Capitolo 12

TEORIA DELLE RAPPRESENTAZIONI

In questo capitolo studiamo le rappresentazioni delle C*-algebre non necessariamente commutative: la teoria commutativa è stata sviluppata nel capitolo precedente, mentre qui ci occuperemo della ben più complicata situazione nel caso non commutativo.

12.1 Irriducibilità di rappresentazioni

Ricordiamo la definizione fondamentale

12.1.1 Definizione *Una* rappresentazione *di una C*-algebra $\mathcal{A}$ è uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ dotato di uno *-morfismo di C*-algebre:*

$$\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}(\mathcal{H})$$

Se π è isometrica, la rappresentazione si dice fedele*.*

Dimostreremo in séguito che una C*-algebra ammette rappresentazioni fedeli.

Se $\mathcal{A}$ è una C*-algebra e $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una rappresentazione, allora, per un sottospazio vettoriale chiuso M di $\mathcal{H}$ sappiamo già che le seguenti affermazioni si equivalgono:

- M è π-stabile (i.e. $\pi(\mathcal{A})M \subset M$).
- $M^\perp$ è π-stabile.
- $E_M \in \pi(\mathcal{A})'$.
- $\pi \cong \pi|_M \oplus \pi|_{M\perp}$.

12.1.2 Definizione *Una rappresentazione π si dice* topologicamente irriducibile *se non ha sottospazi chiusi e π-stabili oltre a 0 e $\mathcal{H}$.*

12.1.3 Lemma (SCHUR) *π è irriducibile se e solo se $\pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C} \cdot I$.*

DIMOSTRAZIONE: $\pi(\mathcal{A})'$ è un'algebra di von Neumann e quindi è il sottospazio di Banach di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ generato dagli idempotenti autoaggiunti che sono proiettori ortogonali sui sottospazi chiusi π-stabili: cioè solo su 0 e $\mathcal{H}$, quindi gli unici tali proiettori sono 0 e 1, e l'algebra da loro generata è $\mathbb{C} \cdot 1$.

QED

12.1.4 Corollario *Se $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una rappresentazione allora sono equivalenti le*

- *π è (topologicamente) irriducibile;*
- $\overline{\pi(\mathcal{A})}^{uf} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$*;*
- $\overline{\pi(\mathcal{A}_1)}^{f} = \mathcal{B}(\mathcal{H})_1$.
- *Ogni $x \in \mathcal{H} \setminus 0$ è ciclico per la rappresentazione π.*

DIMOSTRAZIONE: Per l'equivalenza delle (1)–(3) basta notare che se π è irriducibile allora $\pi(\mathcal{A})$ è non degenere e quindi $\overline{\pi(\mathcal{A})}^{uf} = \pi(\mathcal{A})''$. Ma $\pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C}\cdot I$ e quindi $\pi(\mathcal{A})'' = \mathcal{B}(\mathcal{H})$. In modo analogo, usando il teorema di densità di Kaplanski 11.4.2, seguono le altre equivalenze.

La (4) equivale alla (3), dato che se $M_x = \overline{\pi(\mathcal{A})x}$ è π-stabile allora $E_{M_x} \in \pi(\mathcal{A})'$; ma se $E \in \pi(\mathcal{A})'$ e $x \in \mathcal{H}$ allora $Ex = x$ e quindi $\pi(\mathcal{A})x = E\pi(\mathcal{A})x$; dunque $M_x = E\mathcal{H}$.

Ne segue che se $E \in \pi(\mathcal{A})'$ è idempotente autoaggiunto $Ex = x$ allora $E_x \subset E$; ma se π è irriducibile E_x è 0 oppure I e quindi se π è irriducibile ogni vettore non nullo è ciclico, mentre se π non è irriducibile non ogni vettore non nullo è ciclico.

QED

Osserviamo inoltre che π è topologicamente irriducibile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$, $x \in \mathcal{H} \setminus 0$ e $y \in \mathcal{H}$ esiste un $A \in \mathcal{A}$ tale che

$$|\pi(A)x - y| < \varepsilon$$

Per una rappresentazione di un'algebra qualsiasi (non necessariamente normata) esiste il concetto algebrico di irriducibilità: una tale rappresentazione è irriducibile se gli unici sottospazi π-stabile (*anche non chiusi*) sono 0 e $\mathcal{H}$. Ovviamente l'irriducibilità algebrica implica quella topologica, e, per il lemma di Schur 12.1.3:

$$\pi \text{ algebricamente irriducibile} \iff \forall x \neq 0, y \in \mathcal{H}\ \exists A \in \mathcal{A} \quad \pi(\mathcal{A})x = y$$

Non dobbiamo comunque preoccuparci delle rappresentazioni algebriche, come mostra il seguente

12.1.5 Teorema (Kadison) *Una rappresentazione π di una C^*-algebra $\mathcal{A}$ è topologicamente irriducibile se e solo se è algebricamente irriducibile.*

Dimostrazione: Una delle implicazioni è ovvia: dimostriamo quindi che una rappresentazione topologicamente irriducibile lo è anche algebricamente.

Il sottospazio $\pi(\mathcal{A})$ è chiuso in norma per ogni π; denotiamo $\pi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ancora con $\mathcal{A}$ e scriviamo moltiplicativamente l'azione della rappresentazione: $Ax = \pi(A)x$; supponiamo ora che

$$\mathcal{A}' = \mathbb{C} \cdot I$$

Vogliamo dimostrare che per ogni $x \neq 0$ e $y \in \mathcal{H}$ esiste un $A \in \mathcal{A}$ tale che $Ax = y$ (il che, come si è osservato esprime l'irriducibilità algebrica della rappresentazione).

Se $y = 0$ è $A = 0$ quindi possiamo supporre anche $y \neq 0$ e, normalizzando:

$$||x|| = ||y|| = 1$$

L'operatore

$$T_{y,x}(z) := (x, z)y$$

è lineare e continuo di norma 1, e tale che $T_{y,x}(x) = y$. Dunque esiste un $A_1 \in \mathcal{A}_1$ tale che

$$||A_1 x - y|| < \frac{1}{2}$$

sostituendo $y_1 := -(A_1 x - y)$ a y in questa maggiorazione si trova

$$||T_{y_1,x}|| < \frac{1}{2}$$

Dunque esiste un A_2 nella palla di raggio $1/2$ di $\mathcal{A}$ tale che

$$||A_2 x - y_1|| < \frac{1}{2^2}$$

Iterando il ragionamento otteniamo una successione di operatori A_n nella palla di raggio $1/2^n$ tali che

$$||A_n x - y_{n-1}|| < \frac{1}{2^n}$$

ove

$$y_n = \sum_{i=1}^{n-1} A_i x - y$$

Ma

$$\Big|\Big| \sum_{i=1}^{\infty} A_i \Big|\Big| \leq \sum_{i=1}^{\infty} ||A_i|| \leq 2$$

e quindi la serie $\sum_i A_i$ converge ad $A \in \mathcal{A}$; allora

$$\begin{array}{ccc} \lim_{n\longrightarrow\infty} y_n & = & 0 \\ || & & || \\ \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=1}^n A_i - y & = & Ax - y \end{array}$$

QED

Esistono delle generalizzazioni di questo risultato che ci limitiamo ad enunciare: la prima è dovuta a Dixmier

Teorema. *Se $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una rappresentazione irriducibile di una C*-algebra $\mathcal{A}$, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è un operatore di rango finito in $\mathcal{H}$ e N è un sottospazio vettoriale di dimensione finita di $\mathcal{H}$ allora esiste un $A \in \mathcal{A}$ tale che $||A|| = ||T|_N||$ e*

$$\pi(A)|_N = T|_N$$

La seconda a Glimm e Kadison:

Teorema. *Se nel teorema precedente T è autoaggiunto (risp. unitario) allora anche A può scegliersi autoaggiunto (risp. unitario).*

Per le dimostrazioni si rimanda a [7], § 2.8.

Sia $\mathcal{A}$ una C*-algebra e π_1, π_2 rappresentazioni di $\mathcal{A}$ negli spazi di Hilbert $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$. Definiamo l'insieme degli *operatori di allacciamento*:

$$(\pi_1, \pi_2) := \{T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2 \,|\, T \text{ continuo e } \forall A \in \mathcal{A}\ T\pi_1(A) = \pi_2(A)T\}$$

Notiamo che

$$\pi(\mathcal{A})' = (\pi, \pi)$$

Ricordiamo che le rappresentazioni sono *equivalenti*, e si scrive $\pi_1 \cong \pi_2$, se esiste un operatore unitario $U \in (\pi_1, \pi_2)$.

12.1.6 Definizione *Se $(\pi_1, \pi_2) = 0$ le rappresentazioni si dicono* disgiunte *e si scrive*[1] $\pi_1 \between \pi_2$.

12.1.7 Lemma *Se π_1, π_2, π_3 sono rappresentazioni di una C*-algebra $\mathcal{A}$ allora:*

- $(\pi_1, \pi_2)^* = (\pi_2, \pi_1)$.
- $(\pi_2, \pi_3)(\pi_1, \pi_2) \subset (\pi_1, \pi_3)$.
- $(\pi_1, \pi_2)^*(\pi_1, \pi_2) \subset \pi_1(\mathcal{A})'$ *e* $(\pi_1, \pi_2)(\pi_1, \pi_2)^* \subset \pi_2(\mathcal{A})'$.

[1]Seguendo George Mackey.

DIMOSTRAZIONE: Sia $T \in (\pi_1, \pi_2)$: allora la (1) segue da

$$(T\pi_1(A^*))^* = (\pi_2(A^*)T)^*$$

Se $R \in (\pi_2, \pi_3)$ allora $RT \in (\pi_1, \pi_3)$ il che dimostra la (2). Infine la (1) e la (2) implicano direttamente la (3).

QED

12.1.8 Lemma (SCHUR) *Se π_1, π_2 sono rappresentazioni della C^*-algebra $\mathcal{A}$ e se $(\pi_1, \pi_2) \neq 0$ allora esistono due sottospazi vettoriali chiusi $M_1 \subset \mathcal{H}_1$ e $N \subset \mathcal{H}_2$ tali che $\pi_1 M_1 \subset M_1$ e $\pi_2 M_2 \subset M_2$ e*

$$\pi_1|_{M_1} \cong \pi_2|_{M_2}$$

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo un operatore non nullo $T \in (\pi_1, \pi_2)$ e la sua decomposizione polare $T = V|T|$; dimostriamo che

$$|T| \in \pi_1(\mathcal{A})' \qquad \text{e} \qquad V \in (\pi_1, \pi_2)$$

Dato che T è di allacciamento, si ha che

$$T^*T \in \pi_1(\mathcal{A})' \qquad \text{e} \qquad TT^* \in \pi_2(\mathcal{A})'$$

e quindi, per ogni $x \in \mathcal{H}_1$:

$$(x, T^*Tx) = (Tx, Tx) \geq 0$$

dunque $T^*T \geq 0$; abbiamo allora $B = |T|$ autoaggiunto e positivo tale che $B^2 = T^*T$, i.e. $|T| \in \pi_1(\mathcal{A})'$.

Quindi

$$V|T|\pi_1(A) = \pi_2(A)V|T|$$

i.e. per ogni x

$$(V\pi_1(A) - \pi_2(A)V)|T|x = 0$$

Ma la chiusura del sottospazio $\{|T|x\}$ è $(\ker T)^\perp$, e $\ker T$ è un sottospazio π_1-stabile, dato che $T \in (\pi_1, \pi_2)$. Quindi in $\mathcal{H}_1$:

$$(V\pi_1(A) - \pi_2(A)V) = 0$$

e V è di allacciamento, $VV^* \in \pi_2(\mathcal{A})'$, $V^*V \in \pi_1(\mathcal{A})'$ e

$$VV^*\mathcal{H}_2 = M_2 \qquad \text{e} \qquad V^*V\mathcal{H}_1 = M_1$$

QED

12.1.9 Definizione *Si dice che π_1 è una* sottorappresentazione *di π_2 se esiste una isometria in (π_1, π_2) e si scrive $\pi_1 \leq \pi_2$.*

In altri termini, $\pi_1 \leq \pi_2$ se

$$\pi_1 \cong \pi_2|_M$$

ove M è un sottospazio di $\mathcal{H}_2$.

12.1.10 Definizione *Si dice che π_1 è* quasi-contenuta *in π_2 se non esistono sotto-rappresentazioni (a parte 0) di π_1 disgiunte da π_2 e si scrive $\pi_1 \preccurlyeq \pi_2$.*

12.1.11 Definizione *Si dice che π_1 è* quasi-equivalente *a π_2 se $\pi_1 \preccurlyeq \pi_2$ e $\pi_2 \preccurlyeq \pi_1$ e si scrive $\pi_1 \approx \pi_2$.*

Nota. *Le nostre rappresentazioni saranno sempre non degeneri.*

Se π_1, π_2 sono rappresentazioni si $\mathcal{A}$ e $\pi_1 \cong \pi_2$ allora

$$\overline{\pi_1 \oplus \pi_2(\mathcal{A})} = \{T \oplus UTU^{-1} \,|\, T \in \pi_1(\mathcal{A})''\}$$

Un elemento di questo spazio è limite forte di elementi della forma

$$\begin{pmatrix} \pi_1(A_\alpha) & 0 \\ 0 & \pi_2(A_\alpha) \end{pmatrix}$$

Se $\pi_1 \between \pi_2$ allora

$$\overline{\pi_1 \oplus \pi_2(\mathcal{A})} = \{T \oplus R \,|\, T \in \pi_1(\mathcal{A})'', R \in \pi_2(\mathcal{A})''\}$$

12.1.12 Proposizione

$$(\pi_1 \oplus \pi_2)(\mathcal{A})' = \left\{ \begin{pmatrix} T & S \\ S' & R \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} T \in (\pi_1, \pi_1) = \pi_1', S \in (\pi_1, \pi_2), \\ R \in (\pi_2, \pi_2) = \pi_2', S' \in (\pi_2, \pi_1) \end{matrix} \right\}$$

DIMOSTRAZIONE: Se $B = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$ allora per $B \in (\pi_1 \oplus \pi_2)(\mathcal{A})'$:

$$E_i B E_j = R_{ij} \in (\pi_i, \pi_j) = (\pi_1 \oplus \pi_2(\mathcal{A}))'$$

Il viceversa è ovvio.

QED

12.1.13 Teorema *Se π_1, π_2 sono rappresentazioni (non degeneri) di $\mathcal{A}$ allora*

$$\pi_1 \mathring{\downarrow} \pi_2 \iff \overline{\pi_1 \oplus \pi_2(\mathcal{A})} = \overline{\pi_1(\mathcal{A})} \oplus \overline{\pi_2(\mathcal{A})}$$

Dimostrazione: Osserviamo che

$$(\pi_1 \oplus \pi_2)(\mathcal{A})' = \begin{pmatrix} \pi_1(\mathcal{A})' & 0 \\ 0 & \pi_2(\mathcal{A})' \end{pmatrix} \iff \pi_1 \mathring{\downarrow} \pi_2$$

Dato che un elemento di $\pi_1 \oplus \pi_2(\mathcal{A})''$ è diagonale (commuta quindi almeno con $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$) allora

$$T \in \pi_1 \oplus \pi_2(\mathcal{A})'' \iff T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$$

ove un elemento della forma $\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$ commuta con T se T_1 commuta con R e T_2 commuta con S. Quindi

$$\pi_1 \mathring{\downarrow} \pi_2 \iff \overline{\pi_1 \oplus \pi_2(\mathcal{A})} = \pi_1 \oplus \pi_2(\mathcal{A})'' = \left\{ \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, T_i \in \pi_i(\mathcal{A})'' \right\}$$

QED

Osserviamo che se $\ker \pi_1 = \ker \pi_2$ allora esiste uno *-isomorfismo di C*-algebre

$$\rho : \pi(\mathcal{A}) \longrightarrow \pi_2(\mathcal{A})$$

12.1.14 Definizione *Se π è una rappresentazione di una C*-algebra $\mathcal{A}$ e $\mathfrak{n}$ è un numero cardinale, definiamo*

$$\mathfrak{n}\pi := \bigoplus_{\alpha \in A} \pi_\alpha$$

ove A è un insieme qualsiasi con $\mathrm{Card}(A) = \mathfrak{n}$ e ciascuna π_α è una copia della rappresentazione π.

12.1.15 Teorema *Se π_1, π_2 sono rappresentazioni di $\mathcal{A}$ allora sono equivalenti le*

- $\pi_1 \approx \pi_2$ *(quasi-equivalenza).*
- *Esiste un numero cardinale $\mathfrak{n}$ tale che $\mathfrak{n}\pi_1 \cong \mathfrak{n}\pi_2$.*

- *Esiste uno *-isomorfismo di C^*-algebre* $\rho : \pi_1(\mathcal{A})'' \longrightarrow \pi_2(\mathcal{A})''$ *tale che*

$$\rho \circ \pi_1 = \pi_2$$

Osserviamo che la (3) equivale anche alla

$$(\pi_1 \oplus \pi_2)(\mathcal{A})'' = \{T \oplus \rho(T) \,|\, T \in \pi_1(\mathcal{A})'', \rho \text{ *-isomorfismo}\}$$

Di questo teorema non dimostreremo l'implicazione (3)⇒(2), che richiede alcuni risultati sulle algebre di von Neumann, essenzialmente quello che enunciamo qui di seguito:

Teorema. *Se* $\mathcal{R}_1$ *e* $\mathcal{R}_2$ *sono algebre di von Neumann e* $\rho : \mathcal{R}_1 \longrightarrow \mathcal{R}_2$ *è uno *-isomorfismo (suriettivo) allora*

- ρ *è un omeomorfismo rispetto alle topologie ultradeboli.*
- *Esiste un operatore unitario* U *che renda commutativo il seguente diagramma:*

$$\begin{array}{ccc} A \in \mathcal{R}_1 & \xrightarrow{\quad\rho\quad} & \mathcal{R}_2 \ni A \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \oplus A \oplus A \oplus \cdots \in \mathcal{R}_1^{\aleph_0} & \xrightarrow{U} & \mathcal{R}_2^{\aleph_0} \ni A \oplus A \oplus A \oplus \cdots \end{array}$$

12.1.16 Esempio

- $\rho(A) = UAU^{-1}$
- $\rho(A) = A \oplus A \oplus A \oplus ...$
- $\rho(A) = A|_M$ *ove* M *è un sottospazio stabile e tale che* $A|_M = 0$ *se e solo se* $A = 0$*, e* $E_M \in \mathcal{R}'$*, con* $\mathcal{R}'M$ *insieme totale.*

Nel terzo esempio, ρ è uno *-isomorfismo se e solo se il minimo proiettore ortogonale su $\mathcal{R}'M$ (che si dice *supporto centrale*) è l'operatore identico I.

In un'algebra di von Neumann $\mathcal{R}$ consideriamo degli operatori $\{E_\alpha\}$ idempotenti, a due a due ortogonali, tali che

$$\sum_\alpha E_\alpha \xrightarrow{\text{fortemente}} E \in \mathcal{R}$$

12.1.17 Definizione ρ *è* normale *se*

$$\rho\left(\sum_\alpha E_\alpha\right) = \sum_\alpha \rho(E_\alpha)$$

12.1.18 Proposizione *Se $\rho : \mathcal{R}_1 \longrightarrow \mathcal{R}_2$ è uno *-isomorfismo fra algebre di Von Neumann, allora è normale.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $E = \sum_\alpha E_\alpha$; allora $E_\alpha \leq E$. Se E_1, E_2 sono idempotenti ortogonali fra loro, anche $\rho(E_1)$ e $\rho(E_2)$ lo sono, sicché

$$E_1 \leq E_2 \Rightarrow \rho(E_1) \leq \rho(E_2)$$

Quindi

$$\sum_\alpha E_\alpha \leq E \qquad \text{e} \qquad \sum_\alpha \rho(E_\alpha) \leq \rho(E)$$

Ma ρ è uno *-isomorfismo (suriettivo) e quindi:

$$F := \sum_\alpha \rho(E_\alpha) \leq \rho\left(\sum_\alpha E_\alpha\right) = \rho(E)$$

da cui

$$E = \sum_\alpha \rho^{-1}\rho(E_\alpha) \leq \rho^{-1}\sum_\alpha \rho(E_\alpha) \leq \rho^{-1}(F)$$

Dunque $\rho(E) \leq F \leq \rho(E)$ (gli *-isomorfismi conservano le disuguaglianze di operatori), cioè $F = \rho(E)$.

QED

Consideriamo un controesempio: sia $\mathcal{R} = L^\infty([0,1])$, e $\omega \in \sigma(\mathcal{R})$; se $f \in \mathcal{R}$ poniamo

$$\rho(f) := f \oplus \omega(f) \in \mathcal{R} \oplus \mathbb{C}$$

Si tratta di uno *-isomorfismo che tuttavia *non è ultradebolmente continuo*: si noti che questo è perfettamente compatibile col risultato precedente, dato che ρ non è normale e dunque $\operatorname{im}\rho$ *non* è un'algebra di von Neumann.

Affrontiamo ora la dimostrazione del teorema 12.1.15.

(1)$\Rightarrow$(3) Consideriamo lo spazio M π_2-stabile e $E = E_M$; se $T \in (\pi_1, \pi_2)$ allora $E \circ T \in (\pi_1, \pi_2|_M)$; viceversa, se $T_0 \in (\pi_1, \pi_2|_M)$ allora $T_0 \in (\pi_1, \pi_2)$: quindi

$$E(\pi_1, \pi_2) = (\pi_1, \pi_2|_M)$$

ne segue che

$$\pi_1 \approx \pi_2 \iff \left.\begin{matrix}(\pi_1,\pi_2)\mathcal{H}_1\\(\pi_2,\pi_1)\mathcal{H}_1\end{matrix}\right\} \begin{matrix}\text{sono totali nei rispettivi}\\ \text{spazi di Hilbert}\end{matrix}$$

Ora consideriamo $\sum_i R_i X_i$ (con $X_i \in \mathcal{H}_1$ e $T_i \in (\pi_1, \pi_2)$): in virtù dell'equivalenza precedente, lo spazio di questi elementi è denso in $\mathcal{H}_2$, quindi

$$\pi_2(A)y = \pi_2(A) \sum_i T_i X_i = \sum_i \pi_2(A) T_i X_i = \sum_i T_i \pi_1(A) X_i$$

e dunque, se

$$\rho(T)y := \sum_i T_i T X_i$$

$(T \in \pi_1(\mathcal{A})'')$ allora

$$(\dagger) \qquad ||\rho(T)y||^2 \leq ||T||^2 ||y||^2$$

il che significa he $\rho(T)$ è un operatore lineare ben definito e continuo (ed ovviamente uno *-omomorfismo). Definiamo ora ρ' scambiando nella definizione di ρ il ruolo di π_1 e π_2; si noti che allora $\rho^{-1} = \rho'$, quindi ρ è invertibile e risulta uno *-isomorfismo. Non resta dunque da dimostrare che la $(\dagger)$.

Notiamo che

$$|| \sum_i T_i T X_i ||^2 = \sum_{i,j} (T_i T X_i, T_j T X_j) = \sum_{i,j} (T X_i, T_i^* T_j T X_j)$$

e quindi che

$$\begin{aligned} ||T||^2 \sum_{i,j} (X_i, T_i^* T_j X_j) &- \sum_{i,j} (T X_i, T_i^* T_j T X_j) \\ &= \sum_{i,j} \left(||T||^2 (X_i, T_i^* T_j X_j) - (T\lambda_i, T_i^* T_j T_i X_j) \right) \end{aligned}$$

è positiva (il che ci fornisce la diseguaglianza voluta): infatti $T_i^* T_j \in (\pi_1, \pi_2)$ quindi commuta con T, e

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \Big(||T||^2 (X_i, T_i^* T_j X_j) - (T\lambda_i, T_i^* T_j T_i X_j) \Big) &= \\ &= \sum_{i,j} (X_i, T_I^* T_j (||T||^2 I - T^* T) X_j) \\ &= \sum_{i,j} (B^* X_i, T_i^* T_j B X_j) = \sum_{i,j} (T_i B^* X_i, T_j B X_j) \\ &= || \sum_i T_i B X_i ||^2 \geq 0 \end{aligned}$$

(ove $(||T||^2 I - T^* T)$ che figura al secondo membro è un elemento positivo dell'algebra di von Neumann che è della forma $B^* B$, con $B \in \pi_1(\mathcal{A})'')$.

QED

12.2 Stati e rappresentazioni

Consideriamo due rappresentazioni (come al solito non degeneri) π_1, π_2 di una C*-algebra $\mathcal{A}$: allora

12.2.1 Proposizione

$$\overline{\mathbb{C}\langle(\pi_1,\pi_2)\mathcal{H}_1\rangle} = \mathcal{H}_2 \iff \pi_1 \preccurlyeq \pi_2$$

(ove con $\mathbb{C}\langle S\rangle$ denotiamo il sottospazio vettoriale generato dall'insieme S in uno spazio di Hilbert).

Dimostrazione: Se

$$M := \overline{\mathbb{C}\langle(\pi_1,\pi_2)\mathcal{H}_1\rangle}$$

ovviamente M è π_2-invariante:

$$T \in \pi_2(\mathcal{A})' \Rightarrow T \in (\pi_2,\pi_2)$$

ma $(\pi_2,\pi_2)(\pi_1,\pi_2) \subset (\pi_1,\pi_2)$ i.e. $TM \subset M$.

Dunque M è l'immagine di un operatore G idempotente autoaggiunto che deve commutare con $\pi_2(\mathcal{A})$:

$$M = G\mathcal{H}_2 \qquad \text{e} \qquad G \in \pi_2(\mathcal{A})''$$

Ma $\pi_2(A)M \subset M$, dato che $\pi_2(A)TX = T\pi_1(A)X \in M$, sicché $G \in \pi_2(\mathcal{A})'$, e quindi

$$G \in \pi_2(\mathcal{A})' \cap \pi_2(\mathcal{A})'' = \mathcal{Z}(\pi_2(\mathcal{A})'')$$

Dunque, $\pi_1 \oplus \pi_2$ ha la sottorappresentazione

$$(\dagger) \qquad \pi_2 = \pi_2|_{G\mathcal{H}_2} \oplus \pi_2|_{G\mathcal{H}_2^\perp}$$

che quindi è somma diretta di rappresentazioni quasi-contenute in π_1 e disgiunte da π_1.

Ne segue che, a meno che $G = I$ (e quindi $M = \mathcal{H}_2$) non può aversi $\pi_1 \preccurlyeq \pi_2$ e viceversa.

QED

Osserviamo che, se $\mathcal{A} = C(X)$ e π_1, π_2 sono sue rappresentazioni in spazi di Hilbert separabili allora

$$\pi_1 \approx \pi_2 \iff \widehat{\mu_1} = \widehat{\mu_2}$$

(le misure associate basiche sono uguali). La decomposizione ($\dagger$) precedente diviene, a livello di misure, la decomposizione

$$\widehat{\mu_2} = \mu_2' + \mu_2''$$

con $\mu_2' \ll \widehat{\mu_1}$ e $\mu_2'' \perp \widehat{\mu_1}$.

Sia ora $\mathcal{A}$ una C*-algebra qualsiasi (con unità).

12.2.2 Definizione *Un elemento $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si dice* positivo *se per ogni $x \in \mathcal{H}$:*

$$(x, Ax) \geq 0$$

e si scrive $A \geq 0$.

Equivalentemente, $A \geq 0$ è positivo se e solo se è autoaggiunto ed il suo spettro è contenuto nel "semiasse positivo" $[0, \infty]$, cioè se esiste B tale che $A = B^*B$.

Quest'ultima caratterizzazione può scegliersi come definizione di positività in una C*-algebra qualsiasi.

12.2.3 Definizione *La* parte positiva *di una C*-algebra $\mathcal{A}$ è l'insieme*

$$\mathcal{A}_+ := \{B^*B \mid B \in \mathcal{A}\}$$

ed i suoi elementi si dicono positivi.

12.2.4 Lemma *Se $\mathcal{A}$ è una C*-algebra con identità I e $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ allora:*

- $\sigma(A_1A_2) \setminus 0 = \sigma(A_2A_1) \setminus 0$.
- *Se $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ sono autoaggiunti, da $\sigma(A_i) \subset [0, \infty]$ segue che $\sigma(A_1 + A_2) \subset [0, \infty]$.*

DIMOSTRAZIONE: (1) Sia $\lambda \neq 0$ un elemento del risolvente di A_1A_2:

$$R := (A_1A_2 - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{A}$$

Ma

$$(A_2A_1 - \lambda I)^{-1} = \lambda^{-1}(A_2RA_1 - I)$$

dato che

$$\begin{cases} (A_2RA_1 - I)(A_2A_1 - \lambda I) & = \lambda I \\ (A_2A_1 - \lambda I)(A_2RA_1 - I) & = \lambda I \end{cases}$$

Infatti

$$\begin{aligned} (A_2RA_1A_2A_1 - \lambda A_2RA_1 - A_2A_1 + \lambda I) = & \\ & = A_2R(A_2A_1 - \lambda I)A_1 - A_2A_1 + \lambda I \\ & = A_2IA_1 - A_2A_1 + \lambda I = \lambda I \end{aligned}$$

Analogamente per l'altra espressione.

(2) Ricordiamo intanto che

$$\sigma(B) \subset [0, \infty] \iff \forall\lambda > 0 \quad \sigma(\lambda B) \subset [0, \infty]$$

Dunque possiamo scegliere λ in modo che $||\lambda A_1||, ||\lambda A_2|| \leq 1$ e

$$\sigma(\lambda(A_1 + A_2)) \subset [0, \infty] \Rightarrow \sigma(A_1 + A - 2) \subset [0, \infty]$$

e quindi supporre che sia

$$||A_1||, ||A_2|| \leq 1$$

Dunque $\sigma(A_i) \in [0, 1]$ i.e. $\sigma(I - A_i) \in [0, 1]$.

Ora consideriamo $T_i = I - A_i$; ovviamente

$$\left|\left|\frac{1}{2}(T_1 + T_2)\right|\right| \leq 1 \implies \left|\left|I - \frac{1}{2}(A_1 + A - 2)\right|\right| \leq 1$$

il che implica $\sigma(I - \frac{1}{2}(A_1 + A_2)) \subset [0, \infty]$. e quindi

$$\sigma\left(\frac{1}{2}(A_1 + A - 2)\right) \subset [0, 2] \qquad \text{e} \qquad \sigma(A_1 + A_2) \subset [0, 4]$$

QED

12.2.5 Teorema

- $\mathcal{A}_+ = \{A \in \mathcal{A} \,|\, A = A^* \ e\ \sigma(A) \subset [0, \infty]\}$
- $\mathcal{A}_+$ *è un cono, tale che*
  - $\mathcal{A}_+ \cap -\mathcal{A}_+ = 0$.
  - $\mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_+ \subset \mathcal{A}_+$.
  - $\mathbb{R}^+ \cdot \mathcal{A}_+ \subset \mathcal{A}_+$.
  - $\mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_+ = \{A \in \mathcal{A} \,|\, A = A^*\}$.

Dimostrazione: La (2c) segue dalla (1) in modo ovvio. Dimostriamo la (2d): sia $A = A^*$, e consideriamo le funzioni continue

$$f_\pm(\lambda) := \begin{cases} |\lambda| & \text{se } \pm\lambda \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Ovviamente $(f_+ - f_-)(\lambda) = \lambda$ e $f_\pm \geq 0$. Possiamo applicare il calcolo funzionale continuo (dato che A è autoaggiunto) ottenendo

$$(f_+ - f_-)(A) = A \qquad \text{e} \qquad f_\pm(A) = A_\pm$$

ove $A_\pm$ è autoaggiunto con spettro positivo (teorema della mappa spettrale); dunque, per ogni A autoaggiunto si ha $A = A_+ - A_-$ ove $A_\pm \in \{B \in \mathcal{A} \mid B = B^* \text{ e } \sigma(B) \subset [0, \infty]\}$.

Quindi anche la (2d) segue dalla (1): dimostriamo quest'ultima. Che si abbia

$$\mathcal{A} \supset \{A \mid A = A^* \text{ e } \sigma(A) \subset [0, \infty]\}$$

segue di nuovo dal calcolo funzionale continuo con $f(\lambda) = +\sqrt{\lambda}$, $\lambda \geq 0$; con questa funzione si trova che $f(A) = B$ è autoaggiunto e tale che $B^2 = A$ (in particolare $B^*B = A$).

Dimostriamo quindi l'inclusione opposta. Sia $B^*B \in \mathcal{A}_+$: ovviamente B^*B è autoaggiunto, e quindi il suo spettro è contenuto in $\mathbb{R}$; calcoliamo su B^*B le funzioni $f_\pm$ introdotte in precedenza, ottenendo:

$$B^*B = f_+(B^*B) - f_-(B^*B) = u^2 - v^2$$

(un operatore a spettro positivo è il quadrato di un operatore autoaggiunto). Ma $A_+A_- = 0$ e quindi $uv = 0$ che, con

$$vB^*Bv = v(u^2 - v^2) = vu^2v - v^4$$

implica che $vB^*Bv = -v^4$. Quindi se definiamo

$$A := Bv$$

otteniamo $A^*A = -v^4$. Ora, sappiamo dalla (1) del lemma che

$$\sigma(A^*A) \setminus 0 = \sigma(AA^*) \setminus 0$$

pertanto, se $\sigma(A^*A) \subset [0, \infty]$ allora anche $\sigma(AA^*) \subset [0, \infty]$, e, per $A = Bv$ si trova

$$\sigma(A^*A) = \sigma(v^4) \subset [0, \infty] \implies \sigma(A^*A + AA^*) \subset [0, \infty]$$

Dunque, scrivendo $A = A_1 + iA_2$ (A_i autoaggiunti) otteniamo

$$\begin{aligned} A^* &= A_1 - iA_2 \\ A^*A &= A_1^2 + A_2^2 + i(A_1A_2 - A_2A_1) \\ AA* &= A_1^2 + A_2^2 - i(A_1A_2 - A_2A_1) \end{aligned}$$

cioè
$$A^*A + AA^* = 2(A_1^2 + A_2^2)$$
e $\sigma(A^*A + AA^*) \subset [-\infty, 0]$ i.e. $\sigma(A_1^2 + A_2^2) \subset [-\infty, 0]$. Ma
$$\sigma(A_1^2) \subset [0, \infty] \qquad \text{e} \qquad \sigma(A_2^2) \subset [0, \infty]$$
e, per la (2) del lemma:
$$\sigma(A_1^2 + A_2^2) \subset [0, \infty]$$
Le due inclusioni dimostrate significano che
$$\sigma(A_1^2 + A_2^2) = 0$$
cioè che $A_1^2 + A_2^2$ è un operatore nilpotente (ed autoaggiunto), dunque $A_1^2 + A_2^2 = 0$ ovvero $A_1 = A_2 = 0$. Ne segue $A = 0$, e quindi. $v = 0$. Risulta dunque $B^*B = u^2$.

In definitiva ogni B^*B è autoaggiunto con spettro positivo e quindi
$$\mathcal{A}_+ = \{A \,|\, A^*A \text{ e } \sigma(A) \subset [0, \infty]\}$$
Questo dimostra la (1).

La (2a) segue immediatamente e, per la (2) del lemma, anche la (2b).

QED

Il cono $\mathcal{A}_+$ genera lo spazio degli elementi autoaggiunti.

12.2.6 Definizione *f si dice* hermitiano *se $f = f^*$.*

Osserviamo che, per ogni $f \in \mathcal{A}^*$:
$$f = \frac{1}{2}(f + f^*) + i\frac{1}{2i}(f - f^*)$$
e quindi f si decompone in somma di hermitiani.

I funzionali lineari continui hermitiani formano uno spazio di Banach reale $\mathcal{A}_h^*$, e, se $A \in \mathcal{A}_{aa}$ e $f \in \mathcal{A}_h^*$ allora $f(A) \in \mathbb{R}$. Se $f \in \mathcal{A}^*$ allora si definisce
$$f^*(A) := \overline{f(A^*)}$$
Evidentemente $||f^*|| = ||f||$, $f^{**} = f$ e la mappa $f \longmapsto f^*$ è antilineare.

12.2.7 Definizione

- *Se A e B sono autoaggiunti e se $A - B \in \mathcal{A}_+$ allora scriviamo $A \geq B$.*
- *Il* cono duale *della C^*-algebra $\mathcal{A}$ è l'insieme*
$$\mathcal{A}_+^* := \{f \in \mathcal{A}^* \,|\, \forall A \in \mathcal{A}_+ \ f(A) \geq 0\}$$

Ovviamente

$$\mathcal{A}_+^* \subset \mathcal{A}_h^*$$

e, se $f \in \mathcal{A}_+$ allora la mappa

$$(A, B) \longmapsto f(A^*B)$$

definisce una forma sesquilineare semidefinita positiva: ogni tale forma soddisfa la disuguaglianza di Schwartz:

$$|f(A^*B)|^2 \leq f(A^*A)f(B^*B)$$

e

$$f((\alpha A + \beta B)^2(\alpha A + \beta B)) \geq 0$$

da cui segue

$$f(A^*B) = \overline{f(AB^*A)}$$

(per $B = I$ si trova $f \in \mathcal{A}_h^*$).

12.2.8 Teorema *Un funzionale lineare f qualsiasi è positivo se e solo se è continuo e $f(I) = ||f||$.*

DIMOSTRAZIONE: Se f è positivo allora (ricordando che $\sigma(A^*A) \subset [0, ||A||^2]$ e dunque che $||A||^2 I - A^*A \in \mathcal{A}_+$):

$$f\left(||A||^2 I - A^*A\right) = ||A||^2 f(I) - f(A^*A)$$

cioè $f(A^*A) \leq ||A||^2 - f(I)$; ma

$$|f(A)|^2 = |f(IA)|^2 \leq f(I)f(A^*A) \leq ||A||^2 f(I)^2$$

da cui la continuità di f. Che sia $f(I) = ||f||$ segue da $f(I) \leq ||A||$.

Viceversa, se $f \neq 0$ è continuo e $f(I) = ||f||$, allora esiste un λ tale che $||\lambda f|| = 1$, dunque possiamo assumere $f(I) = 1$. A questo punto la dimostrazione del teorema si riduce a quella del lemma seguente:

12.2.9 Lemma *Se $||f|| = f(I) = 1$ allora per ogni operatore normale A*

$$f(A) \in \overline{\{\operatorname{Conv} \sigma(A)\}} = \bigcap \{\textit{dischi chiusi contenenti } \sigma(A)\}$$

DIMOSTRAZIONE: Si tratta di far vedere che per ogni $\lambda\in\sigma(A)$ tale che $|\lambda - z| \leq a$ si ha
$$|f(\lambda) - z| \leq a$$
Ma A è normale, quindi anche $(A - zI)$ lo è, sicché
$$||A - zI|| = \mathrm{spr}(A - zI)$$
(raggio spettrale), pertanto
$$|f(A) - z| = |f(A - zI)| \leq a$$
QED

12.2.10 Definizione *Lo* spazio degli degli stati *della C^*-algebra $\mathcal{A}$ è*
$$\mathcal{S}(\mathcal{A}) := \{f \in \mathcal{A}^*_+ \mid ||f|| = 1\}$$

12.2.11 Proposizione $\mathcal{S}(\mathcal{A}))$ *è convesso, *-debolmente chiuso e compatto.*

DIMOSTRAZIONE: È un convesso dato che lo è $\mathcal{A}^*_+$. Inoltre
$$\mathcal{S}(\mathcal{A}) = \bigcap_{a\in\mathcal{A}} \{f \in \mathcal{A}^* | \, f(A^*A) \geq 0\} \cap \{f \mid f(I) - 1 = 0\}$$
quindi è intersezione di insiemi *-debolmente chiusi. Infine è
$$\mathcal{S}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}^*_1$$
(palla unitaria in $\mathcal{A}^*$) che è un compatto di Hausdorff nella topologia *-debole (teorema di Alaoglu 8.2.12); pertanto $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ è compatto in quanto chiuso in un compatto.

QED

Una conseguenza del teorema di Hahn–Banach è il

12.2.12 Teorema *Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ sono C^*-algebre con la stessa unità I e se $\omega\in\mathcal{S}(\mathcal{A})$ allora esiste un $\widetilde{\omega} \in \mathcal{S}(\mathcal{B})$ tale che $\widetilde{\omega}|_{\mathcal{A}} = \omega$.*

12.2.13 Esempio *Si consideri una C*-algebra commutativa $\mathcal{A}$ e $\varphi\in\sigma(\mathcal{A})$; allora*

$$\varphi(A^*A) = |\varphi(A)|^2 \geq 0$$

cioè φ è uno stato. Ne segue che, per ogni $A \in \mathcal{A}$ esiste $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ tale che

$$\omega(A^*A) = ||A||^2$$

Infatti A^*A è autoaggiunto e genera la C-algebra commutativa $C * (A^*A, I)$ che possiede uno stato φ (infatti $\sigma(C^*(A^*A, I)) \cong \sigma(A^*A)$), quindi esiste $\varphi \in \sigma(\mathcal{A})$ tale che $\varphi(A^*A) = ||A||^2$. Usando il teorema precedente possiamo estendere φ e ω.*

Dato che lo spazio degli stati $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ è un convesso compatto (in uno spazio vettoriale topologico localmente convesso $\mathcal{A}^*$), per il teorema di Krejn–Millman 8.3.10 l'insieme dei suoi punti estremali è non vuoto e:

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}) = \overline{\text{Conv}(\text{Extr}(\mathcal{S}(\mathcal{A})))}$$

12.2.14 Definizione *I punti estremali di $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ si dicono* stati puri*; l'insieme degli stati puri si denota con $\mathcal{P}(\mathcal{A})$.*

12.2.15 Esempio *Se $\mathcal{A}$ è commutativa allora per $A = B^*B$ si ha $\widehat{A}\varphi = \widehat{B}(\varphi)^2$; inoltre, se $f\in\mathcal{A}^*$, per il teorema di Riesz–Markov 9.2.2, esiste una misura regolare positiva μ tale che*

$$f(A) = \int \widehat{A}(\varphi) d\mu(\varphi)$$

dunque

$$f \geq 0 \iff \mu \text{ è positiva}$$

12.2.16 Definizione *Se $\omega, \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ si dice che ω è uno* stato dominato *da φ e scriviamo $\omega \preccurlyeq \varphi$ se esiste una costante $M \geq 0$ tale che*

$$M\varphi - \omega \geq 0$$

L'insieme degli stati dominati da $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ si denota con C_φ.

Il seguente lemma mostra che gli stati puri corrispondono alle misure di Dirac

12.2.17 Lemma $\omega \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \iff \operatorname{supp} \mu_\omega = \{x\}$

DIMOSTRAZIONE: Se il supporto della misura μ_ω contiene almeno due punti distinti $\varphi_1, \varphi_2 \in \operatorname{supp} \mu_\omega$ allora, dato che siamo in uno spazio di Hausdorff, per il lemma di Urysohn 2.3.2 esiste una funzione continua $f : \sigma(\mathcal{A}) \longrightarrow [0,1]$ tale che $f(0) = \varphi_1$ e $f(1) = \varphi_0$: in questo modo $d\mu_\omega = f d\mu_\omega + (1-f)d\mu_\omega$ e

$$\omega(A) = \int \widehat{A}(\varphi)d\mu_\omega(\varphi) = \int \widehat{A}(1-f)d\mu_\omega + \int \widehat{A} f d\mu_\omega = f_1(A) + f_2(A)$$

(ove f_1, f_2 sono funzionali positivi che possiamo normalizzare in modo da avere

$$\omega(A) = \int (1-f)d\mu\, \omega_1(A) + \int f d\mu\, \omega_2(A)$$

Quindi ω si decompone in combinazione convessa propria di due stati.

Viceversa, sia ω uno stato puro e dimostriamo che $\operatorname{supp} \mu_\omega$ è ridotto ad un punto. Questo segue da una osservazione generale: se $\mathcal{A}$ è una C*-algebra qualsiasi e $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ è tale che

$$\omega = a\omega_1 + b\omega_2 \qquad \text{con} \quad a, b \in [0,1] \quad \text{e} \quad a + b = 1$$

Allora se $B \in \mathcal{A}_+$:

$$(\omega - a\omega_1)(B) \geq 0$$

cioè $a\omega_1 \leq \omega$ (nell'ordinamento determinato da $\mathcal{A}_+$) e quindi

$$M\omega := \frac{1}{2}\omega \geq \omega_1 \implies \varphi - \frac{1}{M}\omega = b\omega$$

(il primo termine è positivo) con $b = ||\varphi - \frac{1}{M}\omega||$. Ne segue che

$$\varphi = a\omega + b\omega'$$

(con $a = 1/M$). Abbiamo quindi dimostrato il lemma, il cui enunciato è infatti equivalente al seguente

$$\omega \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \iff \text{l'unico stato dominato da } \omega \text{ è } \omega$$

QED

Possiamo ulteriormente parafrasare il lemma precedente nella

$$\omega \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \iff C_\omega = \{\omega\}$$

12.2.18 Proposizione *Se $\mathcal{A}$ è commutativa allora $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.*

DIMOSTRAZIONE: Notiamo che

$$\varphi(A^*A) = \varphi(A)^*\varphi(A) = |\varphi(A)|^2 \geq 0$$

cioè, se $\varphi \in \sigma(\mathcal{A})$ allora $\varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$.

Se viceversa $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ abbiamo una misura μ_ω tale che

$$\omega(A) = \int_{\sigma(\mathcal{A})} \widehat{A}(\varphi) d\mu_\omega(\varphi)$$

Supponendo che μ_ω sia concentrata in un punto vogliamo dedurre che ω è uno stato puro; ma se $\omega \preccurlyeq \omega'$ allora per ogni insieme Δ μ_ω-misurabile abbiamo che

$$\mu_{\omega'}(\Delta) \leq M\mu_\omega(\Delta)$$

e quindi $\operatorname{supp}\mu_{\omega'} \subset \operatorname{supp}\mu_\omega$ che è un punto. Ma $\mu_{\omega'}$ è una misura positiva (normalizzata), quindi è una misura di Dirac.

QED

Ricordiamo che nel caso di una C*-algebra commutativa $\mathcal{A}$ avevamo la decomposizione dei funzionali $f = f_1 + if_2$ in funzionali hermitiani, con associata decomposizione di misure positive supportate su insiemi disgiunti

$$d\mu_{f_j} = d\mu_{f_j+} - d\mu_{f_j-}$$

e dunque $f_j = f_{j+} - f_{j-}$ e $||f_j|| = ||f_{j+}|| + ||f_{j-}||$.

12.2.19 Proposizione *Se $\mathcal{A}$ è una C*-algebra qualsiasi e $f = f^*$ un funzionale allora esiste la decomposizione*

$$f = f_+ - f_- \qquad \textit{con} \quad f_\pm \in \mathcal{A}_+^*$$

tale che $||f|| = ||f_+|| + ||f_-||$.

DIMOSTRAZIONE: Se $A \in \mathcal{A}$ consideriamo il funzionale

$$\begin{aligned} \widehat{A} : &\mathcal{S}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C} \\ &\omega \longmapsto \omega(A) \end{aligned}$$

(si tratta di una generalizzazione della trasformata di Gel'fand), che è uno *-omomorfismo: $\widehat{A^*} = \widehat{A}^*$ ed è continuo: $|\omega(A)| \leq ||A||$.

La mappa

$$\begin{aligned} \mathfrak{f} : \mathcal{A}_{aa} &\longrightarrow C_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}(\mathcal{A})) := \{f_{\mathcal{S}}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, f \text{ continua}\} \\ A &\longmapsto \widehat{A} \end{aligned}$$

è un isomorfismo isometrico di spazi di Banach, dato che

$$||\widehat{A}|| = \sup_{\omega} |\omega(A)| = ||A||$$

Dimostriamo in effetti che esiste un ω tale che

$$|\omega(A)| = ||A||$$

Se $\mathbf{A} := C^*\langle A, I\rangle \cong C(\sigma(A))$ è la C*-algebra (commutativa) generata dall'operatore autoaggiunto A, dato che $\operatorname{spr}(A) = ||A||$ (essendo autoaggiunto) i casi sono due: o $||A|| \in \sigma(A)$ oppure $-||A|| \in \sigma(A)$. Ma in entrambi questi casi esiste uno stato su $\mathbf{A}$ che, calcolato in A, valga $||A||$ oppure $-||A||$: estendendo questo stato ad $\mathcal{A}$ si ottiene ω.

Ora torniamo a considerare la mappa $\mathfrak{f}$ e consideriamone l'immagine X: per ogni $f \in \mathcal{A}^*$ tale che $f = f^*$ si ha che $f(A) \in \mathbb{R}$ se $A = A^*$, cioè l'immagine $\widetilde{f}$ di f in X^* è tale che

$$\widetilde{f}(A) = f(A)$$

e che $||\widetilde{f}|| = ||f||$.

Allora, per il teorema di Hahn–Banach, $\widetilde{f}$ ammette una estensione a $C_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}(\mathcal{A}))^*$ e quindi esiste $F \in C_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}(\mathcal{A}))^*$ tale che

$$||F|| = ||\widetilde{f}|| = ||f|| \qquad \text{e} \qquad F\left(\widehat{A}\right) = f(A)$$

Ad una tale F possiamo far corrispondere, mercé il teorema di Riesz–Markov, una misura reale μ tale che (tenendo conto del teorema precedente di decomposizione $\mu = \mu_+ - \mu_-$, $\mu_+ \perp \mu_-$):

$$F(g) = \int g(\omega) d\mu(\omega) = \int g(\omega) d\mu_+(\omega) - \int g(\omega) d\mu_-(\omega) := F_+(g) - F_-(g)$$

ove $||F_+|| + ||F_-|| = ||F||$ (dato che $\mu_+ \perp \mu_-$). Dunque

$$f(A) = F\left(\widehat{A}\right) = F_+\left(\widehat{A}\right) - F_-\left(\widehat{A}\right) =: f_+(A) - f_-(A)$$

con $f_\pm$ funzionali lineari positivi e

$$||f_\pm|| = f_\pm(I) = \int g(\omega) d\mu_\pm(\omega) = ||F_\pm||$$

Quindi

$$||f|| = ||F|| = ||F_+|| + ||F_-|| = ||f_+|| + ||f_-||$$

Per concludere non resta che definire

$$f_\pm(A) := f_\pm(A_1) + if_\pm(A_2)$$

QED

12.3 Il teorema di Gel'fand–Najmark–Segal

Affrontiamo ora un argomento fondamentale ed affascinante: la costruzione di Gel'fand–Najmark–Segal (GNS).

Consideriamo una C*-algebra qualsiasi $\mathcal{A}$ con unità I ed una sua rappresentazione (non degenere) π in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$: riordiamo esplicitamente che, dato che π è non degenere, abbiamo $\pi(I) = I$. Sia ora $\xi \in \mathcal{H}_1$:

$$\omega(A) := \omega_\xi \circ \pi(A) = (\xi, \pi(A)\xi)$$

è un funzionale lineare (lo è π) positivo: infatti

$$\omega(A^*A) = (\xi, \pi(A)^*\pi(A)\xi) = (\pi(A)\xi, \pi(A)\xi) = ||\pi(A)\xi||^2 \geq 0$$

Inoltre ($||\xi|| = 1$ e $\pi(I) = I$):

$$\omega(I) = ||\xi||^2 = 1$$

Dunque $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$.

In realtà possiamo dimostrare molto di più:

12.3.1 Teorema (Gel'fand–Najmark–Segal) *Se $\mathcal{A}$ è una C*-algebra con unità I e $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ esistono unici:*

- *uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}_\omega$;*
- *una rappresentazione $\pi_\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$ non degenere;*
- *un vettore $\xi \in \mathcal{H}_\omega$ di norma 1: $||\xi|| = 1$;*

tali che per ogni $A \in \mathcal{A}$:

$$(\xi_\omega, \pi_\omega(A)\xi_\omega) = \omega(A)$$

e

$$\overline{\pi_\omega(\xi_\omega)} = \mathcal{H}_\omega$$

(cioè ξ_ω è ciclico per la rappresentazione π_ω).

Dimostrazione: Prima di affrontare la dimostrazione del teorema, osserviamo che se al posto di π_ω consideriamo la rappresentazione $\pi_\xi := \pi_\omega|_{\overline{\pi_\omega(\mathcal{A})}}$ allora la mappa $\pi_\omega \longmapsto \omega$ non cambia, e che l'unicità è data dalla ciclicità del vettore ξ_ω.

Dimostriamo per prima cosa l'unicità della tripla $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \xi_\omega)$.

Sia $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ un'altra tripla siffatta, e sia U_0 l'operatore definito su $\pi(A)$ e tale che

$$(\dagger) \qquad \forall A \in \mathcal{A} \quad U_0\pi(A)\xi = \pi_\omega(A)\xi$$

Basta dimostrare che

$$(\dagger\dagger) \qquad ||U_0\pi(A)\xi|| = ||\pi_\omega(A)\xi||$$

per avere che U_0 è ben definito ed isometrico. Ed infatti

$$||\pi_\omega(A)\xi||^2 = \omega(A^*A) = ||\pi(A)\xi||^2$$

da cui segue ($\dagger\dagger$).

Estendiamo a questo punto U_0 in modo unico ad un operatore $\widetilde{U_0}$ ovunque definito (ciò è possibile per la ciclicità di ξ e ξ_ω). Osservando che

$$U\pi(A)\pi(B)\xi = U\pi(AB)\xi = \pi_\omega(A)U\pi(B)\xi$$

ed usando la ciclicità di ξ e la ($\dagger$) otteniamo

$$U\pi(A) = \pi_\omega(A)U$$

e $U\xi = \xi_\omega$.

Dunque la tripla $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \xi_\omega)$ è unica a meno di equivalenze unitarie.

Dimostriamo ora l'esistenza di una tale tripla: prima considereremo lo schema della dimostrazione, per passare poi nei dettagli. Sia $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$: allora su $\mathcal{A}^*$ abbiamo la forma sesquilineare definita positiva

$$(A, B) \longmapsto \omega(A^*B)$$

Questa forma induce, sul completamento dello spazio quoziente di $\mathcal{A}^*$ modulo il sottospazio generato dai vettori che sono nel nucleo della forma, una struttura di spazio di Hilbert.

Infatti, se consideriamo l'ideale sinistro

$$\mathfrak{N}_\omega := \{A \in \mathcal{A} \,|\, \omega(A^*A) = 0\}$$

sullo spazio $\mathcal{A}/\mathfrak{N}_\omega$ abbiamo il prodotto scalare

$$(\overline{A}, \overline{B}) := \omega(A^*B)$$

Ma $\mathcal{A}/\mathfrak{N}_\omega$ è un $\mathcal{A}$-modulo (dato che $\mathfrak{N}_\omega$ è un ideale) per tramite della rappresentazione regolare

$$\pi(A)\overline{B}; = \overline{AB}$$

(Si noti che, se $\overline{B'} = \overline{B}$ allora $B - B' \in \mathfrak{N}_\omega$ e quindi $A(B - B') \in \mathfrak{N}_\omega$, da cui $\overline{AB} - \overline{AB'} = 0$).

Dunque completando lo spazio $\mathcal{A}/\mathfrak{N}_\omega$ rispetto a questo prodotto scalare otteniamo uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}_\omega$ sul quale possiamo estendere unicamente $\pi(A)$ ad una rappresentazione $\pi_\omega(A)$. Considerando $\xi_\omega = \overline{I}$ abbiamo la terna $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \xi_\omega)$ desiderata, dato che

$$(\xi_\omega, \pi_\omega(A)\xi_\omega) = (\overline{I}, \overline{A}) = \omega(A)$$

Passiamo ora ai dettagli della dimostrazione: intanto dobbiamo verificare che $\mathfrak{N}_\omega$ è un ideale sinistro: di certo lo è l'insieme

$$\mathfrak{I}_\omega := \{A \in \mathcal{A} \,|\, \forall B \in \mathcal{A}\ \omega(BA) = 0\}$$

Dimostriamo che si tratta esattamente di $\mathfrak{N}_\omega$. Se $A \in \mathfrak{I}_\omega$ allora, per $B = A^*$ si trova $A \in \mathfrak{N}_\omega$, i.e. $\mathfrak{I}_\omega \subset \mathfrak{N}_\Omega$.

Viceversa:

$$|\omega(B^*A)| \leq \omega(B^*B)\omega(A^*A)$$

il che dà l'inclusione opposta. Quindi $\mathfrak{N}_\omega = \mathfrak{I}_\omega$ è un ideale sinistro.

Verifichiamo ora che la posizione

$$\pi(A)\overline{B} := \overline{AB}$$

definisce effettivamente una rappresentazione (il che è ovvio) continua, cioè che

$$||\pi(A)\overline{B}|| \leq ||A||\,||B||$$

Questo segue dalla

$$(\overline{AB}, \overline{AB}) \leq ||A||^2(\overline{B}, \overline{B}) \tag{†††}$$

Dimostriamola: si ha

$$(\overline{AB}, \overline{AB}) = \omega((AB)^*AB) \leq ||A||^2\omega(B^*B)$$

ove la disuguaglianza vale in quanto

$$\omega((AB)^*AB) = \omega(B^*(A^*A)B) \leq ||A||^2\omega(B^*B)$$

(si rammenti che siamo in una C*-algebra: $||A^*A|| = ||A||^2$). Dunque

$$||A||\,||\overline{B}|| - ||\pi(A)\overline{B}|| = \omega(B^*C^*CB) = \omega((CB)^*CB) \geq 0$$

ove $C^*C = ||A||^2 I - A^*A$.

Quindi $\pi(A)$ è un operatore lineare e continuo, ed inoltre

$$||\pi(A)|| \leq ||A||$$

sicché, essendo definito su un sottoinsieme denso, $\pi(A)$ si estende univocamente ad un $\pi_\omega(A)$ tale che

$$||\pi_\omega(A)|| \leq ||A||$$

Osserviamo inoltre che

$$\pi(AB)\overline{C} = \overline{(AB)C} = \overline{A(BC)} = \pi(A)\pi(B)\overline{C}$$

e quindi, dato che è vera sul sottoinsieme denso, vale la

$$\pi_\omega(AB) = \pi_\omega(A)\pi_\omega(B)$$

Infine, dato che

$$\begin{aligned}(\overline{C}, \pi_\omega(A^*)\overline{B}) &= (\overline{C}, \overline{A^*B}) = \omega(C^*A^*B) \\ &= \omega((AC)^*B) = (\overline{AC}, \overline{B}) = (\pi_\omega(A)\overline{C}, \overline{B})\end{aligned}$$

sempre per densità abbiamo

$$(x, \pi_\omega(A^*)y)) = (x, \pi_\omega(A)^*y)$$

Resta solo da osservare la ciclicità di ξ_ω: ma questa segue immediatamente dalla densità di $\pi_\omega(A)\xi_\omega = \mathcal{A}/\mathfrak{N}_\omega$.

QED

Una conseguenza notevolissima di questo importante risultato è la possibilità di dimostrare che ogni C*-algebra ammette una rappresentazione fedele, cioè con nucleo 0.

Consideriamo una C*-algebra $\mathcal{A}$ e $A \in \mathcal{A}$: allora esiste uno stato $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ tale che $\omega(A^*A) = ||A||^2$, quindi, applicando la costruzione GNS, otteniamo una famiglia di rappresentazioni

$$\{\pi_\omega\}_{\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})}$$

mediante la quale possiamo definire la *rappresentazione universale* di $\mathcal{A}$:

$$\widehat{\pi} := \bigoplus_{\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})} \pi_\omega$$

Questa sarà la rappresentazione fedele della nostra C*-algebra:

12.3.2 Teorema $\widehat{\pi}$ *è una rappresentazione isometrica.*

DIMOSTRAZIONE: Per ogni $A \in \mathcal{A}$ abbiamo:

$$||\widehat{\pi}(A)|| = ||A||$$

Infatti π_ω è una contrazione (3.2.7) e quindi anche la somma diretta[2] delle π_ω lo è: $||\widehat{\pi}(A)|| \leq ||A||$; dunque

$$||\widehat{\pi}(A)||^2 = ||\widehat{\pi}(A^*A)|| = ||A^*A|| = ||A||^2$$

Ma

$$||\widehat{\pi}(A)||^2 = \sup_{||\xi||=1} ||\pi(A)\xi||^2$$

Ora, se poniamo

$$\overline{\xi_\omega} := \begin{cases} \xi_\omega & \text{sulla } \omega\text{-sima componente di } \widehat{\pi} \\ 0 & \text{sulle altre componenti di } \widehat{\pi} \end{cases}$$

troviamo che

$$\overline{\xi_\omega}\omega' = \delta_{\omega\omega'}\xi_\omega$$

e quindi

$$(\widehat{\pi}(A)\overline{\xi_\omega})(\omega') = \delta_{\omega\omega'}\pi_\omega(A)\xi_\omega$$

pertanto

$$(\overline{\xi_\omega}, \pi(A)\overline{\xi_\omega}) = \omega(A)$$

Ne segue che

$$||\widehat{\pi}(A)\overline{\xi_\omega}||^2 = \omega(A^*A) = ||A||^2$$

cioè

$$||\widehat{\pi}(A)||^2 = \sup_{||\xi||=1} ||\pi(A)\xi||^2 \geq 0$$

il che finalmente ci dà la tesi: $||\widehat{\pi}(A)|| = ||A||$.

QED

Osserviamo che la costruzione della rappresentazione universale è canonica, nel senso che non dipende che da proprietà naturali della C*-algebra: tuttavia esistono altre costruzioni che, sebbene non canoniche, sono più semplici da utilizzare.

[2]Basti osservare che ogni rappresentazione di una C*-algebra è una contrazione.

12.3.3 Teorema (Segal) *Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ sono C^*-algebre con la stessa unità I allora ogni stato puro di $\mathcal{A}$ si estende unicamente ad uno stato puro di $\mathcal{B}$.*

Dimostrazione: Consideriamo, fissato un $\omega \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$:

$$\mathcal{C}_\omega := \{\omega' \in \mathcal{S}(\mathcal{B}) \,|\, \omega'|_{\mathcal{A}} = \omega\}$$

Ovviamente $\mathcal{C}_\omega \subset \mathcal{S}(\mathcal{B})$; inoltre $\mathcal{C}_\omega$ è un convesso, dato che

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad (a\omega' + b\omega'')(A) = \omega(A)$$

(con $a+b=1$) e $\mathcal{C}_\omega$ è l'intersezione di $\mathcal{S}(\mathcal{B})$ con l'insieme

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \{f \in \mathcal{B}^* \,|\, f(A) = \omega(A)\}$$

che è *-debolmente chiuso: dunque $\mathcal{C}_\omega$ pure è *-debolmente chiuso e quindi *-debolmente compatto (dato che lo è $\mathcal{S}(\mathcal{B})$). Allora il teorema di Krejn–Millman garantisce l'esistenza di punti estremali in $\mathcal{C}_\omega$.

Sia $\widehat{\omega}$ in tale estremale: dato che ω è uno stato puro, $\widehat{\omega}$ è estremale anche in $\mathcal{S}(\mathcal{B})$: se infatti

$$\widehat{\omega} = a\omega' + b\omega''$$

(con $\omega', \omega'' \in \mathcal{S}(\mathcal{B})$ e $ab \neq 0$) allora $|Eo', \omega'' \in \mathcal{C}_\omega$, dato che

$$(a\omega' + b\omega'')|_{\mathcal{A}} = \omega(A) := \widehat{\omega}|_{\mathcal{A}} = a + \omega'|_{\mathcal{A}} + b\omega''|_{\mathcal{A}}$$

Ma ω è puro e quindi

$$\omega'|_{\mathcal{A}} = \omega''|_{\mathcal{A}} = \omega$$

cioè $\omega', \omega'' \in \mathcal{C}_\omega$. Dall'estremalità di $\widehat{\omega}$ segue allora che $\omega' = \omega''$.

QED

Prima di dimostrare il teorema di Segal che caratterizza gli stati puri come quelli associati alle rappresentazioni irriducibili per tramite della rappresentazione GNS svolgiamo alcune osservazioni.

Ora consideriamo $\mathcal{A}$ separabile e quindi scegliamo $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ densa e $\{\omega_n\}$ successione di stati puri tali che

$$\omega_n(A_n^* A_n) = ||A_n||^2$$

Allora

$$\pi := \bigoplus_n \pi_{\omega_n}$$

è tale che $||\pi(A)||^2 = ||A||^2$ e lo spazio $\mathcal{H}_\omega$ della rappresentazione GNS è separabile, visto che contiene la successione densa $\{\pi(A_n)\xi\}$: dunque la rappresentazione GNS è fedele in uno spazio di Hilbert separabile.

Se $f \in \mathcal{A}^*$ allora esistono x, y tali che

$$(*) \qquad f(A) = (x, \widehat{\pi}(A)y)$$

Infatti $f = f_1 + if_2 = a_1\omega_1 + ... + a_4\omega_4$ (con f_i hermitiani e $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$); allora, per

$$x := \sum_{k=1}^{4} \overline{\xi_{\omega_k}} \qquad \text{e} \qquad y := \sum_{k=1}^{4} a_k \overline{\xi_{\omega_k}}$$

si ha la (*): in effetti, per ogni $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$:

$$\delta_{\omega\omega'}\omega(A) = (\overline{\xi_\omega}, \widehat{\pi}(A)\overline{\xi_\omega})$$

12.3.4 Teorema (SEGAL) *Uno stato ω è puro se e solo se la rappresentazione GNS associata π_ω è irriducibile.*

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamo che, posto $C_\omega = \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) \mid \varphi \ll \omega\}$ allora

$$\omega \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \iff C_\omega = \{\omega\}$$

Ma π è irriducibile se e solo se $\pi(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \cdot I$ (lemma di Schur 12.1.8) cioè $\pi(\mathcal{A})'_+ = \mathbb{R}^+ \cdot I$, che è vero se e solo se

$$\{T \in \pi_\omega(\mathcal{A})'_+ \mid (\xi_\omega, T\xi_\omega) = 1\} = \{I\}$$

Dunque ci basta far vedere che

$$\forall \omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) \quad C_\omega \approx \mathcal{D} := \{T \in \pi_\omega(\mathcal{A})'_+ \mid (\xi_\omega, T\xi_\omega) = 1\}$$

ove $\approx$ indica un isomorfismo di insiemi convessi.

Dunque sia $T \in \mathcal{D}$; allora la mappa

$$T \longmapsto \varphi_T$$

ove $\varphi_T(A) = (T\xi_\omega, \pi_\omega(A)\xi_\omega)$, è un funzionale lineare continuo su $\mathcal{A}$, ed è (a) positivo e (b) $\varphi_T \preccurlyeq \omega$.

Per T positivo abbiamo $T = B^*B$, con $B \in \pi_\omega(\mathcal{A})'$ e quindi

$$\begin{aligned}\pi_T(A^*A) =&(B^*B\xi_\omega, \pi_\omega(A)^*\pi_\omega(A)\xi_\omega) = (\pi_\omega(A)B\xi_\omega, B\pi_\omega(A)\xi_\omega)\\ =& ||B\pi_\omega(A)\xi_\omega||^2 \geq 0\end{aligned}$$

Dunque la (a); la (b) segue da

$$||B\pi_\omega(A)\xi_\omega||^2 \leq ||B||^2||\pi_\omega(A)\xi_\omega||^2 = ||T||\omega(A^*A)$$

La mappa $T \longmapsto \varphi_T$ è inoltre convessa, quindi, per concludere, dobbiamo solo mostrare che è biunivoca.

Ma, se ξ è un vettore ciclico per $\pi_\omega(\mathcal{A})$ allora ξ è separante per $\pi_\omega(\mathcal{A})'$ e quindi, se $\varphi_{T_1} = \varphi_{T_2}$ allora

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad ((T_1 - T_2)\xi, \pi_\omega(A)\xi) = 0$$

i.e. $(T_1 - T_2)\xi \perp \pi_\omega(\mathcal{A})\xi$ e, per ciclicità: $(T_1 - T_2)\xi = 0$. Un tale vettore è certamente ξ_ω: quindi possiamo dedurre $T_1 = T_2$.

Sia infine $\varphi \in C_\omega$; dimostriamo che esiste $T \in \mathcal{D}$ tale che $\varphi = \varphi_T$. Ma il funzionale di due variabili

$$\{\pi_\omega(A)\xi_\omega(B)\xi_\omega\} := \varphi(A^*B)$$

è sesquilineare e ben definito: infatti $\varphi \preccurlyeq \omega$, quindi se $\omega(A * A) = 0$ allora $\varphi(A^*A) = 0$; per $A = B$ si trova

$$\{\pi_\omega(A)\xi_\omega(A)\xi_\omega\} \leq M\omega(A^*A) = M||\pi_\omega(A)\xi_\omega||^2$$

(ove $\varphi(A^*A) \leq M\omega(A^*A)$). Quindi, per il teorema di rappresentazione di Riesz, esiste un unico operatore lineare positivo T con $||T|| \leq M$ tale che

$$\{\pi_\omega(A)\xi_\omega(B)\xi_\omega\} := \varphi(A^*B) = (\pi_\omega(A)\xi_\omega, T\pi_\omega(B)\xi_\omega)$$

Per $A = B = I$ si ha ovviamente $1 = (\xi_\omega, T\xi_\omega)$.

Infine $T \in \pi(\mathcal{A})'$, dato che $\varphi(A^*CB) = \varphi((C^*A)^*B)$ e quindi

$$(\pi_\omega(A)\xi_\omega, T\pi_\omega(C)\pi_\omega(B)\xi_\omega) = (\pi_\omega(CA)\xi_\omega, T\pi_\omega(B)\xi_\omega)$$

QED

Si noti che l'operatore T considerato nella dimostrazione del teorema si comporta come una "derivata di Radon–Nikodym" della φ_T.

Si osservi inoltre che se π è una rappresentazione *irriducibile* di una C*-algebra allora $\pi \cong \pi_\omega$. Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ (con la stessa unità I) allora si può estendere ω ad uno stato puro di $\mathcal{B}$: infatti ω è puro per irriducibilità di π (il teorema appena dimostrato) e quindi è estendibile a $\mathcal{B}$; si consideri poi la rappresentazione GNS associata a questo stato esteso $\widehat{\omega}$ in $\mathcal{B}$. Allora $\mathcal{H}_\omega \hookrightarrow \mathcal{H}_{\widehat{\omega}}$, dato che

$$\forall B \in \mathcal{A} \quad (\xi_{\widehat{\omega}}, \pi_{\widehat{\omega}}(B)\xi_{\widehat{\omega}}) = \widehat{\omega}(B) = \omega(\widehat{B})$$

Cioè $\pi_{\widehat{\omega}}|_{\mathcal{A}}$ è una rappresentazione (di $\mathcal{A}$) che ristretta al sottospazio ciclico generato da $\xi_{\widehat{\omega}}$ è ciclica per $\mathcal{A}$ ed induce lo stato ω: insomma, ritroviamo π_ω.

Consideriamo ora la rappresentazione universale $\widehat{\pi}$; se $f \in \mathcal{A}^*$ allora

$$f(A) =< g, \widehat{\pi}(A)$$

ove $g \in \mathfrak{M}_0 \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\widehat{\pi}})^*$. Sia $\mathcal{A}$ è una *-sottoalgebra di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e se $\mathcal{U} = \mathfrak{M}|_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}^*$ (funzionali lineari ultradebolmente continui): allora

12.3.5 Teorema $\mathcal{U}^* \cong \overline{\mathcal{A}}^{uf}$.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo $\mathcal{R} = \overline{\mathcal{A}}^{uf}$; la mappa di restrizione $\mathcal{R}_* \longrightarrow \mathcal{U}$: $f \longmapsto f|_{\mathcal{A}}$ è un isomorfismo isometrico di spazi di Banach:

$$||f|_{\mathcal{A}}|| = ||f||$$

Per dimostrarlo basta applicare il teorema di densità di Kaplanski 11.4.2 ($(\overline{\mathcal{A}})_1 = \overline{\mathcal{A}_1}$):

$$||f_{\mathcal{A}}|| = \sup_{A\in\mathcal{A}_1} |f(A)| = \sup_{A\in\overline{\mathcal{A}_1}} |f(A)| = \sup_{A\in(\overline{\mathcal{A}})_1} |f(A)| = ||f||$$

QED

Si noti che se $\mathcal{A}$ è non degenere allora $\mathcal{U}^* \cong \mathcal{A}''$ via la mappa che a F associa T_F tale che

$$f(T_F) = F(f)$$

(teorema di rappresentazione di Riesz).

Allora $\pi(\mathcal{A})'' \cong \mathcal{U}^*_\pi$, ove $\mathcal{U}^*_\pi \subset \mathcal{A}^*$ è il sottospazio dei funzionali lineari ultradebolmente continui in π:

$$\mathcal{U}^*_\pi := \{f \circ \pi \,|\, f \in \mathfrak{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)^*\}$$

Infatti, se $g \in \mathcal{A}^*$ allora $\pi(A) \longmapsto g(A)$ è ben definita ($\ker\pi \subset \ker g$) ed è ultradebolmente continua dunque, per il teorema di Hahn–Banach, estendibile a $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$. Quindi, per tramite della mappa $F \longmapsto T$ tale che

$$F(f_{x,y} \circ \pi) = x(Ty)$$

otteniamo $\mathcal{U}^*_\pi \cong \pi(\mathcal{A})''$.

Le osservazioni precedenti implicano $\mathcal{U}_{\widehat{\pi}} \cong \mathcal{A}^*$:

12.3.6 Definizione *L'*algebra di von Neumann inviluppante *di una C*-algebra $\mathcal{A}$ è $\widehat{\pi}(\mathcal{A})''$.*

Si noti che, come spazi di Banach: $\widehat{\pi}(\mathcal{A})'' \cong \mathcal{A}^{**}$.

Se π è una rappresentazione ciclica di $\mathcal{A}$ allora $\pi \leq \widehat{\pi}$: infatti se ξ è il vettore ciclico e

$$\omega(A) =: (\xi, \pi(A)\xi)$$

si ha (teorema GNS) $\pi \cong \pi_\omega \leq \widehat{\pi}$.

Quindi

Lemma. *Ogni rappresentazione di una C*-algebra ha una sottorappresentazione ciclica equivalente ad una sottorappresentazione della rappresentazione universale:*

$$\forall \pi \quad \pi \ll \widehat{\pi}$$

12.3.7 Teorema *Se $\mathcal{Z}(\widehat{\pi}(\mathcal{A})'') = \widehat{\pi}(\mathcal{A})'' \cap \widehat{\pi}(\mathcal{A})'$, allora gli idempotenti autoaggiunti di $\mathcal{Z}(\widehat{\pi}(\mathcal{A})'')$ sono in corrispondenza biunivoca con le rappresentazioni di $\mathcal{A}$ in modo che*

$$\begin{aligned} \pi \approx \pi' &\iff \mathcal{Z}(\pi) = \mathcal{Z}(\pi') \\ \pi \preccurlyeq \pi' &\iff \mathcal{Z}(\pi) \leq \mathcal{Z}(\pi') \\ \pi \,\rfloor\!\!\circ\, \pi' &\iff \mathcal{Z}(\pi)\mathcal{Z}(\pi') = 0 \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE: Come noto, se $\pi_1 \ll \pi_2$ allora esiste uno *-omomorfismo normale $\rho : \pi_2(\mathcal{A})'' \longrightarrow \pi_1(\mathcal{A})''$ tale che

$$\rho \circ \pi_1 = \pi_2$$

(In realtà questa è una caratterizzazione delle relazione di quasi-inclusione, ma questo non l'abbiamo dimostrato).

Quindi, per il lemma, l'algebra di von Neumann inviluppante è tale che, per ogni rappresentazione π esiste uno *-omomorfismo normale $\rho_\pi : \widehat{\pi}(\mathcal{A})'' \longrightarrow \pi(\mathcal{A})''$ tale che

$$\rho_\pi \circ \widehat{\pi} = \pi$$

Il nucleo di ρ_π è un ideale ultradebolmente chiuso, quindi (come segue dalla proposizione 11.4.5) esiste un proiettore $F \in \mathcal{Z}(\widehat{\pi}(\mathcal{A})'')$; ponendo $Z(\pi) = (I - F)$ si ottengono le relazioni dell'enunciato.

QED

Osserviamo che, se ω è lo stato

$$\omega(A) = (x, \widehat{\pi}(A)x)$$

ove $x = \widehat{\xi_\omega}$ e $x(\omega') = \delta_{\omega\omega'}\xi_\omega$, pre $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ non degenere e $\omega = \omega_x|_{\mathcal{B}}$ esiste

$$E_\omega \in \mathcal{B}''$$

più piccolo idempotente autoaggiunto di $\mathcal{B}''$ che contenga x:

12.3.8 Proposizione $E_\omega = E_{\overline{\mathcal{B}'x}}$.

Dimostrazione: Si ha intanto $E_\omega \in \mathcal{B}''$ e $E_\omega x = x$ (in quanto $\mathcal{B}$ è non degenere) e quindi, se $F = F^* = F^2 \in \mathcal{B}''$ è tale che

$$Fx = x$$

allora, per ogni $T \in \mathcal{B}'$:

$$x \in F\mathcal{H} \Rightarrow Tx = TFx = FTx \in F\mathcal{H}$$

i.e. $\overline{\mathcal{B}'x} \subset F\mathcal{H}$, onde $E \leq F$.

QED

In altri termini, per ogni ω abbiamo identificato un idempotente autoaggiunto E_ω dell'algebra di von Neumann inviluppante

$$E_\omega = E_{\overline{\widehat{\pi}(\mathcal{A})'\xi_{\widehat{\omega}}}}$$

che è il più piccolo idempotente autoaggiunto di $\mathcal{A}^{**}$ contenente $\widehat{\xi_\omega}$.

Ma $F \in \mathcal{A}^{**}$ se e solo se $F\widehat{\xi_\omega} = \widehat{\xi_\omega}$ i.e.

$$(\xi_{\widehat{\omega}}, F\xi_{\widehat{\omega}}) = 1$$

12.3.9 Proposizione

$$\widehat{\omega}(F) = 1$$

e quindi E_ω è il più piccolo idempotente autoaggiunto F di $\mathcal{A}^{**} = \widehat{\pi}(\mathcal{A})''$ tale che $\omega(F) = 1$, cioè che $F(\omega) = 1$.

Dimostrazione: Se $B \in \widehat{\pi}(\mathcal{A})''$ e $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ allora

$$\forall A \quad (\widehat{\xi_\omega}, \widehat{\pi}(A)\widehat{\xi_\omega}) = \omega(A)$$

e la mappa $f_{\widehat{\xi_\omega},\widehat{\xi_\omega}} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\widehat{\pi}}) \longrightarrow \mathbb{C}$ determinata da

$$f_{\widehat{\xi_\omega},\widehat{\xi_\omega}}(T) = (\xi_{\widehat{\omega}}, T\xi_{\widehat{\omega}})$$

è debolmente continua e tale che

$$f_{\widehat{\xi_\omega},\widehat{\xi_\omega}}|_{\widehat{\pi}(\mathcal{A})''}$$

sia l'unica estensione debolmente continua del funzionale $\widehat{\pi}(A) \longmapsto \omega(A)$; se chiamiamo $\widetilde{\omega}$ questa estensione allora $\widetilde{\omega}(T) = T(\omega)$.

QED

12.3.10 Definizione *La* probabilità di transizione *da uno stato φ a uno stato ω è*

$$P_{\varphi,\omega} := \widetilde{\omega}(P_\omega) = P_\omega(\varphi)$$

12.4 Stati puri e rappresentazioni irriducibili

Rammentiamo ora due fatti noti che utilizzeremo in forma di lemmi nella dimostrazione del prossimo risultato:

12.4.1 Lemma

- *Se* $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *è una *-sottoalgebra,* $\mathcal{R} := \overline{\mathcal{A}^+}$ *e* $f \in \mathcal{R}_*$ *allora la mappa* $f \longmapsto f|_{\mathcal{A}}$ *è una isometria.*

- *Inoltre se* π_1, π_2 *sono rappresentazioni disgiunte di* $\mathcal{A}$ *allora*

$$\overline{(\pi_1 \oplus \pi_2)(\mathcal{A})}^f = \overline{\pi_1(\mathcal{A})}^f \oplus \overline{\pi_2(\mathcal{A})}^f$$

12.4.2 Teorema (GLIMM–KADISON) *Se* $\omega, \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ *sono stati tali che* $||\omega - \varphi|| < 2$ *allora le rappresentazioni* π_ω *e* π_φ *non possono essere disgiunte.*

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamo per assurdo che, se $\pi_\omega ⫰ \pi_\varphi$ allora

$$||\omega - \varphi|| = 2$$

(infatti si ha sempre $||\omega - \varphi|| \leq ||\omega|| + ||\varphi|| = 2$).

Ma sappiamo che $\pi_\omega ⫰ \pi_\varphi$ equivale alla (2) del lemma, quindi $I \oplus (-I) \in \overline{\pi_\omega(\mathcal{A})}^f \oplus \overline{\pi_\varphi(\mathcal{A})}^f$ è limite forte di elementi di $\pi(\mathcal{A}) := \pi_\omega(\mathcal{A}) \oplus \pi_\varphi(\mathcal{A})$.

Inoltre, per la (1) del lemma, se $\xi = \xi_\omega \oplus 0$ e $\eta = 0 \oplus \xi_\varphi$ allora

$$\omega(A) = (\xi, \pi(A)\xi) \qquad \text{e} \qquad \varphi(A) = (\eta, \pi(A)\eta)$$

sicché

$$||\omega - \varphi|| = ||(f_{\xi,\xi} - f_{\eta,\eta}) \circ \pi|| = ||(f_{\xi,\xi} - f_{\eta,\eta})|_{\pi(\mathcal{A})''}||$$

(dato che $\pi(\mathcal{A}_1) = \pi(\mathcal{A})_1$ e per il teorema di Kaplanski 11.4.2).

Ma se $\pi_\omega ⫰ \pi_\varphi$ allora (tenendo presente che $f_{\xi,\xi}(I \oplus 0) = f_{\eta,\eta}(0 \oplus -I) = 1$):

$$||(f_{\xi,\xi} - f_{\eta,\eta})|_{\pi(\mathcal{A})''}|| \geq < f_{\xi,\xi} - f_{\eta,\eta}|I \oplus (-I) >= 2$$

cioè $||\omega - \varphi|| \geq 2$.

QED

Consideriamo ora $\omega = \omega_x$ (ove $||x|| = 1$) e $P_\omega \in \mathcal{R}$ tale che

$$P_\omega = \bigwedge\{P \in \mathcal{R} \,|\, Px = x\} = \bigwedge\{P \in \mathcal{R} \,|\, \omega(P) = 1\} = E_{\overline{\mathcal{R}'x}}$$

Se inoltre

$$\mathcal{H}_\omega = \{B \in \mathcal{R} \,|\, \omega(B^*B) = 0\} = \mathcal{R}(I - P_\omega)$$

allora

$$\omega(B^*B) = 0 \iff BP_\omega = 0$$

Infatti $\omega(B^*B) = 0 \iff Bx = 0 \iff \forall T \in \mathcal{R}'\, TBx = 0 \iff B(Tx) = 0 \iff B|_{\overline{\mathcal{R}'x}} = 0$ che, per la definizione di P_ω, equivale a $BP_\omega = 0$, cioè a $B(I - P_\omega) = B$, e quindi a $B \in \mathcal{R}(I - P_\omega)$.

Osserviamo inoltre che, identificando gli spazi di Banach $\mathcal{A}^{**}$ e $\widehat{\pi}(\mathcal{A})''$:

$$\widetilde{\omega}(T) = (\widehat{\xi_\omega}, T\widehat{\xi_\omega}) = (\eta, T\eta) = T(\omega)$$

12.4.3 Definizione *Il* supporto di uno stato $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ *è l'elemento* $P_\omega \in \mathcal{A}^{**}$ *idempotente autoaggiunto tale che*

$$\widetilde{\omega}(P_\omega) = 1 = P_\omega(\omega)$$

e che sia minimale rispetto a tale proprietà.

12.4.4 Proposizione *Se* $\varphi, \omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$*:*

- $P_{\varphi,\omega} = 0 \iff P_{\omega,\varphi} = 0 \iff P_\omega \perp P_\varphi$.
- $P_{\varphi,\omega} = 1 \iff P_\varphi \leq P_\omega$.

DIMOSTRAZIONE: Per (1) basta osservare che $\widetilde{\varphi}(B^*B) = 0 \iff BP_\varphi = 0$. La (2) segue dalle equivalenze:

$$\begin{aligned} P_{\varphi,\omega} = 1 &\iff \widetilde{\varphi}(P_\omega) = 1 \iff \widetilde{\varphi}(I - P_\omega) = 0 \\ &\iff I - P_\omega \perp P_\varphi \iff P_\varphi \leq P_\omega \end{aligned}$$

QED

12.4.5 Teorema *Se* $C_\omega := \{\psi \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) \,|\, \psi \preccurlyeq \omega\}$ *allora*

- $P_{\varphi,\omega} = 1 \iff \varphi \in \overline{C_\omega}^{||\cdot||}$ (*chiusura in norma*)
- $\forall \omega \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \quad P_{\varphi,\omega} = 1 \iff \varphi = \omega$

DIMOSTRAZIONE: Se $P_{\varphi,\omega} = 1$ allora $1 = \widetilde{\varphi}(P_\omega) = (\widehat{\xi_\varphi}, P_\omega\widehat{\xi_\varphi})$ e quindi $\widehat{\xi_\varphi} \in \overline{\widehat{\pi}(\mathcal{A})'\widehat{\xi_\varphi}}$. Ne segue che $\widehat{\xi_\varphi}$ è limite in norma di una successione $T_n\widehat{\xi_\omega}$ con $T_n \in \widehat{\pi}(\mathcal{A})'$ tali che $||T_n\widehat{\xi_\omega}|| = 1$.

Ora la stessa dimostrazione del teorema di Segal ci permette di concludere che, se

$$\varphi_n(A) := (T_n\widehat{\xi_\omega}, \widehat{\pi}(A)T_n\widehat{\xi_\omega})$$

allora $\varphi \preccurlyeq \omega$, sicché, se $||x_n|| = 1$ convergono a x in norma allora

$$||\omega_{x_n} - \omega_x|| \longrightarrow 0 \implies ||\omega_{x_n} \circ \pi - \omega_x \circ \pi|||to0$$

Ma $\varphi - \varphi_n = (\omega_{\widehat{\xi_\omega}} - \omega_{T_n\widehat{\xi_\omega}}) \circ \widehat{\pi}$, col che abbiamo dimostrato che $\varphi \in \overline{C_\omega}^{||\cdot||}$.

Viceversa, sia $\psi{\in}C_\omega$: allora esiste R con $R^*R = T$ tale che $\psi(A) = (R\xi_\omega, \pi(A)R\xi_\omega)$ (per il teorema di Segal); ma si ha pure

$$(\dagger) \qquad \psi(A) = (B\widehat{\xi_\omega}, \widehat{\pi}(A)B\widehat{\xi_\omega})$$

per qualche $B \in \widehat{\pi}(\mathcal{A})'$. Infatti $\widehat{\pi} = \oplus_\omega \pi_\omega$ e quindi

$$I = \sum_\omega E_\omega \qquad \text{con } E_\omega \in \widehat{\pi}(\mathcal{A})'$$

Allora basta porre $B = R \circ E_\omega$ per avere

$$\left(\widehat{\pi}(A)B\widehat{\xi_\omega}\right)(\omega') = \delta_{\omega\omega'}\widehat{\pi}(A)R\xi_\omega$$

e quindi la (†); da questa segue che

$$\widetilde{\psi}(P_\omega) = (B\widehat{\xi_\omega}, P_\omega B\widehat{\xi_\omega}) = 1$$

ove $B\widehat{\xi_\omega} \in \widehat{\pi}(\mathcal{A})'\widehat{\xi_\omega} \subset P_\omega\widehat{\mathcal{H}}$.

Dunque $\psi \preccurlyeq \omega$, cioè $P_{\psi,\omega} = 1$. Ma se questo è vero per un certo insieme di stati, vale anche per la sua chiusura: infatti se $\psi_n \subset S \subset \mathcal{S}(\mathcal{A})$ converge a ψ e $P_{\psi_n,\omega} = 1$ allora $P_{\psi,\omega} = 1$. Per rendersene conto basta osservare che

$$|\widetilde{\psi}_n(P_\omega) - \widetilde{\psi}(P_|Eo)| \leq ||\widetilde{\psi}_n - \psi||\ ||P_\omega||$$

Ma $||\psi_n - \psi|| \longrightarrow 0$ e quindi, per il teorema di Kaplanski:

$$||\widetilde{\psi_n} - \widetilde{\psi}|| = ||\widetilde{\psi_n - \psi}|| = ||\psi_n - \psi|| \longrightarrow 0$$

Con ciò abbiamo che se $\psi \preccurlyeq \varphi$ allora $P_{\psi,\omega} = 1$ per gli elementi di un certo insieme di stati, questa proprietà vale sulla sua chiusura: nel caso di C_ω otteniamo la tesi.

QED

12.4.6 Proposizione *Se* $\omega \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ *allora*

$$P_\omega \widehat{\mathcal{H}} \setminus (0) = \left\{ \xi \in \widehat{\mathcal{H}} \mid \forall A\ \omega(A) = \frac{(\xi, \widehat{\pi}(A)\xi)}{||\xi||} \right\}$$

DIMOSTRAZIONE: Se $\xi \in \widehat{\mathcal{H}}_1$ ($||\xi|| = 1$) e se

$$\forall A \quad \omega(A) = (\xi, \widehat{\pi}(A)\xi)$$

allora, per il teorema di Segal, $\xi = T\widehat{\xi_\omega}$ ove $T \in \widehat{\pi}(\mathcal{A})'$ è unitario e quindi si estende ad una isometria parziale B di $\widehat{\pi}(\mathcal{A})'$.

QED

Se π_1, π_2 sono rappresentazioni irriducibili, definiamo l'insieme dei loro *stati vettoriali* come

$$\mathcal{V}_{\pi_i} := \{\omega_x \circ \pi_i \,|\, x \in \mathcal{H}_{\pi_i} \text{ e } ||x|| = 1\}$$

12.4.7 Lemma *Se* $\pi_1 \cong \pi_2$ *allora* $\mathcal{V}_{\pi_1} = \mathcal{V}_{\pi_2}$*, mentre se* $\pi_1 \ncong \pi_2$ *allora* $\mathcal{V}_{\pi_1} \cap \mathcal{V}_{\pi_2} = \emptyset$*.*

DIMOSTRAZIONE: Se $\mathcal{V}_{\pi_1} \cap \mathcal{V}_{\pi_2} \neq \emptyset$ allora esiste un $\varphi \in \mathcal{V}_{\pi_1} \cap \mathcal{V}_{\pi_2}$ ed esistono $x_1 \in \mathcal{H}_1$ e $x_2 \in \mathcal{H}_2$ tali che

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad (x_1, \pi_1(A)x_1) = (x_2, \pi_2(A)x_2)$$

Per unicità della rappresentazione GNS deve quindi esistere un operatore di allacciamento fra π_1 e π_2 e quindi, dato che le rappresentazioni sono irriducibili, per il Lemma di Schur 12.1.8, si ha $\pi_1 \cong \pi_2$.

Viceversa, sia $\pi - 1 \cong \pi_2$: esista cioè un operatore di allacciamento unitario fra π_1 e π_2, i.e.

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad (x, \pi_1(A)x) = (Ux, \pi_2(A)x)$$

Allora $\{Ux\}_{x \in (\mathcal{H}_{pi_1})_1} = (\mathcal{H}_{\pi_2})_1$ e quindi $\mathcal{V}_{\pi_1} = \mathcal{V}_{\pi_2}$.

QED

Osserviamo inoltre che se $x \in (\mathcal{H}_\pi)_1$ allora $\omega_x \circ \pi$ non può essere iniettiva, dato che $(\omega_x \circ \pi)(A) = (x, \pi(A)x)$. Ne segue che

12.4.8 Lemma *Se* π *è una rappresentazione irriducibile, allora la* $x \longmapsto \omega_x \pi$ *(per* $||x|| = 1$*) è iniettiva vista come mappa definita sullo spazio proiettivo associato allo spazio di Hilbert* $\mathcal{H}_\pi$ *(lo spazio dei sottospazi vettoriali di dimensione uno di* $\mathcal{H}_\pi$*).*

12.4.9 Teorema *Se $\omega, \varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ sono stati puri allora*

$$P_{\omega,\varphi} = \begin{cases} 0 & se\ \pi_\varphi \not\cong \pi_\omega \\ |(\xi,\eta)|^2 & se\ \pi_\varphi \cong \pi_\omega \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE: Dato che si tratta di stati puri, le rappresentazioni GNS associate a ω e φ sono irriducibili, quindi o sono equivalenti o sono disgiunte: in questo secondo caso $P_{\varphi,\omega} = 0$. Infatti $\pi_\omega \between \pi_\varphi$ se e solo se $(\pi_\omega, \pi_\varphi) = 0$, il che equivale a dire $\mathcal{H}_\varphi \perp \widehat{\pi}(\mathcal{A})'\mathcal{H}_\omega$. Ma allora

$$\widehat{\xi_\varphi} \perp \widehat{\pi}(\mathcal{A})'\widehat{\xi_\omega}$$

cioè $\widehat{\pi}(\mathcal{A})'\widehat{\xi_\omega} \perp \widehat{\pi}(\mathcal{A})'\widehat{\xi_\varphi}$ che, a sua volta, è equivalente a $P_\varphi \perp P_\omega$.

Supponiamo ora che $pi_\varphi \cong \pi_\omega$ ed osserviamo che

$$P_{\varphi,\omega} = \widetilde{\varphi}(P_\omega) = (\widehat{\xi_\varphi}, P_\omega \widehat{\xi_\varphi})$$

Ma $P_\omega \in \pi(\mathcal{A})''$ e $\widehat{\xi_\varphi} \in E_\varphi \widehat{\mathcal{H}}$, ove

$$(E_\varphi x)(\omega) = \delta_{\omega,\varphi} x(\varphi)$$

pertanto, $E_\varphi \in \widehat{\pi}(\mathcal{A})$.

Quindi

$$\widetilde{\varphi}(P_\omega) = (E_\varphi \widehat{\xi_\varphi}, P_\omega \widehat{\xi_\omega}) = (\widehat{\xi_\varphi}, P_\omega E_\varphi \widehat{\xi_\omega}) = (\xi_\varphi, P_\omega E_\varphi \xi_\omega)$$

(dato che $E_\varphi P_\omega = E_{\mathcal{H}_\varphi \cap \overline{\widehat{\pi}(\mathcal{A})'\xi_\omega}}$).

Ma per la purezza degli stati possiamo usare la proposizione 12.4.6, dunque

$$\omega(A) = \frac{(\xi, \widehat{\pi}(A)\xi)}{||\xi||}$$

Dunque

$$P_\omega E_\varphi = E_{\{\xi \in \mathcal{H}_\varphi \,|\, \forall A\ (\xi, \pi(A)\xi) = \omega(A)||\xi||\} \cup \{0\}}$$

ove $\{\xi \in \mathcal{H}_\varphi \,|\, \forall A\ (\xi, \pi(A)\xi) = \omega(A)||\xi||\} \cup \{0\}$ ha ovviamente dimensione 1.

Quindi se ξ è l'unico vettore di modulo 1 definito a meno di un fattore complesso di modulo 1 tale che $(\xi, \pi_\varphi(A)\xi) = \omega(A)$:

$$E_{\mathbb{C}\xi} x = (\xi, x)\xi$$

dunque

$$(\xi_\varphi, E_{\mathbb{C}\xi} \xi_\varphi) = (\xi, \xi_\varphi)(\xi_\varphi, \xi)$$

Ora supponiamo che le rappresentazioni π_φ e π_ω siano equivalenti ad una stessa rappresentazione π, per mezzo di un operatore unitario $U \in (\pi_\varphi, \pi_\omega)$; allora

$$\varphi = \omega_\eta \circ \pi \qquad \text{e} \qquad \omega = \omega_\xi \circ \pi$$

con $||\eta|| = ||\xi|| = 1$, e quindi esiste $z \in \mathbb{C}$ tale che

$$U\xi_\varphi = z\eta$$

Ma$UP_{\mathbb{C}\xi_\varphi}U^{-1} = P_{\mathbb{C}\eta}$ (proiettore) e $UG_\omega\mathcal{H}_\varphi = \mathbb{C}\xi$ ove $UG_\omega U^{-1} = P_{\mathbb{C}\xi}$. Ne segue che

$$P_{\varphi,\omega} =(\xi_\varphi, G_\omega\xi_\varphi) = (U\xi_\varphi, UG_\omega\xi_\varphi) = \overline{z}(\eta, UG_\omega U^{-1}U\xi_\varphi) = \overline{z}(\eta, P_{\mathbb{C}\xi}z\eta)$$

cioè che

$$P_{\varphi,\omega} = |(\eta,\xi)|^2 = P_{\omega,\varphi}$$

QED

Se G_φ e G_ω sono le proiezioni di rango 1 in $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ corrispondenti agli stati φ e ω allora

$$P_{\varphi,\omega} = \operatorname{tr}(G_\varphi G_\omega)$$

Inoltre, considerando che $\pi_\varphi = \widehat{\pi}|_{E_\varphi\widehat{\mathcal{H}}}$ e $E_\varphi \in \widehat{\pi}(\mathcal{A})'$:

$$G_\varphi = P_\varphi|_{E_\varphi\widehat{\mathcal{H}}} = \widetilde{\pi_\varphi}(P_\varphi)$$

(rappresentazione estesa all'algebra di von Neumann inviluppante). Osserviamo esplicitamente che se $T \in \widehat{\pi}(\mathcal{A})''$ allora

$$T|_{E_\varphi} = \widetilde{\pi_\varphi}(T)$$

con $E_\varphi \in \widehat{\pi}(\mathcal{A})'$ (avendosi $T = \lim_\alpha T_\alpha$=$\lim_\alpha \widehat{\pi}(A_\alpha)$, con $T_\alpha \in \widehat{\pi}(\mathcal{A})$).

Possiamo ripetere questa costruzione per ogni rappresentazione irriducibile (che è sempre della forma π_ψ per qualche stato vettoriale ψ), dato che in questo caso la rappresentazione è equivalente a $\pi_\varphi \cong \pi_\omega$ e quindi

$$\widetilde{P_\omega P_\varphi} = G_\omega G_\varphi \qquad \text{e} \qquad \operatorname{tr}\widetilde{\pi}(P_\omega\pi_\varphi) = P_{\varphi,\omega}$$

12.4.10 Lemma *Se $\omega \in \operatorname{Conv}\mathcal{P}(\mathcal{A})$ allora*[3] *allora esistono $\{\lambda_j\} \subset \mathbb{C}$ e $\{\omega_j\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{A})$ tali che*

$$\omega = \sum_j \lambda_j\omega_j$$

ove $\omega_i \perp \omega_j (\iff P_{\omega_i,\omega_j} = 0)$.

[3] Ricordiamo che per il teorema di Krejn–Millman 8.3.10 un tale stato è combinazione convessa di un numero finito o numerabile di stati puri.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo $\omega = \sum_j \alpha_j \varphi_j$: possiamo supporre che gli φ_j siano stati vettoriali relativi alla medesima rappresentazione (altrimenti basta riscrivere la somma raggruppando gli stati relativi a rappresentazioni equivalenti). Se

$$\varphi_j(A) = \operatorname{tr}(\pi(A)E_j)$$

(ove $E_j = E_{\mathbb{C}\xi_j}$) allora

$$\omega = \operatorname{tr}(\pi(A)T)$$

per $T = \sum_j \alpha_j E_j$ (operatori di rango finito). Possiamo diagonalizzare T usando il teorema spettrale:

$$T = \sum_j \lambda_j P_j$$

in modo che $i \neq j \Rightarrow P_j \perp P_j$, da cui

$$1 = \operatorname{tr} T = \sum_j \lambda_j$$

(dato che $\lambda_j \geq 0$ la combinazione è convessa) e quindi concludere che

$$\omega = \sum_j \lambda_j \operatorname{tr}(\pi(A))P_j$$

QED

12.4.11 Teorema *Se $\omega, \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ con $\varphi \perp \omega$ allora*

$$\forall a, b > 0 \quad a + b = 1 \Rightarrow P_{a\omega+b\varphi} = P_\omega + P_\varphi$$

DIMOSTRAZIONE: Sia $P := P_\omega + P_\varphi$: si ratta di un idempotente autoaggiunto in $\mathcal{A}^{**}$. Se $\psi := a\omega + b\varphi$ allora $\psi(P) = 1$ e P è minimale rispetto a questa proprietà, i.e. è il supporto di ψ.

Ora dimostriamo che

$$\widetilde{\psi} = a\widetilde{\omega} + b\widetilde{\varphi}$$

Infatti

$$\widetilde{\psi}(T) =< T|\psi >= a < T|\omega > +b < T|\varphi >= a\widetilde{\omega}(T) + b\widetilde{\varphi}(T)$$

sicché

$$\widetilde{\psi}(P) = a\widetilde{\omega}(P) + b\widetilde{\varphi}(P) = a\widetilde{\omega}(P_\omega + P_\varphi) + b\widetilde{\varphi}(P_\omega + p_\varphi) = a + b = 1$$

Ora $P_{a\omega+b\varphi} \leq P$ (per definizione di supporto), quindi, dato che $a\omega + b\varphi = \psi$ e dunque $\omega \preccurlyeq \psi$, $\varphi \preccurlyeq \psi$:

$$P_\omega \leq P_\psi \quad \text{e} \quad P_\varphi \leq P_\psi \qquad \Longrightarrow \qquad P = P_\omega + P_\varphi \leq P_\psi \leq P$$

cioè la nostra tesi.

QED

12.4.12 Corollario $P\omega = \sum_j P_{\omega_j}$.

Se $\varphi, \omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ e se $\omega \in \mathrm{Conv}\ \mathcal{P}(\mathcal{A})$, per il lemma precedente è $\omega = \sum_j \lambda_j \omega_j$ con $i \neq j \Rightarrow \omega_i \perp \omega_j$, quindi

$$P_{\varphi,\omega} = \widetilde{\varphi}(P_\omega) = \widetilde{\varphi}\left(\sum_j P_{\omega_j}\right) = \sum_j \widetilde{\varphi}(P_{\omega_j}) = \sum P_{\varphi,\omega_j}$$

Se inoltre $\varphi = \sum_k \mu_k \varphi_k$, si ha $\widetilde{\varphi} = \sum_k \mu_k \widetilde{\varphi}_k$ e dunque

$$P_{\varphi,\omega} = \sum_k \mu_k \widetilde{\varphi}_k(P_{\omega_j}) = \sum_{j,k} \mu_k P_{\varphi_k,\omega_j}$$

12.4.13 Teorema *Se* $\omega, \varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ *allora* $P_{\omega,\varphi} = 1 - \frac{1}{4}||\varphi - \omega||^2$.

DIMOSTRAZIONE: Se $\pi_\omega \not\cong \pi_\varphi$ allora (per irriducibilità) $\pi_\varphi \between \pi_\omega$ e quindi $||\omega - \varphi|| = 2$ (teorema di Glimm–Kadison 12.4.2), per cui

$$P_{\omega,\varphi} = 0 = 1 - \frac{1}{4}2^2$$

banalmente. Dunque sia $\pi_\omega \cong \pi_\varphi$, col che $\omega = \omega_\xi \circ \pi$, $\varphi = \omega_\eta \circ \pi$ e

$$||(\omega_\xi - \omega_\eta) \circ \pi|| = ||\omega_\xi - \omega_\eta||$$

(per i teoremi di densità di von Neumann e Kaplanski).

Consideriamo ora $M = \mathbb{C}\xi + \mathbb{C}\eta$; se $M = E\mathcal{H}$ si trova

$$||\omega_\xi - \omega_\eta|| = ||(\omega_\xi - \omega_\eta)|_{E\mathcal{B}(\mathcal{H})E}||$$

(ξ e η sono linearmente indipendenti dato che $P_{\omega,\varphi} = 1$). Quindi

$$E\mathcal{B}(\mathcal{H})E = M_2(\mathbb{C})$$

(matrici complesse di ordine due), e, considerando le normalizzazioni e_1 e e_2 degli elementi $\xi + \eta$ e $\xi - \eta$ (che formano una base):

$$\xi + \eta = a_1 e_1 \qquad \text{e} \qquad \eta - \xi = a_2 e_2$$

ovvero

$$\xi = \cos\frac{\vartheta}{2} e_1 + \sin\frac{\vartheta}{2} e_2$$
$$\eta = \cos\frac{\vartheta}{2} e_1 - \sin\frac{\vartheta}{2} e_2$$

(ϑ è l'angolo fra ξ e η) si trova $\omega_\xi - \omega_\eta \in \mathcal{S}(M_2(\mathbb{C}))$, dunque

$$\sup_{B \in SL_2(\mathbb{C})} |(\omega_x i - \omega_\eta)(B)| = \max |(\omega_x i - \omega_\eta)(B)|$$

cioè esiste $B_1 \in M_2(\mathbb{C})$ tale che

$$(\omega_\xi - \omega_\eta)(B_1) = ||\omega_\xi - \omega_\eta|| \tag{$\dagger$}$$

Ma allora B_1^* pure soddisfa la ($\dagger$) ($\omega_\xi - \omega_\eta$ è un funzionale hermitiano) e quindi anche $\frac{1}{2}(B_1 + B_1^*)$ la soddisfa.

In altri termini, possiamo supporre che B_1 sia autoaggiunto; ora se

$$J(a_1 e_1 + a_2 e_2) := \overline{a_1} e_1 + \overline{a_2} e_2$$

allora

$$J\xi = \xi \qquad \text{e} \qquad J\eta = \eta$$

e quindi anche JBJ soddisfa la ($\dagger$). Consideriamo allora $\frac{1}{2}(B_1 + JB_1 J)$ e notiamo che

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xi = \eta \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \eta = \xi$$

Dunque, se $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ allora[4]

$$\omega_\xi(\sigma_3 B_1 \sigma_3) = \omega_\eta(B_1)$$
$$\omega_\eta(\sigma_3 B_1 \sigma_3) = \omega_\xi(B_1)$$

sicché

$$(\omega_\xi - \omega_\eta)(\sigma_3 B_1 \sigma_3) = -||\omega_\xi - \omega_\eta||$$

e la matrice

$$A := \frac{1}{2}(B_1 - \sigma_3 B_1 \sigma_3)$$

è reale ($A = \overline{A}$), autoaggiunta di norma 1 e tale che

$$(\omega_\xi - \omega_\eta)(A) = ||\omega_\xi - \omega_\eta||$$

Notiamo inoltre che $A\sigma_3 + \sigma_3 A = 0$.

Ma esiste un'unica matrice siffatta in $M_2(\mathbb{C})$, vale a dire

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dunque $(\omega_x i - \omega_\eta)(A)$ fornisce la tesi.

QED

[4] Si tratta di una notazione dovuta a Pauli.

12.5 Rappresentazioni di operatori compatti

Come esempio notevole consideriamo l'algebra $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ degli operatori compatti su uno spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$ (di dimensione infinita, altrimenti $\mathcal{K}(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$).

$\mathcal{K}$ è una C*-algebra *priva di elemento identità*: possiamo tuttavia aggiungere a $\mathcal{K}$ una unità I ottenendo $\mathcal{K} \oplus \mathbb{C}I$.

12.5.1 Teorema *I soli ideali bilateri chiusi in norma della C*-algebra* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *sono:* (0), $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *e* $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo che esista un ideale bilatero chiuso J tale che

$$\mathcal{K} \subsetneq J \subsetneq \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

J è uno *-ideale (per la decomposizione polare: $T = |T|V$, sicché $V^*TV^* = |T|V^* = T^*$), quindi se $T \in J$ anche $T^*T \in J$.

Ora consideriamo $T \in J \setminus \mathcal{K}$; per definizione T non è compatto, quindi non lo è neanche T^*T (altrimenti lo sarebbe $|T|$ e pertanto anche $V|T| = T$), dunque $E_\sigma = \chi_{[\varepsilon,||T||^2]}(T^*T)$ non può avere rango finito, sicché

$$||T^*T(I - E_\varepsilon)|| \leq \varepsilon$$

da cui segue che T^*T è limite di operatori di rango finito e quindi è compatto. Deve perciò esistere un $\varepsilon > 0$ tale che E_ε non abbia rango finito, sebbene $E_\varepsilon \in J$, dato che, considerando la funzione

$$f(\lambda) := \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda < \varepsilon \\ \lambda^{-1} & \text{se } \lambda \geq \varepsilon \end{cases}$$

per il calcolo funzionale boreliano $f(T^*T)T^*T \in J$, essendo $T^*T \in J$ e J un ideale.

Ma se esiste un tale ε allora pure esiste una isometria da $\mathcal{H}$ sull'immagine di E_ε (per separabilità di $\mathcal{H}$) in modo che

$$E_\varepsilon = VV^* \qquad \text{e} \qquad E_\varepsilon V = V$$

ove $V^*V = I$ e quindi $V^*V = (E_\varepsilon V)^* E_\varepsilon V = V^* E_\varepsilon V$, ovvero $E_\varepsilon \in J$, da cui segue $I \in J$ e, per linearità e continuità di V: $J = \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Ora supponiamo che esista un ideale J tale che

$$(0) \supsetneq J \supsetneq \mathcal{K}$$

Allora J deve contenere un idempotente autoaggiunto E (non zero) contenuto in J (per lo stesso argomento del caso precedente). Ma allora per ogni F idempotente di rango 1 contenuto in E si ha $FE = F$ i.e. $F \in J$.

Quindi J contiene un proiettore di rango 1, il che implica che in realtà li contiene tutti: se $\mathbb{C}\xi = F(\mathcal{H})$ allora, per ogni $\eta \in \mathcal{H}$ considerando l'operatore $T_{\xi\eta}\xi := \xi$ si ha $TFT^* = E_{\mathbb{C}\eta}$.

Ma gli operatori di rango finito sono densi in quelli compatti e quindi, dato che l'ideale è chiuso, deve aversi $J = \mathcal{K}$.

QED

12.5.2 Corollario *L'algebra $\mathcal{A} := \mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{K}$ è semplice.*

Chiamiamo *algebra di Calkin* l'algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{K}$; inoltre introduciamo la notazione

$$|\eta\rangle\langle\xi|$$

per l'operatore $T_{\xi\eta}\xi := \xi$ nella dimostrazione precedente.

12.5.3 Teorema *Se π è una rappresentazione non degenere di $\mathcal{K}$ allora*

$$\pi = \bigoplus_{\alpha \in A} \pi_\alpha$$

ove le π_α sono rappresentazioni equivalenti alla rappresentazione identica $\pi_0(A) = A$.

DIMOSTRAZIONE: Se $T \in \mathcal{K} \setminus 0$ allora $\pi(T) \neq 0$ (perché il nucleo di π è un ideale bilatero chiuso in norma) e consideriamo un $E \in \mathcal{K}$ idempotente autoaggiunto di rango 1 ($\dim E\mathcal{H} = 1$), per cui

$$E = E_{\mathbb{C}x_0} = |x_0\rangle\langle x_0|$$

con $||x_0|| = 1$, e, per ogni T:

$$ETE = (x_0, Tx_0)E$$

cioè $Ex = (x_0, x)x_0$. Ma $F := \pi(E) \neq 0$ è un idempotente autoaggiunto (lo è E) tale che $F\mathcal{H}_\pi$ è ciclico per π: infatti, se così non fosse, il sottospazio

$$\overline{\pi(\mathcal{K})F(\mathcal{H}_\pi)}^\perp$$

sarebbe stabile e quindi $\pi = \pi|_{\overline{\pi(\mathcal{K})F(\mathcal{H}_\pi)}^\perp} \neq 0$ diverrebbe degenere:

$$\pi(E)' = \pi(E)|_{\overline{\pi(\mathcal{K})F(\mathcal{H}_\pi)}^\perp} = F|_{\overline{\pi(\mathcal{K})F(\mathcal{H}_\pi)}^\perp} = 0$$

Quindi $F\mathcal{H}_\pi$ è ciclico.

Questo implica la tesi. Infatti

$$\begin{array}{ccc} \pi(ETE) & = & \pi(E)\pi(T)\pi(E) \\ \| & & \| \\ \omega_0(T)F & = & F\pi(T)F \end{array}$$

ove $\omega_0(T) := (x_0, Tx_0)$. Se $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ è una base ortonormale di $F\mathcal{H}_\pi$ allora (si noti che $e_\alpha = Fe_\alpha$ e $F = F^*$):

$$\begin{aligned}(e_\alpha, \pi(T)e_\beta) =&(e_\alpha, F\pi(T)Fe_\beta) = \omega_0(T)(e_\alpha, Fe_\beta) \\ =&\omega_0(T)(e_\alpha, e_\beta) = \omega_0(T)\delta_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

cioè $\pi(T)\mathcal{H}_\alpha \perp \pi(T)\mathcal{H}_\beta$ se $\alpha \neq \beta$, che implica $\overline{\pi(\mathcal{K})\mathcal{H}_\alpha} \perp \overline{\pi(\mathcal{K})\mathcal{H}_\beta}$. Ne segue che, per $M_\alpha := \overline{\pi(\mathcal{K})e_\alpha}$ si trova $\alpha \neq \beta \Rightarrow M_\alpha \perp M_\beta$ e

$$\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha = \mathcal{H}_\pi$$

(per ciclicità di $F\mathcal{H}_\pi$) ove $(e_\alpha, \pi(T)e_\alpha) = \omega_0(T)$, e dunque $\pi|_{M_\alpha} \cong \pi_0$.

QED

Sia ora $\widehat{\pi}$ la rappresentazione universale dell'algebra degli operatori compatti $\mathcal{K}$: sappiamo che

$$\widehat{\pi} = \bigoplus_{\alpha\in A} \pi_0$$

Ci chiediamo come sia fatta l'algebra di von Neumann inviluppante, notando immediatamente che, per la decomposizione precedente,

$$\pi(\mathcal{K})'' = \pi(\mathcal{K}'') = \pi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$$

(questo vale anche nel caso di una somma più che numerabile). Ma sappiamo anche che

$$\mathcal{K}^* = \{f_{x,y} \circ \widehat{\pi}\} = \mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{M}_0}$$

dato che la $f \longmapsto f|_\mathcal{K}$ è una isometria di spazi di Banach, e quindi

$$\mathcal{K}^{**} = \mathfrak{M}^* = \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

Conclusione: l'algebra inviluppante di von Neumann di $\mathcal{K}$ è proprio $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

12.5.4 Teorema *Se $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert separabile e π è una rappresentazione di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ allora*

$$\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$$

ove π_1 è una rappresentazione singolare *(i.e. $\pi_1(\mathcal{K}) = 0$) e $\pi_2 = \oplus_{\alpha\in A}\pi_0$.*

Dimostrazione: Consideriamo la decomposizione ortogonale

$$\mathcal{H} = N \oplus M$$

ove $\pi(\mathcal{K})N = 0$ e $\overline{\pi(\mathcal{K})(M)} = M = \overline{\pi(\mathcal{K})\mathcal{H}_\pi}$.

Questa decomposizione è stabile rispetto alle rappresentazioni di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, dato che, se $K \in \mathcal{K}$ e $x \in M$:

$$\pi(A)\pi(K)x = \pi(AK)x \in M$$

$(\pi(AK) \in \mathcal{K} \lhd \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Dunque M è stabile e quindi anche $N = M^\perp$ lo è; quindi

$$\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$$

ove, per definizione, $\pi_1|_\mathcal{K} = 0$ ed esiste un unitario $U \in (\oplus_{\alpha\in A}\pi_0, \pi_2)$.

Infatti $AK \in \mathcal{K}$ per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, sicché

$$\begin{aligned} U\pi_2(AK) =& U\pi_2(A)\pi_2(K) = (\oplus\pi_0)(A)(\oplus\pi_0)(K)U \\ =& (\oplus\pi_0)(A)U\pi_2(K) \end{aligned}$$

cioè $(U\pi_2(A) - \widetilde{\pi}(A))U = 0$.

QED

12.5.5 Esempio *Consideriamo lo spazio di Hilbert* $L^2[0,1]$ *(con la misura di Lebesgue) e l'operatore di moltiplicazione:*

$$(Tf)(s) := sf$$

Allora se $\mathcal{A} := C^*\langle T, I\rangle = C[0,1]$ *alla mappa*

$$s \longmapsto \varphi_s(f(T)) = f(s)$$

corrisponde uno stato puro ω *(teorema di Segal) di* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *tale che*

$$\omega|_\mathcal{A} = \varphi_s$$

Dunque π_ω *è irriducibile, se*

$$\pi_\omega(T)\xi_\omega = s\xi_\omega$$

12.5.6 Definizione *Se* $\mathcal{A}$ *è una* C*-*algebra, uno *-isomorfismo suriettivo di* $\mathcal{A}$ *in sé si dice* isomorfismo *di* $\mathcal{A}$*; l'insieme degli automorfismi di* $\mathcal{A}$ *si denota* $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$.

Ovviamente $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ è un gruppo rispetto alla composizione; si tratta inoltre di un gruppo topologico[5]: se $A \in \mathcal{A}$ e $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ si ha per definizione

$$||\alpha(A)|| = ||A||$$

quindi su $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ resta indotta la topologia uniforme (cioè della norma) rispetto alla quale il prodotto è per definizione continuo.

Notiamo che, ovviamente, se $\dim \mathcal{A} < \infty$ allora $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ è un gruppo di Lie di matrici[6].

Vogliamo ora determinare $\mathrm{Aut}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$

12.5.7 Lemma *Una C^*-algebra con identità I è la chiusura dello spazio dei suoi elementi unitari.*

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo che per ogni $A \in \mathcal{A}$:

$$A = A_1 + iA_2$$

e quindi possiamo limitarci agli autoaggiunti con norma ≤ 1; ma se $A \in \mathcal{A}$ è un tale elemento allora, per

$$U := A + i\sqrt{I - A^2}$$

si trova $U^*U = UU^* = I$ e

$$A = \frac{1}{2}(U + U^*)$$

Quindi gli unitari generano $\mathcal{A}$.

QED

12.5.8 Teorema $\mathrm{Aut}(\mathcal{B}(\mathcal{H})) = \mathcal{U}(\mathcal{H})/\mathbb{T}$.

DIMOSTRAZIONE: Sia $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$; allora la mappa $A \longmapsto \alpha(A)$ definisce una rappresentazione di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ irriducibile che è diversa da zero su $\mathcal{K}$, e quindi, per il teorema precedente, esiste $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ tale che $\alpha(A) = UAU^{-1}$.

Abbiamo quindi che gli unici automorfismi di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ sono quelli *interni*, ovvero quelli della forma

$$A \longmapsto UAU^{-1}$$

ove $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$. Ma U e U' inducono lo stesso automorfismo se e solo se esiste un $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$ tale che $U' = zU$; quindi la tesi.

QED

[5] Nel capitolo **??** discuteremo questo importante concetto.

[6] cfr. i capitoli **??** e **??**.

12.5.9 Definizione *Una funzione $\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ che sia moltiplicativa ($\alpha(AB) = \alpha(A)\alpha(B)$), biunivoca e *-antilineare si dice* antiautomorfismo *di $\mathcal{A}$.*

12.5.10 Esempio *In $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, considerando una base ortonormale (e_n) di $\mathcal{H}$, la mappa*

$$J\sum_i c_i e_i := \sum_i \overline{c_i} e_i$$

definisce una mappa antilineare di $\mathcal{H}$ in sé; di più, dato che $J^2 = I$, si dice antiunitario. *Allora la mappa*

$$A \longmapsto JAJ^{-1}$$

è un elemento antiunitario in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Inoltre

$$A \longmapsto J\alpha(A)J^{-1}$$

è un automorfismo, dato che

$$J\alpha(A)J^{-1} = UAU^{-1}$$

e quindi

$$\alpha(A) = JUA(JU)^{-1}$$

Cioè, ogni antiautomorfismo è indotto da un operatore antiunitario.

12.5.11 Teorema *Sia $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$; allora sono equivalenti le*

- *V è una isometria parziale.*
- *V^*V è idempotente.*
- *V^* è una isometria parziale.*

DIMOSTRAZIONE: (1) equivale a dire che l'operatore $V|_{(\ker V)^\perp}$ è isometrico; considerando allora $M := (\ker V)^\perp$ e $x \in M$ si ha $||Vx||^2 = ||x||^2$ cioè, (per polarizzazione),

$$\forall x, y \in M \quad (Vx, Vy) = (x, y)$$

il che significa che $y - V^*Vy \in M^\perp = \ker V$. Ma allora per ogni $x \in \ker V$:

$$(x, y - V^*Vy) = 0$$

dunque $y - V^*Vy \perp M, M^\perp$, ovvero $y - V^*Vy = 0$.

Se $y \in M^\perp$ allora $0 = V^*Vy$, sicché V^*V è la proiezione ortogonale su M, quindi idempotente. Questo dimostra che (1) implica (2).

Viceversa, se $(V^*V)^2 = V^*V$ allora per $x \in V^*V\mathcal{K} = M$ con $V^*Vx = x$ si ha $(x, V^*Vx) = ||x||$, i.e. (2) implica (1).

Infine (1) implica (3): infatti basta far vedere che V^*V è idempotente. Ma

$$(VV^*)^2 = V(V^*V)V^* = VE_MV^* = V^*V$$

(dato che $VE_Mx = Vx = VEx + V(I - E)x$, e quindi $VE = V$).

QED