariamente equivalenti). Se $\mathcal{H}$ è separabile, la misura basica è

$$d\mu(p) = (\xi, dE(p)\xi)$$

ove ξ è un vettore separante, ed è invariante per trasformazioni di Lorentz, e la misura

$$d\mu_\Lambda(p) := d\mu(\Lambda_p)$$

è equivalente a $d\mu$.

17.3.2 Teorema *Ogni misura regolare positiva invariante su $\mathbb{R}^4$ è della forma*

$$\int d\rho^+(m) d\Omega_m^+(p) + c\delta_0^{(4)} + \int d\rho^-(m) d\Omega_m^-(p) + \int dp d\Omega_{im}(p)$$

ove $\delta_0^{(4)}$ è la misura di Dirac concentrata in $0 \in \mathbb{R}^4$, dp è la misura di Lebesgue del semiasse positivo, e $d\Omega_m$ la misura su un iperboloide di massa m

$$d\Omega_m(p) := \frac{d^3p}{2\sqrt{p^2 + m}}$$

Per questo teorema si veda [29], §IX.8.

Se ora Δ è un boreliano invariante per trasformazioni di Lorentz: $\Lambda(\Delta) = \Delta$, e quindi $E(\Delta)$ appartiene al commutante di $\mathcal{U}(\widetilde{\mathcal{P}})'$. Ricordiamo che

$$\mathcal{U}(G)'' = \pi(L^1(G))'' = \widetilde{\pi}(C_0(\widehat{(G)})''$$

e quindi $E(\Delta)$ appartiene al commutante dell'algebra di von Neumann della rappresentazione del gruppo, cioè sta nel centro $\mathcal{U}(\widetilde{\mathcal{P}})' \cap \mathcal{U}(\widetilde{\mathcal{P}})''$.

Ora, se $\{P_0, ..., P_4\}$ sono gli operatori fortemente permutabili che generano $\widetilde{\mathcal{P}}$, si ha che

$$M^2 = P_0^2 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2 \geq 0$$

e

$$M = \int_0^\infty m dG(m)$$

ove $G(B) = E(\Delta)$, se B è un boreliano di $\mathbb{R}^+$ e $\Delta = \{p| \; ||p|| \in B\}$.

Se $\mathcal{U}$ è una rappresentazione irriducibile di $\widetilde{\mathcal{P}}$, deve essere

$$M^2 = m^2 I$$

e la formula spettrale è $E(\Delta) \in \{0, I\}$. Quindi il supporto di E come misura sui boreliani invarianti è una singola orbita, il che significa che esiste un'orbita Ω_m tale che

$$E(\Omega_m) = I$$

Richiamiamo ora alcuni fatti generali sulle rappresentazioni indotte, che si applicano al nostro caso: se G è un gruppo localmente compatto e ρ la sua rappresentazione regolare in $L^2(G, d\mu)$ rispetto alla misura $d\mu$ di Haar del gruppo, e se H è un sottogruppo *chiuso* di G e

$$\mathcal{U} : H \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\mathcal{U})$$

una rappresentazione unitaria fortemente continua, vogliamo utilizzarla per indurre delle rappresentazioni di G.

È noto (cfr. [30], §14) che G/H è uno spazio topologico dotato (come pure $H\backslash G$, che è il quoziente di G rispetto all'azione sinistra) di misure quasi-invarianti per l'azione di G. Scegliamo quindi una tale misura (regolare) su $H\backslash G$, e consideriamo le funzioni $\Psi : G \longrightarrow \mathcal{H}_\mathcal{U}$ boreliane e *covarianti* nel senso che

$$\forall h \in H \quad \forall g \in G \qquad \Psi(hg) = \mathcal{U}(k)\Psi(g)$$

Allora, dato che $(\Psi(g), \Psi(g)) = (\Psi(kg), \Psi(kg))$ la Ψ passa al quoziente $H\backslash G$ e si ha

$$\int_{H\backslash G} (\Psi(\overline{g}), \Psi(\overline{g})) d\mu(\overline{g}) < \infty$$

Queste funzioni formano uno spazio di Hilbert sul quale è definita la rappresentazione

$$(\mathcal{U}^\mu(g)\Psi)(h) := \Psi(hg)\sqrt{\frac{d\mu(\overline{h}g)}{d\mu(h)}}$$

(l'espressione sotto radice è la derivata di Radon–Nikodym).

Ora sia $G = N \ltimes H$ (ove $N = \mathbb{R}^4$ e $H = SL(2, \mathbb{C})$) con N gruppo localmente compatto commutativo e normale in G, e H sottogruppo localmente compatto di G, ove il prodotto semidiretto è effettuato rispetto all'azione continua

$$\eta : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$$

Ovviamente, se $\chi \in \widehat{N}$ è un carattere, si ha che $\chi \circ \eta_h$ è un'azione di H sul duale $\widehat{N}$. Inoltre osserviamo che se $H_\chi = \{h \in H \mid \chi \circ \eta_h = \chi\}$ è lo stabilizzatore, e se $\mathcal{U}$ è una rappresentazione di H_χ allora

$$\chi\mathcal{U}(n, h) = \chi(n)\mathcal{U}(h)$$

è una rappresentazione di $N \ltimes H_\chi$, dato che

$$\chi\mathcal{U}((n, h)(n', h')) = \chi\mathcal{U}(n\eta_h(n'), hh') = \chi(n)\chi(n')\mathcal{U}(hh')$$

Allora inducendo dal sottogruppo $N \ltimes H_\chi$ al gruppo $N \ltimes H$ si ottiene una rappresentazione di G: la teoria è dovuta sostanzialmente a Mackey, che ha formulato, fra gli altri, i risultati seguenti:

17.3.3 Teorema

- *se $\chi \in \widehat{N}$ e L è una rappresentazione unitaria fortemente continua di H_χ allora la rappresentazione indotta da χL non varia se χ varia nell'orbita $\chi\eta_H$.*
- *Se $H_\chi \neq H_{\chi'}$ allora $\mathcal{U}^{\chi L} \not\cong \mathcal{U}^{\chi' L'}$.*
- *Se L è una rappresentazione unitaria fortemente continua irriducibile di H_χ allora la rappresentazione indotta $\mathcal{U}^{\chi L}$ è irriducibile.*

Qui faremo anche le seguenti e più restrittive ipotesi:

- Esiste un boreliano in $\widehat{N}$ che è una sezione dell'azione di H, cioè incontra tutte le orbite esattamente in un punto).
- H_χ è un gruppo di tipo I (cioè ogni rappresentazione π della sua C*-algebra il cui centro è ridotto al solo $\mathbb{C}$ è tale che $\pi(\mathcal{A})'' = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ per un opportuno spazio di Hilbert, in altre parole: π è un multiplo di una rappresentazione irriducibile: il tipo di un gruppo è il tipo dell'algebra di von Neumann $\pi(\mathcal{A})''$, che, per l'ipotesi che il centro di π sia $\mathbb{C}$, è un fattore).

In questi caso, anche N è di tipo I (e quindi anche $G = N \ltimes H$ lo è) ed ogni rappresentazione irriducibile è della forma $\mathcal{U}^{\chi L}$ ove L è una rappresentazione irriducibile di H_χ.

Applichiamo ora queste nozioni al caso in cui $N = \mathbb{R}^4$ e $H = SL(2, \mathbb{C})$, con

$$\eta_A(a) = \Lambda(A)a$$

essendo Λ il morfismo del rivestimento $SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow L$ del gruppo di Lorentz. In questo modo $G = N \ltimes H = \widetilde{\mathcal{P}}$.

Osserviamo intanto che l'ipotesi (1) precedente è verificata. Le orbite di $\widehat{\mathbb{R}^4} \cong \mathbb{R}^4$ per l'azione di $SL(2, \mathbb{C})$ sono:

- il punto $\{0\}$.
- il cono di luce positivo o negativo meno l'origine:

$$V^{\pm} := \{p \in \mathbb{R}^4 \,|\, p^2 = 0,\ p_0 \gtrless 0\}$$

- $\Omega_m^{\pm}$ e Ω_{im}.

Per avere una sezione boreliana, consideriamo l'asse x_0, l'asse x_1^+ (esclusa l'origine), un punto su V^+ ed uno su V^-.

Per verificare che vale l'ipotesi (2), identifichiamo come sono fatte le orbite: nel caso (a) è $H_0 = SL(2, \mathbb{C})$, mentre nel caso (c) è, ad esempio nel punto $p = (1, 0, 0, 0)$, $H_p = SU(2)$, e questi sono gruppi di tipo I cfr. [15].

Restano i casi (b) e (d). Nel caso (b), preso come p il punto $(1, 0, 0, 1)$, la matrice hermitiana che gli corrisponde è $I + \sigma_3$ ovvero

$$\underset{\sim}{p} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cioè gli elementi di H_p sono tali che $A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ma se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ abbiamo che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\overline{a} & a\overline{c} \\ \overline{a}c & c\overline{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cioè $|a|^2 = 1$ e $c = 0$, e quindi

$$H_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix} \mid |a|^2 = 1 \right\}$$

Ma, se

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{u} & \overline{u}z \\ 0 & u \end{pmatrix}$$

($\overline{u} = a$ e $\overline{z} = a\overline{b}$) e, moltiplicando:

$$\begin{pmatrix} u & \overline{u}z \\ 0 & \overline{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' & \overline{u'}z' \\ 0 & \overline{u'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uu' & z'\overline{u'} + z\overline{uu'} \\ 0 & \overline{uu'} \end{pmatrix}$$

e, scrivendo le matrici come elementi (u, z):

$$(u, z)(u', z') = (\overline{uu'}, z + u^2 z')$$

e quindi H_p è isomorfo al prodotto semidiretto di S^1 e $\mathbb{R}^2$ rispetto all'azione di S^1 su $\mathbb{R}^2$ data da

$$u = e^{i\vartheta} \longmapsto \left(z \longmapsto z + e^{2i\vartheta} z\right)$$

cioè è un rivestimento doppio del gruppo euclideo del piano che ha come orbite circonferenze di centro l'origine e l'origine stessa. Si tratta di un gruppo di tipo I: le rappresentazioni si possono studiare a partire da queste orbite. Nel caso delle circonferenze si ottengono rappresentazioni di dimensione infinita, che non hanno senso fisico (a meno di non concepire spin infiniti!), mentre nel caso dell'orbita ridotta alla sola origine le rappresentazioni sono

$$D(e^{i\vartheta}, z) = e^{2ij\vartheta}$$

ove j è lo spin della particella di massa zero. Abbiamo cioè

$$H_p = \left\{ \begin{pmatrix} u & \overline{u}z \\ 0 & \overline{u} \end{pmatrix} \middle| u \in \mathbb{T} \text{ e } z \in \mathbb{C} \right\}$$

con $p = (1, 0, 0, 1)$.

Nel caso (d), consideriamo invece il punto $p = (0, 0, 1, 0)$: allora $\underset{\sim}{p} = \sigma_2$ e gli elementi di H_p sono le A tali che $A\sigma_2 A^* = \sigma_2$. Ma (A e σ_2 sono invertibili, e σ_2 è inversa di se stessa):

$$A = \sigma_2 A^{*-1} \sigma_2$$

è una rappresentazione (non unitaria) di $SL(2, \mathbb{C})$ la cui rappresentazione controgradiente (cioè duale) verifica la

$$\overline{A} = \sigma_2 A^{*-1} \sigma_2$$

Infatti $\overline{A}\sigma_2 A^* = \sigma_2$ implica che $A\sigma_2 A^T = \sigma_2$ è equivalente a $iA\sigma_2 A^T = i\sigma_2$. Se scriviamo esplicitamente queste relazioni in termini delle entrate delle matrici, otteniamo

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & bc-ad \\ ad-cb & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ne segue che

$$H_p = \{A \,|\, A = \sigma_2 A^{*-1}\sigma_2 = \overline{A}\} = SL(2,\mathbb{R})$$

Consideriamo ora le rappresentazioni unitarie fortemente continue del gruppo $\widetilde{\mathcal{P}}$ tali che lo spettro sia

$$\sigma\left(\mathcal{U}|_{\mathbb{R}^4}\right) \subset \overline{V^+} = \{p \in \mathbb{R}^4 \,|\, p^2 = 0 \text{ e } p_0 \geq 0\}$$

e precisamente quelle irriducibili associate all'orbita Ω_m^+ $(m > 0)$: sia $P_\omega \in \Omega_m^+$, H_{p_ω} lo stabilizzatore in $SL(2,\mathbb{C})$, D una rappresentazione unitaria irriducibile di H_{p_ω} e χ il carattere associato a p_ω; dato che si può scegliere $p_\omega = (m,0,0,0)$, si ha

$$H_{p_\omega} = SU(2)\,, \qquad D = D^{(j)}$$

Quindi la rappresentazione irriducibile è caratterizzata da m e j. Per capire come è fatta, prendiamo una matrice A_p tale che, per ogni p nell'orbita di p_ω

$$A_p \underset{\sim}{p_\omega} A_p^* = p$$

e che $p \longmapsto A_p$ sia continua. Componiamo questa funzione con Φ:

$$\Psi(p) := \Phi(0, A_p^{-1})$$

Evidentemente lo stabilizzatore è $\{(a,A)\}_{A \in H_{p_\omega}}$. Quindi

$$\int ||\Psi(p)||^2 d\Omega_m(p) < \infty$$

Ricordiamo che

$$d\Omega_m(p) = \frac{dp}{\sqrt{\frac{d}{dt}p^{\frac{1}{2}} + m^2}}$$

$D^{(j)}$ opera su $\mathbb{C}^{2j+1}$. Ora abbiamo $\Psi \longmapsto \mathcal{U}(a,A)\Psi$, e, se $A_p^{-1}AA_{\Lambda(A^{-1})_p}$ sta nello stabilizzatore:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(a,A)\Psi =&\mathcal{U}(a,A)\Phi(0,A_p^{-1}) = \Phi((0,A_p^{-1})(a,A)) = \Phi((\Lambda(A_p^{-1})a, A_p^{-1}A))\\ =&\Phi((\Lambda(A_p^{-1})a, A_p^{-1}AA_{\Lambda(A^{-1})_p}A_{\Lambda(A^{-1})_p}))\\ =&\Phi((\Lambda(A_p^{-1})a, A_p^{-1}AA_{\Lambda(A^{-1})_p})(0, A_{\Lambda(A^{-1})_p}))\\ =&e^{ip_\omega\Lambda(A_p^{-1})a}D^{(j)}(A_p^{-1}AA_{\Lambda(A^{-1})_p})\Phi(0,A_{\Lambda(A^{-1})_p}))\\ =&e^{ip_\omega a}D^{(j)}(A_p^{-1}AA_{\Lambda(A^{-1})_p})\Psi(\Lambda(A^{-1})_p))\end{aligned}$$

(tenendo conto della covarianza della rappresentazione). Che poi $A_p^{-1}AA_{\Lambda(A^{-1})_p}$ stia nello stabilizzatore si verifica facilmente:

$$\Lambda(A_p^{-1}AA_{\Lambda(A^{-1})_p})p_\omega = \Lambda(A_p^{-1})\Lambda(A)\Lambda(A^{-1})_p = \Lambda(A_p^{-1})_p = p_\omega$$

Abbiamo cioè dimostrato il

17.3.4 Teorema (Formula di Wigner)

$$\left(\mathcal{U}(a,A)\Psi)\right)(p) = e^{ipA}D^{(j)}(A_p^{-1}AA_{\Lambda(A^{-1})_p})\Psi(\Lambda(A^{-1})_p)$$

Si noti ora che

$$\Lambda(A_p)p_\omega = p \qquad \text{e} \qquad A_p\underset{\sim}{p_\omega}A_p^* = \underset{\sim}{p}$$

Se $p_\omega \in \Omega_m^+$ e $m > 0$ possiamo prendere $p_\omega = (m,0,0,0)$ e quindi $\underset{\sim}{p_\omega} = mI$, cioè la matrice A_p è determinata dalla $A_pA_p^* = \underset{\sim}{p}/m$. Osserviamo esplicitamente che, avendosi $\det(\underset{\sim}{p}) = p^2 = m^2$ e $\mathrm{tr}(\underset{\sim}{p}) = 2p_0 \geq 2m$ si ha che $\underset{\sim}{p} > 0$ e quindi possiamo considerare

$$A_p := \sqrt{\underset{\sim}{p}/m}$$

che ci fornisce la sezione continua voluta.

17.4 Equazione di Dirac

Continuiamo a considerare le rappresentazioni del gruppo di Lorentz: poniamo

$$||\Phi(p)||^2 = \left(\Phi(p), D^{(j)}\left(\underset{\sim}{p}/m\right)\Phi(p)\right)$$

introducendo in questo modo una struttura di spazio di Hilbert $\mathcal{H}_{m,j}$ sulle funzioni da Ω_m^+ in $\mathbb{C}^{2j+1}$ misurabili e tali che

$$\int ||D^{(j)}(A_p)\Phi_p||^2 d\Omega_m(p) < \infty$$

Allora la

$$(V\Phi)(p) = D^{(j)}(A_p^{-1})\Phi_p$$

è una trasformazione unitaria $V : \mathcal{H}_{m,j} \longrightarrow \mathcal{H}$, per cui

$$\mathcal{U}_{m,j}(a, A) := V^{-1}\mathcal{U}(a, A)V$$

è una rappresentazione unitaria che opera come

$$(\mathcal{U}m, j(a, A)\Phi)(p) = e^{ipa}D^{(j)}(A)\Phi(\Lambda(A^{-1})_p)$$

Se $\Psi(p) \in \mathbb{C}^{2(2j+1)}$ è il vettore

$$\begin{pmatrix} \Phi(p) \\ D^{(j)}\left(\underset{\sim}{p}/m\right)\Phi(p) \end{pmatrix}$$

allora

$$\left(\Phi(p), D^{(j)}\left(\underset{\sim}{p}/m\right)\Phi(p)\right) = \frac{1}{2}(\Psi(p), \gamma \circ \Psi(p))$$

ove $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$.

In $\mathcal{H}_{m,j}$ abbiamo una ulteriore struttura hilbertiana $\mathcal{H}'$ la cui la norma è

$$|||\Phi(p)|||^2 := ||\Psi||^2 = \int \left(\Psi(p), D^{(j)}\left(\underset{\sim}{p}/m\right)^{-1}\Psi(p)\right) d\Omega_m(p)$$

ed un operatore unitario $V : \mathcal{H}' \longrightarrow \mathcal{H}$:

$$(V\Phi)(p) = D\left(\sqrt{\underset{\sim}{p}/m}\right)\Phi(p)$$

Allora la rappresentazione $V\mathcal{U}(a, A)$ opera (tenendo conto della formula di Wigner 17.3.4) come

$$\begin{aligned}(V\mathcal{U}(a, A)V^{-1}\Phi)(p) &= D\left(\sqrt{\underset{\sim}{p}/m}\right)(\mathcal{U}(a, A)V^{-1}\Phi)(p) \\ &= e^{ipa}D(A)D\left(\sqrt{\left(\Lambda\underset{\sim}{(A^{-1})}p\right)/m}\right)(V^{-1}\Phi)(\Lambda(A^{-1})p) \\ &= e^{ipa}D(A)\Phi\Lambda(A^{-1})p\end{aligned}$$

cioè

$$(V\mathcal{U}(a,A)V^{-1}\Phi\Psi)(p) = e^{ipa}D(A)\Psi(\Lambda(A)^{-1}p)$$

Stiamo usando la metrica

$$|||\Psi(p)|||^2 := (\Psi(p), D\left(\underset{\sim}{p}/m\right)\Psi(p))$$

Ma, considerando

$$\Psi(p) := \begin{pmatrix}\psi_1(p)\\ \psi_2(p)\end{pmatrix}$$

(con $\psi_i(p) \in \mathbb{C}^{2j+1}$) e scrivendo

$$\psi_1(p) = \Psi(p) \qquad \text{e} \qquad \psi_2(p) = D\left(\left(\underset{\sim}{p}/m\right)^{-1}\right)\Psi(p)$$

e ricordando le formule per $\widetilde{p}$ e $\underset{\sim}{p}$ e che $(\underset{\sim}{p}/m)^{-1} = \widetilde{p}/m$ troviamo che $\psi(p)$ soddisfa alla

$$\begin{cases}\psi_2(p) = D\left(\widetilde{p}/m\right)\psi_1(p)\\ \psi_1(p) = D\left(\underset{\sim}{p}/m\right)\psi_2(p)\end{cases}$$

che scriviamo in forma più compatta usando l'*operatore di Dirac*

$$\not{P} := \begin{pmatrix}0 & D(\underset{\sim}{p})\\ D(\widetilde{p}) & 0\end{pmatrix}$$

ottenendo l'*equazione di Dirac*

$$\not{P}\Psi(p) = m\Psi(p)$$

Notiamo che

$$\begin{aligned}|||\psi(p)|||^2 = |||\Psi(p)|||^2 &= \frac{1}{2}\left((\psi_1(p),\psi_2(p)) + (\psi_2(p) + \psi_1(p))\right)\\ &= \frac{1}{2}(\Psi(p),\gamma\Psi(p))\end{aligned}$$

(ove $\gamma = \begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}$). Introducendo le *matrici di Dirac*:

$$\gamma_k = \begin{pmatrix}0 & D(\sigma_k)\\ -D(\sigma_k) & 0\end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \gamma_0 = \begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}$$

possiamo anche scrivere l'equazione di Dirac come

$$\not{P} = \sum_k p_k \gamma_k$$

Consideriamo ora nuovamente la rappresentazione

$$(\mathcal{U}_{m,j}(a,A)\Psi)(p) = e^{ipa}\begin{pmatrix} D(A)\psi_1(\Lambda(A)^{-1}(p)) \\ D(\widetilde{p}/m)D(A)\psi_1(\Lambda(A)^{-1}(p)) \end{pmatrix}$$

ed osserviamo che

$$\begin{aligned}(\widetilde{p}/m)\, A =& A^{*-1}\,(A^*\,(\widetilde{p}/m)\,A) = A^{*-1}\left(A^{-1}\left(\underset{\sim}{p}/m\right)A^{*-1}\right)^{-1} \\ =& A^{*-1}\left(\Lambda(\utilde{A^{-1}})p/m\right)^{-1} = A^{*-1}\left(\widetilde{\Lambda(A^{-1})}p/m\right)\end{aligned}$$

(N.B: $A^{*-1} = A^{-1*}$) e quindi che

$$\begin{aligned}(\mathcal{U}_{m,j}(a,A)\Psi)(p) =& e^{ipa}\begin{pmatrix} D(A)\psi_1(\Lambda(A)^{-1}(p)) \\ \\ D(A^{*-1})D(\widetilde{\Lambda(A^{-1})}p/m)\psi_1(\Lambda(A^{-1})(p)) \end{pmatrix} \\ =& e^{ipa}\begin{pmatrix} D(A)\psi_1(\Lambda(A)^{-1}(p)) \\ D(A^{*-1})\psi_2(\Lambda(A^{-1})(p)) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ora definiamo

$$S(A) := D^{(j)}(A) \oplus D^{(j)}(A^{*-1})$$

ove abbiamo scritto

$$D^{(j)}(A) = D^{(j,0)}(A) \qquad \text{e} \qquad D^{(j)}(A^{*-1}) = D^{(0,j)}(A)$$

e quindi $S = D^{(j,0)} \oplus D^{(0,j)}$, sicché

$$(\mathcal{U}_{m,j}(a,A)\Psi)(p) = e^{ipa}S(A)\Psi(\Lambda(A)^{-1}(p))$$

ottenendo così la *covarianza dell'equazione di Dirac*:

$$S(A)\not{P}S(A)^{-1} = \Lambda(A)\not{P}$$

17.4.1 Esempio *Nel caso $j = 0$ possiamo semplicemente considerare*

$$\mathcal{H} = L^2(\Omega_m^+, d\Omega_m)$$

con la rappresentazione

$$((\mathcal{U}(a, A)\Psi)(p) = e^{ipa}\Psi(\Lambda(A)^{-1}(p))$$

Presa l'anti-trasformata di Fourier

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Omega_m^+} e^{-ipx}\Phi(p)d\omega_m(p)$$

e $p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, troviamo

$$\widetilde{\varphi}(\widetilde{p}) = \Phi(\omega(\vec{p}), \vec{p})$$

pertanto

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Omega_m^+} e^{ipx}\widetilde{\varphi}(p)\frac{dp}{2p_0}$$

*Abbiamo così ottenuto $(p^2 - m^2)\widehat{\varphi}(p) = 0$, cioè l'*equazione di Schrödinger relativisticamente invariante

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = 0$$

Si tratta di un'equazione del secondo ordine in t: per questo motivo Dirac ha considerato in sua vece la

$$\sum_k i\gamma_k \frac{\partial\psi}{\partial x_k} = m\psi$$

che si deduce dall'equazione di Dirac per $\not{P}$.

Restringiamo ora la nostra indagine al caso $m = 0$: questo vuol dire che ci poniamo sul cono di luce futuro con misura invariante ($j = 0$)

$$\frac{dp}{2|p_0|}$$

Se $j \neq 0$ consideriamo $(1, 0, 0, 1)$ come vettore di riferimento e costruiamo la sezione per mezzo di

$$(p, \vec{p}) := (|\vec{p}|, \vec{p})$$

Se H_p è la trasformazione di Lorentz pura (diagonale) tale che

$$H_p(1, 0, 0, 1) = (p, 0, 0, p)$$

e la componiamo con la rotazione (unitaria) U_p tale che

$$U_p(0,0,0,p) = (p, \vec{p})$$

otteniamo $A_p = U_p H_p$, che non è una matrice definita positiva; tuttavia, se $m = 0$, l'equazione di Dirac e la relazione di covarianza divengono

$$\not{P}\Psi = 0 \qquad \text{e} \qquad S(A)\not{P}S(A)^{-1} = 0$$

Dunque, considerando lo spazio di Hilbert delle funzioni dal cono di luce futuro ai vettori in C^{2j+1} (con la solita metrica definita dalle γ_k) otteniamo una rappresentazione unitaria di $\widetilde{\mathcal{P}}$.

Dimostriamo ora che questa rappresentazione non è irriducibile. Se $p_\omega = (1,0,0,1)$, lo stabilizzatore è

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix} \right\} \subset SL_2(\mathbb{C})$$

e le rappresentazioni di dimensione finita sono

$$D^{(\pm j)} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix} = a^{\pm 2j}$$

Se il segno è (-)+ Lo spin è (anti-)parallelo all'impulso: infatti considerando p nell'orbita di $(1,0,0,1)$ e A nello stabilizzatore troviamo che

$$\Lambda(A)p = p = \Lambda(A)^{-1}p \Rightarrow A_{\Lambda(A)^{-1}(p)} = A_p$$

Inoltre, per $p = p_\omega = (1,0,0,1)$ $A_p = I$ e la formula di Wigner diviene

$$(\mathcal{U}(0,A)\Psi)(p_\omega) = a^{\pm 2j}\Psi(p_\omega)$$

Per A tale che $\Lambda(A)$ sia una rotazione di asse $\vec{p_\omega}$ (l'asse x_3) e angolo φ abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix} \implies (\mathcal{U}(0,A)\Psi)(p_\omega) = e^{\pm ij\varphi}\Psi(p_\omega)$$

Dunque, se A appartiene allo stabilizzatore di un punto p dell'orbita di p_ω allora $A_p = A_{\Lambda(A)^{-1}p}$ e la formula di Wigner diviene (si rammenti che $A_p = U_p H_p$)

$$(\mathcal{U}(0,A)\Psi)(p) = D(A_p^{-1}AA_p)\Psi(\Lambda(A)^{-1}p) = (H_p^{-1}U_p^{-1}AU_pH_p)\Psi(\lambda(A^{-1})p)$$

quindi, se A è una rotazione, $U_p^{-1}AU_p$ è una matrice diagonale, precisamente una rotazione di asse x_3, il che consente di affermare che D è una rappresentazione e di scrivere la formula di Wigner come

$$(\mathcal{U}(0,A)\Psi)(p) = D(U_p^{-1}AU_p)\Psi(\Lambda(A)^{-1}p) = e^{\pm ij\varphi}\Psi(\Lambda(A)^{-1}(p))$$

Ma allora l'equazione $\not{P}\Psi = 0$ descrive la rappresentazione

$$[0, \frac{1}{2}] \oplus [0, -\frac{1}{2}]$$

che è riducibile.

Il motivo per cui esiste questa decomposizione è il seguente: consideriamo $\not{P}\Psi(p_\pi) = 0$ $(p_\omega = (1, 0, 0, 1))$; allora

$$\not{P} = \begin{pmatrix} 0 & I + \sigma_3 \\ I - \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi $\not{P}\Psi(p_\omega) = 0$ se e solo se $\psi_3 = \psi_2 = 0$. La rappresentazione è

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{*-1} \end{pmatrix}$$

con $A = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix}$, rotazione di asse x_3 unitaria $(A^{*-1} = A)$:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{*-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \\ 0 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Ora la decomposizione nelle due rappresentazioni $[0, \frac{1}{2}]$ e $[0, -\frac{1}{2}]$ è del tutto evidente.