Capitolo 19

SECONDA QUANTIZZAZIONE

In questo capitolo proviamo ad estendere la teoria del precedente al caso di sistemi con infiniti gradi di libertà: come vedremo la teoria non è più canonica, ma potremo comunque stabilire delle notevoli generalizzazioni che ci consentiranno di costruire lo spazio di Fock, dando così un esempio di modello per la teoria dei campi (seppure in un caso semplicissimo: il campo libero).

19.1 Prodotti tensoriali e limiti induttivi.

Introduciamo qui alcune nozioni necessarie per trattare la generalizzazione a sistemi con infiniti gradi di libertà della teoria svolta in precedenza, ed in particolare il concetto di prodotto tensoriale di spazi di Hilbert, che consente di formalizzare la nozione di indipendenza fra sistemi quantistici.

Consideriamo due spazi di Hilbert $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ e costruiamone il *prodotto tensoriale algebrico* $\mathcal{H} \boxtimes \mathcal{K}$ nel modo usuale; possiamo rendere questo prodotto tensoriale uno spazio pre-hilbertiano definendo il prodotto

$$(\sum_i x_i \boxtimes x_i, \sum_i x_i' \boxtimes y_i') := \sum_{i,j} (x_i x_j')_{\mathcal{H}} (y_i, y_j')_{\mathcal{K}}$$

Definiamo ora $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ semplicemente come il completamento di $\mathcal{H} \boxtimes \mathcal{K}$ rispetto a questo prodotto[1].

Consideriamo ora $z \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ e due basi ortonormali $\{e_\alpha\}$ di $\mathcal{H}$ e $\{f_\beta\}$ di $\mathcal{K}$. Per definizione (precisamente per la proprietà universale) $\{e_\alpha \otimes f_\beta\}$ è una base ortonormale di $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ e, per ogni $x \in \mathcal{H}$ e $y \in \mathcal{K}$,

$$f_z(x, y) := (z, x \otimes y)$$

[1] In genere si denota con $V \otimes W$ il prodotto tensoriale algebrico e con $V \widehat{\otimes} W$ quello hilbertiano: per non confonderci, qui usiamo una notazione diversa.

è una forma bilineare tale che

$$\sum_{\alpha,\beta} |f(e_\alpha, f_\beta)|^2 < \infty$$

La f_z si dice *forma di Hilbert–Schmidt* e, come ci si può aspettare:

19.1.1 Proposizione $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \cong \{f_z \mid f_z$ *forma di HS*$\}$

Possiamo dare anche un'altra realizzazione dello spazio $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ considerando la forma sesquilineare

$$g(x, y) := (z, \overline{x} \otimes y)$$

e l'operatore $T : \mathcal{K} \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}$ (lineare e continuo) ad essa associato tale che

$$(z, \overline{x} \otimes y) = (x, Ty)$$

e che

$$\operatorname{tr} T^*T = \sum_\beta (f_\beta, T^*Tf_\beta) = \sum_\beta ||Tf_\beta||^2 = \sum_{\alpha,\beta} |(e_\alpha, Te_\beta)|^2 < \infty$$

(usando la norma degli operatori nucleari).

Possiamo quindi identificare $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ con lo spazio degli operatori di Hilbert–Schmidt $T : \mathcal{K} \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}$ con

$$\operatorname{tr} T_z^* T_{z'} = (z, z')$$

Si riduce ad una semplice osservazione la seguente

19.1.2 Proposizione *Se $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ sono spazi di Hilbert e $\mathcal{K} = M \oplus N$ allora*

$$\mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \cong (\mathcal{H} \otimes M) \oplus (\mathcal{H} \otimes N)$$

Naturalmente possiamo generalizzare al caso in cui $\mathcal{K}$ sia somma di una famiglia di sottospazi di Hilbert: $\mathcal{K} = \bigoplus_\alpha N_\alpha$; in questo caso otteniamo

$$\mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \cong \bigoplus_\alpha \mathcal{H} \otimes N_\alpha$$

Ad esempio, se $\{e_\alpha\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{K}$ e $N_\alpha = \mathbb{C}$ allora

$$\mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \cong \bigoplus_{\alpha \in A} \mathcal{H}$$

(dato che i prodotti tensoriali sono presi sui complessi $V \otimes \mathbb{C} \cong V$), ove $\operatorname{Card} A = \dim \mathcal{K}$.

Ora rammentiamo che $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ è un'algebra di von Neumann il cui preduale $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})_*$ è lo spazio delle funzioni lineari ultra-debolmente continue su $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e tale che

$$\forall f \in \mathcal{M} \quad (f, A) = \sum_i (x_i, Ay_i)$$

con $\sum_i ||x_i||^2 < \infty$ e $\sum_i ||y_i||^2 < \infty$; cioè $x, y \in \bigoplus \mathcal{H}$ e

$$(f, A) = (x, \pi(A)y)$$

ove $\pi(A)(\oplus x_i) = \oplus A x_i$. Possiamo quindi osservare che

$$\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \cdots \cong \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$$

ove $\mathcal{K}$ è uno spazio di Hilbert separabile ($l^2(\mathbb{N})$ ad esempio) e $\pi(A)$ si ottiene come prodotto tensoriale di operatori, che viene definito nel modo seguente: se $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ sono spazi di Hilbert con $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ allora possiamo definire l'operatore $A \otimes B \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ come

$$A \otimes B(x \otimes y) = Ax \otimes By$$

per ogni $x \in Ch$ e $y \in \mathcal{K}$ (questa definizione è ben posta per la proprietà universale del prodotto tensoriale), in modo che

$$||A \otimes B|| = ||A|| \cdot ||B||$$

Ovviamente esistono due immersioni isometriche

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}(\mathcal{H}) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \\ A & \longmapsto & A \otimes I \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \mathcal{B}(\mathcal{K}) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \\ B & \longmapsto & I \otimes B \end{array}$$

Effettivamente sussiste il seguente teorema di von Neumann e Murray:

$$(\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes I)' = I \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}) \qquad (I \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K}))' = \mathcal{B}(\mathcal{K}) \otimes I$$

Torniamo ora al caso precedente: avevamo $\dim \mathcal{K} = \aleph_0$, ed una base ortonormale (e_n) di $\mathcal{K}$ in modo che

$$\mathcal{H} \otimes \mathcal{K} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H} \otimes e_n \mathbb{C} \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}$$

il che induce la decomposizione $A \otimes I \cong \bigoplus_n A$ e quindi

$$\pi(A) \cong A \otimes I$$

sicché

$$(f, A) = (z, A \otimes I z')$$

Si osservi che in generale, se π_1 e π_2 sono rappresentazioni di una C*-algebra allora $\pi_1 \approx \pi_2$ se e solo se $\pi_1 \otimes I \cong \pi_2 \otimes I$.

Richiamiamo ora brevemente la nozione di *limite induttivo* di spazi vettoriali (si tratta in realtà di una nozione che si estende a categorie più generali di oggetti: anelli, gruppi, &c.): consideriamo una successione $\{X_n\}$ di spazi vettoriali ed una successione

$$f_{mn} : X_m \longrightarrow X_n$$

di applicazioni lineari definite per $m \leq n$ in modo che

- $f_{nn} : X_n \longrightarrow X_n$ sia l'applicazione identica;
- se $m \leq n$ e $l \leq m$ allora $f_{ln} = f_{mn} \circ f_{lm}$.

Si dice che le successioni $\{X_n\}$ e $\{f_{mn}\}$ formano un *sistema induttivo* (o sistema diretto); partendo da un sistema induttivo, possiamo costruire un nuovo spazio vettoriale X nel modo seguente: consideriamo la somma diretta

$$S = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

Ovviamente ciascun X_n si identifica ad un sottospazio di S, e possiamo considerare il sottospazio T di S generato dagli elementi della forma

$$x_m - f_{mn}(x_m)$$

Allora si pone $X := S/T$; in questo modo, X è una somma diretta degli spazi $\{X_n\}$ nei quali però gli elementi di indice abbastanza grande sono identificati fra loro. Evidentemente, le inclusioni $X_n \subset S$ e la proiezione $S \longrightarrow X = S/T$ si compongono a fornire le applicazioni lineari

$$f_n : X_n \longrightarrow X$$

Per la (2) si ha ovviamente che, se $m \leq n$:

$$f_m = f_n \circ f_{mn} \tag{3}$$

Si scrive

$$X = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

e si dice che X è il *limite induttivo* del sistema induttivo dato.

Il tratto fondamentale dei limiti induttivi è la seguente proprietà universale, che li caratterizza:

19.1.3 Lemma *Ogni elemento $x \in X$ si esprime nella forma $f_n(x_n)$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ e $x_n \in X_n$.*

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo che $x \in X$; allora, per costruzione, x è della forma

$$s = x_{i_1} + \cdots + x_{i_k}$$

ove $x_{i_j} \in X_{i_j}$ tenendo conto che $x_{i_j} = f_{i_j n}(x_{i_j})$ se $i_j \leq n$. Allora, per $n = \max(i_1, ..., i_k)$ otteniamo che

$$x_{i_1} + \cdots + x_{i_k} = f_{i_1 n}(x_{i_1}) + \cdots + f_{i_k n}(x_{i_k}$$

che è un elemento di X_n, chiamiamolo y_n; quindi, per la (3):

$$\begin{aligned} f_n(y_n) &= f_n(f_{i_1 n}(x_{i_1}) + \cdots + f_{i_k n}(x_{i_k})) = f_n \circ f_{i_1 n}(x_{i_1}) + \cdots + f_n \circ f_{i_k n}(x_{i_k}) \\ &= f_{i_1}(x_{i_1}) + \cdots + f_{i_1}(x_{i_k}) = x_{i_1} + \cdots + x_{i_k} = x \end{aligned}$$

cioè $x = f_n(y_n)$ con $y_n \in X_n$, come volevamo.

QED

19.1.4 Teorema *Se $(\{X_n\}, \{f_{mn}\})$ è un sistema induttivo e se Y è uno spazio vettoriale tale che esista una successione di applicazioni lineari $\{g_n : X_i \longrightarrow Y\}$ tali che*

$$\forall m \leq n \quad g_m = g_n \circ f_{mn}$$

allora esiste un'unica applicazione lineare $g : X \longrightarrow Y$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad g_n = g \circ f_n$$

Viceversa un insieme X che soddisfa questa proprietà è isomorfo a $\varinjlim_n X_n$.

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo che $X = \varinjlim_n X_n$: dimostriamo che vale la proprietà universale; per il lemma, possiamo immediatamente esibire la funzione g:

$$g(x) = g_n(x_n)$$

ove $x = f_n(x_n)$ per il lemma. Allora $g_n = g \circ f_n$ per definizione.

Il viceversa è ovvio: se un insieme soddisfa alla proprietà universale del limite induttivo, per $Y = \varinjlim_n X_n$ otteniamo una mappa $h : X \longrightarrow \varinjlim_n X_n$ che inverte la $g : \varinjlim_n X_n \longrightarrow X$, che viene quindi ad essere un isomorfismo.

QED

19.1.5 Esempio *Se consideriamo una successione di sottospazi $\{X_n\}$ di uno spazio vettoriale X fissato tali che se $m \leq n$ allora $X_m \subset X_n$, il limite induttivo di questa successione (rispetto alle inclusioni $f_{mn} : X_m \hookrightarrow X_n$) è la somma di tutti i sottospazi $\{X_n\}$, vale a dire lo spazio da essi generato.*

Una interessante proprietà dei limiti induttivi è il loro comportamento rispetto ai prodotti tensoriali: consideriamo un sistema diretto $(\{X_n\}, \{f_{mn}\})$ di spazi vettoriali ed uno spazio vettoriale Y: è immediato che $(\{X_n \otimes Y\}, \{f_{mn} \otimes I\})$ è un sistema diretto.

19.1.6 Teorema *Ha luogo l'isomorfismo di spazi vettoriali*

$$\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (X_n \otimes Y) = \left(\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} X_n \right) \otimes Y$$

Dimostrazione: Siano

$$X = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} X_n \qquad W = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (X_n \otimes Y)$$

Per la proprietà universale otteniamo un unico operatore lineare

$$g : W \longrightarrow X \otimes Y$$

ove le mappe g_n sono le $f_n \otimes I$; si tratta di dimostrare che g è un isomorfismo. Per farlo usiamo la proprietà universale dei prodotti tensoriali, dimostrando cioè W la soddisfa ed è quindi isomorfo a $X \otimes Y$: consideriamo quindi le funzioni bilineari

$$h_n : X_n \times Y \longrightarrow X_n \otimes Y$$

date dalla definizione di prodotto tensoriale ($g_n(x_n, y) = x_n \otimes y$). Possiamo, per mezzo di esse, definire la funzione lineare

$$h : X \times Y \longrightarrow W$$

come

$$h(x \otimes y) = h_n(x_n \otimes y)$$

ove $x = f_n(x_n)$ per il lemma precedente. La funzione h è bilineare perché lo sono le h_n e dato che le f_n sono lineari; quindi la proprietà universale del prodotto tensoriale implica l'esistenza di una mappa lineare

$$k : X \otimes Y \longrightarrow W$$

Di nuovo usando il lemma si ottiene che g e k sono l'una l'inversa dell'altra.

QED

Vogliamo ora approfondire il significato fisico del prodotto tensoriale.

Consideriamo una successione $\{\mathcal{H}_n\}$ di spazi di Hilbert ed una successione $\{\Omega_n\}$ di vettori in essi ($\Omega_n \in X_n$) con $||\Omega_n|| = 1$; possiamo definire, per $x \in \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_m$

$$f_{mn} := x \otimes \Omega_{m+1} \otimes \cdots \otimes \Omega_n$$

Si verifica immediatamente che queste mappe e la successione $\{H_n\}$ definiscono un sistema diretto del quale possiamo considerare il limite induttivo

$$\mathcal{H} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$$

che è uno spazio prehilbertiano rispetto al prodotto scalare

$$(x, y) = (x \otimes \Omega_{n+1} \otimes \cdots , y \otimes \Omega_{m+1} \otimes \cdots)$$

e del quale possiamo considerare il completamento

$$\bigotimes_{n \in \mathbb{N}}^{\{\Omega_n\}} \mathcal{H}_n$$

19.1.7 Proposizione *Se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathcal{H}_n$ e se la successione*

$$\Phi_n := x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes \Omega_{n+1} \otimes \cdots$$

è di Cauchy allora il suo limite è l'elemento $x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \in \bigotimes_{n \in \mathbb{N}}^{\{\Omega_n\}} \mathcal{H}_n$.

DIMOSTRAZIONE: Sia Φ il limite della Φ_n e poniamo

$$\Omega := \Omega_1 \otimes \Omega_2 \otimes \cdots$$

Allora

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} (\Phi_n, \Omega) = (\Phi, \Omega)$$

cioè il prodotto $\prod_n (x_n, \Omega_n)$ tende a (Φ, Ω). Ora usiamo il seguente lemma (che non dimostreremo) di von Neumann: se z_α sono vettori non nulli negli spazi di Hilbert $\mathcal{H}_\alpha$ allora

$$\prod_\alpha z_\alpha = z \neq 0 \iff \sum_\alpha |1 - z_\alpha| < \infty$$

Nel nostro caso troviamo che $\sum_n |1-(x_i,\Omega_i)| < \infty$ e, viceversa, che se vale questa condizione allora la successione $\{\Phi_n\}$ è di Cauchy. Infatti

$$\begin{aligned}
||\Phi_n - \Phi_m||^2 &= ||x_{m+1}\otimes\cdots\otimes x_n - \Omega_{m+1}\otimes\cdots\otimes\Omega_n||^2 \\
&= \Big|\Big| \sum_{i=m+1}^n \Omega_{m+1}\otimes\cdots\otimes\Omega_{m+i}\otimes(x_{m+i+1}-\Omega_{m+i+1})\otimes x_{m+i+2}\otimes \\
&\qquad \otimes\cdots\otimes x_n\Big|\Big|^2 \\
&\le \sum_{i=m+1}^n ||x_i-\Omega_i||^2 + \sum_{i<j}(1-c_{m+i})(c_{m+j}-1)\prod_{k=m+i+1}^{m+j+1} c_k \\
&\le \sum 2|1-c_i| + \sum_{i<j}|1-c_{m+j}|\cdot|c_{m+j}-1| < \varepsilon+\varepsilon^2
\end{aligned}$$

ove $c_i := (\Omega_i, x_i)$, e tenendo conto che $(x_k-\Omega_k,x_k) = 1-(\Omega_k,x_k)$, $|c_i|\le 1$ (per l'ipotesi $||x_i||=1$) e che

$$(\sum_j z_j, \sum_i z_i) = \sum_i ||z_i||^2 + \mathrm{Re}\sum_{i<j}(z_i,z_j)$$

e

$$||y_i-\Omega_i||^2 = 2-2\,\mathrm{Re}(c_i) \le 2|1-c_i|$$

QED

Spieghiamo ora la rilevanza fisica di questi concetti: consideriamo due sistemi quantistici S e S' totalmente indipendenti, Q e Q' delle questioni (cfr. 17.1) relative a questi sistemi e ω, ω' stati di S e S'; allora $\omega(Q)$ esprime la probabilità di trovare la proprietà Q nello stato ω, e quindi la probabilità che nel sistema congiunto formato da S e S' le Q e Q' siano simultaneamente verificate nei rispettivi stati è

$$\omega(Q)\omega'(Q')$$

Ad esempio, se gli stati sono puri, avremo che

$$\omega(Q) = (\xi, Q\xi)\,, \qquad \omega'(Q') = (\xi', Q'\xi')$$

Se consideriamo $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}'$, gli stati puri corrispondono agli elementi $\xi\otimes\xi'$ e

$$(\xi\otimes\xi', Q\otimes Q'(\xi\otimes\xi')) = \omega(Q)\omega'(Q')$$

Se il sistema si evolve nel tempo come

$$U(t) = e^{iHt}\,, \qquad U'(t) = e^{itH'}$$

allora, sempre nell'ipotesi dell'indipendenza dei due sistemi, nel sistema congiunto abbiamo

$$\widetilde{U}(t)(\xi \otimes \xi') = U(t)\xi \otimes U'(t)\xi'$$

cioè

$$\widetilde{(t)} = U(t) \otimes U'(t)$$

Il generatore di questo gruppo è

$$\widetilde{H} = \frac{1}{i}\left(\frac{d}{dt}\widetilde{U}(t)\right)_{t=0} = H \otimes I + I \otimes H'$$

(formula di Leibniz).

Più in generale, se esiste un'interazione fra i sistemi S e S', il sistema congiunto è ancora descritto da $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ ma l'evoluzione temporale subisce una perturbazione

$$K = H \otimes I + I \otimes H' + V$$

Ricordiamo che nel nostro approccio ai fenomeni quantistici abbiamo modellizzato il sistema microscopico S scindendo il processo di misura (concretamente: lo strumento stesso di misura) in una parte microscopica A ed una macroscopica M: dobbiamo allora immaginare S e A come sistemi da comporre per tenere conto dell'influenza del processo di misura stesso sul fenomeno da misurare. Se prima della misura lo stato del sistema è ω, dopo la misura di una questione $E = E^*E$ lo stato è ancora ω se $\omega(E) = 1$ o $\omega(I - E) = 1$; se lo stato ω, dopo il processo di misurazione, è tale che $\omega(E) \neq 1, 0$ allora si ha un *miscuglio statistico*

$$\omega(E)\omega_1 + \omega(I - E)\omega_0$$

Gli stati ω_0, ω_1 sono determinati come segue: diagonalizziamo per mezzo di un autoaggiunto A dell'algebra degli osservabili

$$P_E : A \longmapsto ESE + (I - E)A(I - E)$$

e consideriamo

$$\omega'(A) = \omega(EAE) + \omega((I - E)A(I - E))$$

Allora

$$\omega_1(A) = \frac{\omega(EAE)}{\omega(E)} \qquad \omega_0(A) = \frac{\omega((I - E)A(I - E))}{\omega(I - E)}$$

Una evoluzione temporale

$$\omega \longmapsto \omega \circ \alpha_t$$

manda stati puri in stati puri e la misura

$$\omega \longmapsto \omega(E)\omega_1 + \omega(I - E)\omega_0$$

manda stati puri in miscugli statistici: si presentano in questo modo diversi fenomeni (riduzione del pacchetto d'onda, paradosso di Podolskij–Einstein–Rosen, gatto di Schrödinger...).

Una spiegazione di questa situazione, seguendo von Neumann, procede come segue: supponiamo che, prima della misura, S sia nello stato x_0 e A in ψ_0, sicché il sistema composto sia nello stato $x_0 \otimes \psi_0$; dopo una interazione di lunghezza T abbiamo

$$U(T) = U$$

operatore unitario che trasforma $x_0 \otimes \psi_0$ in un nuovo stato

$$U(x_0 \otimes \psi_0) = Ex_0 \otimes \psi_1 + (I - E)x_0 \otimes \psi_2$$

ove le ψ_i sono tali che

$$(\psi_1, \psi_2) = 0 \qquad ||\psi_i|| = 1$$

L'osservazione di von Neumann è che ciò descrive il processo di misura, dato che ogni stato di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ si scrive

$$\omega(A) = \mathrm{tr}(TA) = (z, A \otimes Iz)$$

per un opportuno vettore z di norma 1. Dunque lo stato è restrizione a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ di uno stato puro di $\mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, e

$$(Ux_0 \otimes \xi_0, A \otimes I(Ux_0 \otimes \xi_0)) = (Ex_0, AEx_0) + \omega((I - E)A(I - E)) + 0$$

dove 0 sono i termini non diagonali: $(\psi_1, \psi_2) = 0$), il che spiega perché $\omega \longmapsto \omega\alpha_g$ porti stati puri in stati puri mentre $\omega \longmapsto \omega(E)\omega_1 + \omega(I - E)\omega_2$ porti stati puri in miscugli statistici.

19.2 Rappresentazione di Fock

Consideriamo qui sistemi con infiniti gradi di libertà: vogliamo per prima cosa scrivere in questo caso le relazioni di Weyl:

$$W(z)W(z') = e^{i\sigma(z,z')}W(z + z')$$

ove $\sigma(z, z') = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(z, z')$. Nel caso di infiniti gradi di libertà, le variabili z non varieranno più in uno spazio di dimensione finita $\mathbb{C}^n$, ma in uno spazio vettoriale topologico X qualsiasi; possiamo in ogni caso considerare una forma simplettica fortemente non degenere σ su X ed il gruppo di Heisenberg

$$H_X = X \rtimes \mathbb{R}$$

degli elementi $(z, \lambda) \in X \times \mathbb{R}$ col prodotto

$$(z, \lambda)(z', \lambda') = (z + z', \lambda + \lambda' + \sigma(z, z'))$$

Naturalmente H_X è localmente compatto se e solo se $\dim X < \infty$, nel qual caso si tratta del gruppo di Heisenberg $H_{\dim X}$.

Non possiamo quindi applicare a H_X gran che della teoria dei gruppi topologici, che dipendeva in massima parte dall'integrale di Haar (che esiste solo nel caso localmente compatto): ad esempio la teoria delle rappresentazioni non si può dare come nel caso dei gruppi localmente compatti, per i quali l'abbiamo in larga misura desunta dalla teoria delle rappresentazioni delle C*-algebre associate; un ponte fra le due teorie è il teorema di Bochner, la cui validità è del tutto generale, e che ricordiamo qui di seguito:

Definizione. *Una funzione* $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ *si dice* di tipo positivo *se* $\varphi(e) = 1$ *e, per ogni* $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ *a supporto finito:*

$$\sum_{g,h\in G} \overline{f(g)} f(h)\varphi(g^{-1}h) \geq 0$$

Se G è un gruppo topologico qualsiasi e U una rappresentazione (fortemente continua) di G che possieda un vettore ciclico ξ, allora la funzione

$$\varphi(g) = (\xi, U(g)\xi)$$

è una funzione (continua) di tipo positivo: sappiamo che vale anche il viceversa:

Teorema. *φ è una funzione di tipo positivo su G se e solo se esiste una rappresentazione unitaria $U : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ tale che*

$$\varphi(g) = (\xi, U(g)\xi)$$

ove $\xi \in \mathcal{H}$ è un vettore ciclico per U con $||\xi|| = 1$. Inoltre φ è continua se e solo se U è fortemente continua.

Ricordiamo come possiamo associare ad una funzione di tipo positivo una rappresentazione: data φ consideriamo lo spazio vettoriale delle funzioni a supporto finito con la forma sesquilineare

$$\langle p, q\rangle := \sum_{g,h\in G} \overline{p(g)} q(h)\varphi(g^{-1}h)$$

Ovviamente $\langle p, p\rangle \geq 0$ e, quozientando per il sottospazio delle funzioni p tali che $\langle p, p\rangle = 0$ e completando si ottiene uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ sul quale gli operatori

$$U(g)[p] := [p_g]$$

(con $[p]$ si indica la classe in $\mathcal{H}$ della funzione a supporto finito p) definiscono la rappresentazione unitaria richiesta.

Se φ è continua allora U è fortemente continua:

$$||U(g)U(h)\xi - U(h)\xi||^2 \xrightarrow{g\longrightarrow e} 0$$

Infatti, se $\varphi \longrightarrow 1$ per $g \longrightarrow e$:

$$\begin{aligned} ||U(g)U(h)\xi - U(h)\xi|| &= 2 - 2\operatorname{Re}(U(h)\xi, U(gh)\xi) = 2 - 2\operatorname{Re}(\xi, U(h^{-1}gh)\xi) \\ &= 2 - 2\operatorname{Re}\varphi(h^{-1}gh) \xrightarrow{g\longrightarrow e} 0 \end{aligned}$$

(dato che $h^{-1}gh \xrightarrow{g\longrightarrow e} e$).

QED

Ispirati da questo risultato, proviamo a cercare delle funzioni di tipo positivo nel caso del gruppo di Heisenberg H_X.

Supponiamo ad esempio che, come nel caso di un numero finito di gradi di libertà, X sia uno spazio pre-hilbertiano, con prodotto scalare $(.)$ e quindi definiamo

$$\sigma(z, z') = \frac{1}{2}\operatorname{Im}(z, z')$$

Evidentemente la funzione $\varphi : H_X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(\dagger) \qquad \varphi(z, \lambda) := e^{i\lambda} e^{-\frac{1}{4}||z||^2}$$

è di tipo positivo, oltre che continua nella topologia di H_X prodotto della topologia di $\mathbb{R}$ con la topologia su X indotta dalla seminorma $||.||$.

19.2.1 Definizione *La rappresentazione unitaria fortemente continua U associata alla funzione di tipo positivo (†) si dice* rappresentazione di Fock.

Notiamo che se X è uno spazio vettoriale e σ una forma simplettica su X e

$$\mathcal{U}(z, \lambda) = e^{i\lambda}\mathcal{U}(z, 0) = e^{i\lambda}W(z)$$

vogliamo che questa rappresentazione unitaria possegga almeno la proprietà di continuità seguente: per ogni fissato $z \in X$, la funzione

$$\lambda \longmapsto W(\lambda z)$$

è fortemente continua. In questo caso infatti, possiamo usare il teorema di Stone 14.3.6 per dedurre che $W(\lambda z) = e^{i\lambda\Phi(z)}$.

19.2.2 Teorema *La rappresentazione di Fock esiste, è fortemente continua ed irriducibile.*

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamo che la φ definita in (†) è una funzione continua di tipo positivo, il che ci darà la prima parte del teorema.

Se $g_1, ..., g_n \in H_X$ sono elementi della forma $g_i = (z_i, \lambda_i)$ allora z_k sta in un sottospazio X_k di dimensione finita di X e, dato che X è pre-hilbertiano, X_k è isomorfo ad uno spazio di Hilbert $\mathbb{C}^{n_k}$; in questi spazi la

$$\sum_{j,h} \overline{c_j} c_h \varphi(g_j^{-1} g_h) \geq 0$$

è soddisfatta, dato che la φ è di tipo positivo in $\mathbb{C}^{n_k}$.

Dimostriamo ora che la rappresentazione di Fock associata alla funzione φ è irriducibile. Sia (W_F, Ω_F) la rappresentazione ciclica delle relazioni di Weyl associata a $\sigma(z, z') = \frac{1}{2}\operatorname{Im}(z, z')$ e determinata dalla φ; possiamo allora considerare la C*-algebra $\mathcal{A}$ ottenuta chiudendo in norma la *-algebra generata dagli operatori della rappresentazione W_F, cioè la chiusura in norma del sottospazio vettoriale generato da $W_F(z)$ per $z \in X$: vogliamo dimostrare che $\mathcal{A}$ è irriducibile, nel senso che lo stato definito da Ω_F è uno stato puro.

Possiamo approssimare $\mathcal{A}$ come la chiusura $\mathcal{A}_n$ dei sottospazi $\mathcal{A}_n^{(0)}$ generati da $W_F(z)$ ($z \in X_n$):

$$\mathcal{A} = \overline{\bigcup_n \mathcal{A}_n} = \overline{\bigcup_n \overline{\mathcal{A}_n^{(0)}}} (*)$$

ove la corrispondenza $n \longmapsto \mathcal{A}_n$ conserva l'ordine ($n < m$ implica $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_m$). Se $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ è uno stato tale che $\omega|_{\mathcal{A}_n}$ è puro allora ω è puro in $\mathcal{A}$, dato che, scrivendo $\omega = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2$ si trova

$$\omega|_{\mathcal{A}_n} = \alpha\omega_1|_{\mathcal{A}_n} + \beta\omega_2|_{\mathcal{A}_n}$$

e quindi, per purezza si $\omega|_{\mathcal{A}_n}$, $\omega_1 - \omega_2$ è nullo su $\mathcal{A}_n$ per ogni n, sicché ω è puro, per la (*). Quindi

$$\omega\left(\sum_j c_j W_F(z_j)\right) = \sum_j c_j e^{-\frac{1}{4}||z_j||^2}$$

Se prendiamo $z_j \in X_n$ allora, se Ω_S è la rappresentazione di Schrödinger, e X_n è identificato a $\mathbb{C}^n$ per mezzo dell'isomorfismo unitario V, si ha (per la (*)):

$$\omega_n := \omega|_{\mathcal{A}_n} = (\Omega_S^{\dim X_n}, W_S(V_Z)\Omega_S^{\dim X_n}) = e^{-\frac{1}{4}||Vz||^2} = e^{-\frac{1}{4}||z||^2}$$

L'irriducibilità della rappresentazione di Schrödinger implica allora la purezza dello stato ω.

QED

Abbiamo quindi determinato, con la rappresentazione di Fock, una rappresentazione irriducibile fortemente continua delle relazioni di Weyl:

$$W_F(x)W_F(x') = e^{i\sigma(x,x')}W_F(x+x')$$

Osserviamo che se $\mathcal{H} = \widetilde{X}$ è il completamento di X la forte continuità di W_F ci dice che per ogni $x \in \mathcal{H}$, per ogni successione (x_n) in X convergente a x si ha

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} W_F(x_n) = W_F(x)$$

Ma $\{W_F(x)\}_{x\in X} \cdot \Omega_F$ è un sottospazio la cui chiusura è una rappresentazione ciclica delle relazioni di Weyl: questa chiusura è

$$\overline{\{W_F(x)\}_{x\in X} \cdot \Omega_F} = \overline{\{\text{Sottosp. vett. generato da } W_F(x)\}_{x\in\mathcal{H}} \cdot \Omega_F}$$

(per la forte continuità); in altri termini possiamo tranquillamente considerare $\mathcal{H}$ in luogo di X. Ci riferiremo quindi anche a $\Gamma(\mathcal{H}) = \Gamma(X)$ come allo spazio di Fock.

Vogliamo ora discutere la *covarianza della rappresentazione di Fock*, ovvero la sua funtorialità.

Consideriamo quindi un operatore unitario $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$: allora[2]

$$e^{-\frac{1}{4}||x||^2} = e^{-\frac{1}{4}||Ux||^2}$$

e definiamo

$$(*) \qquad \Gamma(U)W_F(x)\Omega_F = W_F(U_x)\Omega_F$$

Intanto mostriamo che la posizione (*) ha senso: basta evidentemente ragionare sul sottospazio denso di $\mathcal{H}$: l'operatore

$$\Gamma(U)\left(\sum_i a_i W_F(x_i)\Omega_F\right) = \sum_i a_i W_F(x_i)\Omega_F$$

esiste ed è isometrico. La funzione

$$U \longmapsto \Gamma(U)$$

[2]Si rammenti che se $\mathcal{A}$ è una C*-algebra e $G \xrightarrow{\alpha} Aut(\mathcal{A})$ e $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ allora per ogni $g \in G$ tale che $\omega \circ \alpha_g = \omega$, se π_ω è la GNS, la rappresentazione (π_ω, U_ω) è covariante:

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad U_\omega(g)\pi_\omega(A)\xi_\omega = \pi_\omega(\alpha_g(A))\xi_\omega$$

è una rappresentazione del gruppo unitario $\mathcal{U}(\mathcal{H})$:

$$\Gamma(U)\Gamma(U') = \Gamma(UU')$$

precisamente una rappresentazione unitaria fortemente continua da $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ munito della topologia forte a $\mathcal{U}(\Gamma(\mathcal{H}))$ pure topologizzato con la topologia forte. Nuovamente ragionando sul sottoinsieme denso troviamo che, se $U_\alpha \xrightarrow{\text{fortemente}} U$ allora

$$\Gamma(U_\alpha)W_F(x)\Omega_F \xrightarrow{\text{fortemente}} \Gamma(U)W_F(x)\Omega_F$$

Questo, ed il fatto che

$$W_F(U_\alpha x)\Omega_F \longrightarrow W_F(Ux)\Omega_F$$

ci permettono di concludere che

19.2.3 Teorema Γ *è un funtore, la rappresentazione di Fock è irriducibile, fortemente continua e* $\Gamma(\mathbb{C}) = L^2(\mathbb{R}, ds)$*.*

Vale inoltre la seguente "proprietà esponenziale" del funtore Γ:

$$\Gamma(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) = \Gamma(\mathcal{H}_1) \otimes \Gamma(\mathcal{H}_2)$$

Si tratta di chiedersi se esista un operatore unitario V tale che

$$VW_F(x \oplus y)\Omega_F := W_F^{(1)}(x)\Omega_F^{(1)} \otimes W_F^{(2)}(y)\Omega_F^{(2)}$$

Intanto osserviamo che, se un tale V esiste, allora

$$(\dagger) \qquad (W_F(x \oplus y)\Omega_F, W_F(x' \oplus y')\Omega_F) = e^{-i\sigma(x\oplus y, x'\oplus y')}e^{-\frac{1}{4}||x'\oplus y' - x\oplus y||^2}$$

Infatti:

$$\begin{aligned}(W_F^{(1)}(x')\Omega_F^{(1)} \otimes W_F^{(2)}(y')\Omega_F^{(2)}, W_F^{(1)}(x)\Omega_F^{(1)} \otimes W_F^{(2)}(y)\Omega_F^{(2)}) =& \\ =e^{-i\sigma(x,x')}e^{-\frac{1}{4}||x'-x||^2}e^{-i\sigma(y,y')}e^{-\frac{1}{4}||y'-y||^2}\ddagger)& \qquad (()\end{aligned}$$

(la forma simplettica σ è la parte immaginaria del prodotto hilbertiano, quindi i secondi membri della (†) e (‡) sono uguali).

Quindi l'operatore V effettivamente esiste ed è tale che

$$V : \Gamma(\mathcal{H}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{H}_1) \otimes \Gamma(\mathcal{H}_2)$$

con

$$VW_F(x \oplus y) = W_F(x) \oplus W_F(y)V$$

il che dimostra la prima parte del seguente

19.2.4 Teorema

$$\Gamma(\mathcal{H}\oplus\mathcal{K})=\Gamma(\mathcal{H})\otimes\Gamma(\mathcal{K})$$

e, più in generale:

$$\Gamma\left(\bigoplus_\alpha \mathcal{H}_\alpha\right)=\bigotimes_\alpha^{\{\Omega_F^{(n)}\}}\Gamma(\mathcal{H}_\alpha))$$

Dimostrazione: Per definizione $x\in\mathcal{H}\iff x=\sum_{n=1}^\infty x_n$ con

$$||x||^2=\sum_n ||x_n||^2$$

La definizione di V si legge allora come

$$VW_F\left(\sum_{n=1}^\infty x_n\right)\Omega_F=\bigotimes_{n=1}^\infty W_F^{(n)}(x_n)\Omega_F^{(n)}$$

Ora ricordiamo che

$$(W_F^{(n)}(x_n)\Omega_F^{(n)},\Omega_F^{(n)})=e^{-\frac{1}{4}||x_n||^2}$$

e quindi che, se

$$(*)\qquad \sum_n\left|1-e^{-\frac{1}{4}||x_n||^2}\right|<\infty$$

(si tratta della condizione affinché il prodotto tensoriale di infiniti termini sia definito) allora possiamo definire V come nel caso di $n=2$: in effetti la (*) è verificata, dato che

$$\forall\lambda\geq 0\quad 1-e^{-\lambda}\leq\lambda$$

e quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned}(W_F(\sum_n x_n)\Omega_F,W_F(\sum_n x_n)\Omega_F) &= e^{-i\sigma(\sum_n x_n,\sum_n x_n')}e^{-\frac{1}{4}||\sum_n x_n-\sum_n x_n'||^2}\\ &= e^{-i\sum_n\sigma(x_n,x_n')}e^{-\frac{1}{4}\sum_n||x_n-x_n'||^2}\\ &=\prod_n e^{i\sigma(x_n,x_n')}e^{-\frac{1}{4}||x_n-x_n'||^2}\\ &=\prod_n(W_F^{(n)}(x_n)\Omega_F^{(n)},W_F^{(n)}(x_n')\Omega_F^{(n)})\end{aligned}$$

Possiamo cioè definire V come

$$VW_F(x)=\bigotimes_{n=1}^{\infty}{}^{\{\Omega_F^{(n)}\}}W_F^{(n)}(x_n)V$$

QED

19.2.5 Esempio

- *Nel caso* $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ *si ha* $\Gamma(\mathbb{C}) = L^2(\mathbb{R}, ds)$ *e* $W(z) = e^{i(\alpha q+\beta p)}$, *ove* $z = \alpha + i\beta$ *e* q, p *sono gli operatori della rappresentazione di Schrödinger.*

- *Se* $\mathcal{H}$ *è uno spazio di Hilbert separabile con base ortonormale* $\{e_n\}$ *allora*
$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} e_n\mathbb{C}$$
e quindi
$$\Gamma(\mathcal{H}) = \bigotimes_{n=1}^{\infty} {}^{\{\Omega_F\}} L^2(\mathbb{R}, ds)$$
ove $\Omega_F = \Omega_0$ *è lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico e*
$$W(x) = \prod_{n=1}^{\infty} e^{i(\alpha_n q+\beta_n p)}$$
ove $\alpha_n + i\beta_n = (e_n, x)$*: in altri termini* $\Gamma(\mathcal{H})$ *descrive nel caso separabile* assemblee di oscillatori armonici.

19.3 Caratterizzazioni della rappresentazione di Fock

Cominciamo con l'osservare che, se $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ allora $\Gamma(U) \in \mathcal{U}(\Gamma(\mathcal{H}))$ e
$$\Gamma(U)W_F(x)\Gamma(U)^{-1} = W_F(Ux) \qquad \text{e} \qquad \Gamma(U)\Omega_F = \Omega_F$$
Quindi, se $U\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_i$ allora $U = \bigoplus_{i=1}^{\infty} U_i$ e
$$V\Gamma(U) = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \Gamma(U_i)V$$
Vogliamo ora considerare una "versione infinitesimale" del funtore Γ: consideriamo
$$U(t) = e^{iAt}$$
U è fortemente continuo in t e quindi anche $\Gamma(U(t))$ lo è (rispetto alla topologia forte degli operatori), sicché
$$\Gamma(U(t)) = \Gamma(e^{iAt}) = e^{id\Gamma(A)t}$$
ove, per il teorema di Stone 14.3.6, $d\Gamma(A)$ esiste ed è unico: si tratta di una rappresentazione di algebre di Lie.

Se consideriamo $U(t) = e^{it}I$ allora $d\Gamma(I)$ è autoaggiunto ma non limitato, ed è il *numero delle particelle* N; si noti che
$$e^{iNt}W_F(x)e^{-iNt} = W_F(e^{it}x)$$
e che

19.3.1 Lemma $N\Omega_F = 0$

Si noti in generale che, se $\mathcal{H} = \bigoplus_i \mathcal{H}_i$ allora

$$\Gamma(e^{i\lambda}) = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \Gamma^{(n)}(e^{i\lambda})$$

Ora, sia $A = \bigoplus_n A_n$, quindi $e^{iAt} = \bigoplus_n e^{iA_n t}$ sicché

$$\Gamma(e^{iAt}) = \bigoplus_{n}^{\{\Omega_F^{(n)}\}} \Gamma^{(n)}(e^{iA_n t})$$

e

$$d\Gamma(A) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$$

ove

$$B_n = I \otimes I \otimes \cdots \otimes I \otimes d\Gamma(A_n) \otimes I \otimes \cdots$$

ed il fattore che non è l'identità si trova al posto n-simo; osserviamo inoltre che $d\Gamma(I) = N = \sum_i N_i$ ove N_i è $d\Gamma(1)$ (l'elemento $1 \in \mathbb{C}$) nel fattore n-simo e 1 altrove e dove, tenendo conto che

$$d\Gamma(1)\Omega_n = n\Omega_n$$

si ha

$$d\Gamma(1) = \eta^*\eta = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 - I)$$

Ricordiamo ora che, se $z = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ e

$$e^{i\Phi(z)} := e^{i((\alpha,q)+(\beta,p))} = W(z)$$

le relazioni di Weyl

$$W(z)W(z') = e^{i\sigma(z,z')}W(z+z')$$

implicano la regola di commutazione

$$[\Phi(z), \Phi(z')] \subset 2i\sigma(z,z')I$$

(dato che $z \longmapsto \Phi(z)$ è $\mathbb{R}$-lineare scriviamo $z = \alpha + i\beta$ e $z' = \alpha' + i\beta'$ ed usiamo la relazione di Heisenberg).

Questo vale anche in infiniti gradi di libertà, considerando $z \in X$ (spazio prehilbertiano) e, per ogni $z \in X$, la mappa

$$\lambda \longmapsto W(\lambda z)$$

fortemente continua. Per il teorema di Stone 14.3.6:

$$W(\lambda z) = e^{i\lambda\Phi(z)}$$

ove $\Phi(z)$ è autoaggiunto e quindi

$$W(z) = e^{i\Phi(z)}$$

Se X' è un sottospazio di X di dimensione finita, $W_{X'}$ è fortemente continua e quindi, pensando $z, z' \in X' \subset X$ abbiamo che

$$[\Phi(z), \Phi(z')] \subset 2i\sigma(z, z')I$$

Rammentiamo che, nel caso di un grado di libertà:

$$\Phi(z) = \alpha q + \beta p$$

e si avevano gli operatori di creazione e distruzione

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(p - iq)$$

Vogliamo imitare questa costruzione nel caso di infiniti gradi di libertà.

Cominciamo con l'osservare che $p = \Phi(i)$ e $q = \Phi(1)$, sicché la relazione precedente diviene

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi(i) - \Phi(1))$$

Scriviamo

$$a(z) := \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi(iz) - i\Phi(z))$$

ed osserviamo che (antilinearità di $z \longmapsto a(z)$).

$$a(iz) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\Phi(z) - i\Phi(iz)) = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\Phi(iz) - i\Phi(z)) = -ia(z)$$

Ma allora

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi(iz) + i\Phi(z)) \subset a(z)^*$$

sicché

$$[a(z), a(z')] \subset 0 \qquad \text{e} \qquad [a(z), a(z')^*] \subset (z, z')I$$

(ove (z, z') è il prodotto scalare in X) rammentando $z, z' \in X'$ sottospazio finito-dimensionale di X e la relazione per Φ.

La rappresentazione di Fock possiede il vettore ciclico Ω_F, il livello fondamentale dell'oscillatore armonico: $\eta\Omega_F = 0$, e si ha in questo caso

$$\forall z \in \mathcal{H} \quad a(z)\Omega_F = 0$$

Si noti che Ω_F è nell'intersezione dei domini di a e a^*, e che

$$a(z_1)^* \cdots a(z_n)^*\Omega_F$$

è un vettore analitico intero per $\Phi(z)$ (si ricordi che $\eta^{*n}\Omega_F$ sono i vettori di stato per i livelli eccitati dell'oscillatore armonico). La dimostrazione di questo fatto procede come nel caso di un grado di libertà.

Sia $\mathcal{A}$ l'algebra generata dai polinomi negli operatori $\{\Phi(z)\}_{z\in\mathcal{H}}$ che applicati a Ω_F diano vettori analitici; dato che

$$\{W_F(z)\Omega_F\}_{z\in\mathcal{H}}$$

è totale e che (teorema di Stone 14.3.6 ed analiticità di Ω_F)

$$W_F(z)\Omega_F = e^{i\Phi(z)}\Omega_F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}\Phi(z)^n\Omega_F$$

gli elementi di $\mathcal{A}$ applicati a Ω_F sono uno spazio denso, cioè $\mathcal{A}$ possiede Ω_F come vettore ciclico, dato che la chiusura di tale algebra applicata a Ω_F contiene un sottoinsieme totale.

Osserviamo inoltre che

$$\left\{\prod_i a^\#(z_i)\Omega_F\right\}_{\{z_i\}\in\{\text{Sottoinsiemi finiti di } \mathcal{H}\}}$$

è totale, ove $a^\#$ rappresenta a oppure a^*; infatti nella stringa

$$a^\# a^\# \cdots$$

possiamo eliminare gli a, dato che

$$\begin{aligned} a^\#(z_1)\cdots a^\#(z_{n-2})a(z_{n-1})a(z_n)^*\Omega_F =& a^\#(z_1)\cdots a^\#(z_{n-2})[a(z_{n-1}), a(z_n)^*]\Omega_F + \\ &+ a^\#(z_1)\cdots a^\#(z_{n-2})a(z_n)^*a(z_{n-1})\Omega_F \end{aligned}$$

Ora consideriamo il vettore

$$v_n^{(z)} := a(z_1)^* \cdots a(z_n)^*\Omega_F$$

Allora

19.3.2 Lemma

$$(v_n(z), v_m(z')) = \delta_{nm} \sum_{p\in S_n} (z_1 \otimes z_2 \otimes \cdots \otimes z_m, U(p) z'_1 \otimes \cdots \otimes z'_n)$$

ove S_n è il gruppo simmetrico su n elementi e

$$U(p)(z_1 \otimes \cdots \otimes x_n) := x_{p^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{p^{-1}(n)}$$

è la rappresentazione unitaria di $\mathcal{H}^{\otimes n}$ data dall'azione di S_n.

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}(v_m(z), v_n(z')) =&(a(z_2)^* \cdots a(z_m)^*\Omega_F, a(z_1)a(z'_1)^*a(z'_2)^* \cdots a(z'_n)\Omega_F)\\ =&(a(z_2)^* \cdots a(z_m)^*\Omega_F, [a(z_1), a(z'_1)^*]a(z'_2)^* \cdots a(z'_n)\Omega_F)+\\ &+ (a(z_2)^* \cdots a(z_m)^*\Omega_F, a(z'_1)^*a(z_1)a(z'_2)^* \cdots a(z'_n)\Omega_F)\\ =&(z_1, z'_1)(a(z_2)^* \cdots a(z_m)^*\Omega_F, a(z'_2)^* \cdots a(z'_n)\Omega_F)\end{aligned}$$

Iterando il procedimento otteniamo

$$\begin{aligned}(v_m(z), v_n(z')) =&(z_1, z'_1)(a(z_2)^* \cdots a(z_m)^*\Omega_F, a(z'_2)^* \cdots a(z'_n)\Omega_F)+\\ &+ (z_1, z'_2)(a(z_2)^* \cdots a(z_m)^*\Omega_F, a(z'_1)^*a(z'_3)^* \cdots a(z'_n)\Omega_F)\\ &\cdots + (z_1, z'_n)(a(z_2)^* \cdots a(z_m)^*\Omega_F, a(z'_1)^* \cdots a(z'_{n-1})\Omega_F)\end{aligned}$$

che è zero se $n \neq m$, dato che

$$(\Omega_F, a(x)^* \cdots a(y)^*\Omega_F) = 0$$

Altrimenti, se $n = m$, abbiamo che

$$(v_m(z), v_n(z')) = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} ((z_1, z_{i_1})(z_2, z'_{i_2}) \cdots) = \sum_{p\in S_n} \prod_{i=1}^{n} (z_i, z'_{p^{-1}(i)})$$

ove $i_2 \neq i_1$ e $i_3 \neq i_1, i_2$ e... e $i_n \neq i_1, ..., i_{n-1}$.

QED

In generale, se G è un gruppo finito e $U : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ una rappresentazione unitaria allora vige il *teorema ergodico elementare*:

$$E_0 = E_{\{x|\forall g\in G \quad U(g)x=x\}} = \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g\in G} U(g)$$

Nel caso del gruppo simmetrico S_n il secondo membro è il *simmetrizzatore*

$$S := \frac{1}{n!} \sum_{p\in S_n} U(p)$$

Lo spazio di Hilbert

$$S^n\mathcal{H} := S(\mathcal{H}^{\otimes n})$$

è la n-sima potenza simmetrica.

Consideriamo $(z_1, ..., z_n) \in \mathcal{H}^n$ ed associamogli

$$\frac{1}{n!} a(z_1)^* \cdots a(z_n)^* \Omega_F$$

Possiamo inoltre associargli il simmetrizzatore $S(z_1 \otimes \cdots \otimes z_n)$: per il lemma esiste un operatore V_n tale che

$$V_n \left(\frac{1}{\sqrt{n!}} a(z_1)^* \cdots a(z_n)^* \Omega_F \right) = S(z_1 \otimes \cdots \otimes z_n)$$

e

$$\frac{1}{n!}(v_n(z), v_m(z')) = \delta_{nm}(S(z_1 \otimes \cdots \otimes z_m), S(z'_1 \otimes \cdots \otimes z'_m))$$

L'operatore V_n è unitario, sempre per il lemma, quindi

$$\Gamma(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma_n(\mathcal{H})$$

ove $\Gamma_n(\mathcal{H}) \cong S^n\mathcal{H}$ cioè lo spazio di Fock coincide con l'algebra dei tensori simmetrici sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$.

Partendo da $V_0(\lambda\Omega_F) := \lambda \in \mathbb{C}$ possiamo combinare i $V_1, V_2, ...$ per ottenere l'isomorfismo $V : \Gamma_n(\mathcal{H}) \longrightarrow S^n\mathcal{H}$.

Possiamo ora capire come agiscono gli operatori di creazione e distruzione:

$$a(z)^* \left(\frac{1}{\sqrt{n!}} a(z_1)^* \cdots a(z_n)^* \Omega_F \right) = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} a(z)^* a(z_1)^* \cdots a(z_n)^* \Omega_F$$

L'aggiunto (si rammenti: $z \longmapsto a(z)$ è antilineare) è

$$\begin{aligned} a(z)\Big(& \frac{1}{\sqrt{n!}} a(z_1)^* \cdots a(z_n)^* \Omega_F \Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{i=1}^{n} (z_1, z_i) a(z_1)^* \cdots a(z_{i-1})^* a(z_{i+1})^* \cdots a(z_n)^* \Omega_F \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (z, z_i) \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} a(z_1)^* \cdots a(z_{i-1})^* a(z_{i+1})^* \cdots a(z_n) a^* \Omega_F \end{aligned}$$

Questo suggerisce la seguente caratterizzazione dello spazio di Fock:

$$\Gamma(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n\mathcal{H}$$

con

$$
\begin{aligned}
a(z)^*(S(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)) &:= \sqrt{n+1} S(z \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \\
a(z)(S(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)) &:= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_i (z, x_i) S(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_n) \\
\Omega_F &:= 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \cdots
\end{aligned}
$$

Quindi

$$a(z)\Omega_F = 0$$

ed i campi di Segal si definiscono come

$$\Phi(z) := \frac{1}{i\sqrt{2}}(a(z)^* - a(z))$$

Abbiamo quindi tre presentazioni equivalenti dello spazio di Fock:

- Come rappresentazione del gruppo di Heisenberg generata dalla rappresentazione

$$(z, \lambda) \longmapsto e^{i\lambda} e^{-\frac{1}{4}||z||^2}$$

- Come prodotto tensoriale hilbertiano

$$\Gamma(\mathcal{H}) = \bigotimes_{n=1}^{\infty}{}^{\{\Omega_n\}} \Gamma(\mathbb{C})$$

- Come spazio dei tensori simmetrici:

$$\Gamma(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n \mathcal{H}$$

Vogliamo dare una ulteriore caratterizzazione: consideriamo la terza interpretazione di $\Gamma(\mathcal{H})$ e le formule per gli operatori di creazione e distruzione:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

Allora

$$\frac{1}{n!} a(x)^{*n} \Omega_F = \frac{1}{\sqrt{n!}} x^{\otimes n}$$

Ma Ω_F è un vettore analitico, quindi possiamo definire

$$e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a(x)^{*n} \Omega_F = e^{a(z)^*} \Omega_F$$

e constatare che

$$(e^x, e^y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x,y)^n}{n!} = e^{(x,y)}$$

Inoltre $\{e^x\}_{x \in \mathcal{H}}$ è un insieme totale in $\mathcal{H}$, dato che, per

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i$$

abbiamo

$$\left(\frac{\partial^n e^x}{\partial \lambda_1 \cdots \partial \lambda_n} \right)_{\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0} = a(z_1)^* \cdots a(z_n)^* \Omega_F$$

ed i vettori al secondo membro formano un insieme totale. Possiamo allora considerare lo spazio $\mathcal{E}$ generato dagli elementi della forma e^x con le relazioni $(e^x, e^y) = e^{(x,y)}$, considerare in esso il sottospazio $\mathcal{N}$ dei vettori di lunghezza zero e definire

$$\Gamma(\mathcal{H}) = \overline{\mathcal{E}/\mathcal{H}}$$

Notiamo che, avendosi

$$\Gamma(U) W_F(x) \Gamma(U)^{-1} = W_F(Ux)$$

e

$$W(x) = e^{i\Phi(x)}$$

ne segue

$$\Gamma(U) \Phi(x) \Gamma(U)^{-1} = \Phi(Ux)$$

cioè

$$\Gamma(U) a(x_1)^* \cdots a(x_n)^* \Omega_F = a(Ux_1)^* \cdots a(x_n)^* \Omega_F$$

Quindi, se

$$\Gamma_n(U) S(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) := S(Ux_1 \otimes \cdots \otimes Ux_n)$$

si ha pure

$$\Gamma(U) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma_n(U)$$

e

$$d\Gamma(A) = \bigoplus_{n} d\Gamma_n(A)$$

ove

$$d\Gamma_n(A) = \sum_{i=1}^{n} I \otimes \cdots \otimes I \otimes A \otimes I \otimes \cdots \otimes I$$

(nel prodotto tensoriale i termini sono n e A figura all'i-simo.) Ad esempio $d\Gamma_n(I) = nI$ e $d\Gamma(I) = N$, autoaggiunto non limitato.

Si noti inoltre che se $W(z)$ è ad esempio una rappresentazione irriducibile delle relazioni di Weyl in un grado di libertà, allora

$$z \longmapsto \alpha_z(A) := W(z)AW(z)^{-1}$$

(con $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$) definisce un morfismo fortemente continuo di gruppi:

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \operatorname{Aut}\mathcal{B}(\mathcal{H})$$

Non si tratta tuttavia di una rappresentazione unitaria, perché se lo fosse avremmo

$$\alpha_z(A) = V_z A V_z^{-1}$$

e la C*-algebra (commutativa!) generata dai V_z sarebbe quella dei $W(z)$, che è irriducibile: essendo commutativa ciò è impossibile.

In questo caso i teoremi di Wigner e Bargmann non sono soddisfatti, il che dà conto dei fenomeni non relativistici della teoria.

19.4 Teorema di Gårding–Wightman

Consideriamo

$$\Gamma(\mathcal{H}) \cong \bigotimes_{n=1}^{\infty}{}^{\{\Omega_0\}}\Gamma(\mathbb{C})$$

ove $\{e_n\}$ è una base ortonormale; abbiamo che

$$N \cong \sum_{i=1}^{\infty} I \otimes I \otimes \cdots \otimes \eta^*\eta \otimes \cdots \otimes I$$

$$W(\sum_i \lambda_i e_i) \cong \bigotimes_{n=1}^{\infty} W(\lambda_n)$$

$$\Phi(\sum_i \lambda_i e_i) \cong \sum_{n=1}^{\infty} I \otimes \cdots \otimes (\alpha_n q + \beta_n p) \otimes \cdots \otimes I$$

sicché

$$a(e_n) = I \otimes \cdots \otimes I \otimes \eta \otimes I \otimes \cdots$$

(il fattore non I si trova al posto n-simo) e

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} a(e_n)^* a(e_n)$$

Cioè, nella rappresentazione di Fock:

$$d\Gamma(I) = N = \sum_{n=1}^{\infty} a(e_n)^* a(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(p_n^2 + q_n^2 - I)$$

Ora sia X lo spazio vettoriale dei vettori della forma

$$\sum_i \lambda_i e_i$$

ove λ_i hanno supporto finito; si tratta di uno spazio prehilbertiano denso in $\mathcal{H}$ ed ha senso porre, per ogni $x \in X$:

$$W(x) = W(\sum_i \lambda_i e_i) = \prod_{i=1}^{\infty} W(\lambda_i e_i)$$

Un risultato chiave è il

19.4.1 Teorema (Gårding–Wightman) *La rappresentazione W è quasi equivalente alla rappresentazione di Fock se e solo se l'operatore*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(e_n)^* a(e_n)$$

è densamente definito.

Piuttosto che dimostrare questo teorema ci limitiamo a darne un esempio di applicazione.

Si consideri una funzione

$$\begin{aligned} n : \mathbb{N} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ i &\longmapsto n_i \end{aligned}$$

(cioè un elemento di $(\mathbb{N} \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$) e

$$\sum \frac{1}{2}(p_i^2 + q_i^2 - n_i I)$$

Esiste una rappresentazione nella quale questo operatore è essenzialmente autoaggiunto; ma il teorema di Gårding–Wightman ci dice inoltre che per ogni funzione $n \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$ esiste una rappresentazione irriducibile W_n delle relazioni di Weyl tale che questo operatore sia essenzialmente autoaggiunto e

$$W_n \cong W_{n'} \iff [n] = [n']$$

(le parentesi quadre denotano le classi di equivalenza modulo $\mathcal{N}_0$, che è lo spazio delle funzioni $n\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^{\mathbb{N}}$ a supporto finito). Abbiamo cioè una infinità continua di rappresentazioni irriducibili.

Stabiliamo ora una notazione: Ω_0 è lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico in $\Gamma(\mathbb{C})$, e Ω_n lo stato eccitato n-simo:

$$\Omega_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}\eta^{*n}\Omega_0$$

($\eta\Omega_0 = 0$). Consideriamo

$$\mathcal{H}_n := \bigotimes_{i=1}^{\infty}{}^{\{\Omega_{n_i}\}}\Gamma(\mathbb{C})$$

e

$$W_n(\sum \lambda_i e_i) = \bigotimes_{i=1}^{\infty} W(\lambda_i)$$

che possiede solo un numero finito di fattori diversi da 1 (dato che le λ_i hanno supporto finito; la W_n è irriducibile, il che si vede come nel caso della rappresentazione di Fock.

Definiamo ora un operatore N per W_n. Sia

$$e^{i\widehat{N}\lambda}W_n(x)\Omega_n = W_n(e^{i\lambda}x)\Omega_n$$

Questa posizione determina un operatore unitario se i prodotti scalari sono conservati, e se questo è vero la forte continuità implica che siamo in presenza di un gruppo di unitari fortemente continuo e quindi, per il teorema di Stone 14.3.6, $\widehat{N}$ è autoaggiunto.

Ma si ha

$$\begin{aligned}
(W_n(e^{i\lambda}x)\Omega_n, W_m(e^{i\lambda}x)\Omega_m) &= \prod_{i=1}^{\infty}(W(e^{i\lambda}\lambda_i)\Omega_{n_i}, W(e^{i\lambda},\mu_i)\Omega_{n_i}) \\
&= \prod_{i=1}^{\infty}(e^{i\lambda N}W(\lambda_i)e^{-i\lambda n_i}\Omega_{n_i}, W(e^{i\lambda},\mu_i)\Omega_{n_i}) \\
&= \prod_{i=1}^{\infty}(e^{i\lambda(N-n_i)I}W(\lambda_i)\Omega_{n_i}, W(e^{i\lambda},\mu_i)\Omega_{n_i}) \\
&= \prod_{i=1}^{\infty}(W(\lambda_i)\Omega_{n_i}, W(e^{i\lambda},\mu_i)\Omega_{n_i})
\end{aligned}$$

ove abbiamo usato

- al secondo passaggio il fatto che in un grado di libertà si ha $N = \eta^*\eta$ e $W(e^{i\lambda}z) = e^{iN\lambda}W(z)e^{-iN\lambda}$ $(z \in \mathbb{C})$;
- nel terzo membro l'implicazione $\eta^*\eta\Omega_n = n\Omega_n \Rightarrow e^{i\lambda\eta^*\eta}\Omega_n = e^{i\lambda n}\Omega_n$;
- nell'ultimo passaggio l'unitarietà di $e^{i\lambda(N-ni)I}$.

Ne segue che

$$\begin{aligned} W_n(e^{i\lambda}x)\Omega_n &= \bigotimes_{j=1}^{\infty} W(e^{i\lambda}\lambda_j)\Omega_{n_j} = \bigotimes_{j=1}^{\infty} e^{i\lambda(N-n_jI)}W(\lambda_j)\Omega_{n_j} \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} e^{i\lambda(N_j-n_jI)} \bigotimes_{j=1}^{\infty} W(\lambda_j)\Omega_{n_j} \\ &= e^{i\lambda\sum_{j=1}^{\infty}(N_j-n_jI)}W_n(x)\Omega_n \end{aligned}$$

ove

$$N_j = I \otimes \cdots \otimes I \otimes \eta^*\eta \otimes I \otimes \cdots = a(e_j)^*a(e_j)$$

(il fattore non identico figura al posto j-simo), sicché

$$\widehat{N} = \sum_{j=1}^{\infty}(N_j - n_jI)$$

Infine mostriamo che

$$W_n \cong W_{n'} \iff n - n' \in \mathcal{N}_0$$

Che la condizione sia sufficiente è ovvio: se $n - n' \in \mathcal{N}_0$ allora possiamo passare da Ω_n a $\Omega_{n'}$ senza cambiare la rappresentazione $\mathcal{H}_n$ (a meno di isomorfismi).

Per dimostrare che la condizione è necessaria, supponiamo $\overline{n} \neq \overline{n'}$; se fosse $W_n \cong W_{n'}$ allora esisterebbe U unitario tale che

$$\forall x \in X \quad UW_n(x)U^{-1} = W_{n'}(x)$$

e, preso

$$\Omega_n = \bigotimes_{j=1}^{\infty} \Omega_{n_j} \in \mathcal{H}_n$$

avremmo

$$\Phi := U(\Omega_n) \in \bigotimes_{j=1}^{\infty}{}^{\{\Omega_{n'_j}\}}\Gamma(\mathbb{C})$$

Il vettore Φ verificherebbe cioè la

$$(\Phi, W_{n'}(x)\Phi) = (U\Omega_n, UW_n(x)U^{-1}U\Omega_n) = (\Omega_n, W_n(x)\Omega_n)$$

Ma se $x \in \sum_{j=1}^{m} e_j\mathbb{C}$ per un certo m, allora gli elementi

$$W(x) = \bigoplus W_s^{(k)}(x)$$

(somma di copie della rappresentazione di Schrödinger) generano un'algebra di von Neumann che è della forma $\mathcal{B}(\mathcal{H}_l) \otimes I$, e dove $\mathcal{H}_m = \oplus_{j=1}^{m} e_k j\mathbb{C}$.

Dunque, per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_l)$

$$(\Phi, B \otimes I\Phi) = (\Omega_n, B \otimes I\Omega_n)$$

Notiamo inoltre che, in questo caso, esisterebbe $T_m \in (\mathcal{B}(\mathcal{H}_m) \otimes I)'$ tale che

$$T_m\Omega_m = \Phi$$

Infatti

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes I \cong \left\{ \bigoplus_{i=1}^{\infty} A \,|\, A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \right\}$$

(dato che $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K} = \oplus_{i \in \mathrm{Card}\,\mathcal{K}} \mathcal{H}$ e quindi

$$(\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes I)' \cong \{\oplus A\}'$$

che è un'algebra di matrici a blocchi negli elementi di $\mathbb{C}(\mathcal{H})$ (si confronti la discussione sui teoremi di densità). Gli operatori di quest'algebra che hanno la forma $(a_{ij}I) \in \oplus\mathcal{H}$ hanno come immagini in $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ gli elementi $B \otimes I$ e quindi

$$(\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes I)' = I \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K})$$

Ora

$$\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{H}'_m = \mathcal{H}_n$$

ed abbiamo un vettore Φ tale che

$$(\Phi, B \otimes I\Phi) = (\Omega^{(m)} \otimes \Omega', B \otimes I\Omega^{(m)} \otimes \Omega')$$

cioè

$$\Phi = T_m\Omega^{(m)} \otimes \Omega' = \Omega^{(m)} \otimes \Omega''$$

Dunque

$$\Phi = \Omega_{n_1} \otimes \Omega_{n_2} \otimes \cdots \in \bigotimes_{j=1}^{\infty}{}^{\{\Omega_{n'_j}\}}\Gamma(\mathbb{C})$$

il che è possibile solo se $\overline{n} = \overline{n'}$, dato che la successione

$$\Psi_m := \Omega_{n_1} \otimes \cdots \otimes \Omega_{n_m} \otimes \Omega_{n'_{m+1}} \otimes \cdots$$

è di Cauchy: se $m \gg 0$ e $l > m$:

$$||\Psi_m - \Psi_l||^2 < \varepsilon$$

Ma abbiamo anche

$$\begin{aligned}||\Psi_m - \Psi_l||^2 =& ||\Omega_{n_{m+1}} \otimes \cdots \otimes \Omega_{n_l} - \Omega_{n'_{l+1}} \otimes \cdots \otimes \Omega_{n'_l}|| \\ =& 2(1 - \operatorname{Re} \prod_{k=m+1}^{l} (\Omega_{n_k}, \Omega_{n'_k})\end{aligned}$$

che è 2 se $\overline{n} \neq \overline{n'}$.

19.5 Sul concetto di campo

In Meccanica Quantistica[3] un *campo* è una distribuzione a valori in un'algebra di operatori, cioè una funzione lineare

$$A : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}$$

ove $\mathcal{S}$ è lo spazio delle funzioni di Schwartz su $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{A}$ un'algebra di operatori autoaggiunti su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Il caso al quale questa definizione si ispira è

$$A(f) = \int f(x)A(x)dx$$

Supponiamo che esista un $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{H}$ denso tale che per ogni $f \in \mathcal{S}$ si abbia $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_{A(f)}$ (contenuto nel dominio dell'operatore $A(f)$) e tale che, per ogni $\psi, \psi' \in \mathcal{D}_0$, la funzione

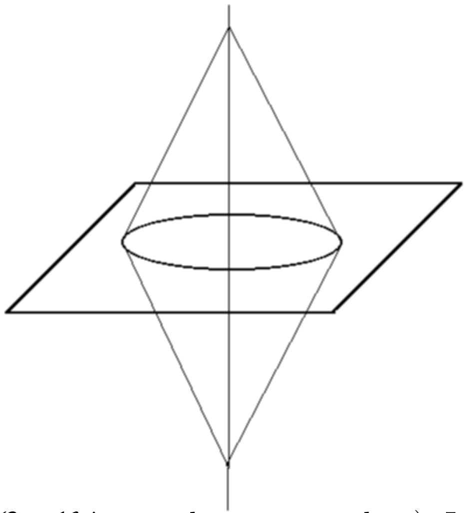
$$f \longmapsto (\psi A(f), \psi')$$

sia una distribuzione (cioè un elemento di $\mathcal{S}'$).

Una teoria dei campi consiste in una serie di assiomi per i campi stessi che rispondano alle esigenze fisiche e siano matematicamente coerenti; ne introdurremo alcuni.

Osserviamo intanto che se $\mathcal{A}$ è la C*-algebra degli osservabili di un sistema quantistico (in $\mathbb{R}^4$ visto come spazio-tempo) abbiamo in $\mathcal{A}$ delle sottoalgebre $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ associate ad aperti $\mathcal{O}$ di $\mathbb{R}^4$, che immaginiamo come regioni limitate dello spazio-tempo: tipicamente una tale regione sarà intersezioni di coni di luce, che sono aperti stabili rispetto alle trasformazioni di Lorentz (la richiesta minima se si vuole una compatibilità con la Relatività Ristretta).

[3]Seguendo Wightman, *Ph. Rev.* 1956.



Consideriamo dunque la famiglia $\mathcal{K}$ dei coni "doppi", cioè di coni la cui intersezione sia un bordo spaziale: si tratta di una famiglia di insiemi stabile per l'azione del gruppo di Poincaré. Possiamo inoltre definire, per $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$:

$$\mathcal{O}' := \{y \in \mathbb{R}^4 \,|\, \forall x \in \mathcal{O} \; ||y - x||_M^2 < 0\}$$

(ove $||.||_M$ è la norma di Minkowski).

Si noti che, in generale, $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}''$ ma che

$$\mathcal{O} \in \mathcal{K} \Rightarrow \mathcal{O}'' = \mathcal{O}$$

($\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ è causalmente completo). La funzione

$$\mathcal{O} \longmapsto \mathcal{A}(\mathcal{O})$$

si dice *corrispondenza di Haag–Kastler*, e soddisfa alla seguente proprietà di monotonia:

$$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$$

Con ciò ($\{\mathcal{A}(\mathcal{O})\}$ è un insieme parzialmente ordinato dall'inclusione) la corrispondenza di Haag-Kastler è un morfismo di insiemi ordinati.

Inoltre l'insieme

$$\bigcup_{\mathcal{O}\in\mathcal{K}} \mathcal{A}(\mathcal{O})$$

è una sotto-*-algebra di $\mathcal{A}$ e vogliamo imporre la condizione

$$\mathcal{A} = \overline{\bigcup_{\mathcal{O}\in\mathcal{K}} \mathcal{A}(\mathcal{O})}^{||-||}$$

Veniamo ora ad un assioma fondamentale di ogni teoria dei campi:

19.5.1 Postulato di Località *Siano $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$ tali che non possano esservi segnali temporali (timelike) fra essi: in altri termini che siano* causalmente disgiunti*, vale a dire*

$$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2'$$

Allora

$$\forall A_1 \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \; \forall A_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_2) \quad [A_1, A_2] = 0$$

Il significato di questo assioma è che eventi osservati in regioni dello spazio che non possono comunicare fra loro debbono essere indipendenti.

Perché una teoria assiomatica soddisfi il requisito base della coerenza basta far vedere che possiede un modello, vale a dire che ne esistono esempi: nel caso delle teorie dei campi questo avviene costruendo i campi liberi.

Consideriamo lo spazio di Fock $\Gamma(\mathcal{H})$ e la funzione $\Phi(x)$: vogliamo costruire un campo libero, cioè una distribuzione a valori in $\Gamma(\mathcal{H})$. Consideriamo $\mathcal{H} = L^2(\Omega_m^+, d\Omega_m)$ (particella di massa m e spin 0) e ricordiamo che

$$d\Omega_m(p) = \frac{dp}{2p_0}$$

e

$$\int f(p)d\Omega_m^+ = \int f\left(\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \vec{p}\right)\frac{dp}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} =: \int f(p)\delta(p^2 - m^2)\varepsilon(p_0)dp$$

e che esiste la rappresentazione indotta

$$(\mathcal{U}(a, \Lambda)f)(p) = e^{ipa} f(\Lambda^{-1}p)$$

Per f reale definiamo la distribuzione

$$Tf := \left(\widehat{f}\right)_{\Omega_m^+}$$

e quindi

$$\varphi(f) := \Phi\left(\widehat{f}\Big|_{\Omega_m^+}\right)$$

(Φ è lineare sulle funzioni reali) estendendola a funzioni complesse come

$$\varphi(f) := \varphi(\operatorname{Re} f) + i\varphi(\operatorname{Im} f)$$

Su $\mathcal{S}$ agisce il gruppo di Poincaré come

$$g \cdot f := f_g$$

essendo $g = (a, \Lambda)$ e

$$f_g(x) = f(g^{-1}x)$$

Allora

$$Tf_g = \mathcal{U}(g)Tf$$

sicché, estendendo la rappresentazione allo spazio di Fock come

$$\Upsilon(a, \Lambda) = \Gamma(\mathcal{U}(a, \Lambda))$$

per funtorialità otteniamo

$$\Upsilon(g)\Phi(x)\Upsilon(g)^{-1} = \Phi(\mathcal{U}(g)x)$$

ovvero

$$\varphi(f_g) = \Phi(Tf_g) = \Phi(\mathcal{U}(g)Tf) = \Upsilon(g)\Phi(f)\Upsilon(g)^{-1} = \Upsilon(g)T_f\Upsilon(g)^{-1}$$

In altri termini il campo $f \longmapsto \varphi(f)$ possiede una rappresentazione unitaria fortemente continua del gruppo di Poincaré $g \longmapsto \Upsilon(g)$ in modo che

$$\Upsilon(g)Tf\Upsilon(g)^{-1} = \varphi(f_g)$$

Notiamo che $\Upsilon(g)\Omega = \Omega$.

Estendiamo ora la funzione $\mathbb{R}$-lineare $f \longmapsto \varphi(f)$ ai complessi nel modo ovvio:

$$\varphi(f) := \varphi(f-1) + i\varphi(f_2)$$

e rammentiamo che

$$e^{i\varphi(f)} = e^{i\Phi(Tf)} = W(Tf)$$

da cui, per $f, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$

$$[\varphi(f), \varphi(h)] = i\,\mathrm{Im}(Tf, Th)$$

ovvero

$$e^{i\varphi(f)}e^{i\varphi(h)} = e^{i\,\mathrm{Im}(Tf,Th)}e^{i\varphi(h)}e^{i\varphi(f)}$$

Si noti che T è un operatore di allacciamento:

$$Tf_g = \Upsilon(g)Tf$$

e quindi

$$\Upsilon(g)W(x)\Upsilon(g)^{-1} = W(\mathcal{U}(g)x)$$

e

$$\Upsilon(g)\varphi(f)\Upsilon(g)^{-1} = \varphi(f_g)$$

Per cui, se $\varphi(f)$ è una distribuzione regolare, della forma

$$\varphi(f) = \int f(x)\varphi(x)dx$$

allora

$$\Upsilon(a,\Lambda)\varphi(x)\Upsilon(a,\Lambda)^{-1} = \varphi(\Lambda x + a)$$

Vogliamo ora presentare φ come soluzione di un'equazione differenziale (nel senso delle distribuzioni): precisamente consideriamo l'equazione[4]

$$((\Box + m^2)\varphi)(f) = \varphi((\Box + m^2)f)$$

Ma (usando le trasformate di Fourier)

$$(\widehat{\Box + m^2})f(p) = (m^2 - p^2)\widehat{f}(p)$$

e quindi ($p^2 = m^2$)

$$(\widehat{\Box + m^2})f\Big|_{\Omega_m^+} = 0$$

Dunque otteniamo, per la distribuzione $Tf = \widehat{f}|_{\Omega_m^+}$:

$$\varphi((\Box + m^2)f) = \Phi(T(\Box + m^2)f) = 0$$

(dato che $T(\Box + m^2)f = (\widehat{\Box + m^2})f$, il che ci permette di caratterizzare le φ come soluzioni dell'equazione differenziale

$$(\Box + m^2)\varphi = 0$$

Ora consideriamo la questione dell'irriducibilità della nostra rappresentazione: intanto ricordiamo che la funzione

$$x \longmapsto W(x)$$

($x \in \mathcal{H}$) è fortemente continua, quindi lo sono le

$$f \longmapsto e^{i\varphi(f)} \qquad \text{e} \qquad f \longmapsto \varphi(f)\Phi$$

($f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ e la topologia su $\mathcal{S}$ è data da $||Tf||^2 = ||f||^2$): per avere l'irriducibilità basta quindi dimostrare il

19.5.2 Teorema *L'immagine $T\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ è densa in $\mathcal{H}_{[m,0]}$.*

Dimostrazione: Intanto osserviamo che

$$\begin{aligned} ||f||^2 &= \int_{\Omega_m^+} |\widehat{f}(p)|^2 \frac{dp}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \\ &= \int_{\Omega_m^+} |\widehat{f}(p)|^2 (1+\vec{p}^2)^{2r}(1+\vec{p}^2)^{-2r} \frac{dp}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \leq c||(1+\vec{p}^2)rf||_\infty^2 \end{aligned}$$

[4]Si rammenti come si derivano le distribuzioni: $T'(f) = -T(f')$, sicché $(\nabla T)f = T(\nabla f)$ e $(\Box T)f = T(\Box f)$

con r opportuno, in modo che $(1+\vec{p}^2)^{-2r}/\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$ sia in L^1 e quindi abbia luogo la maggiorazione, dove c è una costante. Ma

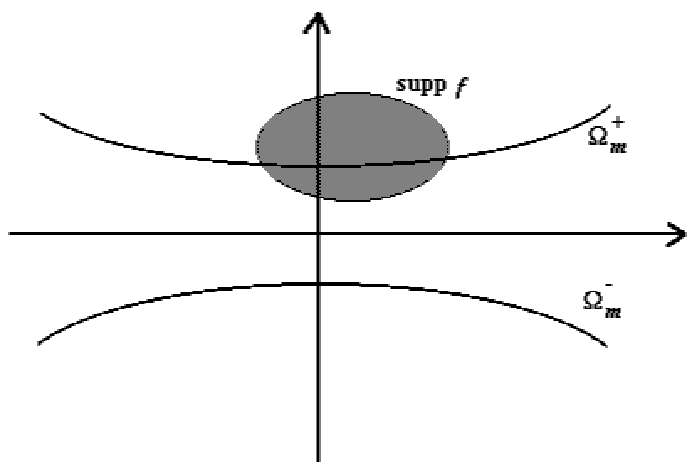
$$q(f) := \sup_p |(1+\vec{p}^2)^r f(p)|$$

è una seminorma per la topologia di $\mathcal{S}$ ed ovviamente $||f|| \leq q(f)$, sicché la norma $||.||$ è continua per la topologia di $\mathcal{S}$.

Dunque T manda insiemi densi in insiemi densi, sicché basta dimostrare il teorema su

$$\mathcal{D}_{\mathbb{R}} = \{f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}} \mid \operatorname{supp} f \text{ compatto}\}$$

(che è denso in $\mathcal{S}$).



Per farlo, consideriamo $f : \Omega_m^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ appartenente a $L^2(\mathbb{R}^3, d\Omega_m)$, vale a dire tale che

$$\int |f(\vec{p})|^2 \frac{dp}{2\sqrt{\vec{p}^2+m^2}} < \infty$$

e definiamo

$$\widehat{g}(p) := f(\vec{p})h\left(\frac{p_0 - \sqrt{\vec{p}^2+m^2}}{m}\right)$$

ove $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ è una funzione a supporto compatto tale che $h(0) = 1$ e $\operatorname{supp} h \subset (-1, 1)$; allora la $\widehat{g}$ ha supporto compatto e, se

$$\widehat{g_1}(p) := \widehat{g}(p) + \overline{\widehat{g}(-p)}$$

allora $g_1 \in \mathcal{S}$ e

$$(Tg_1)(\sqrt{\vec{p}^2+m^2}, p) = f(\vec{p})$$

(si rammenti che se $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ allora $\widehat{f}(p) = \overline{\widehat{f}(-p)}$).

QED

Le distribuzioni che qui ha interesse considerare sono, rispetto alle variabili spaziali, delle funzioni (infinitamente differenziabili) vere e proprie.

Ricordiamo ora che per le distribuzioni può definirsi un prodotto tensoriale nel modo seguente: consideriamo $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ e $G \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)'$; allora possiamo definire una distribuzione $F \otimes G$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})'$ come

$$\langle F \otimes G, f \otimes g\rangle = \langle F, f\rangle\langle G, g\rangle$$

ove abbiamo usato l'isomorfismo

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \cong \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$$

che dà luogo al *teorema del nucleo di L. Schwartz*:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)' \cong \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})'$$

(i prodotti tensoriali sono definiti in modo unico perché questi spazi vettoriali topologici sono nucleari: cfr. [31], p.531).

Il prodotto tensoriale di distribuzioni è una generalizzazione del prodotto di misure, ed il teorema del nucleo può vedersi come una versione più generale del teorema di Fubini.

19.5.3 Esempio *Consideriamo una funzione $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ e la misura di Dirac $\delta_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})'$ concentrata in un punto x_0: possiamo considerare i prodotti tensoriali*

$$f_1 = \delta_0 \otimes g \qquad e \qquad f_2 = \delta_0' \otimes g$$

(che sono distribuzioni in $\mathbb{R}^4$, ove δ_0' è la derivata nel senso delle distribuzioni, cfr. capitolo **??** *§4); allora*

$$\widehat{f}_1(p) = \widehat{g}(\vec{p}) \qquad e \qquad \widehat{f}_2(p) = ip_0\widehat{g}(\vec{p})$$

Formalmente:

$$\langle f_1, \varphi\rangle = \int \varphi(0, \vec{x})g(\vec{x})d\vec{x} \qquad e \qquad \langle f_2, \varphi\rangle = \int \varphi'(0, \vec{x})g(\vec{x})d\vec{x}$$

Data la distribuzione T, consideriamo ora la funzione $I_T : \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) \otimes \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$I_T(f, g) = -\operatorname{Im}(Tf, Tg)$$

Si tratta di una funzione bilineare e continua nelle due variabili rispetto alla topologia di $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$. Per $(a,\Lambda) \in \mathcal{P}$ si ha

$$(Tf_{(a,\Lambda)}, Tg_{(a,\Lambda)}) = (\mathcal{U}(a,\Lambda)Tf, \mathcal{U}(a,\Lambda)Tg) = (Tf, Tg)$$

e, formalmente, possiamo scrivere

$$I_T(f,g) = \int F(x,y)f(x)g(y)dxdy$$

cioè esprimere la funzione bilineare I_T come un operatore integrale con nucleo F tale che $F(x,y) = F(x+a, y+a)$. Inoltre, per invarianza rispetto alle trasformazioni di Lorentz si ha

$$F(x,y) = \Delta(x-y)$$

ove $\Delta(\lambda z) = \Delta(z)$ e Δ è una distribuzione in $\mathbb{R}^4$.

Naturalmente la distribuzione Δ si comporta solo formalmente come un nucleo, ma possiamo comunque scrivere delle regole di commutazione[5] almeno a livello formale, usando il seguente ragionamento:

$$\begin{aligned} I_T(f,g) =& -\operatorname{Im} \int \overline{Tf(p)}Tg(p)d\Omega_m = -\operatorname{Im} \int \overline{\widehat{f}(p)}\widehat{g}(p)d\Omega_m^+ \\ =& \frac{1}{2}\int_{\{p_0=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}\}} \left(\widehat{f}(p)\overline{\widehat{g}(p)} - \overline{\widehat{f}(p)}\widehat{g}(p)\right) d^3\frac{p}{2\sqrt{\vec{p}^2+m^2}} \end{aligned}$$

f e g sono a valori reali, quindi $\overline{\widehat{f}(p)} = \widehat{f}(-p)$ e $\overline{\widehat{g}(p)} = \widehat{g}(-p)$, sicché

$$\begin{aligned} =& \frac{1}{2}\int_{\{p_0=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}\}} \widehat{f}(p)\overline{\widehat{g}(p)}\frac{d\Omega_m^+(p) - d\Omega_m^-(p)}{\sqrt{\vec{p}^2+m^2}} \\ =& (\widehat{g}, \widehat{\Delta}_m(p)\widehat{f}) = (g, \Delta_m * f) \end{aligned}$$

(nell'ultima formula integrale abbiamo integrato rispetto alla differenza delle misure). Abbiamo cioè, a meno di scambiare l'ordine di g e f, la formula per il nucleo:

$$\Delta_m(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int e^{ipx}\left(d\Omega_m^+(p) - d\Omega_m^-(p)\right)$$

[5]La principale motivazione che von Neumann fornisce, nel suo trattato *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* [24], all'introduzione della teoria degli operatori negli spazi di Hilbert come metodo matematico fondamentale per le questioni quantistiche, è proprio la mancanza di rigore che la formulazione di Dirac [6] aveva all'epoca: il principale ostacolo era l'impossibilità di scrivere gli usuali operatori, come la funzione hamiltoniana, in forma di operatori integrali: per questo Dirac faceva uso delle sue "funzioni improprie" la cui natura non contraddittoria fu chiarita solo in seguito da Schwartz ed altri con l'introduzione del concetto di "distribuzione"; si confronti specialmente i §I–3 e §III–6 del libro di Von Neumann.

Intuitivamente, abbiamo la seguente formula, anche se priva di senso:

$$[f(\varphi), g(\varphi)] = I_T(f, g) = i(f, \Delta * g) = i\Delta_m(x - y)I$$

Si noti che, se Δ_m ha supporto nel doppio cono di luce futuro/passato V, vale a dire se per ogni $f, g \in \mathcal{S}$ i cui supporti siano spazialmente separati, l'integrale di Δ_m sulle f e g dà ovviamente zero, dato che

$$[f(\varphi), g(\varphi)] = -[\varphi(x), \varphi(y)]$$

e quindi $\Delta(-z) = -\Delta(z)$; inoltre la $\Delta(\lambda z) = \Delta(z)$ (che è come dire $\langle \Delta, f_\Lambda \rangle = \langle \Delta, f \rangle$) implica $\Delta = 0$ sui vettori *spacelike*, perché possiamo scrivere

$$\Delta_m(x) = \Delta_m^{(+)}(x) - \Delta_m^{(-)}(-x)$$

Quindi

$$\int \varphi(x) f(x) dx = \varphi(x)$$

è tale che, se $\mathrm{Im}(Tf, Tg) = 0$, allora $e^{i\lambda f(\varphi)} = W(\lambda T f)$ e $e^{i\mu g(\varphi)}$ commutano in senso forte: questo è il caso, ad esempio, se i supporti di f e g sono spazialmente separati.

Naturalmente questo si ricollega al postulato di località: se

$$\mathcal{A}(\mathcal{O}) := \{W(Tf) \,|\, f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)\,, \operatorname{supp} f \subset \mathcal{O}\}''$$

e $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ sono aperti spazialmente separati, i.e. $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2'$ allora $W(Tf)$ e $W(Tg)$ commutano (per ogni $f \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_1)$ e $g \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$):

$$\mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)'$$

e viceversa.

In realtà si potrebbe dimostrare il seguente risultato

19.5.4 Teorema *Se $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ è un cono doppio e se consideriamo la C^*-algebra $\mathcal{A}(\mathcal{O}')$ generata dalle sottoalgebre $\{\mathcal{A}(\mathcal{O}_\lambda)\}_{\mathcal{O}_\lambda \subset \mathcal{O}'}$ allora*

$$\mathcal{A}(\mathcal{O}) = \mathcal{A}(\mathcal{O}')'$$

*(*dualità di Araki*).*

dove l'inclusione $\mathcal{A}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}')'$ è ovvia.