CAPITOLO 10

TEORIA SPETTRALE

In questo capitolo affrontiamo la teoria spettrale nelle C*-algebre: questa è una profonda generalizzazione della teoria spettrale delle matrici (l'algebra delle matrici complesse è una C*-algebra), che consente di trattare gli elementi di una C*-algebra come dei numeri: possiamo cioè calcolare su di essi classi di funzioni sempre più generali. Cominceremo con le funzioni analitiche, per passare a quelle continue ed infine a quelle boreliane: questo rende in grado, nelle applicazioni, di dare senso a leggi fisiche in cui gli osservabili siano operatori in uno spazio di Hilbert piuttosto che valori assunti da funzioni differenziabili, come nel caso classico. Discuteremo come esempi alcuni classici tipi di operatori: gli operatori compatti, gli operatori di Hilbert–Schmidt e gli operatori nucleari.

10.1 Teorema della Mappa Spettrale

Iniziamo generalizzando l'ultimo risultato ottenuto nel capitolo precedente:

10.1.1 Proposizione *Se $(\mathcal{A}, ||\text{-}||_1)$ è una C*-algebra, che sia un'algebra di Banach rispetto alla norma $||\text{-}||_2$ allora*

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad ||A||_1 \leq ||A||_2$$

che segue immediatamente dal

10.1.2 Lemma *Se $\mathcal{A}$ è una *-algebra di Banach e $\mathbb{C}$ una C*-algebra, e $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ è uno *-omomorfismo allora*

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad ||\rho(A)|| \leq ||A||$$

DIMOSTRAZIONE: Se $A \in \mathcal{A}$:

$$||\rho(A)||^2 = ||\rho(A)^*\rho(A)|| = ||\rho(A^*A)|| = \mathrm{spr}(\rho(A^*A))$$

(essendo $\rho(A^*A)$ autoaggiunto in $\mathcal{B}$ e quindi normale). Ora, se $A \in \mathcal{A}^{-1}$ e $\eta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ è un morfismo (con $\eta(I) = I$) allora

$$\eta(A^{-1})\eta(A) = \eta(A^{-1}A) = I$$

i.e. $\eta(\mathcal{A}^{-1}) \subset \mathcal{B}^{-1}$ (si noti che *non* vale l'inclusione opposta). Quindi $A-\lambda I \in \mathcal{A}^{-1}$, cioè $\eta(A - \lambda I) \in \mathcal{B}^{-1}$ ovvero $\eta(A) - \lambda I \in \mathcal{B}^{-1}$. In altri termini, se $\lambda \in P(A)$ allora $\lambda \in P(\eta(A))$ e quindi $\sigma(\eta(A)) \subset \sigma(A)$:

$$\operatorname{spr} \rho(A^*A) \leq \operatorname{spr}(A^*A) \leq ||A^*A|| \leq ||A||^2$$

(vale solo il segno $\leq$ perché $\mathcal{A}$ non è necessariamente una C*-algebra). Ne concludiamo che

$$||\rho(A)|| \leq ||A||$$

QED

Osserviamo che, se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ e $\mathcal{A}$ è unitaria (con la stessa unità di $\mathcal{B}$) allora per $A \in \mathcal{A}^{-1}$ invertibile, A^{-1} è l'inverso di A anche in $\mathcal{B}$; potrebbe tuttavia aversi $A^{-1} \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$, nel qual caso si avrebbe $A-\lambda I \in \mathcal{B}^{-1} \setminus \mathcal{A}^{-1}$. Si deve quindi considerare $P_{\mathcal{A}}(A)$, il *risolvente relativo ad* A (di $\mathcal{A}$). Ovviamente

$$P_{\mathcal{A}}(A) \subset P_{\mathcal{B}}(A) \qquad \text{e} \qquad \sigma_{\mathcal{B}}(A) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(A)$$

(ma non necessariamente il viceversa).

Se $\mathcal{A}$ è un'algebra di Banach commutativa con unità e se $\{A_i\}$ è un suo insieme di generatori, allora la funzione

$$\begin{aligned} \Phi : \sigma(\mathcal{A}) &\longrightarrow \prod_i \sigma(A_i) \\ \varphi &\longmapsto \{\varphi(A_1)\} \end{aligned}$$

è (per definizione delle topologie su $\sigma(\mathcal{A})$ e sul prodotto) continua, sebbene in generale non sia suriettiva. L'immagine dello spettro di $\mathcal{A}$ per tramite della mappa Φ è quindi un compatto in $\prod \sigma(\mathcal{A})$.

10.1.3 Definizione *L'immagine* $\Phi(\sigma(\mathcal{A}))$ *si dice* spettro congiunto *di* $\mathcal{A}$ *e si denota con* $j\sigma(\{A_i\})$.

Dato che gli $\{A_i\}$ generano $\mathcal{A}$, la mappa

$$\Phi : \sigma(\mathcal{A}) \longrightarrow j\sigma(\mathcal{A})$$

è iniettiva: infatti da $\varphi_1 = \varphi_2$ sugli $\{A_i\}$ allora $\varphi_1 = \varphi_2$ sull'algebra generata dagli $\{A_i\}$ (cioè i polinomi nelle $\{A_i\}$) e quindi, la chiusura di questa algebra è $\mathcal{A}$ per definizione, per continuità dei φ_i, $\varphi_1 = \varphi_2$ su $\mathcal{A}$. Dunque la mappa in questione è un omeomorfismo[1].

Ad esempio, se $\mathcal{A}$ è generata da un solo elemento A, allora

$$\Phi : \sigma(\mathcal{A}) \longrightarrow \sigma(A) \subset \mathbb{C}$$

è un omeomorfismo. Se $A \in \mathcal{A}$ (algebra di Banach con unità) consideriamo

$$\mathbf{A} := \langle A, I \rangle$$

(con le parentesi acute denotiamo l'algebra generata dagli elementi che racchiudono: in questo caso l'algebra generata da A e I) che è esattamente la chiusura (uniforme) dell'algebra dei polinomi in $\mathcal{A}$.

Dunque $\mathbf{A}$ è una sottoalgebra di Banach commutativa con unità e si ha

$$\sigma(\mathbf{A}) = \sigma_{\mathbf{A}}(A) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(A)$$

10.1.4 Teorema *Se $A \in \mathcal{A}$ (algebra di Banach con unità) e $\mathbf{A}$ è la sottoalgebra generata da A e I in $\mathcal{A}$ allora $P_{\mathcal{A}}(A)$ è un aperto e, se $P'_\infty(A)$ è la componente connessa del punto[2] ∞ in $P_{\mathcal{A}}(A)$, allora*

$$P_{\mathcal{A}}(A) = P'_\infty(A) \cup \mathcal{U}$$

(ove $\mathcal{U}$ denota le rimanenti componenti connesse) e

$$\sigma_{\mathbf{A}}(A) = \mathbb{C} \setminus P'_\infty(A)$$

Dimostrazione: è facile rendersi conto che

$$P'_\infty(A) \subset P_{\mathbf{A}}(A)$$

Infatti la mappa $P_{\mathbf{A}}(A) \ni \lambda \longmapsto (A - \lambda I)^{-1}$ è olomorfa, e

$$\begin{aligned} ||A|| < |\lambda_0| \Rightarrow (A - \lambda I)^{-1} &= \sum (\lambda - \lambda_0)^n R_{\mathbf{A}}(\lambda)^{n+1} \\ &= \sum (\lambda - \lambda_0)^n \left(-\frac{1}{\lambda} \sum_k \frac{A^k}{\lambda^k} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

Ma, per definizione di $\mathbf{A}$:

$$-\frac{1}{\lambda} \sum_k \frac{A^k}{\lambda^k} \in \mathbf{A}$$

[1] Essendo continua da un compatto in un compatto di Hausdorff ed iniettiva.

[2] Cioè la componente connessa che contiene i punti di modulo opportunamente grande.

quindi per ogni λ che soddisfi la relazione precedente, la serie

$$\sum(\lambda-\lambda_0)^n R_{\mathbf{A}}(\lambda_0)^{n+1}\in\mathbf{A}$$

converge e, per continuazione analitica, si trova che $P'_\infty(A)\subset P_{\mathbf{A}}(A)$.

Viceversa dimostriamo che $P_{\mathbf{A}}(A)\subset P'_\infty(A)$, cioè che se $\lambda\notin P'_\infty(A)$ allora $\lambda\notin P_{\mathbf{A}}(A)$.

Per assurdo sia $\lambda\in P_{\mathbf{A}}(A)$, i.e. $(A-\lambda I)^{-1}\in\mathbf{A}$ cioè esistano i polinomi complessi $p_n\in\mathbb{C}[z]$ tali che

$$||p_n(A)-(A-\lambda I)^{-1}||\longrightarrow 0$$

il che, per continuità del prodotto, implica

$$||(A-\lambda I)p_n(A)-I||\longrightarrow 0$$

Ma se

$$q_n(z):=(z-\lambda)p_n(z)-1$$

evidentemente $||q_n(A)||\longrightarrow 0$, e tuttavia

$$\forall p\in\mathbb{C}[z]\ \forall\varphi\in\sigma(\mathbf{A})\quad \varphi(p(A))=p(\varphi(A))$$

(per linearità e moltiplicatività delle φ), quindi (si rammenti che $||\varphi||=1$):

$$|p(\varphi(A))|\le||p(A)||$$

ovvero, per ogni $z\in\sigma_{\mathbf{A}}(A)$: $|p(z)|\le||p(A)||$.

Supponiamo ora che λ appartenga ad una componente connessa che non sia $P'_\infty(A)$: per il principio del massimo 9.6.24, in questa componente connessa (che per definizione è chiusa ma anche aperta): $|p(z)|\le||p(A)||$; in particolare ciò è vero nel punto λ. Ma

$$||q_n(A)||\longrightarrow 0$$

mentre $q_n(\lambda)=1$ il che viola il principio del massimo per q_n (che ovviamente sono olomorfe, essendo polinomi!). L'assurdo è derivato dall'aver supposto falsa l'inclusione $P_{\mathbf{A}}(A)\subset P'_\infty(A)$.

QED

10.1.5 Proposizione *Se $\mathcal{A}$ è una C*-algebra con unità I, $A\in\mathcal{A}$ e $A\in\mathcal{B}\subset\mathcal{B}$ (C*-sottoalgebra con unità I) allora*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(A)\subset\sigma_{\mathcal{B}}(A)$$

Se A è autoaggiunto vale il segno di uguaglianza.

Dimostrazione: Se A é autoaggiunto allora $\sigma_{\mathcal{A}}(A) \subset \mathbb{R}$ è compatto e quindi c'è solo la componente connessa $P'_\infty(A)$.

Nel caso generale, certamente A^*A è autoaggiunto e quindi

$$\sigma_{\mathcal{B}}(A^*A) = \sigma_{\mathcal{A}}(A^*A)$$

Ora osserviamo che se $A \in \mathcal{B}$ è invertibile in $\mathcal{A}$ allora basta dimostrare che il suo inverso appartiene a $\mathcal{B}$; infatti ciò equivale a $P_{\mathcal{A}}(A) = P_{\mathcal{B}}(A)$ i.e. a $\sigma_{\mathcal{A}}(A) = \sigma_{\mathcal{B}}(A)$.

Ma in questo caso $A^{*-1} = A^{-1*}$ e $(A^*A)^{-1} = A^{-1}A^{-1*}$ in $\mathcal{A}$ e, essendo A^*A autoaggiunto, $A^*A \in \mathcal{B}$ (l'unità I è la stessa sia in $\mathcal{A}$ che $\mathcal{B}$). Quindi

$$A^{-1} = (A^*A)^{-1}A^*$$

e, dato che $(A^*A)^{-1}, A* \in \mathcal{B}$, anche $A^{-1} \in \mathcal{B}$.

QED

Consideriamo ora una C*-algebra $\mathcal{A}$ con unità I ed un suo elemento A; si definisce

$$\mathbf{A} = C^*(A, I) := \langle A, A^*, I\rangle$$

i.e. come la chiusura uniforme dei polinomi in A e A^*:

$$p(A) = \sum c_{nm}A^nA^{*m}$$

ove le $\{c_{nm}\}$ sono nulle tranne che per un numero finito di coppie (n, m). $\mathbf{A}$ è ovviamente una C*-algebra commutativa con unità I e quindi, per il teorema di Gel'fand–Najmark:

$$\forall\varphi \in \sigma(\mathbf{A}) \quad \varphi(A^*) = \overline{\varphi(A)}$$

Si ha cioè l'omeomorfismo

$$\sigma(\mathbf{A}) \cong \sigma_{\mathbf{A}}(A) = \sigma_{\mathcal{A}}(A)$$

Dunque la trasformata di Gelfand è uno *-isomorfismo isometrico di $\mathbf{A}$ su $C(\sigma(\mathbf{A}))$. D'altro canto abbiamo anche l'omeomorfismo $\varphi : \sigma(A) \cong \sigma(\mathbf{A})$ (che manda $\lambda \longmapsto \varphi_\lambda$ in $\varphi_\lambda(A) = \lambda$) e quindi, per funtorialità, si ha uno *-isomorfismo isometrico che rende commutativo il diagramma seguente:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r] \arrow[dr] & C(\sigma(\mathbf{A})) \arrow[d, "\varphi^*"] \\
 & C(\sigma(A))
\end{tikzcd}$$

(dove $\varphi^*(f)(\lambda) = f(\varphi_\lambda)$). Se definiamo una mappa $C(\sigma(A)) \longrightarrow \mathbf{A}$ come

$$f \longmapsto f(A)$$

allora $f(I) = I$ (per unitarietà dello *-isomorfismo φ^*) e, se $f(\lambda) = \lambda$ allora $f(A) = A$: infatti in questo caso, se B è tale che $\widehat{B}(\varphi_\lambda) = \lambda$ deve essere $\varphi_\lambda(B) = \lambda = \varphi_\lambda(A)$ i.e. $\varphi_\lambda(B - A) = 0$ e quindi $B = A$.

Quindi la freccia diagonale $C(\sigma(A)) \longleftrightarrow \mathbf{A}$ nel diagramma commutativo precedente è l'unica estensione isometrica della mappa $\mathbb{C}[z] \longrightarrow \mathbf{A}$ di valutazione di un polinomio su A ($p \longmapsto p(A)$) alla chiusura (uniforme) dello spazio dei polinomi e di $\mathbf{A}$, per il teorema di Stone–Weierstrass.

La mappa $C(\sigma(A)) \longrightarrow \mathbf{A}$ che abbiamo ottenuto si dice *calcolo funzionale continuo* per un operatore normale A. Infatti ci consente di calcolare il valore di una funzione continua su un operatore normale, analogamente a quanto accade per i polinomi.

10.1.6 Teorema della Mappa Spettrale *Se A è un operatore normale in una C^*-algebra $\mathcal{A}$, per ogni $f \in C(\sigma(A))$ si ha che*

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$$

DIMOSTRAZIONE: A questo punto è una facile verifica:

$$\begin{aligned}\sigma(f(A)) &= \{\varphi(f(A))\}_{\varphi\in\sigma(\mathbf{A})} = \{\widehat{f(A)}(\varphi)\}_{\varphi\in\sigma(\mathbf{A})} \\ &= \{\widehat{f(A)}(\varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\sigma(A)} = \{f(\lambda)\}_{\lambda\in\sigma(A)} = f(\sigma(A))\end{aligned}$$

QED

Se la C*-algebra $\mathcal{A}$ è commutativa, allora ogni operatore è normale e quindi il teorema della mappa spettrale ci consente di calcolare funzioni continue su elementi di $\mathcal{A}$: da questo punto di vista, gli operatori di $\mathcal{A}$ sono una generalizzazione dei numeri complessi.

10.1.7 Esempio *Se f è una funzione olomorfa intera, allora*

$$\forall\lambda \in \mathbb{C} \quad f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\lambda^n$$

(la somma converge assolutamente in tutto il piano complesso) e quindi

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$$

converge assolutamente, quindi ($\mathcal{A}$ è uno spazio di Banach) converge in $\mathcal{A}$.

Se $\mathcal{A}$ è commutativa, possiamo valutare su $f(A)$ un funzionale moltiplicativo φ (si rammenti che un tale funzionale è continuo):

$$\forall\varphi \in \sigma(\mathcal{A}) \quad \varphi(f(A)) = f(\varphi(A))$$

In realtà non è necessario limitarsi a funzioni intere. Più precisamente, sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ove Ω è un dominio regolare (cioè un aperto connesso il cui bordo sia una curva regolare Γ) del piano complesso, con chiusura $\overline{\Omega}$ compatta, contenente $\sigma(A)$, e sia $A(\Omega)$ l'insieme delle funzioni olomorfe su Ω e continue su $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$; si tratta di una sottoalgebra di Banach di $C(\overline{\Omega})$ per la norma

$$||f||_{A(\Omega)} = \max_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z\in\Gamma} |f(z)|$$

Per la formula di Cauchy 9.6.6:

$$\forall z \in \Omega \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \oint_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw$$

dunque è naturale definire l'*integrale di Dunford*

$$f(A) := \frac{1}{2\pi} \oint_\Gamma f(\lambda) R_A(\lambda) d\lambda$$

($R_A(\lambda)$ denota al solito il risolvente). Dato che la funzione $f(\lambda)R_A(\lambda)$ è olomorfa in Ω, questo integrale non dipende da Γ.

10.1.8 Lemma *Se $A \in \mathcal{A}$ (algebra di Banach con unità) allora l'integrale di Dunford induce un morfismo continuo $f \longmapsto f(A)$ tale che*

- *Se $f(z) = 1$ su Ω allora $f(A) = I$.*
- *Se $f(z) = z$ su Ω allora $f(A) = A$.*
- *Se $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ è una serie assolutamente convergente in Ω allora*

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$$

Dimostrazione: La mappa $f \longmapsto f(A)$ è ovviamente lineare e limitata, dato che

$$||f(A)|| \leq \frac{1}{2\pi} |\Gamma| \max ||R(\lambda)|| \; ||f||_{A(\Omega)}$$

($|\Gamma|$ denota la lunghezza della curva Γ), ed è un omomorfismo di algebre: di più, verifichiamo che se Γ_1 e Γ_2 sono curve regolari chiuse in Ω, allora

$$\forall f_1, f_2 \in A(\Omega) \quad f_1(A) f_2(A) = f_1 f_2(A)$$

Intanto, dato che $f_2(A)$ non dipende dalla scelta di Γ_1, possiamo supporre che sia $\Gamma_2 \subset \Omega_1$ (le curve regolari chiuse delimitano domini regolari) e quindi

$$\begin{aligned} f_1(A) f_2(A) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\Gamma_1} f_1(\lambda_1) R(\lambda_1) d\lambda_1 \oint_{\Gamma_2} f_2(\lambda_2) R(\lambda_2) d\lambda_2 = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\Gamma_1} f_1(\lambda_1) f_2(\lambda_2) \frac{R(\lambda_1) - R(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda - 2} d\lambda_1 d\lambda_2 \end{aligned}$$

(si ricordi che $R(\lambda_1) - R(\lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2) R(\lambda_1) R(\lambda_2)$). Ma la funzione

$$\lambda_2 \longmapsto \frac{R(\lambda_1) - R(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

è olomorfa in Ω_2 e quindi, per la formula integrale di Cauchy:

$$\begin{aligned} f_1(A) f_2(A) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\Gamma_1} f_1(\lambda_1) \oint_{\Gamma_2} f_2(\lambda_2) \frac{R(\lambda_1) - R(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} d\lambda_2 d\lambda_1 \\ &= -\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\Gamma_1} f_1(\lambda_1) \oint_{\Gamma_2} \frac{f_2(\lambda_2) R(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} d\lambda_2 d\lambda_1 \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} f_2(\lambda_2) R(\lambda_2) \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f_1(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} d\lambda_1\right) d\lambda_2 \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} f_2(\lambda_2) f_1(\lambda_2) R(\lambda_2) d\lambda_2 \\ &= f_1 f_2(A) \end{aligned}$$

Ora la (3) del teorema è immediata. La (2) è un facile calcolo:

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \lambda R(\lambda) d\lambda = A + \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (A - \lambda I) R(\lambda) d\lambda = A$$

mentre la (1) si dimostra osservando che, essendo una funzione identicamente 1 intera, possiamo scegliere Γ come una circonferenza di centro l'origine del piano complesso e raggio arbitrariamente grande, ottenendo quindi

$$\begin{aligned}
||f(A) - I|| &= \frac{1}{2\pi}\left|\left| \oint_\Gamma 1 \cdot R(\lambda)d\lambda - \oint_\Gamma \frac{I}{\lambda^{-1}}d\lambda \right|\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\left| - \oint_\Gamma \left(R(\lambda) + \frac{I}{\lambda^{-1}} \right) d\lambda \right|\right| \\
&= \left|\left| \frac{1}{2\pi} \oint_\Gamma \left(\left(I - \frac{A}{\lambda^{-1}} \right)^{-1} - I \right) \frac{d\lambda}{\lambda} \right|\right| \\
&\leq \max_{\lambda \in \Gamma} \left|\left| \left(I - \frac{A}{\lambda^{-1}} \right)^{-1} - I \right|\right| \frac{1}{2\pi} \oint_\Gamma \frac{1}{|\lambda|} d\lambda \\
&\leq \max_{\lambda \in \Gamma} \frac{||A||}{|\lambda| - ||A||}
\end{aligned}$$

che tende a zero per $|\lambda| \longrightarrow \infty$.

QED

Questo teorema si estende immediatamente al caso in cui $\sigma(A)$ sia sconnesso: infatti se $\sigma(A) = \sigma_1(A) \cup \sigma_2(A)$ sono le componenti connesse, possiamo considerare l'integrale di Dunford

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(\lambda) R(\lambda) d\lambda$$

ove Γ è una curva regolare chiusa, che delimiti[3] un dominio regolare contenente $\sigma_1(A)$ e il cui complementare (illimitato) contenga $\sigma_2(A)$, e l'algebra $A(\Omega)$ è quella delle funzioni olomorfe in Ω continue in $\overline{\Omega}$. In questo caso, se $f = 1$, allora $f(A)$ è un proiettore (continuo), cioè $f(A)^2 = f(A)$ che commuta con A e tale che $Af(A) = f(A)$.

Dunque, se $\sigma(A)$ è sconnesso, $\mathcal{A}$ possiede un idempotente e quindi una proprietà topologica dello spettro ne implica una algebrica dell'algebra.

10.1.9 Teorema della Mappa Spettrale Olomorfo *Se $\mathcal{A}$ è un'algebra di Banach con unità, $A \in \mathcal{A}$ e Γ una curva regolare che delimiti un dominio regolare Ω tale che $\sigma_{\mathcal{A}}(A) \subset \Omega$, allora per ogni funzione $f \in A(\Omega)$:*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(f(A)) = f(\sigma_{\mathcal{A}}(A))$$

Dimostrazione: Se $\mathcal{A}$ è commutativa, allora, per ogni $\varphi \in \sigma(\mathcal{A})$:

$$\varphi(f(A)) = -\frac{1}{2\pi i}\varphi\left(\oint_\Gamma f(\lambda)R(\lambda)d\lambda \right) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\varphi(A) - \lambda} d\lambda = f(\varphi(A))$$

[3] In tutti questi ragionamenti si assume il teorema di Jordan secondo il quale una curva siffatta divide in piano in due parti: una limitata ed una illimitata.

e quindi il teorema segue immediatamente dal lemma.

Se $\mathcal{A}$ non è commutativa, possiamo, per ogni $A \in \mathcal{A}$ considerare l'algebra commutativa massimale che contiene A (intersezione di tutte le sottoalgebre commutative $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ che contengano A). Una costruzione di $\mathcal{B}$ è la seguente: consideriamo l'algebra generata da A, I e dagli elementi

$$\{R_A(\lambda)\}_{\lambda \in P(A)}$$

Dato che i risolventi commutano fra loro, quest'algebra è commutativa e, per definizione, tale che

$$\sigma_{\mathcal{B}}(A) = \sigma_{\mathcal{A}}(A)$$

Quindi, dato che il teorema vale per $\mathcal{B}$, vale anche per $\mathcal{A}$.

QED

10.2 Calcolo funzionale continuo

Sia $\mathcal{A}$ una C*-algebra con unità I e A un elemento autoaggiunto $A = A^*$ di $\mathcal{A}$. Allora

$$\sigma(A) \subset \mathbb{R}$$

10.2.1 Teorema *Se $\mathcal{A}$ è una C*-sottoalgebra dell'algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ degli operatori continui su uno spazio di Hilbert allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- *Per ogni $x \in \mathcal{H}$: $(x, Ax) \geq 0$ (i.e. A è positivo).*
- *Esiste $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tale che $A = B^*B$.*
- *A è autoaggiunto e $\sigma(A) \subset [0, \infty]$.*

DIMOSTRAZIONE: (3) $\Rightarrow$ (2): se $A = A^*$ allora per ogni funzione $f \in C([0, \infty])$ possiamo usare il calcolo funzionale continuo: in particolare per $f(t) := +\sqrt{t}$, abbiamo che

$$f(A) \in \mathbf{A} \subset \mathcal{A}$$

e, avendo f valori reali: $f(A)^* = f(A)$ i.e. $f(A)^2) = f^2(A) = A$. Prendiamo allora semplicemente

$$B := f(A)$$

ottenendo $B = B^*$ e $B^*B = f(A)^2 = A$.

(2) $\Rightarrow$ (1) è ovvio: per ogni $x \in \mathcal{H}$:

$$(x, B^*Bx) = (Bx, Bx) \geq 0$$

(1) $\Rightarrow$ (3): Se $(x, Ax) \in \mathbb{R}$:

$$(x, Ax) = \overline{(x, Ax)} = (Ax, a)$$

quindi $A = A^*$ è autoaggiunto. Allora $\sigma(A) \in \mathbb{R}$ e, per $\lambda > 0$, vogliamo dimostrare che $(A + \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (il che implicherà che $(A + \lambda I)^{-1} \in \mathcal{A}$ avendo $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ la stessa unità I). Ma

$$\lambda(x, x) < (x, (A + \lambda I)x) \leq ||x|| \, ||(A + \lambda I)x||$$

e quindi $\lambda||x|| \leq ||(A + \lambda I)x||$ cioè $\ker(A + \lambda I) = 0$. Esiste dunque l'inverso di $(A + \lambda I)$ e quello che vogliamo dimostrare è che questo operatore è definito in tutto $\mathcal{H}$.

Di certo il suo dominio è denso, ed inoltre:

$$\mathrm{Dom}(A + \lambda I)^{-1} = \mathrm{Im}(A + \lambda I)$$

Infatti, dato che $\ker(A + \lambda I) = 0$:

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad (y, (A + \lambda I)x) = 0 \Rightarrow y = 0$$

Consideriamo ora $z \in \overline{\mathrm{im}(A + \lambda I)}$:

$$z = \lim_n z_n = \lim_z (A + \lambda I)x_n$$

Dunque $\{(A + \lambda I)x_n\}$ è di Cauchy, da cui

$$\lambda|x_n - x_m|| \leq ||(A + \lambda I)(x_n - x_m)|| < \varepsilon$$

cioè $\{x_n\}$ pure è di Cauchy, e deve quindi convergere a un $x \in \mathcal{H}$.

Questo dimostra che $z \in \mathrm{im}(A + \lambda I)$, che quindi risulta essere chiuso; dato che è anche denso in $\mathcal{H}$ segue che $\mathcal{H} = \mathrm{im}(A + \lambda I)$, e quindi l'operatore $(A + \lambda I)^{-1}$ è definito ovunque.

Ora si noti che

$$(A + \lambda I)^{-1}z = (A + \lambda I)^{-1}(A + \lambda I)x = x$$

e, dato che $\lambda||x|| \leq ||z||$:

$$||x|| \leq ||(A + \lambda I)^{-1}z||$$

Ne concludiamo che $(A + \lambda I)^{-1}$ è lineare e continuo su $\mathcal{H}$, ed è un inverso sinistro (e anche destro) di $A + \lambda I$, il che significa che $\lambda \in P(A)$.

Abbiamo quindi dimostrato che $\sigma(A) \subset [0, \infty)$.

QED

Osserviamo che se A è autoaggiunto, dato che $(x, Ax) \in \mathbb{R}$, per la disuguaglianza di Schwartz:

$$(x, Ax) \leq ||A||(x, x)$$

Ma vale ovviamente anche la disugualianza opposta. Quindi è naturale chiedersi quali a e b possano scegliersi in modo che

$$a(x, x) \leq (x, Ax) \leq b(x, x)$$

10.2.2 Proposizione *Se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è autoaggiunto allora una coppia di numeri reali (a, b) soddisfa alla*

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad a(x, x) \leq (x, Ax) \leq b(x, x)$$

se e solo se l'intervallo $[a, b]$ contiene lo spettro $\sigma(A)$.

DIMOSTRAZIONE: L'equivalenza (1) $\iff$ (3) del teorema precedente, con la scelta $A - aI$ e $bI - A$ fornisce immediatamente la tesi.

QED

In particolare si possono considerare $a = \min \sigma(A)$ e $b = \max \sigma(A)$.

10.2.3 Definizione *Se $A \in \mathcal{A}$ (C^*-algebra con unità I) allora (essendo A^* un operatore autoaggiunto e positivo), il* modulo *di A è l'operatore autoaggiunto*

$$|A| := \sqrt{A^*A} \in \mathcal{A}$$

Dato che $\ker |A| = \ker A$ (infatti $(|A|x, |A|x) = 0 \iff (x, |A|^2 x) = 0 \iff (x, A^*Ax) = 0$) si ha il

10.2.4 Teorema *Se $\mathcal{A}$ è una C^*-sottoalgebra di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ esiste un'unica isometria parziale V in $\mathcal{H}$ tale che* $\ker V = \ker A$ *e*

$$A = |A|V$$

Il seguente teorema è una generalizzazione della decomposizione polare delle matrici:

10.2.5 Teorema *Se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ esiste un'unica coppia (V, H) di operatori in $\mathcal{H}$, ove V è un'isometria parziale e H un operatore autoaggiunto positivo tali che* $\ker A = \ker V = \ker H$ *e*

$$A = VH$$

DIMOSTRAZIONE: Ovviamente poniamo $H = |A|$; dato che, per ogni $x \in \mathcal{H}$:

$$\big|\big|\ |A|x\big|\big|^2 = ||Ax||^2$$

si ha quindi che la corrispondenza $|A|x \longleftrightarrow Ax$ è una isometria e

$$(\operatorname{im}|A|)^\perp = \ker|A| = \ker A$$

(infatti $(\operatorname{im} B)^\perp = \ker B^*$ sempre). Possiamo dunque estendere la corrispondenza $|A|x \longleftrightarrow Ax$ ponendola zero su $\operatorname{im}|A|^\perp = \ker A$.

Infine vediamo l'unicità della decomposizione: se fosse $A = VH = V'H'$ sarebbe anche

$$A^* = H'V'^* \Rightarrow A^*A = H'^2 \Rightarrow H' = |A|$$

ed inoltre $A = V'H = V|A|$ da cui $V = V'$.

QED

Se $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ sono tali che

$$\forall i, k = 1, ..., n \quad A_iA_k = A_kA_i \qquad \text{e} \qquad A_iA_k^* = A_k^*A_i$$

allora la C*-algebra

$$\mathbf{A} = C^*\langle I, A_1, ..., A_n\rangle$$

generata da $\{I, A_1, ..., A_n\}$ è commutativa e quindi, per il teorema di Gelfand–Najmark, isomorfa alla C*-algebra $C(\sigma(\mathbf{A}))$, ove lo spazio $\sigma(\mathbf{A})$ è omeomorfo allo spettro congiunto $j\sigma(A_1, ..., A_n)$.

Notiamo che, in generale $j\sigma(A_1, ..., A_n) \not\subseteq \sigma(A_1) \times ... \times \sigma(A_n)$ (ad esempio per $A_1 = A$ e $A_2 = A^*$); un caso in cui vale invece il segno di $=$ è per $\mathcal{A} = C[0, 1^2]$ con $A_1 = f_1$ e $A_2 = f_2$, ove $f_1(s, t) = s$ e $f_2(s, t) = t$.

Possiamo comunque estendere la teoria svolta per un solo operatore A alla famiglia di operatori $\{A_1, ..., A_n\}$ ottenendo il calcolo funzionale continuo (la freccia diagonale nel seguente diagramma):

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r] \arrow[dr] & C(\sigma(\mathbf{A})) \arrow[d, "\varphi^*"] \\ & C(\sigma(A)) \end{tikzcd}$$

(dove $\varphi^*(f)(\lambda) = f(\varphi_\lambda)$) in più variabili:

$$f \longmapsto f(A_1, ..., A_n)$$

come l'unico *-isomorfismo isometrico $C(j\sigma(A_1, ..., A_n)) \cong \mathbf{A}$ tale che

- Se $f = 1$ allora $f(A_1, ..., A_n) = I$.
- Se $f(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \lambda_i$ allora $f(A_1, ..., A_n) = A_i$.

Osserviamo che, $A^*A = AA^*$ e $A = A_1 + iA_2$ se e solo se $A_1A_2 = A_2A_1$ e quindi $\sigma(A) = j\sigma(A_1, A_2)$, dato che

$$j\sigma(A_1, A_2) = \{(\varphi(A_1), \varphi(A_2))\}_{\varphi\in\sigma(\mathbf{A})} \longleftrightarrow \{\varphi(A) = \varphi(A_1) + i\varphi(A_2)\}_{\varphi\in\sigma(\mathbf{A})}$$

10.2.6 Definizione *Lo* spettro puntuale *di un operatore $A\in\mathcal{A}$ (C^*-algebra con unità) è l'insieme*

$$\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists x \neq 0 \ Ax = \lambda x\}$$

e lo spettro continuo *di A è l'insieme*

$$\sigma_c(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \ |\forall\varepsilon > 0 \exists x \ ||Ax - \lambda x|| < \varepsilon\}$$

Ovviamente

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$$

10.2.7 Esempio *Sia X uno spazio topologico separabile e consideriamo una misura atomica μ su X (o meglio sulla σ-algebra dei boreliani di X), cioè costruita prendendo una successione $\{x_n\} \subset X$ densa e ponendo*

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \delta_{x_n}$$

(ove δ_x è la misura di Dirac concentrata in $\{x\}$ e i c_n sono positivi e normalizzati in modo che $\sum_n c_n = 1$). Per il teorema di Riesz–Markov 9.2.2, esiste un funzionale F_n associato alla misura δ_{x_n} tale che

$$F_n(f) = \int_X f(x) d\delta_{x_n}(x)$$

Se consideriamo l'operatore di moltiplicazione per f: M_f allora

$$\overline{\sigma_p(M_f)} = \sigma(M_f)$$

10.2.8 Lemma *Se $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ (C^*-algebra con unità I) soddisfano alle*

$$\forall i, k = 1, ..., n \quad A_i A_k = A_k A_i \qquad e \qquad A_i A_k^* = A_k^* A_i$$

allora lo spettro congiunto $j\sigma(A_1, ..., A_n)$ è l'insieme

$$\left\{(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n \mid \forall \varepsilon > 0 \; \exists B \in \mathcal{A} \setminus 0 \quad \frac{||(A_k - \lambda_k)B||}{||B||} < \varepsilon\right\}$$

DIMOSTRAZIONE: Se $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ non appartiene a $j\sigma(A_1, ..., A_n)$ deve aversi

$$d(j\sigma(A_1, ..., A_n), \lambda) = \delta > 0$$

Per $z \in j\sigma(A_1, ..., A_n)$ consideriamo la funzione

$$f(z) := \frac{1}{||\lambda - z||} = \frac{1}{d(\lambda, z)}$$

Allora $f : j\sigma(A_1, ..., A_n) \longrightarrow \mathbb{C}$ è continua e $||f|| < 1/\delta$, quindi, se $C := f(A_1, ..., A_n)$ sta in $\mathbf{A}$ e

$$||\lambda - z||^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i - z_i|^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^n |(\lambda_i - z_i) f(z)|^2 = 1$$

Applicando il calcolo funzionale continuo:

$$\sum_{i=1}^n C^*(A_i - \lambda_i I)^*(A_i - \lambda_i I)C = I$$

Dunque, se $B \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} B^*B &= \sum_{i=1}^n (CB)^*(A_i - \lambda_i I)^*(A_i - \lambda_i I)CB \\ &= \sum_{i=1}^n ((A_i \lambda_i)B)^* C^* C(A_i - \lambda_i I)B \end{aligned}$$

(dato che C commuta con gli A_i per definizione). Quindi

$$\begin{aligned} ||B^*B|| = ||B||^2 &\le \sum_{i=1}^n ||C(A_i - \lambda_i I)B||^2 = ||C|| \sum_{i=1}^n ||(A_i - \lambda_i I)B||^2 \\ &= \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^n ||(A_i - \lambda_i I)B||^2 \end{aligned}$$

Questo vale per ogni B e $\lambda \notin j\sigma(A_1, ..., A_n)$, perciò l'insieme

$$\{(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n \mid \forall \varepsilon > 0 \exists B \subset \mathcal{A} \setminus 0 \ ||(A_k - \lambda_k)B|| < \varepsilon ||B||\}$$

è contenuto in $j\sigma(A_1, ..., A_n)$.

Viceversa, sia $\lambda \in j\sigma(A_1, ..., A_n)$; allora, se $g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua e tale che

$$\forall t \geq \varepsilon \quad g(t) = 0 \qquad \text{e} \qquad g(0) = 1$$

abbiamo che la funzione

$$f(z) := g(||\lambda - z||)$$

verifica la $f(A_1, ..., A_n) \in \mathcal{A} \setminus 0$. Dunque

$$|(z_i - \lambda_i)f(z)| < \varepsilon \implies ||(A_i - \lambda_i I)B|| \leq \varepsilon ||B||$$

se $B = f(A_1, ..., A_n)$ (si rammenti che $||f|| = 1$).

QED

10.2.9 Teorema *Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ è una C^*-sottoalgebra e $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ sono tali che*

$$\forall i, k = 1, ..., n \quad A_i A_k = A_k A_i \qquad e \qquad A_i A_k^* = A_k^* A_i$$

allora lo spettro congiunto $j\sigma(A_1, ..., A_n)$ è

$$\left\{(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n \mid \exists \{x_n\} \subset \mathcal{H}_1 \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} ||A_k x_n - \lambda_k x_n|| = 0\right\}$$

(ove $\mathcal{H}_1 = \{x \in \mathcal{H} \mid ||x|| = 1\}$).

DIMOSTRAZIONE: Per il lemma sappiamo che

$$\lambda \in j\sigma(A_1, ..., A_n) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in \mathcal{A} \quad ||B|| = 1 \text{ e } ||(A_k - \lambda_k)B|| \leq \varepsilon$$

Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ allora $||B|| = \sup_{x \in \mathcal{H}_1} ||Bx||$ quindi

$$||(A_k - \lambda_k I)Bx|| \leq \varepsilon$$

e, per ogni $\delta > 0$ esiste un $x_\delta \in \mathcal{H}_1$ per il quale

$$||Bx_\delta|| > 1 - \delta$$

Dunque, per

$$y := \frac{Bx_\delta}{||Bx_\delta||}$$

troviamo che
$$||(A_k - \lambda_k I)y|| \leq \frac{\varepsilon}{||Bx_\delta||} < \frac{\varepsilon}{1-\delta}$$
ovvero
$$\lambda \in j\sigma(A_1, ..., A_n) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad ||(A_k - \lambda_k)x|| \leq \varepsilon$$
Per ogni n possiamo quindi scegliere un x_n che soddisfi la relazione precedente per un ε_n arbitrario.

QED

Osserviamo che, se esiste $x \in \mathcal{H} \setminus 0$ tale che, per ogni k, $(A_k - \lambda_k I)x = 0$, allora
$$\mathcal{K} := \bigcap_k \ker(A_k - \lambda_k I) \neq 0$$
Se la dimensione di $\mathcal{H}$ non è finita, possiamo scegliere gli $\{x_n\}$ del teorema precedente in modo che formino una base ortonormale; nella costruzione si considerano le ε_n (tendenti a zero) e le $g_n : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che
$$\forall z \quad \varepsilon_n < ||z - \lambda|| \implies g(z) = 0 \qquad \text{e} \qquad g_n(0) = 1$$
ma sarebbe lo stesso porre, per $n \neq m$:
$$\overline{g_n(z)g_m(z)} = 0$$
con $||g_n|| = 1$, in modo che $B_n^* B_m = 0$ e quindi:
$$n \neq m \implies (B_n x, B_m x) = 0$$
Questo è possibile perché λ non è un punto isolato dello spettro congiunto ed i punti isolati dello spettro congiunto fanno parte in realtà della sua componente puntuale, come dimostreremo ora.

10.2.10 Definizione *Se A è normale in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, il suo* spettro essenziale *è l'insieme*
$$\sigma_{ess}(A) := \{\lambda \in \sigma(A) \mid \lambda \textit{ punto isolato e } \dim\ker(A - \lambda I) < \infty\}$$

10.2.11 Proposizione *Se λ è un punto isolato in $\sigma(A)$ allora $\lambda \in \sigma_p(A)$.*

DIMOSTRAZIONE: Ovviamente $\{\lambda\}$ è un chiuso (essendo lo spettro uno spazio di Hausdorff) ed aperto (essendo un punto isolato), il che vuol dire che la sua funzione caratteristica $\chi_{\{x\}}$ è continua. Quindi $\chi_{\{x\}}(A) \in \mathbf{A}$ se e solo se $\chi_{\{x\}}$ è un idempotente autoaggiunto E nell'algebra $C(\sigma(A))$. Se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è normale allora

E è un proiettore sul sottospazio $\ker(A-\lambda I)$; infatti $(z-\lambda)\chi_{\{x\}}=0$ e quindi $(A-\lambda I)E=0$.

Applicando il calcolo funzionale continuo si ottiene (ricordando che se $x\in\ker(A-\lambda I)$ allora $A^*x=\overline{\lambda}X$):

$$\forall p\in\mathbb{C}[x,y]\quad p(A,A^*)(x)=p(\lambda,\overline{\lambda})(x)$$

Ma, dato che per il teorema di Stone–Weierstrass 9.2.9 esiste una successione $\{p_n\}$ di polinomi che approssimano la funzione continua $\chi_{\{x\}}$, si ha

$$||p_n(A)-E||\longrightarrow 0$$

e, dato che $p_n(A)X\longrightarrow Ex$, $p_n(\lambda)x\longrightarrow x$ e $p_n(A)x=p_n(\lambda)x$, ne viene $Ex=x$. Quindi l'immagine di E è $\ker(A-\lambda I)$.

QED

Lo stesso ragionamento può farsi per un numero finito qualsiasi di operatori $A_1,...,A_n$, che commutino con i loro aggiunti: in questo caso $\chi_{\{x\}}$ corrisponde ad un operatore E la cui immagine è $\bigcap_i\ker(A_i-\lambda_i I)$. Dunque si ha il

10.2.12 Teorema (Weyl)

$$\sigma_{ess}(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\exists\{x_n\}\ \textit{base ortonormale}\ ||Ax_n-\lambda x_n||\longrightarrow 0\}$$

10.3 Calcolo funzionale boreliano

Prendiamo spunto da un esempio: sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert di dimensione finita (spazio euclideo); allora se A è normale, per ogni $\lambda\in\mathbb{C}$ tale che $A^*x=\overline{\lambda}x$:

$$\ker(A-\lambda I)^\perp\subset\mathcal{N}(A-\lambda I)^\perp$$

Se P_λ è l'operatore di proiezione $E_{\ker(A-\lambda I)}$ si ha che

- $\sum_{\lambda\in\sigma(A)}P_\lambda=I$.
- Se $\lambda\neq\lambda'$: $P_\lambda P_{\lambda'}=0$.
- $A=\sum_{\lambda\in\sigma(A)}\lambda P_\lambda$.

Questo non è che un altro modo di esprimere la nota proprietà di diagonalizzazione delle matrici hermitiane. Il calcolo delle funzioni su tali matrici si riduce a quello sui suoi autovalori:

$$\forall p\in\mathbb{C}[z]\quad p(A)=\sum p(\lambda)P_\lambda$$

Ad esempio se $f|_{\sigma(A)} = \chi_{\{\lambda\}}$ allora $P_\lambda = f(A)$.

Se A è autoaggiunto allora il suo spettro è reale e possiamo definire

$$E(\lambda) := \sum_{\lambda' \leq \lambda} P_{\lambda'}$$

La proprietà (3) si esprime allora come

$$A = \int \lambda dE(\lambda)$$

ove la misura E è definita sugli intervalli come

$$E(\lambda, \lambda'] := E(\lambda) - E(\lambda')$$

Ovviamente

$$E(\lambda) = \chi_{(-\infty,\lambda]}(A)$$

Questa funzione è continua *solo se la dimensione dello spazio $\mathcal{H}$ è finita.*

Nel caso generale, che è quello che ci interessa, non possiamo quindi usare il calcolo funzionale che abbiamo fin qui sviluppato: dobbiamo perciò cercare di estenderlo ad una classe di funzioni più vasta di quelle continue.

Consideriamo quindi uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ ed un operatore A continuo e normale su $\mathcal{H}$; allora esiste un isomorfismo isometrico

$$C(\sigma(A)) \xrightarrow{\cong} \mathbf{A} = C^*\langle A, I\rangle$$

Ora osserviamo che, per il teorema di Tietze 2.3.4, gli elementi di $C(\sigma(A))$ si ottengono da quelli di $C_o(\mathbb{C})$ (funzioni continue e limitate su $\mathbb{C}$) per restrizione a $\sigma(A)$, e quindi che il calcolo funzionale continuo induce una mappa (che non è un isomorfismo):

$$C_o(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{A}$$

al solito ponendo $f \longmapsto f(A)$. Quindi, dare un operatore normale è equivalente ad assegnare un morfismo di C*-algebre (un tale morfismo verrà in sèguito chiamato *rappresentazione della C*-algebra $\mathcal{A}$*)

$$\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

(con $\mathcal{A} := C_o(\mathbb{C})$) il cui nucleo è

$$\ker \pi = \{f \in C_o(\mathbb{C}) \mid f|_{\sigma(A)} = 0\}$$

Infatti, data π, se $f_0 \in C_o(\mathbb{C})$ è tale che $f_0(\lambda) = \lambda$ su $\sigma(A)$, e se

$$A := \pi(f_0)$$

si trova che, per ogni altra $f \in C_o(\mathbb{C})$ con $f|_{\sigma(A)} \in C(\sigma(A))$ si ha

$$\pi(f) = f(A)$$

(questo è vero ovviamente per f costante, e quindi, per linearità e moltiplicatività, sui polinomi ed infine, per continuità, sulle funzioni continue qualsiasi).

Osserviamo che, se $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sono operatori normali allora

$$\sigma(A_1) = \sigma(A_2) \iff \ker \pi_1 = \ker \pi_2$$

10.3.1 Definizione *Due operatori A_1 e A_2 si dicono* unitariamente equivalenti*, e si scrive $A_1 \cong A_2$, se esiste un operatore unitario U in $\mathcal{H}$ tale che*

$$UA_1U^{-1} = A_2 \qquad e \qquad UA_2U^{-1} = A_1$$

È immediato verificare che se $A_1 \cong A_2$ allora $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$ e, di più, $\sigma_p(A_1) = \sigma_p(A_2)$.

Torniamo ora alla nostra rappresentazione

$$\pi(f) = f(A)$$

Se $A_1 \cong A_2$ le rappresentazioni associate si dicono *unitariamente equivalenti* e si scrive $\pi_1 \cong \pi_2$: ciò significa che esiste un operatore unitario U in $\mathcal{H}$ tale che

$$U\pi_1(f) = \pi_2(f)U$$

Inoltre possiamo definire

$$(\pi_1, \pi_2) := \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid \forall f \in C_o(\mathbb{C})\ T\pi_1(f) = \pi_2(f)T\}$$

Gli elementi di questo insieme si dicono *operatori di allacciamento*. Dato che due rappresentazioni equivalenti hanno gli stessi nuclei, segue che gli spettri degli operatori associati sono equivalenti e, di più, gli operatori sono unitariamente equivalenti.

Vale anche il viceversa: se $UA_1U^{-1} = A_2$ allora

$$UA_1^nU^{-1} = A_2^n \Rightarrow Up(A_1)U^{-1} = p(A_2)$$

con $p \in \mathbb{C}[z]$. Di nuovo per continuità e per il teorema di Stone–Weierstrass 9.2.9:

$$Uf(A_1)U^{-1} = f(A_2)$$

per ogni funzione continua sullo spettro di A_1 (che poi coincide con lo spettro di A_2). Quindi

$$U\pi_1(f)U^{-1} = \pi_2(f)$$

In questo modo lo studio degli operatori e delle rappresentazioni si equivale: in effetti, rappresentare un'algebra vuol dire proprio presentarla concretamente come l'algebra degli operatori di qualche spazio.

Studiamo ora le rappresentazioni di $\mathcal{A} = C(X)$, ove X è uno spazio topologico di Hausdorff compatto in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$:

$$\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

Vogliamo associare a π delle misure (boreliane) su X.

Preliminarmente osserviamo che, per $x, y \in \mathcal{H}$, la mappa

$$f \longmapsto (x, \pi(f)y)$$

è un funzionale lineare su $\mathcal{A}$, continuo in virtù della

$$|(x, \pi(f)y)| \leq ||x||\ ||y||\ ||\pi(f)|| \leq ||x||\ ||y||\ ||f||$$

Allora, per il teorema di Riesz–Markov 9.2.2:

$$F \in C(X)^* \iff F(f) = \int_X f(t) d\mu(t)$$

ove μ è una misura boreliana complessa regolare e limitata (cioè è una combinazione lineare finita di misure regolari di probabilità).

Quindi

$$(x, \pi(f)y) = \int_X f(t) d\mu_{x,y}(t)$$

10.3.2 Definizione *Gli elementi della famiglia*

$$\{\mu_{x,y}\}_{x,y \in \mathcal{H}}$$

si dicono misure spettrali *associate alla rappresentazione* π.

Consideriamo ora lo spazio $\mathcal{B}(X)$ delle funzioni boreliane limitate su X a valori complessi: sappiamo che, con la norma

$$||f|| := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

è un'algebra di Banach[4]: ovviamente l'involuzione

$$f^*(x) := \overline{f(x)}$$

la rende una C*-algebra commutativa. Per il teorema di Riesz–Markov esiste l'estensione

$$\widetilde{\pi} : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

[4] Se $\{f_n\}$ sono boreliane ed equilimitate e convergenti puntualmente in X il loro limite è una funzione boreliana limitata.

(tale che $\widetilde{\pi}|_{C(X)} = \pi$). Infatti, se μ è la misura che corrisponde al funzionale F per mezzo del teorema di Riesz–Markov, allora l'integrale

$$\int_X f(t)d\mu(t)$$

è definito sugli elementi di $\mathcal{B}(X)$ e quindi per ogni funzione boreliana f ed ogni misura spettrale $\mu_{x,y}$ ha senso l'espressione

$$\int_X f(t)d\mu_{x,y}(t)$$

Si tratta di una funzione sesquilineare nelle x e y, dato che

$$\mu_{x,ay_1+by_2} = a\mu_{x,y_1} + b\mu_{x,y_2} \qquad \text{e} \qquad \mu_{ax_1+bx_2,y} = \overline{a}\mu_{y_1,x} + \overline{b}\mu_{x_2,y}$$

Dato che, per definizione, $||\mu| := ||F||$, questa forma sesquilineare è limitata ($||\mu|| \leq ||x||\,||y||$), deve esistere $\widetilde{\pi}$ tale che

$$\int_X f(t)d\mu_{x,y}(t) = (x, \widetilde{\pi}(f)y)$$

Questa $\widetilde{\pi}$ è ovviamente lineare in f, ed è uno *-morfismo, dato che

$$(x, \widetilde{\pi}(f)y) = \int_X f(t)d\mu_{x,y}(t) = \int_X f(t)d\overline{\mu_{y,x}}(t) = \overline{(y, \widetilde{\pi}(f)x)}$$

Effettivamente è proprio una rappresentazione, avendosi

$$\pi(fg) = \pi(f)\pi(g)$$

sulle funzioni continue, e quindi

$$\int_X f(t)g(t)d\mu_{x,y}(t) = (x, \pi(fg)y) = (x, \pi(f)\pi(g)y) = \int_X f(t)d\mu_{x,\pi(g)y}(t)$$

da cui $\mu_{x,\pi(g)y)} = g\mu_{x,y}$; integrando quindi una funzione boreliana rispetto a questa misura si trova

$$(x, \widetilde{\pi}(fg)y) = (x, \widetilde{\pi}(f)\widetilde{\pi}(g)y)$$

per ogni boreliana f ed ogni funzione continua g, vale a dire

$$\widetilde{\pi}(fg) = \widetilde{\pi}(f)\pi(g)$$

Ma inoltre

$$(x, \widetilde{\pi}(f)\widetilde{\pi}(g)y) = (\widetilde{\pi}(f)^* x, \pi(g)y) = \int_X g(t) d\mu_{\widetilde{\pi}(f)^* x, y}(t)$$

Ne concludiamo che

$$\int_X f(t)g(t) d\mu_{x,y}(t) = \int_X g(t) d\mu_{\widetilde{\pi}(f)^* x, y}(t)$$

e quindi $\mu_{\widetilde{\pi}(f)^* x, y} = f\mu_{x,y}$. Di nuovo integrando sulle boreliane queste misure si ottiene

$$\widetilde{\pi}(fg) = \widetilde{\pi}(f)\widetilde{\pi}(g)$$

stavolta con $f, g \in \mathcal{B}(X)$.

Questo conclude la verifica che $\widetilde{\pi}$ è una rappresentazione della C*-algebra $\mathcal{B}(X)$: si noti che $||\widetilde{\pi}(f)| \leq ||f||$.

10.3.3 Teorema *Se $\{f_n\}$ è una successione in $\mathcal{B}(X)$ equilimitata e convergente puntualmente, allora la successione $\widetilde{\pi}(f_n)$ converge fortemente.*

Dimostrazione: Si tratta di applicare il teorema della convergenza dominata di Lebesgue 4.3.12: basta infatti dimostrare che, per ogni $x \in X$:

$$||\widetilde{\pi}(f_n)(x) - \widetilde{\pi}(f)(x)||^2 \longrightarrow 0$$

ove $f = \lim f_n$. Ora notiamo che

$$\begin{aligned} ||\widetilde{\pi}(f_n)(x) - \widetilde{\pi}(f)(x)||^2 &= ||\widetilde{\pi}(f_n - f)(x)||^2 = (\widetilde{\pi}(f_n - g)(x), \widetilde{\pi}(f_n - f)(x)) \\ &= (x, \widetilde{\pi}((f_n - f)^*(f_n - f))(x)) = (x, \widetilde{\pi}(|f_n - f|^2)(x)) \end{aligned}$$

Ma $|f_n - f|^2$ è equilimitata per ipotesi e tende a zero puntualmente: quindi il teorema della convergenza dominata implica che

$$\lim_n \int_X |(f_n - f)(t)|^2 d\mu_{x,y}(t) = \int_X \lim_n |(f_n - f)(t)|^2 d\mu_{x,y}(t) = 0$$

QED

Consideriamo di nuovo la rappresentazione π associata all'operatore normale A; sappiamo che

$$\pi(C(X)) = \mathbf{A}$$

è naturale chiedersi cosa sia $\pi(\mathcal{B}(X))$: vedremo che questo insieme è contenuto nella chiusura forte dell'algebra $\mathbf{A}$ e per dimostrarlo ci occorrerà un notevole risultato, il teorema di densità di von Neumann, che verrà dimostrato in séguito.

10.3.4 Definizione *Se $S \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è un sottoinsieme qualsiasi, il* commutante *di S (o* centralizzante *di S) è l'insieme*

$$S' := \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid \forall A \in S \quad TA = AT\}$$

Evidentemente il commutante S' è un'algebra che contiene l'unità I.

10.3.5 Esempio *Se consideriamo un operatore $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tale che*

$$T\pi(f) = \pi(f)T$$

possiamo esprimerlo scrivendo $T \in \mathbf{A}'$.

10.3.6 Proposizione *Il commutante S' di un insieme è un'algebra chiusa nella topologia debole di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

DIMOSTRAZIONE: Ricordiamo qualche proprietà della topologia debole su $\mathcal{B}(\mathcal{H})$: se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $x, y \in \mathcal{H}$ i funzionali lineari

$$f_{x,y}(A) := \langle f_{x,y}, A \rangle$$

sono continui ($||f_{x,y}|| \leq ||x|| \, ||y||$), quindi l'insieme

$$\mathcal{M}_0 := \{f_{x,y}\}_{x,y \in \mathcal{H}}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{B}(\mathcal{H})^*$. Ricordiamo che la topologia debole su $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ è definita in modo equivalente dalle seguenti proposizioni:

- è la più debole topologia su $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ per la quale gli elementi di $\mathcal{M}_0$ sono funzioni continue.
- è la $(\sigma(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{M}_0)$-topologia.
- è la topologia definita dalle seminorme

$$p_{x-1,\dots,x_n}(A) := \left| \sum_i (x_i, Ax_i) \right|$$

Torniamo ora alla dimostrazione della proposizione: $T \in S'$ se e solo se, per ogni $A \in S$, $AT = TA$, cioè

$$\forall x, y \in X \forall A \in S \quad (x, TAy) = (x, ATy) = (A^* x, Ty)$$

se e solo se $(x, TAy) - (A^* x, Ty) \in \mathcal{M}_0$, il che equivale a

$$T \in \bigcap_{x,y \in \mathcal{H}; A \in S} \ker(f_{x,Ay} - f_{A^* x,y})$$

il che significa esattamente che S' è debolmente chiusa.

QED

Notiamo che, in generale, S' non è una *-algebra.

10.3.7 Definizione *Una *-sottoalgebra* $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *si dice* non degenere *se*

$$\forall x \in \mathcal{H} \qquad \mathcal{A}x = 0 \implies x = 0$$

Evidentemente

$$\mathcal{A} \text{ è non degenere } \iff (\mathcal{A}\mathcal{H})^\perp = 0$$

Ovviamente se $I \in \mathcal{A}$ allora $\mathcal{A}$ è non degenere.

10.3.8 Proposizione *Se* $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *è una *-sottoalgebra e* $\mathcal{N} := \{x \in \mathcal{H} \mid \mathcal{A}x = 0\}$ *allora* $\mathcal{A}|_{\mathcal{N}^\perp}$ *è non degenere.*

DIMOSTRAZIONE: Basta osservare che $\mathcal{A}(\mathcal{N}^\perp) \subset \mathcal{N}^\perp$, dato che

$$(Ax, y) = (x, A^*y) = 0 \Rightarrow Ax \perp \mathcal{N}$$

QED

Possiamo ora enunciare il

10.3.9 Teorema di Densità (VON NEUMANN) *Se* $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *è una *-sottoalgebra non degenere allora*

$$\overline{\mathcal{A}}^f = \mathcal{A}''$$

(la chiusura forte di $\mathcal{A}$ *è il doppio commutante di* $\mathcal{A}$ *stesso).*

La dimostrazione verrà data in séguito (cfr. teorema 11.4.1: qui osserviamo semplicemente che, con questo risultato a disposizione, possiamo dimostrare che

$$\pi(\mathcal{B}(X)) \subset \overline{\mathbf{A}}^f$$

Questo segue direttamente dal teorema di densità e dal risultato seguente:

10.3.10 Lemma *Se* $f \in \mathcal{B}(X)$ *e* $T \in \mathbf{A}'$ *allora*

$$\widetilde{\pi}(f)T = T\widetilde{\pi}(f)$$

DIMOSTRAZIONE: Per ogni $T \in \mathbf{A}'$:

$$\pi(f)T = T\pi(f) \implies (y, \pi(f)Tx) = (y, T\pi(f)x) = (T^*y, \pi(f)x)$$

cioè $\mu_{y,Tx} = \mu_{T^*y,x}$.

QED

Questo lemma implica che $\pi(\mathcal{B}(X)) \subset \mathbf{A}''$ che è proprio $\overline{\mathbf{A}}^f$ per il teorema di densità.

Osserviamo una conseguenza del teorema di densità di von Neumann:

10.3.11 Corollario *Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una *-sottoalgebra non degenere allora*

$$\overline{\mathcal{A}}^f = \overline{\mathcal{A}}^d$$

(la chiusura forte e la chiusura debole di $\mathcal{A}$ coincidono).

DIMOSTRAZIONE: Infatti si ha sempre la

$$\overline{\mathcal{A}}^f \subset \overline{\mathcal{A}}^d$$

Ma $\mathcal{A}'$ è debolmente chiusa (per ogni $\mathcal{A}$) e quindi il teorema di densità implica che

$$\overline{\mathcal{A}}^f \subset \overline{\mathcal{A}}^d \subset \mathcal{A}'' = \overline{\mathcal{A}}^f$$

QED

La discussione precedente e l'esempio dell'algebra $\mathbf{A}$ rendono naturale la seguente definizione:

10.3.12 Definizione *Una *-sottoalgebra debolmente chiusa $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ che possieda l'unità I si dice* algebra di von Neumann.

Per il teorema di densità, una caratterizzazione immediata è

$$\mathcal{A} \text{ di von Neumann} \iff \mathcal{A} = \mathcal{A}''$$

o, come si dice, le algebre di von Neumann sono quelle che verificano la proprietà del doppio commutante.

10.3.13 Esempio *Le algebre di matrici $M_n(\mathbb{C})$ sono algebre di von Neumann: in effetti sappiamo che l'algebra $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ è semplice (cfr. teorema 5.5.14) e che quindi il suo commutante $\mathcal{A}'$ è ridotto alle sole matrici scalari (multipli della matrice identità):*

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}) \quad AX = XA \implies \exists a \in \mathbb{C} \quad X = aI$$

Questo stesso enunciato ci dice che $(\mathcal{A}')' = \mathcal{A}$ (le matrici che commutano con le matrici scalari sono tutte le matrici).

10.4 Misure spettrali

Consideriamo un operatore normale A su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, a l'algebra $\mathbf{A} = C^*\langle A, I\rangle = \{\varphi(A)\}_{\varphi \in C(\sigma(A))}$. Ovviamente, se f è una funzione boreliana in $\mathcal{H}$ (essendo uno spazio topologico è anche uno spazio misurabile rispetto alla σ-algebra di Borel) allora $f(A) \in \mathbf{A}''$.

Osserviamo che, se Δ è un boreliano in $\mathbb{C}$ allora χ_Δ è boreliana e quindi l'operatore $\chi_\Delta(A)$, avendo valori in $\mathbb{R}$ è autoaggiunto. In particolare:

$$\chi_\Delta^*\chi_\Delta = \chi_\Delta$$

quindi $E_\Delta := \chi_\Delta(A)$ è un idempotente tale che

$$E_\Delta^* E_\Delta = E_\Delta$$

e pertanto è un proiettore; dunque esiste un sottospazio chiuso $\mathcal{H}_\Delta \subset \mathcal{H}$ tale che $E_\Delta = E_{\mathcal{H}_\Delta}$.

Per definizione, E_Δ commuta con tutte le funzioni di A, ed in particolare $AE_\Delta = E_\Delta A$, da cui segue che $A\mathcal{H}_\Delta \subset \mathcal{H}_\Delta$; quindi, dato che $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\Delta \oplus \mathcal{H}_\Delta^\perp$ A si decompone in somma diretta di operatori.

Osserviamo tre proprietà interessanti, anche se immediate, della mappa $\Delta \longmapsto E_\Delta$:

- $E_\mathbb{C} = I$ (dato che $\chi_\mathbb{C} = 1$).
- Se Δ_1, Δ_2 sono boreliani in $\mathbb{C}$ allora $E_{\Delta 1\cap\Delta_2} = E_{\Delta_1}E_{\Delta_2}$.
- Se $\{\Delta_n\}$ è una famiglia numerabile di boreliani disgiunti allora

$$E_{\bigcup_n \Delta_n} = \sum_n E_{\Delta_n}$$

(La (2) segue da $\chi_A\chi_B = \chi_{A\cap B}$ e la (3) dal fatto che le $\{\chi_{\Delta_n}\}$ sono equilimitate). Quindi la mappa

$$E : \{\text{Boreliani di } \mathbb{C}\} \longrightarrow \{\text{Proiettori di } \mathcal{H}\}$$

ha le proprietà di una misura, con la differenza che non assume valori in $\mathbb{C}$ ma in uno spazio di Hilbert.

10.4.1 Definizione *Una funzione E che soddisfi le* (1)–(3) *si dice* misura spettrale *associata all'operatore A.*

Osserviamo che $\sigma(A|_{\mathcal{H}_\Delta}) \subset \overline{\sigma(A)\cap\Delta}$. Infatti la restrizione è uno *-omomorfismo, quindi

$$\sigma(A|_N) \subset \sigma(A)$$

per ogni sottospazio N; se poi $g|_\Delta = 0$ allora $g(A)\chi_\Delta(A) = 0$ e, per g continua:

$$g(A|_{\mathcal{H}_\Delta}) = g(A)|_{\mathcal{H}_\Delta}$$

Quindi $\sigma(A|_{\mathcal{H}_\Delta}) \subset \sigma(A) \cap \overline{\Delta}$. In realtà l'inclusione non è stretta, ma si ha $\sigma(A|_{\mathcal{H}_\Delta}) \subset \overline{\sigma(A)\cap\Delta}$: la dimostrazione è però molto più complicata.

10.4.2 Teorema $\chi_{\{\lambda\}}(A) = E_{\{\lambda\}} = E_{\{x \mid Ax=\lambda x\}}$.

DIMOSTRAZIONE: Se $x \in \ker(A - \lambda I)$ allora $A^*x = \overline{\lambda}x$ (dato che A è normale) e quindi per ogni funzione continua f:

$$f(A)x = f(\lambda)x$$

In particolare, se $f(\lambda) = 1$ si trova $f(A)x = x$.

Consideriamo le funzioni

$$g_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \text{ oppure } t > \frac{1}{n} \\ \frac{1-t}{n} & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

e quindi le

$$f_n(z) = g_n(|z - \lambda|)$$

che sono equilimitate su $\sigma(A)$ e tendenti a zero per $z \neq \lambda$, mentre sono ovviamente identicamente 1 se $z = \lambda$. Dunque la successione $\{f_n\}$ converge a $\chi_{\{\lambda\}}$, i.e.

$$f_n(A) \longrightarrow E_{\{\lambda\}}$$

Ma $f_n(A)x = x$ e quindi $E_{\{\lambda\}}x = x$:

$$\ker(A - \lambda I) \subset \mathcal{H}_{\{\lambda\}}$$

Inoltre $(z - \lambda)\chi_{\{\lambda\}}(z) = 0$: allora applicando il calcolo boreliano si trova che

$$(A - \lambda I)E_{\{\lambda\}} = 0$$

ovvero

$$\mathcal{H}_{\{\lambda\}} \subset \ker(A - \lambda I)$$

QED

Dunque il calcolo funzionale boreliano in un punto fornisce gli operatori

$$E_{\{x \mid Ax=\lambda x\}}$$

e pertanto una funzione f che si annulli su A deve essere della forma

$$f = \sum_n c_n \chi_{\{\lambda_n\}}$$

(con $\lambda_n \notin \sigma_p(A)$).

10.4.3 Corollario *Se T è un operatore su $\mathcal{H}$ tale che*

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad 0 \leq (x, Tx) \leq (x, x)$$

allora T è autoaggiunto e $0 \leq T \leq I$, il suo spettro è quindi contenuto nell'intervallo $[0, 1]$ e si ha la convergenza forte:

$$T^n \xrightarrow{f} E_{\ker(I-T)}$$

Dimostrazione: Se $t \in [0, 1]$, $\{t^n\}$ è equilimitata e convergente a zero, per cui $t^n \longrightarrow \chi_{\{1\}}(t)$.

QED

10.4.4 Teorema *Se definiamo*

$$E \wedge F := E_{E\mathcal{H} \cap F\mathcal{H}}$$

allora

$$E \wedge F = \operatorname*{s\text{-}lim}_{n \longrightarrow \infty} (EF)^n = \operatorname*{s\text{-}lim}_{n \longrightarrow \infty} (FE)^n$$

*(*s-lim *indica il limite nella topologia forte).*

Dimostrazione: Intanto

$$(*) \qquad (EFE)^n \xrightarrow{f} E \wedge F$$

Infatti, per $T = EFE = (FE)^*(FE)$ si ha $0 < T \leq I$ (dato che $(x, Tx) = ||FEx||^2 \leq ||x||^2$) e, per il corollario precedente:

$$\lim T^n = E_{\ker(I-T)}$$

Allora, se $x \in (E \wedge F)\mathcal{H}$ segue che $EFEx = x$ e quindi $Ex = x$, ovvero $x \in \operatorname{im} E$ da cui

$$||x|| = ||EFEx|| \leq ||Fx|| \leq ||x||$$

cioè, $Fx = EFx = x$, dunque $x \in \operatorname{im} F$. Ma era anche $x \in \operatorname{im} E$, quindi $x \in (E \wedge F)\mathcal{H}$. Così abbiamo che

$$x \in (E \wedge F)\mathcal{H} \iff EFEx = x$$

e la (*) segue. Ma $Fx_n \longrightarrow Fx$ se $x_n \longrightarrow x$ e quindi si ha il teorema.

QED

10.4.5 Corollario *Se $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è un operatore unitario (e quindi normale) con $\sigma(U) \subset \mathbb{T}$ (circonferenza unitaria del piano complesso) si ha che, se $\chi_{\{1\}}(U) = E_{\ker(I-U)} =: E_0$:*

$$E_0 = \operatorname*{s-lim}_{N \longrightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} U^n = \operatorname*{s-lim}_{N \longrightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N} U^n$$

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo la funzione

$$f_N(z) := \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} z^n = \left(\frac{1 - z^{N+1}}{1-z} \right) \frac{1}{N+1}$$

Allora, per $z \neq 1$:

$$\lim_N f_N(z) = \lim_N \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} z^n = \lim_N \left(\frac{1 - z^{N+1}}{1-z} \right) \frac{1}{N+1} = 0$$

dato che

$$\left| \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} z^n \right| \leq 1$$

e, essendo $f_N(1) = 1$:

$$\left| f_N(z) \right| \leq \frac{1}{N+1} \frac{2}{|1-z|}$$

Ma la famiglia $\{f_N\}$ è equilimitata, quindi

$$\operatorname*{s-lim}_N f_N(U) = E_0$$

Analogamente

$$\operatorname*{s-lim}_N \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} U^{*n} = E_{\ker(I-U^*)} = E_0$$

Quindi

$$\frac{1}{2}(E_0 + E_0) = E_0 = \operatorname*{s-lim}_N \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} U^n + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} U^{-n} \right)$$
$$= \operatorname*{s-lim}_N \frac{1}{2N} \left(\frac{1}{2N} \sum_{n=_N}^{N} U^n \right)$$

QED

10.4.6 Corollario *Se G è un sottogruppo del gruppo $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ degli operatori unitari, allora*

$$E_0 := E_{\{x \mid \forall U \in G\ Ux = x\}} \in \overline{\mathrm{Conv}(G)}^f$$

(chiusura forte dell'inviluppo convesso di G).

DIMOSTRAZIONE: Si ha che

$$E_0 = \bigwedge_{U \in G} E_{\{x \mid Ux = x\}} = \bigwedge_{U \in G} \operatorname*{s-lim}_{N \longrightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} U^n$$

Ad esempio, nel caso di due elementi $U_1, U_2 \in G$ si ha

$$E_{\ker(I-U_1)} \wedge E_{\ker(I-U_2)} = \operatorname*{s-lim}_{n} (E_0(U_1)E_0(U_2))^n = \operatorname*{s-lim}_{N} \frac{1}{2N_1 2N_2} \sum_{\substack{n_1=-N_1 \\ n_2=-N_2}}^{\substack{N_1 \\ N_2}} U_1^{n_1} U_2^{n_2}$$

La combinazione lineare sotto il segno di limite è convessa ad elementi in G, quindi

$$\bigwedge_{N=1}^{m} E_{\ker(I-U_N)} \in \overline{\mathrm{Conv}(G)}^f$$

Ma ogni elemento di $\bigwedge_{U \in G} E_{\{x \mid Ux = x\}}$ è limite forte di elementi di questo spazio.

QED

Consideriamo ora un operatore A autoaggiunto su $\mathcal{H}$: il suo spettro è contenuto in un certo intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$; dato che le funzioni $f_\lambda := \chi_{(-\infty,\lambda]}$ sono boreliane limitate, applicando il calcolo funzionale boreliano ad A otteniamo l'operatore idempotente autoaggiunto

$$f_\lambda(A) = E(\lambda)$$

Osserviamo che

- $E(\lambda) = 0$ se $\lambda < a$.
- $E(\lambda) = I$ se $\lambda \geq b$.
- Se $\lambda_1 \leq \lambda_2$ allora scrivendo $(-\infty, \lambda_2] = (-\infty, \lambda_1] \cup (\lambda_1, \lambda_2]$ otteniamo

  $$E(\lambda_2) = E(\lambda_1) + E_{(\lambda_2, \lambda_1]}$$

  In particolare:

  $$E(\lambda_1) \leq E(\lambda_2)$$

- Se $\{f_{\lambda_n}\}$ è tale che $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ con $\lambda \leq \lambda_n$, allora per ogni $t \leq \lambda$:

  $$f_{\lambda_n}(t) = 1 = f_\lambda(t)$$

  e, per ogni $t > \lambda$, $f_{\lambda_n}(t) = 0$, sicché la successione $\{f_{\lambda_n}\}$ è equilimitata e quindi converge puntualmente a $\chi_{(-\infty,\lambda]}$. Ne segue che

  $$\operatorname*{s-lim}_{\lambda_n \longrightarrow \lambda} E(\lambda_n) = E(\lambda)$$

  vale a dire, $E(\lambda - 0) = \text{s-lim}\, E(\lambda_n) = E_{(-\infty,\lambda]}$, pertanto

  $$E(\lambda) - E(\lambda - 0) = \chi_{\{\lambda\}}(A) = E_{\ker(A-\lambda I)}$$

10.4.7 Definizione *Una* famiglia spettrale *sullo spazio di Hilbert* $\mathcal{H}$ *è una funzione*

$$E : \mathbb{R} \longrightarrow \{\textit{Operatori autoaggiunti di } \mathcal{H}\}$$

tale che

- *E sia fortemente continua superiormente.*
- *E sia monotona non decrescente.*
- $\text{s-lim}_{\lambda \longrightarrow -\infty} E(\lambda) = 0$.
- $\text{s-lim}_{\lambda \longrightarrow +\infty} E(\lambda) = I$.

Ad esempio, dato un operatore continuo $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ autoaggiunto, la funzione

$$E(\lambda) := \chi_{(-\infty,\lambda]}(A)$$

definisce una famiglia spettrale.

Osserviamo che le (1)–(3) sono le proprietà che caratterizzano le funzioni di distribuzione associate alle misure di Radon (teorema 4.5.8: possiamo cioè considerare l'integrale di Stieltjes di una funzione boreliana (limitata) f:

$$\int f(\lambda) dE(\lambda)$$

10.4.8 Teorema *Se A è un operatore continuo autoaggiunto sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ allora esiste un'unica famiglia spettrale $E(\lambda)$ tale che*

$$A = \int \lambda dE(\lambda)$$

(integrale di Stieltjes) e per ogni $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (boreliana) limitata

$$f(A) = \int f(\lambda)dE(\lambda)$$

Ciò vale, in particolare, per ogni $f \in C(\sigma(A))$.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo una funzione $f \in C(\sigma(A))$; dato che $A = A^*$ lo spettro $\sigma(A)$ è contenuto in un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Consideriamo una famiglia finita di valori

$$\lambda_0 < a < \lambda_1 < ... < \lambda_{n-1} < b \leq \lambda_n$$

e le funzioni boreliane

$$\chi_{(\lambda_{i-1},\lambda_i]} = E_{(\lambda_{i-1},\lambda_i]} = E(\lambda_i) - E(\lambda_{i-1})$$

Per $\lambda_i' \in (\lambda_{i-1}, \lambda_i]$:

$$\sum_{\sup|\lambda_i - \lambda_{i-1}| \longrightarrow 0} f(\lambda_i)\chi_{(\lambda_{i-1},\lambda_i]} \xrightarrow{\text{uniformemente}} f$$

per il teorema di Heine–Cantor. Quindi

$$\sup_\lambda \left| f(\lambda) - \sum f(\lambda_i)\chi_{(\lambda_{i-1},\lambda_i]}(\lambda) \right| \leq \delta$$

(ove δ è è il valore dell'enunciato del teorema di Heine–Cantor[5]). Dunque

$$\sum_i f(\lambda_i') \left(E(\lambda_i) - \lambda_{i-1} \right))$$

converge a $f(A)$:

$$\left|\left| f(A) - \sum_i f(\lambda_i') \left(E(\lambda_i) - \lambda_{i-1} \right)) \right|\right| \leq \delta$$

[5]Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per x *non dipendente da* δ con $|x - x_0| < \delta$ si ha $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (continuità uniforme delle funzioni continue in un compatto).

cioè

$$f(A) = \int f(\lambda) dE(\lambda)$$

(si noti che questo è l'integrale di una funzione continua, quindi definito alla Riemann).

Passiamo ora al caso di una funzione boreliana limitata qualsiasi: $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Per la limitatezza di f, $f(\lambda) \in \mathcal{D}_{||f||}$ (disco di raggio $||f||$); certamente possiamo scrivere

$$\mathcal{D}_{||f||} \subset \dot{\bigcup_j} D_j$$

come unione disgiunta finita di boreliani D_j tali che diam $D_j \leq \delta$ (ad esempio possono prendersi $D_j = (z_1, z_1'] \times (z_2, z_2'])$.

Dato che f è boreliana, gli insiemi $\Delta_j := f^{-1}(D_j)$ sono boreliani e quindi lo è la funzione

$$\sum_j f(\lambda_j) \chi_{\Delta_j}$$

Ma

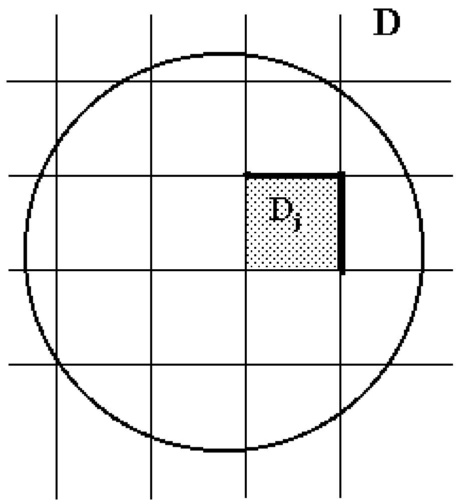
$$\left| f(\lambda) - \sum_j f(\lambda_j) \chi_{\Delta_j} \right| \leq \delta$$

e quindi, usando il calcolo funzionale boreliano sul primo membro di questa eguaglianza:

$$\left|\left| f(A) - \sum_j f(\lambda_j) E_{\Delta_j} \right|\right| \leq \delta$$

cioè, per definizione dell'integrale di Lebesgue–Stieltjes:

$$f(A) = \int f(\lambda) dE(\lambda)$$



Dimostriamo ora l'unicità della famiglia spettrale $E(\lambda)$: se

$$A = \int \lambda dF(\lambda)$$

con F famiglia spettrale, dato che $\sigma(A) \subset [a, b]$ deve essere

$$F(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda < a \\ I & \text{se } \lambda \geq b \end{cases}$$

Ma una famiglia spettrale è commutativa (i suoi elementi commutano fra loro dato che $F(\lambda)F(\lambda') = F(\lambda \wedge \lambda')$) e quindi

$$AF(\lambda) = F(\lambda)A$$

poiché A si approssima con combinazioni lineari finite in $F(\lambda)$ e ne è limite in norma. Allora, dato che per $\lambda' \leq \lambda$ si ha $F(\lambda)F(\lambda') = F(\lambda')$, troviamo che

$$\sum_j \lambda_j'(F(\lambda_j) - F(\lambda_{j-1}))F(\lambda) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\lambda} \lambda' dF(\lambda)$$

e, per $x \in F(\lambda)\mathcal{H}$ otteniamo $d(x, F(\lambda)x)$ è una misura sulla retta reale):

$$(x, Ax) = \int_{-\infty}^{\lambda} \lambda' d(x, F(\lambda)x) = \int_{-\infty}^{\lambda} d(x, F(\lambda)x) = (x, F(\lambda)x) = (x, x)$$

Dunque

$$(x, Ax) \leq \int_{-\infty}^{\lambda} \lambda' d(x, F(\lambda)x) \leq \sup \left(\int_{-\infty}^{\lambda} \lambda' d(x, F(\lambda)x) \right) = \lambda(x, x)$$

Se $x \in (I - F(\lambda))\mathcal{H}$ allora

$$(x, Ax) = \int_\lambda^\infty \lambda' d(x, F(\lambda)x) \geq \lambda(x, x)$$

Quindi ($aI \leq A \leq bI$):

$$\sigma\left(A|_{F(\lambda)\mathcal{H}}\right) \subset \sigma(A) \cap (-\infty, \lambda] \quad \text{e} \quad \sigma\left(A|_{(I-F(\lambda))\mathcal{H}}\right) \subset \sigma(A) \cap [\lambda, \infty)$$

cioè

$$F(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda < a \\ I & \text{se } \lambda \geq b \end{cases}$$

Se ora F soddisfa alle conclusioni del teorema:

$$A = \int \lambda dF(\lambda) = \int \lambda dE(\lambda)$$

allora $A^2 = \int \lambda^2 dE(\lambda)$; A^2 è approssimato da $\sum_j \lambda_j P_j$ ove

$$P_j := F(\lambda_j) - F(\lambda_{j-1})$$

e quindi $P_j P_k = \delta_{jk} P_j$, quindi

$$\left(\sum_j \lambda_j P_j\right)^2 = \sum_j \lambda_j'^2 P_j^2 = \sum_j \lambda_j'^2 P_j$$

Per induzione, A^n è quindi approssimato da $\sum_j \lambda_j'^n P_j$ e quindi, per ogni polinomio $p \in \mathbb{R}[x]$:

$$p(A) = \int p(\lambda) dE(\lambda) = \int p(\lambda) dF(\lambda)$$

i.e.

$$(x, p(A)x) = \int p(\lambda) d(x, E(\lambda)x) = \int p(\lambda) d(x, F(\lambda)x)$$

Per il teorema di Stone–Weierstrass in $C[a, b]$ abbiamo quindi che questa identità vale per ogni funzione continua, per cui le misure $d(x, E(\lambda)x)$ e $d(x, F(\lambda)x)$ sono uguali, dunque

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad (x, E(\lambda)x) = (x, F(\lambda)x)$$

e, per le identità di polarizzazione:

$$\forall x, y \in \mathcal{H} \quad (x, E(\lambda)y) = (x, F(\lambda)y)$$

Ne concludiamo che $E = F$.

QED

10.4.9 Corollario *Ogni operatore continuo autoaggiunto è limite (in norma) di combinazioni lineari di operatori il cui spettro sia finito.*

Dato che se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è qualsiasi allora

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2i}(A - A^*)$$

segue più in generale che

10.4.10 Corollario *Ogni operatore continuo A è limite (in norma) di combinazioni lineari di operatori il cui spettro sia finito.*

10.4.11 Corollario *Se $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è un'algebra di von Neumann allora $\mathcal{R}$ coincide con lo spazio di Banach generato dagli insiemi*

$$\mathcal{R}_p := \{E \in \mathcal{R} \mid E^*E = E\}$$

Vogliamo infine dimostrare il teorema spettrale per gli operatori unitari in uno spazio di Hilbert, ricordando che se $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ allora $\sigma(U) \subset \mathbb{T} = S^1$, la circonferenza unitaria del piano complesso.

10.4.12 Teorema Spettrale per Operatori Unitari *Se $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ allora esiste un'unica famiglia spettrale $F(\lambda)$ tale che*

$$\int e^{i\lambda} dF(\lambda)$$

e $F(\lambda) = 0$ se $\lambda < 0$ e $F(2\pi - 0) = I$.

Dimostrazione: Consideriamo

$$\Gamma_\lambda := \{e^{it}\}_{t \in [0,\lambda]} \subset \mathbb{T}$$

Ovviamente $\chi_{\Gamma_\lambda}(U) = F(\lambda)$ e

- Se $\lambda < 0$ allora $F(\lambda) = 0$;
- Se $\lambda \geq 2\pi$ allora $F(\lambda) = I$;
- Se $\lambda \leq \lambda'$ allora $F(\lambda) \leq F(\lambda')$;
- Se $\lambda \leq \lambda_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \chi_{\Gamma_{\lambda_n}} = \chi_{\Gamma_\lambda}$$

Da queste asserzioni segue immediatamente che F è una famiglia spettrale e

$$\forall f \in C(\mathbb{T}) \quad f(U) = \int f(e^{i\lambda})dF(\lambda)$$

L'unicità si dimostra esattamente come nel caso delle funzioni continue sugli operatori autoaggiunti, verificando prima il risultato sui polinomi e sfruttando la densità dei polinomi nelle funzioni continue.

QED

Ovviamente, la misura di $(0, 2\pi)$ secondo $dF(\lambda)$ è 1 se e solo se

$$1 \in \sigma_p(U) \iff \ker(I - U) = 0 \iff \chi_{\{1\}}(U) = 0$$

10.5 Operatori compatti, Hilbert–Schmidt e nucleari

La teoria spettrale degli operatori continui ci fornisce molte informazioni su di essi: in questo paragrafo studiamo una sottoclasse importantissima degli operatori continui e ne analizziamo la teoria spettrale.

10.5.1 Definizione *Se X e Y sono spazi di Banach un operatore lineare $A : X \longrightarrow Y$ si dice* compatto *se per ogni insieme F limitato in X $A(F)$ è un insieme a chiusura compatta in Y. L'insieme degli operatori compatti si denota $\mathcal{K}(X, Y)$.*

Equivalentemente, A è compatto se e solo se $A(X_1)$ (immagine della palla unitaria di X) ha chiusura compatta in Y.

Si vede immediatamente che un operatore compatto è continuo:

$$\mathcal{K}(X, Y) \subset \mathcal{B}(X, Y)$$

10.5.2 Proposizione *$\mathcal{K}(X, Y)$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{B}(X, Y)$.*

DIMOSTRAZIONE: Intanto verifichiamo che è un sottospazio vettoriale: che $A \in \mathcal{K}(X, Y)$ implichi $\lambda A \in \mathcal{K}(X, Y)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ è ovvio; inoltre se $A, B \in \mathcal{K}(X, Y)$:

$$\{Ax + Bx\}_{x \in X_1} \subset \{Ax + By\}_{x,y \in X_1}$$

la cui chiusura è compatta (dato che la chiusura di $AX_1 \times BX_1$ lo è in $Y \times Y$ e l'operazione $+ : Y \times Y \longrightarrow Y$ è continua).

Vediamo infine che $\mathcal{K}(X, Y)$ è un sottospazio chiuso di X: se $\{A_n\}$ è una successione in $\mathcal{K}(X, Y)$ convergente (ad un elemento $A \in \mathcal{B}(X, Y)$); vogliamo dimostrare che $A \in \mathcal{K}(X, Y)$.

Consideriamo allora la successione $\{x_n\} \subset X_1$: per compattezza di A_1 deve esistere una sottosuccessione $\{x^{(1)}_{n_{k_1}}\} \subset \{x_n\}$ tale che $\{A_1 x^{(1)}_{n_{k_1}}\}$ sia convergente. Questa scelta di sottosuccessioni può farsi per ogni operatore compatto A_n, ottenendo così una famiglia $\{\{x^{(i)}_{n_{k_i}}\}_i\}_k$ di sottosuccessioni della $\{x_n\}$ tali che per ogni n la successione $\{A_i x^{(i)}_{n_{k_i}}\}_i$ sia convergente in Y. Allora consideriamo la successione "diagonale"

$$z_i := x^{(i)}_{n_i}$$

Per definizione $\{z_i\}_i \subset \{x_n\}_n$ e $\{A_n z_i\}_i$ è di Cauchy per ogni n.

Ora scegliamo un indice n tale che sia

$$||A - A_n|| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Dato che $\{A_n z_i\}_i$ è di Cauchy, deve esistere k_ε tale che

$$\forall h, k > k_\varepsilon \quad ||A_n z_k - A_n z_h|| < \frac{\varepsilon}{3}$$

e quindi

$$\begin{aligned} ||A(z_h - z_k)|| &\leq ||(A - A_n)(y_h - y_k)|| + ||A_n(y_h - y_k)|| \\ &\leq ||A_n(y_h - y_k)|| \leq 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Perciò A è compatto.

QED

10.5.3 Proposizione *$\mathcal{K}(X, Y)$ è un $\mathcal{B}(X)$-modulo a destra e un $\mathcal{B}(Y)$-modulo a sinistra.*

Dimostrazione: Basta osservare che, se $A : X' \longrightarrow X$ e $B : Y \longrightarrow Y'$ sono continui e $T : X \longrightarrow Y$ è compatto allora l'operatore

$$X' \xrightarrow{A} X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{B} Y'$$

è compatto. Ed infatti $B\overline{T(X_1)}$ è compatto dato che B è continuo e $\overline{T(X_1)}$ è compatto; quindi (un sottoinsieme compatto in uno spazio normato è chiuso

$$\overline{ABT(X_1)} \subset \overline{A\overline{BT(X_1)}} = A\overline{BT(X_1)}$$

è quindi $\overline{ABT(X_1)}$ è chiuso in un compatto e quindi è compatto.

QED

10.5.4 Corollario *Se* $T \in \mathcal{K}(X,Y)$*,* $A \in \mathcal{B}(Y)$ *e* $B \in \mathcal{B}(X)$ *allora*

$$AT, TA \in \mathcal{K}(X,Y)$$

Naturalmente se $X = Y$ scriviamo $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X,Y)$.

10.5.5 Corollario $\mathcal{K}(X)$ *è un ideale bilatero chiuso nell'algebra* $\mathcal{B}(X)$*.*

10.5.6 Esempio *Se* $\dim X < \infty$ *ogni operatore continuo è compatto*[6]*:*

$$\mathcal{K}(X) = \mathcal{B}(X) = End(X)$$

Più in generale, un operatore $A \in \mathcal{B}(X)$ *tale che* $\dim \operatorname{im} A < \infty$ *è compatto: infatti la sua immagine è uno spazio isomorfo a* $\mathbb{C}^n$*: non vale il viceversa; se*

$$Tx := f(x)x_0$$

ove $x_0 \in X$ *e* $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *è un funzionale lineare* ma non continuo *allora* T *non è continuo e quindi non può essere compatto: tuttavia* $\dim \operatorname{im} T = 1$.

In generale:

$$\overline{\{A \in \mathcal{B}(X) \mid \dim \operatorname{im} A < \infty\}} \subset \mathcal{K}(X)$$

Se X è uno spazio di Hilbert questi due sottospazi di $\mathcal{B}(X)$ sono effettivamente uguali, mentre se X è solo uno spazio di Banach, l'inclusione è stretta.

Osserviamo inoltre che, se al solito I è l'operatore identico:

$$I \in \mathcal{K}(X) \iff \dim X < \infty \iff X_1 \text{ è compatto}$$

In altri termini, se $\dim X = \infty$ un operatore compatto A non è invertibile (questo è anche evidente dal fato che $\mathcal{K}(X)$ è un ideale: se contenesse un invertibile conterrebbe I e quindi ogni elemento di $\mathcal{B}(X)$, e questo è possibile solo, appunto, nel caso di dimensione finita).

Dato che $\mathcal{K}(X) \lhd \mathcal{B}(X)$ lo spazio di Banach $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$ è un'algebra di Banach.

10.5.7 Teorema *Se* $\mathcal{H}$ *è uno spazio di Hilbert (di dimensione infinita) e se* $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ *allora* $A^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$*.*

[6] Ad esempio perché X_1 è compatto...

Dimostrazione: Sappiamo che $A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$; dato che A è compatto (e $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \lhd \mathcal{B}(\mathcal{H})$) anche $A^*A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. A^*A è autoaggiunto, quindi possiamo usare il calcolo funzionale continuo: se $f \in C_c(\mathbb{R})$ allora è limite di polinomi privi di termine noto (i.e. di elementi dell'ideale $x\mathbb{R}[x]$ nell'algebra dei polinomi) in $\sigma(A^*A)$ e quindi

$$\sqrt{A^*A} = |A|$$

è compatto. Abbiamo quindi dimostrato che se A è compatto lo è anche $|A|$ e quindi, considerando la decomposizione polare $A^* = |A|V^*$ di A^*, di nuovo essendo $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \lhd \mathcal{B}(\mathcal{H})$, deve aversi

$$A^* = |A|V^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$$

QED

Osserviamo che se A è autoaggiunto allora

$$A = A^* = \int \lambda dE(\lambda)$$

e $\sigma\left(A|_{E_{(-\varepsilon,\varepsilon]}\mathcal{H}}\right) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$, per cui

$$\left|\left|A|_{E_{(-\varepsilon,\varepsilon]}\mathcal{H}}\right|\right| \leq \varepsilon$$

Quindi, se $A = A^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$:

$$A - AE_{(-\varepsilon,\varepsilon]} = A(I - E_{(-\varepsilon,\varepsilon]}) \xrightarrow[\varepsilon \longrightarrow 0]{||\cdot||} A$$

Se $\mathcal{H}_\varepsilon := E_{(-\varepsilon,\varepsilon]}\mathcal{H}$, allora $\sigma\left(A|_{\mathcal{H}_\varepsilon^\perp}\right) \subset \sigma(A) \cap \complement(-\varepsilon, \varepsilon]$: infatti

$$\mathcal{H}_\varepsilon^\perp = \operatorname{im}\left(I - E_{(-\varepsilon,\varepsilon]}\right) = \operatorname{im}(I - E(\varepsilon) + E(-\varepsilon))$$

e quindi

$$A|_{\mathcal{H}_\varepsilon^\perp} = A|_{(I-E(\varepsilon))\mathcal{H}} \oplus A|_{E(-\varepsilon)\mathcal{H}}$$

Ma se $A_1 \oplus A_2 = A$ evidentemente $\sigma(A) \subset \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$ (basta osservare i risolventi per convincersene immediatamente) e quindi

$$\sigma\left(A|_{(I-E(\varepsilon))\mathcal{H}}\right) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \emptyset$$

Cioè 0 sta nel risolvente di $A|_{(I-E(\varepsilon))\mathcal{H}}$ che risulta perciò essere invertibile.

Si noti che se A è compatto, la sua restrizione ad un sottospazio pure è un operatore compatto; quindi $A|_{(I-E_{(-\varepsilon,\varepsilon]})\mathcal{H}}$ è invertibile ed è compatto, il che può solo avvenire (essendo $\mathcal{K} \lhd \mathcal{B}$) se $\dim \mathcal{H}_\varepsilon^\perp = \dim(I - E_{(-\varepsilon,\varepsilon]})\mathcal{H} < \infty$.

Abbiamo cioè che la restrizione $A|_{\mathcal{H}_\varepsilon^\perp}$ è un operatore autoaggiunto su uno spazio di dimensione finita e quindi possiamo esprimerlo come

$$A|_{\mathcal{H}_\varepsilon^\perp} = \sum_{\lambda\in\sigma\ \ A|_{\mathcal{H}_\varepsilon^\perp}} \lambda P_\lambda$$

ove i P_λ sono definiti su spazi di dimensione finita: ma si ha

$$\left\|A|_{E_{(-\varepsilon,\varepsilon]}\mathcal{H}}\right\| \leq \varepsilon \Rightarrow \left\|A - \sum \lambda P_\lambda\right\| \leq \varepsilon$$

e quindi, per $\varepsilon \longrightarrow 0$:

10.5.8 Teorema *Se A è un operatore compatto autoaggiunto:*

$$A = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} \lambda P_\lambda$$

Questa è la forma del teorema spettrale per un operatore compatto: osserviamo che sussiste quindi la decomposizione

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(A)} \ker(A - \lambda I)$$

10.5.9 Definizione *Il numero*

$$\nu(\lambda) := \dim P_\lambda = \dim E_{\ker(A-\lambda I)}$$

si dice molteplicità *del valore λ.*

10.5.10 Corollario *Se A è un operatore compatto autoaggiunto allora,*

$$\forall\lambda \neq 0 \quad \nu(\lambda) < \infty$$

In virtù del teorema, possiamo disporre gli autovalori $\sigma(A)$ di A in una successione di modulo non crescente, nella quale ogni λ figuri tante volte quanta è la sua molteplicità

$$\lambda_1 = ... = \lambda_{\nu(\lambda_1)}, \lambda_2 = ... = \lambda_{\nu(\lambda_2)}, ...$$

con $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ....$ Dato che i numeri $\nu(\lambda)$ sono finiti è allora chiaro che

10.5.11 Corollario *Se A è un operatore compatto autoaggiunto allora l'unico punto di accumulazione in $\sigma(A)$ può essere lo zero.*

In generale possiamo dare la

10.5.12 Definizione *Se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si dice che*

- *A è* privo di molteplicità *se A è normale ed esiste un vettore ciclico per la C^*-algebra generata da A e I.*
- *A ha* molteplicità uniforme *pari a n se esiste un operatore normale B privo di molteplicità e tale che $A = B \oplus ... \oplus B$ (n volte).*

Il seguente risultato sarà dimostrato più in generale come teorema conclusivo del §1 del prossimo capitolo:

10.5.13 Teorema *Un operatore normale privo di molteplicità è sempre un operatore di moltiplicazione M su $L^2(\sigma(A), \mu)$ (ove μ è una misura regolare di probabilità):*

$$\forall f \in L^2(\sigma(A), \mu) \quad Mf(z) := zf(z)$$

Se A_1 e A_2 sono operatori normali privi di molteplicità allora sono unitariamente equivalenti se e solo le le misure μ_1 e μ_2 su $\sigma(A_1)$ e $\sigma(A_2)$ associate dal teorema sono equivalenti (cioè $\mu_1 \ll \mu_2$ e $\mu_2 \ll \mu_1$).

Questo teorema è un caso particolare di un risultato più profondo, che però non dimostreremo (cfr. [23], pp. 82–97).

10.5.14 Esempio *Gli operatori di Volterra sono compatti. Sia $\mathcal{H} = L^2[0, 1]$ e, per $f \in \mathcal{H}$:*

$$(Af)(s) := \int_0^s K(s, t)x(t)dt$$

Evidentemente $\sigma(A) = \{0\}$, inoltre, se $K \in C^1([0, 1] \times [0, 1])$ e, per ogni s, il nucleo $K(s, s) \neq 0$ allora $\sigma_p(A) = \emptyset$. Infatti, se $Ax = 0$, allora

$$\int_0^s K(s, t)x(t)dt = 0$$

e, derivando,

$$K(s, s)x(s) + \int_0^s \frac{\partial}{\partial s} K(s, t)x(t)dt = 0$$

Ma allora $K(s, s)^{-1}\partial K(s, t)/\partial s \in C([0, 1] \times [0, 1])$ è il nucleo di un operatore di Volterra B e

$$Bx + x = 0 \Rightarrow x = 0$$

(a meno che $-1 \in \sigma_p(B)$ che è assurdo, avendosi $\sigma(A) = \{0\}$. Quindi $0 \notin \sigma_p(A)$.

10.5.15 Teorema *Se A_1 e A_2 sono operatori compatti allora*

$$A_1 \cong A_2 \iff \nu_1 = \nu_2$$

DIMOSTRAZIONE: Se $\nu_1 = \nu_2$ allora

$$A_2 = \sum \lambda_n P_\lambda^2 \qquad \text{e} \qquad A_2 = \sum \lambda_n P_\lambda^2$$

Se $\{e_n^{(1)}\}$ è la base ortonormale di $\mathcal{H}$ formata con i vettori che generano gli spazi $\ker(A_1 - \lambda I)$ al variare di $\lambda \in \sigma(A_1)$ (ed analogamente per A_2) allora possiamo definire

$$Ue_n^{(1)} = e_n^{(2)}$$

Si tratta di un operatore unitario e quindi

$$UA_1 e_n^{(1)} = U\lambda_n e_n^{(1)} = \lambda_n e_n^{(2)} = A_2 e_n^{(2)} = A_2 U e_n^{(1)}$$

cioè A_1 e A_2 sono unitariamente equivalenti.

Viceversa, se $A_1 \cong A_2$ allora esiste $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ tale che $A_2 = UA_1U^{-1}$ e quindi

$$\forall f \in C(\sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)) \quad f(A_2) = Uf(A_1)U^{-1}$$

Per $\lambda \neq 0$ si ha $P_\lambda = f(A)$ (per continuità di f, se $f(0) = 0$) e quindi

$$P_\lambda^{(2)} = UP_\lambda^{(1)}U^{-1}$$

da cui $\nu_1 = \nu_2$.

QED

10.5.16 Definizione *Se $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ è autoaggiunto e se, per ogni $\lambda \in \sigma(A)$ si ha $\nu(\lambda) \in \{0, n\}$ (con $n \in \mathbb{N}$ costante fissata), allora si dice che A ha* molteplicità uniforme *n. Se $n = 1$ allora A si dice* privo di molteplicità.

Ad esempio, si può verificare che A ha molteplicità uniforme n se e solo se esiste un operatore $B \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ autoaggiunto privo di molteplicità e tale che $A = B \oplus ... \oplus B$.

Osserviamo ora che, per ogni $x \in \mathcal{H}$, dal teorema di Stone–Weierstrass 9.2.9, segue che:

$$\overline{\{A^n x\}_{n\in\mathbb{N}}} = \overline{\{f(A)x\}_{f\in C_c(\mathbb{R})}}$$

10.5.17 Definizione *Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, un vettore $x \in \mathcal{H}$ si dice* ciclico *per $\mathcal{A}$ se $\overline{\mathcal{A}x} = \mathcal{H}$.*

10.5.18 Lemma *Se A è un operatore autoaggiunto compatto in $\mathcal{H}$ allora esiste un vettore $x\in\mathcal{H}$ ciclico per $\{A^n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ (i.e. tale che $\overline{\{A^n x\}_{n\in\mathbb{N}}} = \mathcal{H}$) se e solo se A è privo di molteplicità.*

Dimostrazione: Poiché A è compatto autoaggiunto possiamo scrivere

$$f(A) = \sum f(\lambda)P_\lambda$$

i.e. $f(A)x = \sum f(\lambda)P_\lambda x$; dunque

$$x \text{ è ciclico } \iff \forall y\in\mathcal{H}\forall f\in C_c(\mathbb{R}) \quad y\perp f(A)x \Rightarrow y=0$$

che vale se e solo se $\dim P_\lambda\mathcal{H} = 1$.

Infatti se x è ciclico allora per ogni $\lambda\in\sigma_p(A)$:

$$f(A)x = f(A)P_\lambda x = f(\lambda)P_\lambda x$$

e quindi $\dim P_\lambda\mathcal{H} = 1$. Viceversa, se $\dim P_\lambda\mathcal{H} = 1$ allora, essendo ogni punto di $\sigma_p(A)\setminus\{0\}$ isolato, esiste una $f\in C(\sigma(A))$ tale che $f(|El) = 1$ e $f(\lambda')=0$ con $\lambda'\in\sigma(A)\setminus\{\lambda\}$. Quindi $P_\lambda = f(A)$ e, per $x\in\mathcal{H}$ tale che $P_\lambda x\neq 0$ per nessun $\lambda\in\sigma(A)$, deve aversi

$$f(A)x = P_\lambda x = ||P_\lambda x||e_\lambda$$

ove $\{e_\lambda\}$ è una base ortonormale; quindi

$$\forall\lambda\in\sigma(A)\setminus\{0\} \quad e_\lambda\in\{f(A)x\}_{f\in C(\sigma(A))}$$

e

$$\chi_{\{0\}}(A)x = c_0e_0 \in \overline{\{f(A)x\}_{f\in C(\sigma(A))}}$$

Si osservi infatti che $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\sigma_p(A)}$ è una base ortonormale di $\mathcal{H}$ e, dato che $\operatorname{Card}\sigma_p(A) = \aleph_0$ allora esiste $c_\lambda\in\mathbb{C}$ tale che

$$\sum_{\lambda\in\sigma_p(A)} |c_\lambda|^2 = 1 \Rightarrow \left|\left|\sum_{\lambda\in\sigma_p(A)} c_\lambda E_\lambda\right|\right| = 1$$

Quindi $P_\lambda x = c_\lambda e_\lambda$, cioè x è un vettore ciclico.

QED

Consideriamo ora un operatore autoaggiunto $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e ricordiamo che

$$\sigma_{ess}(A) := \{\lambda\in\sigma(A) \mid \lambda \text{ punto isolato e } \dim\ker(A-\lambda I)<\infty\}$$

10.5.19 Teorema (H. Weyl) *Se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è un operatore autoaggiunto e $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ è autoaggiunto allora*

$$\sigma_{ess}(A+K) = \sigma_{ess}(A)$$

Dimostrazione: Osserviamo che

- $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ se e solo se esiste un sistema ortonormale $\{e_n\}$ in $\mathcal{H}$ tale che $||Ae_n - \lambda e_n|| \longrightarrow 0$.
- $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è compatto se e solo se per ogni successione $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$ convergente nella topologia debole, $\{Kx_n\}$ converge in norma.

La (1) è un fatto noto (teorema 10.2.12); dimostriamo la (2). Se K è compatto e x_n converge debolmente a x allora

$$\forall n \quad ||x_n|| \leq M$$

(per il teorema di Banach–Steinhaus 6.5.14) e quindi esiste una sottosuccessione di $\{Kx_n\}$ convergente; se per assurdo $\{Kx_n\}$ non convergesse dovrebbe possedere una sottosuccessione $\{Kx_{n_k}\}$ tale che

$$(*) \qquad ||Kx_{n_k} - Kx|| \geq \varepsilon > 0$$

Passando ad una ulteriore sottosuccessione $\{y_i := x_{n_{k_i}}\}$ tale che $Ky_i \longrightarrow z \in \mathcal{H}$ (K è compatto!) avremmo $z = Kx$; infatti

$$\forall x' \in \mathcal{H} \quad (x', By_i) = (B^*x', y_i) \xrightarrow{\text{debolmente}} (B^*x', x) = (x', Bx)$$

cioè $By_i \longrightarrow Bx$ per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Quindi

$$Ky_i \xrightarrow{\text{debolmente}} Kx$$

il che contraddice la (*). Dunque $\{Kx_n\}$ è convergente e la (2) è dimostrata.

Passiamo ora al teorema: se $\{e_n\}$ è un sistema ortonormale, ovviamente converge debolmente a zero (gli elementi (x, e_n) sono i coefficienti di Fourier di x, che sono a quadrato sommabile); quindi, per la (2):

$$Ke_n \xrightarrow{||\cdot||} 0$$

Ma $\lambda \in \sigma_{ess}(A) \iff ||Ae_n - \lambda e_n|| \longrightarrow 0$ e quindi

$$||(A+K)e_n - \lambda e_n|| = ||Ae_n - \lambda e_n + Ke_n|| \leq ||Ae_n - \lambda e_n|| + ||Ke_n||$$

Ma $||Ae_n - \lambda e_n|| \longrightarrow 0$ e $||Ke_n|| \longrightarrow 0$ (per compattezza di K), quindi $\lambda \in \sigma_{ess}(A+K)$ (viceversa, se $\lambda \in \sigma_{ess}(A+K)$, posto $A' = A+K$ e $K' = K$ lo stesso ragionamento mostra che $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$).

QED

10.5.20 Teorema (von Neumann) *Se $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sono operatori autoaggiunti e $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$ allora esiste un operatore compatto $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ tale che*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \operatorname{tr}(K^*K) < \varepsilon^2$$

e tale che $A + K \cong B$.

Gli operatori come il K coinvolto nel teorema di von Neumann rientrano in una classe notevole:

10.5.21 Definizione *Un A si dice* operatore di Hilbert–Schmidt *se esiste un sistema completo ortonormale $\{e_\alpha\}$ in $\mathcal{H}$ tale che la serie*

$$\sum_\alpha ||Ae_\alpha||^2$$

converga.

Notiamo che la definizione implica che solo una quantità numerabile di $||Te_\alpha||^2$ può essere diversa da zero.

Se A è di Hilbert–Schmidt allora il valore

$$||A||_{HS} := \sqrt{\sum_\alpha ||Ae_\alpha||^2}$$

non dipende dalla scelta della base: infatti se $\{f_\alpha\}$ è un'altra base, possiamo scrivere

$$\sum_\beta ||Af_\beta||^2 = \sum_\beta \sum_\alpha |(Af_\beta, e_\alpha)|^2 = \sum_\alpha \sum_\beta |(f_\beta, A^*e_\alpha)|^2 = \sum_\alpha ||A^*e_\alpha||^2$$

(identità di Parseval); ma se scriviamo questa formula per $e_\alpha = f_\alpha$ otteniamo $||A||_{HS} = ||A^*||_{HS}$ e quindi, ancora per la formula, $||A||_{HS}$ non dipende dalla base fissata. Osserviamo inoltre che, se $||x|| = 1$ allora, se A è di Hilbert–Schmidt:

$$||Ax|| \leq ||Ax||_{HS}$$

cioè $||A|| \leq ||A||_{HS}$. Infine si noti la

$$||A||_{HS} = \sqrt{\sum_{\alpha,\beta} |(Ae_\alpha, e_\beta)|^2}$$

che segue dalla $||Ae_\alpha||^2 = \sum_\beta |(Ae_\alpha, e_\beta)|^2$.

10.5.22 Teorema *$||.||_{HS}$ rende gli operatori di Hilbert–Schmidt un'algebra di Banach.*

DIMOSTRAZIONE: Se A è di Hilbert–Schmidt anche λA lo è per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$; inoltre, se A e B sono di Hilbert–Schmidt:

$$\begin{aligned} ||A+B||_{HS}^2 = &\sqrt{\sum_{\alpha,\beta} |((A+B)e_\alpha, e_\beta)|} \leq \sqrt{\sum_{\alpha,\beta} |(Ae_\alpha, e_\beta)| + \sum_{\alpha,\beta} |(Be_\alpha, e_\beta)|} \\ = &||A||_{HS} + ||B||_{HS} \end{aligned}$$

Dimostriamo che la $||.||_{HS}$ è una norma di Banach: se $\{A_n\}$ è una successione di Cauchy allora

$$||A_n - A_m|| \leq ||A_n - A_m||_{HS} \longrightarrow 0$$

e quindi $\{A_n\}$ converge a $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$: dimostriamo che A è di Hilbert–Schmidt. Basta notare che

$$||A||_{HS} \leq \sum_\alpha ||Ae_\alpha||^2 \leq \sup_n ||A_n||_{HS} < \infty$$

Infine notiamo che, se A è di Hilbert–Schmidt e $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ allora

$$||BA||_{HS}^2 = \sum_\alpha ||BAe_\alpha||^2 \leq ||B||^2 \sum_\alpha ||Ae_\alpha||^2 = ||B||\,||A||_{HS}$$

e quindi anche $||AB||_{HS} = ||(AB)^*||_{HS} = ||B^*A^*||_{HS} \leq ||B||\,||A||_{HS}$. In particolare, se B è di Hilbert–Schmidt allora $||B|| \leq ||B||_{HS}$ e quindi gli operatori di Hilbert–Schmidt formano un'algebra di Banach.

QED

Dalla dimostrazione segue che gli operatori di Hilbert–Schmidt sono un ideale bilatero (ovviamente non chiuso) in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$: la chiusura di questo ideale è ovviamente ancora un ideale di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, e deve quindi coincidere con $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ oppure con $\mathcal{K}(\mathcal{H})$; vale questo secondo caso: intanto

10.5.23 Proposizione *Un operatore di Hilbert–Schmidt è compatto.*

DIMOSTRAZIONE: Basta mostrare che si approssima con operatori di rango finito: sia $\{e_\alpha\}$ un sistema ortonormale completo in $\mathcal{H}$ e A un operatore di Hilbert–Schmidt. Allora $||Ae_\alpha||^2 \neq 0$ al più per una famiglia numerabile di indici α e, se $n \in \mathbb{N}$ allora esiste un insieme di indici finito $\mathfrak{A}_n$ tale che

$$\sum_{\alpha \notin \mathfrak{A}_n} ||Ae_\alpha||^2 < \frac{1}{n^2}$$

Ma se definiamo

$$A_n e_\alpha = \begin{cases} Ae_\alpha & \text{se } \alpha \in \mathfrak{A}_n \\ 0 & \text{se } \alpha \notin \mathfrak{A}_n \end{cases}$$

è ovvio che gli A_n hanno rango finito e approssimano A:

$$||A - A_n|| \leq ||A - A_n||_{HS} = \sqrt{\sum_{\alpha \notin \mathfrak{A}_n} ||Ae_\alpha||^2} < \frac{1}{n}$$

QED

Non ogni operatore compatto di è di Hilbert–Schmidt: basti prendere in uno spazio separabile $Ae_n = n^{-1/2}e_n$.

10.5.24 Corollario *L'algebra degli operatori compatti è la chiusura dell'algebra degli operatori di Hilbert–Schmidt.*

Gli operatori di Hilbert–Schmidt sono ancor più simili agli operatori negli spazi di dimensione finita di quanto non lo siano i compatti: comunque non possiamo estendere tutte le proprietà desiderate degli operatori finiti al caso di Hilbert–Schmidt: ad esempio non riusciamo in generale a definire la traccia di un operatore. Per farlo dobbiamo ulteriormente restringere la classe di operatori in esame: l'idea è che, in uno spazio vettoriale di dimensione finita V, vale l'isomorfismo $\text{End}(V) = V^* \otimes V$; cioè gli operatori si possono pensare come tensori e questo permette di definire la traccia di un operatore in modo intrinseco: se $T \in \text{End}(V)$ e se $\varphi \otimes v$ è la sua immagine per mezzo dell'isomorfismo precedente allora basta porre $\operatorname{tr} T = \varphi(v)$. Naturalmente in dimensione infinita non possiamo aspettarci l'isomorfismo precedente, ma lo spazio $V^* \otimes V$ sarà un sottospazio dello spazio degli operatori, sottospazio i cui elementi andiamo ora a definire.

10.5.25 Definizione *A si dice* operatore nucleare *se si può esprimere come il prodotto $A = BC$ di due operatori di Hilbert–Schmidt B e C.*

10.5.26 Proposizione *Se $A = BC$ è un operatore nucleare e $\{e_\alpha\}$ è un sistema completo ortonormale in $\mathcal{H}$ allora la serie*

$$\sum_\alpha (Ce_\alpha, B^* e_\alpha)$$

converge assolutamente ad un valore che non dipende dal sistema ortonormale scelto.

DIMOSTRAZIONE: Se $\{f_\alpha\}$ è un altro sistema ortonormale allora

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,\beta}|(Ce_\alpha,f_\beta)\overline{(B^*e_\alpha,f_\beta)}| &\leq \sqrt{\sum_{\alpha,\beta}|(Ce_\alpha,f_\beta)|^2}\sqrt{\sum_{\alpha,\beta}|(B^*e_\alpha,f_\beta)|^2}\\ &= \sqrt{\sum_\alpha ||Ce_\alpha||^2}\sqrt{\sum_\alpha ||B^*e_\alpha||^2}\\ &= ||C||_{HS}\,||B^*||_{HS}\end{aligned}$$

Quindi la serie doppia esiste e, in particolare

$$\begin{aligned}\sum_\alpha(Ce_\alpha,B^*e_\alpha) &= \sum_{\alpha,\beta}(Ce_\alpha,f_\beta)\overline{(B^*e_\alpha,f_\beta)} = \sum_{\beta,\alpha}(Bf_\beta,e_\alpha)\overline{(C^*f_\beta,e_\alpha)}\\ &= \sum_\beta(Bf_\beta,C^*f_\beta)\end{aligned}$$

Di nuovo l'indipendenza dalle basi segue usando questa formula prima con $e_\alpha = f_\alpha$ e poi nel caso generale.

QED

Il numero

$$\operatorname{tr} A = \sum_\alpha (Ce_\alpha, B^*e_\alpha)$$

si dice *traccia dell'operatore nucleare* A. Dalla dimostrazione della proposizione segue immediatamente che

10.5.27 Proposizione *La traccia è un operatore lineare e continuo dallo spazio degli operatori nucleari in* $\mathbb{C}$ *ed inoltre*

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA \qquad ||\operatorname{tr} AB|| \leq ||A||_{HS}||B||_{HS} \qquad \operatorname{tr} AA^* = ||A||_{HS}^2$$

10.5.28 Teorema *Lo spazio* $\mathcal{N}(\mathcal{H})$ *degli operatori nucleari su uno spazio di Hilbert* $\mathcal{H}$ *è uno spazio di Banach rispetto alla norma*

$$||A||_N = \operatorname{tr}|A|$$

ove $A = |A|U$ *è la decomposizione polare dell'operatore nucleare* A*. Lo spazio di Banach* $\mathcal{N}(\mathcal{H})$ *è isomorfo al duale di* $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ *ed il duale di* $\mathcal{N}(\mathcal{H})$ *è isomorfo a* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$*.*

DIMOSTRAZIONE: Per vedere che si tratta di una norma di Banach, notiamo che

$$||A||_N = \sup_{U,V} |\operatorname{tr} UAV|$$

al variare di U, V nelle isometrie parziali: infatti

$$|\operatorname{tr} UAV| = \left|\sum_\alpha (UAVe_\alpha, e_\alpha)\right| \leq \sum_\alpha |(AVe_\alpha, U^* e_\alpha)| = \operatorname{tr}|A| = ||A||_N$$

per U e V tali che $A = |A|V^*U^*$.

Per ottenere gli isomorfismi basta osservare che un elemento $A \in \mathcal{N}(\mathcal{H})$ induce in modo unico un operatore lineare su $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ definito come $K \longmapsto \operatorname{tr} AK$, e che un elemento $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ induce in modo unico un operatore lineare su $\mathcal{N}(\mathcal{H})$ definito come $A \longmapsto \operatorname{tr} AB$.

QED