

CAPITOLO 4

Geometria dei moduli di Poisson

In questo capitolo arricchiamo la nostra speculazione, che finora è stata puramente algebrica negli aspetti teorici e quindi assai formale, di contenuto geometrico, considerando sistematicamente un'algebra di Poisson $A = C^\infty(M)$ che sia l'algebra delle funzioni di una varietà di Poisson. Vogliamo spostare l'attenzione su taluni moduli di Poisson nel tentativo di ampliare l'orizzonte del calcolo differenziale che abbiamo fin qui delineato e in particolare per trovare un degno sostituto alla teoria dell'integrazione che non sembra avere analoghi immediati rispetto al caso usuale. Per cominciare studiamo geometricamente il modulo \mathcal{H}_A generato dai campi hamiltoniani di un'algebra di Poisson; quindi consideriamo il concetto generale di fibrato di Poisson come riflesso geometrico delle nozioni di modulo e rappresentazione di Poisson; infine introduciamo un modulo di Poisson che non corrisponde ad alcun fibrato ma che consente di introdurre nuovi invarianti.

4.1 Campi e tensori simplettici

Se $M = \bigcup_x S_x$ è la decomposizione in foglie simplettiche di una varietà di Poisson M , possiamo considerare le immersioni $i : S_x \hookrightarrow M$ e cercare di “trasportare i concetti usuali dalla varietà simplettica S_x a quella di Poisson M : non è immediatamente chiaro come ciò possa farsi; ad esempio né una forma differenziale né un campo vettoriale su S_x si possono proiettare su M . Siamo cioè costretti a dare una

Definizione 4.1.1 *Un campo vettoriale simplettico su una varietà di Poisson è un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(M)$ tale che per ogni $x \in M$ se S_x è la foglia simplettica contenente x allora $X|_{S_x} \in \mathfrak{X}(TS_x)$. Denotiamo lo spazio dei campi vettoriali simplettici con il simbolo $\mathfrak{S}(M)$.*

In altri termini un campo vettoriale è simplettico se i vettori che punto per punto lo definiscono appartengono agli spazi tangenti alla foglia in quel punto,

cioè se la restrizione del campo vettoriale alla foglia simplettica definisce un campo vettoriale sulla foglia¹.

Ovviamente su una varietà simplettica $\mathfrak{S}(S) = \mathfrak{X}(S)$, mentre su una varietà di Poisson nulla $\mathfrak{S}(M) = 0$, poiché ogni punto è esso stesso una foglia simplettica.

Notiamo che se $i_S : S \longrightarrow M$ è l'inclusione di una foglia in M allora, se $s \in S$:

$$(X|_S)_s = X_{i(s)}$$

e quindi, se X è simplettico, $Xf(s) = \langle (df)_S, X_s \rangle$.

I campi simplettici ci interessano in primo luogo perché generalizzano i campi hamiltoniani:

$$\text{Ham } M \subset \mathfrak{S}(M)$$

e anche i campi localmente hamiltoniani: rifacendoci alla terminologia introdotta nel §II-2 osserviamo che

Proposizione 4.1.2 *Lo spazio dei campi simplettici $\mathfrak{S}(M)$ è esattamente il modulo di Poisson differenziale generato dallo spazio dei campi hamiltoniani.*

DIMOSTRAZIONE: Basta notare che i campi simplettici sono generati, come $C^\infty(M)$ -modulo, dall'algebra di Lie dei campi hamiltoniani, il che segue per definizione; possiamo quindi identificare $\mathfrak{S}(M)$ col modulo $\mathcal{H}(C^\infty(M))$ introdotto nel §II, che sappiamo essere un modulo di Poisson (cfr. §III-1).

QED

Notiamo comunque che un campo canonico non è necessariamente simplettico: infatti basta considerare una varietà di Poisson nulla sulla quale ogni campo è canonico ma il solo campo simplettico è quello identicamente nullo; inoltre un campo localmente hamiltoniano non è necessariamente simplettico: un semplice controesempio procede come segue.

Esempio. Sul piano di Poisson \mathbb{R}_π^2 i campi simplettici debbono annullarsi nei punti di rango nullo. Consideriamo in particolare il piano di Poisson \mathbb{R}_π^2 con $\pi(x, y) = y^2$: le sue foglie simplettiche sono i semipiani superiore e inferiore del piano cartesiano e ciascun punto della retta $\{y = 0\}$ delle ascisse; il campo vettoriale $y\partial_x$ è ovviamente simplettico: infatti la sua restrizione nel semipiano superiore (o inferiore) definisce un campo vettoriale in quel semipiano, e su un

¹Un concetto simile, come ci è stato fatto rilevare, è stato definito nella teoria degli spazi fogliati da Moore e Schochet [76], che parlano di "campi tangenziali; tuttavia l'uso che ne faremo noi è diverso e le proprietà che ci interessano sono proprie delle strutture di Poisson qualsiasi, quindi non necessariamente legate a fogliazioni nel senso classico (anche se quelle considerate da Moore e Schochet non sono fogliazioni differenziabili): questo, riteniamo, ci autorizza ad una terminologia autonoma.

punto della retta $\{y = 0\}$ il campo è nullo; tuttavia, pur essendo simplettico, questo campo non è localmente hamiltoniano, dato che

$$y\partial_x = X_f \implies y \frac{\partial g}{\partial x} = y^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

(per ogni g) il che implica $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $y \frac{\partial f}{\partial y} = -1$ sicché, attorno ad un punto singolare della retta $\{y = 0\}$, il campo non può essere hamiltoniano.

Lo spazio dei campi simplettici svolgerà per noi il ruolo che le forme differenziali rivestono nel caso simplettico: ad esempio, se S è una varietà simplettica, allora $\mathfrak{S}(S) = \mathfrak{X}(S)$ e quindi, per tramite dell'isomorfismo indotto dalla forma simplettica, $\mathfrak{S}(S) \cong \Omega^1(S)$ come $C^\infty(M)$ -moduli. Ricordiamo che l'azione di Lie di $C^\infty(M)$ sul modulo di Poisson $\mathfrak{S}(M)$ è

$$\{f, X\} = [X_f, X]$$

Nel caso simplettico osserviamo che, applicando l'isomorfismo $\pi^\#$:

$$\{f, \pi^\#\omega\} = [X_f, \pi^\#\omega] = \pi^\#\{df, \omega\}$$

Quindi il modulo di Poisson $\mathfrak{S}(M)$ è isomorfo a $\Omega^1(M)$ rispetto alla struttura di Poisson usuale.

Notiamo inoltre che se $X \in \mathfrak{S}(M \times N)$ allora $X|_S \in \mathfrak{X}(S)$ per ciascuna foglia simplettica; ma $S = S_N \times S_M$ e quindi $\mathfrak{X}(S) \cong \mathfrak{X}(S_N) \oplus \mathfrak{X}(S_M)$, da cui segue la

Proposizione 4.1.3 $\mathfrak{S}(M \times N) \cong \mathfrak{S}(N) \oplus \mathfrak{S}(M)$

La definizione di campo simplettico si può estendere in realtà a qualsiasi campo tensoriale: i tensori che ci interessano (come visto nel §II) sono quelli controvarianti antisimmetrici, dunque sarà conveniente dare la

Definizione 4.1.4 *Un tensore controvariante antisimmetrico simplettico (o semplicemente p -tensore simplettico ove p è l'ordine del tensore) è un tensore controvariante antisimmetrico che, qualora ristretto ad una qualsiasi foglia simplettica, appartenga allo spazio dei campi tensoriali di quella foglia. Lo spazio dei tensori simplettici di ordine p si denota con $\mathfrak{S}^p(M)$.*

Più concisamente, un tensore $P \in \bigwedge^p \mathfrak{X}(M)$ è simplettico se $P|_S \in \bigwedge^p \mathfrak{X}(S)$ per ciascuna foglia simplettica $S \subset M$.

Lemma 4.1.5 *Il tensore di Poisson π è un 2-campo simplettico.*

DIMOSTRAZIONE: Basta osservare che

$$\{f, g\}(x) = \{f|_S, g|_S\}|_S(x)$$

ove S è la foglia simplettica contenente x , e che $\pi(df, dg) = \{f, g\}$.

QED

Vogliamo ora ottenere geometricamente lo spazio $\mathfrak{S}(M)$ come immagine della mappa $\pi^\# : T^*M \rightarrow TM$ indotta dalla struttura di Poisson: per farlo stabiliamo prima un

Lemma 4.1.6 *$X \in \mathfrak{S}(M)$ se e solo se per ogni forma $\alpha \in \Omega^1(M)$ tale che in ciascuna foglia simplettica $S \subset M$ si abbia $s^*\alpha = 0$ si ha anche $i_X\alpha = 0$, ove $s : S \rightarrow M$ è l'immersione di S in M e $s^*\alpha$ il pull-back di forme differenziali.*

DIMOSTRAZIONE: Se $X \in \mathfrak{S}(M)$ e α è tale che $s^*\alpha = 0$ per ogni S , allora se $x \in M$ e S_x è la foglia contenente x :

$$i_X\alpha(x) = \alpha_x(X_x) = \alpha_x((X|_S)_x) = 0$$

(dato che $(X|_S)_x \in T_x S_x$). Viceversa supponiamo che X soddisfi alla condizione dell'enunciato e che $x \in S \subset M$; allora, se $X|_S(x)$ non appartenesse a $T_x S_x$, esisterebbe una forma differenziale $\alpha \in \Omega^1(M)$ tale che $\alpha_x \in T_x^* S_x$ sarebbe non nullo se calcolato sul vettore $(X|_{S_x})_x$ ma anche tale che $s^*\alpha = 0$, da cui $i_X\alpha(x) \neq 0$, il che è assurdo.

QED

Teorema 4.1.7 $\text{im } \pi^\# = \mathfrak{S}(M)$.

DIMOSTRAZIONE: Se $X \in \text{im } \pi^\#$ allora $i_\alpha X = \pi(\beta_X, \alpha)$ per ciascuna $\alpha \in \Omega^1(M)$ e qualche $\beta_X \in \Omega^1(M)$, e dunque, per il lemma 4.1.5, $X \in \mathfrak{S}(M)$.

Viceversa, se $i_S : S \rightarrow M$ è una foglia simplettica e $\sigma = \pi|_S$ il suo tensore di Poisson (invertibile) il seguente diagramma (che ha senso in quanto $\text{im } \pi^\# \subset \mathfrak{S}(M)$) commuta:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^1(M) & \xrightarrow{\pi^\#} & \mathfrak{S}(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^1(S) & \xrightarrow{\sigma^\#} & \mathfrak{X}(S) \end{array}$$

(le frecce verticali sono il pull-back di 1-forme e la restrizione di campi di vettori). Dunque ad ogni campo $X \in \mathfrak{S}(M)$ possiamo associare una 1-forma

$\beta_X = \sigma^b(X|_S)$ su S e, dato che la varietà è unione delle foglie simplettiche, possiamo sollevare ciascuna di queste forme alla forma $\alpha \in \Omega^1(M)$ differenziale (perché la fogliazione lo è) che induce, per *pull-back*, ogni tale β_X . Ora usiamo la commutatività del diagramma per concludere che, per ogni foglia S ,

$$(\pi^\# \alpha)|_S = \sigma^\#(i_S^* \alpha)$$

e quindi $\pi^\# \alpha = X$.

QED

I campi simplettici presentano dunque un “comportamento ambiguo: sulle foglie simplettiche si possono far corrispondere alle forme differenziali, per mezzo dell’isomorfismo fra campi e forme indotto dalla forma simplettica della foglia, anche se restano pur sempre campi vettoriali sulla varietà M : ad esempio, se X un campo vettoriale simplettico su M , possiamo considerarne il flusso, vale a dire la famiglia ad un parametro $\{\Phi_t\}$ di diffeomorfismi locali attorno a ciascun $x \in M$ associata a X . Dato che, se $x_0 \in M$, in un opportuno intorno U_0 di x_0 l’equazione differenziale ordinaria

$$t \in I \quad X(c(t)) = \dot{c}(t)$$

con condizione iniziale $X(0) = \dot{c}(0)$ ha soluzione unica (c, I) , possiamo chiederci come la simpletticità di X incida su c ; ovviamente possiamo considerare $U_0 = S_0 \times N_0$, e quindi abbiamo una coppia di curve (c_S, c_N) determinate dalla curva integrale massimale c di X in U_0 . Ora, dato che X è simplettico, $X(x_0)$ appartiene allo spazio tangente alla foglia $S_0 \times \{x_0\}$ in x_0 , il che vuol dire che in x_0 il vettore tangente alla curva integrale c è tangente alla foglia. Dunque, punto per punto, il vettore tangente alla foglia è simplettico e, poiché lo spazio dei campi simplettici è generato dai campi hamiltoniani, a tratti la curva ha campo tangente hamiltoniano.

In altri termini, le curve integrali di un campo simplettico sono esattamente le curve che rendono appartenenti alla medesima foglia tutti i punti passanti per esse. Questo implica che la curva è completamente contenuta in una singola foglia simplettica, e che quindi il flusso Φ_t definito come

$$\Phi_t(x_0) = c(t)$$

è in realtà un diffeomorfismo locale della foglia in sé.

Si noti che questo flusso non preserva la struttura simplettica della foglia, a meno che il campo X non sia canonico: in questo caso, infatti, detta ω la struttura simplettica ottenuta restringendo la struttura di Poisson di M alla foglia (e quindi $\omega^\# = -(\pi|_S)^\#$) abbiamo che

$$\frac{d}{dt} \Phi_t^* \omega = \Phi_t^* \mathcal{L}_X \omega = 0$$

e quindi $\Phi_t^* \omega = \omega$. In generale questo non sarà vero.

Teorema 4.1.8 *Un campo vettoriale X su M è simplettico se e solo se il suo flusso è determinato da una famiglia di diffeomorfismi locali delle foglie simplettiche.*

Da ultimo trattiamo una caratterizzazione geometrica dei tensori simplettici su una varietà di Poisson regolare che coinvolge il concetto di connessione: precisamente consideriamo una connessione nel fibrato tangente a M

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Omega^1(M) \otimes \mathfrak{X}(M)$$

Poiché una tale connessione consente di calcolare la derivata covariante di un tensore qualsiasi, possiamo chiederci quando valga la condizione più naturale di compatibilità fra la connessione ∇ e la struttura di Poisson determinata dal tensore di Poisson π :

$$\nabla \pi = 0$$

Il seguente risultato è ben noto

Teorema 4.1.9 *Una varietà di Poisson (M, π) ammette una connessione ∇ senza torsione tale che $\nabla \pi = 0$ se e solo se è regolare.*

cfr. [102, §2.20], [39, §5.7]. Ad esempio nel caso simplettico ritroviamo il concetto di connessione simplettica (cfr. [39, §2.5]).

Dunque, se M è una varietà di Poisson regolare, possiamo supporre che una tale connessione esista; dato che la mappa

$$\pi^\# : \Omega^1(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

è un morfismo di fibrati (che ha rango costante) l'immagine $\mathfrak{S}(M)$ è una distribuzione le cui foglie integrali sono esattamente le foglie simplettiche.

Poiché ∇ è una connessione che rende parallelo il tensore di Poisson, se X è un campo simplettico allora

$$\nabla X = \nabla \pi^\# \omega = 0$$

Viceversa, se X è parallelo allora la sua restrizione ad una foglia definisce un campo sulla foglia, e quindi un campo simplettico.

Notiamo che la condizione

$$\nabla \pi = 0$$

sembra essere l'unica compatibilità fra una connessione e una struttura di Poisson, e quindi parrebbe che le uniche strutture di Poisson compatibili con le connessioni siano quelle regolari, che in effetti sono G -strutture.

Localmente questa condizione si scrive come segue: fissiamo un sistema di coordinate (x^1, \dots, x^n) e dunque le relative basi dei campi di vettori $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ e delle forme differenziali (dx^1, \dots, dx^n) ; se

$$\pi = \pi^{ij} \partial_i \wedge \partial_j$$

(usiamo la convenzione di Einstein sugli indici) e

$$\nabla \partial_i = \Gamma_{ij}^k \partial_k \otimes dx^j$$

allora

$$\begin{aligned} \nabla \pi &= \pi^{ij} \nabla(\partial_i \wedge \partial_j) + \partial_i \wedge \partial_j \otimes d\pi^{ij} \\ &= \pi^{ij} (\nabla \partial_i \wedge \partial_j + \partial_i \wedge \nabla \partial_j) + \partial_k \pi^{ij} \partial_i \wedge \partial_j \otimes dx^k \\ &= \pi^{ij} \Gamma_{ir}^s \partial_s \wedge \partial_j \otimes dx^r + \pi^{ij} \Gamma_{jr}^s \partial_i \wedge \partial_s \otimes dx^r + \partial_k \pi^{ij} \partial_i \wedge \partial_j \otimes dx^k \end{aligned}$$

e con un cambiamento nei nomi degli indici

$$= \pi^{hj} \Gamma_{hk}^i \partial_i \wedge \partial_j \otimes dx^k + \pi^{ih} \Gamma_{hk}^j \partial_i \wedge \partial_j \otimes dx^k + \partial_k \pi^{ij} \partial_i \wedge \partial_j \otimes dx^k$$

Quindi la condizione $\nabla \pi = 0$ equivale alle equazioni locali

$$\partial_k \pi^{ij} = \pi^{jh} \Gamma_{hk}^i - \pi^{ih} \Gamma_{hk}^j$$

Incidentalmente questo dimostra il teorema precedente: infatti una varietà di Poisson è regolare se e solo se esistono sempre delle coordinate nelle quali il tensore di Poisson è costante, col che le equazioni $\nabla \pi = 0$ divengono

$$\pi^{jh} \Gamma_{hk}^i = \pi^{ih} \Gamma_{hk}^j$$

ma queste si soddisfano facilmente tenendo conto che, nelle coordinate di Darboux–Weinstein scelte

$$i = 1, \dots, r \quad \pi^{i, i+r} = 1 \quad \text{e} \quad \pi^{i+r, i} = -1$$

e tutte le altre componenti sono nulle ($2r$ è il rango della struttura di Poisson nell'intorno scelto). Quindi possiamo sempre determinare dei simboli di Christoffel Γ_{ij}^k che soddisfino le equazioni precedenti: basta considerare una connessione simplettica nella parte simplettica dell'intorno e una qualsiasi connessione senza torsione nella parte non simplettica.

Poiché la condizione $\nabla\pi = 0$ è troppo restrittiva in generale (costringe cioè la varietà di Poisson alla regolarità) possiamo provare a indebolirla: una generalizzazione naturale sembra la richiesta che il tensore doppio $\nabla\pi$ sia un cociclo rispetto al cobordo della coomologia di Poisson:

$$d_\pi \nabla\pi = 0$$

cioè che $[\pi, \nabla\pi] = 0$.

Scriviamo localmente questa condizione usando la banalizzazione del fibrato e la matrice delle 1-forme associata alla connessione:

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

Avevamo già dedotto una formula per $\nabla\pi$ che nel contesto delle derivate covarianti si legge come

$$\nabla_{\partial_k} \pi = (2\pi^{hj} \Gamma_{hk}^i + \partial_k \pi^{ij}) \partial_i \wedge \partial_j$$

Dunque, se poniamo $A_k^{ij} = 2\pi^{hj} \Gamma_{hk}^i + \partial_k \pi^{ij}$:

$$\begin{aligned} [\pi, \nabla_{\partial_k} \pi] &= [\pi, A_k^{ij} \partial_i \wedge \partial_j] = [\pi, A_k^{ij}] \wedge \partial_i \wedge \partial_j + A_k^{ij} [\pi, \partial_i \wedge \partial_j] \\ &= -X_{A_k^{ij}} \wedge \partial_i \wedge \partial_j + A_k^{ij} [\pi, \partial_i] \wedge \partial_j - A_k^{ij} \partial_i \wedge [\pi, \partial_j] \end{aligned}$$

(si rammenti che $X_f = d_\pi f = -[\pi, f]$). Ora calcoliamo

$$\begin{aligned} [\pi, \partial_i] &= [\pi^{rs} \partial_r \wedge \partial_s, \partial_i] = \pi^{rs} [\partial_r \wedge \partial_s, \partial_i] + [\partial_i, \pi^{rs}] \partial_r \wedge \partial_s \\ &= [\partial_i, \pi^{rs}] \partial_r \wedge \partial_s = \partial_i \pi^{rs} \partial_r \wedge \partial_s \end{aligned}$$

(i campi ∂_i e ∂_j commutano localmente). Combinando queste equazioni si ottiene

$$\begin{aligned} [\pi, \nabla_{\partial_k} \pi] &= -X_{A_k^{ij}} \wedge \partial_i \wedge \partial_j + A_k^{ij} \partial_i \pi^{rs} \partial_r \wedge \partial_s \wedge \partial_j - A_k^{ij} \partial_j \pi^{rs} \partial_i \wedge \partial_r \wedge \partial_s \\ &= \pi^{sr} \partial_r A_k^{ij} \partial_s \wedge \partial_i \wedge \partial_j + A_k^{ij} \partial_i \pi^{rs} \partial_r \wedge \partial_s \wedge \partial_j - A_k^{ij} \partial_j \pi^{rs} \partial_i \wedge \partial_r \wedge \partial_s \\ &= \pi^{sr} \partial_r A_k^{ij} \partial_i \wedge \partial_j \wedge \partial_s + A_k^{rs} \partial_r \pi^{ij} \partial_i \wedge \partial_j \wedge \partial_s - A_k^{sr} \partial_r \pi^{ij} \partial_i \wedge \partial_j \wedge \partial_s \end{aligned}$$

Quindi la nostra condizione equivale alle equazioni locali

$$\pi^{sr} \partial_r A_k^{ij} = A_k^{sr} \partial_r \pi^{ij} - A_k^{rs} \partial_r \pi^{ij}$$

4.2 Fibrati di Poisson

Vogliamo ora dare degli esempi geometrici degli oggetti algebrici introdotti nel capitolo precedente: lavoriamo cioè nella categoria dei moduli su un'algebra di Poisson del tipo $A = C^\infty(M)$ ove M è una varietà di Poisson; consideriamo per questo i moduli delle sezioni (infinitamente differenziabili) dei fibrati vettoriali su M .

Cominciamo considerando il concetto di modulo di Poisson: sia $E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale su M e $\Gamma(E)$ il suo modulo delle sezioni globali: su di esso esiste una struttura di modulo di Poisson se è data una azione di Lie

$$\{ \} : C^\infty(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$$

tale che ($f, g \in C^\infty(M)$ e $s \in \Gamma(E)$)

$$\{f, gs\} = g\{f, s\} + \{f, g\}s$$

Se $(U; x_1, \dots, x_n)$ è una carta locale di M nella quale il fibrato E si banalizza, possiamo considerare una $C^\infty(U)$ -base del modulo delle sezioni locali (e_1, \dots, e_n) , col che

$$\{f, e_i\} = \sum_j G^{ij}(f)e_j$$

ove $G^{ij} \in C^\infty(U)$ sono operatori lineari: infatti la $\{af + bg, e\} = a\{f, e\} + b\{g, e\}$ implica che $G^{ij}(af + bg) = aG^{ij}(f) + bG^{ij}(g)$, ove $f, g \in C^\infty(U)$ e $a, b \in \text{Cas } U$.

Proposizione 4.2.1 *La matrice di funzioni G definisce una struttura di modulo di Poisson se e solo se*

$$G^{ij}(\{f, g\}) = [G(g), G(f)]^{ij} + \{G^{ij}(f), g\} + \{f, G^{ij}(g)\}$$

(A^{ij} è l'elemento di riga i e colonna j nella matrice A).

DIMOSTRAZIONE: Basterà notare che (usiamo la convenzione di Einstein sugli indici)

$$\begin{aligned} \{f, \{g, e_i\}\} &= \{f, G^{ij}(g)e_j\} = G^{ij}(g)\{f, e_j\} + \{f, G^{ij}(g)\}e_j \\ &= G^{ij}(g)G^{jk}(f)e_k + \{f, G^{ij}(g)\}e_j \end{aligned}$$

col che

$$\{\{f, g\}, e_i\} = \{f, \{g, e_i\}\} - \{g, \{f, e_i\}\}$$

equivale alla condizione dell'enunciato.

QED

Ancor più semplice è la verifica della

Proposizione 4.2.2 *La matrice di funzioni G definisce una struttura di modulo di moltiplicativo se e solo se G^{ij} sono operatori differenziali del prim'ordine (cioè campi di vettori in $\mathfrak{X}(U)$).*

DIMOSTRAZIONE: Infatti la moltiplicatività della struttura di modulo sulle sezioni di E si legge localmente come

$$G^{ij}(fg)e_j = \{fg, e_i\} = f\{g, e_i\} + g\{f, e_i\} = fG^{ij}(g)e_j + gG^{ij}(f)e_j$$

da cui $G^{ij} \in \text{Der } C^\infty(U)$ risultano essere campi di vettori.

QED

Esempio 4.2.3 Se $E = TM$ con la struttura di Poisson

$$\{f, X\} = [X_f, X]$$

troviamo facilmente che

$$G^{ij}(f) = -\frac{\partial \pi_{rj}}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_r} - \pi_{rj} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_r}$$

dove π_{ij} sono le componenti del tensore di Poisson nelle coordinate locali fissate.

Esempio 4.2.4 Nel caso simplettico, rispetto alle coordinate locali canoniche $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ troviamo

$$G^{ij}(f) = (-1)^\sigma \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_\alpha}$$

ove $(x_1, \dots, x_{2n}) = (q_1, \dots, p_n)$, α è l'indice $1 + n + j$ modulo $n + 1$ e il segno σ è negativo se $i, \alpha < n$.

Esempio 4.2.5 Se $E = T^*M$ con la struttura di Poisson

$$\{f, \omega\} = \mathcal{L}_{X_f} \omega$$

abbiamo, localmente,

$$G^{ij}(f) = \frac{\partial \pi_{ki}}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} + \pi_{ki} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$$

dato che $\mathcal{L}_{X_f} dx_i = d\{f, x_i\}$.

Un cambiamento di coordinate locali si riflette sulla matrice di operatori G^{ij} nel modo seguente: supponiamo che $(V; y_1, \dots, y_n)$ sia un'altra carta locale e consideriamo $U \cap V$ supponendolo non vuoto: qui abbiamo le nostre G^{ij} associate alla banalizzazione del fibrato E nelle coordinate $(U; x)$; si passa da questa alla banalizzazione nelle coordinate (V, y) per mezzo della formula di cociclo che infatti caratterizza i fibrati vettoriali, che in notazione matriciale si esprime come

$$e^V = C_U^V e^U$$

ove $e^U = (e_1, \dots, e_n)$ è base del modulo $\Gamma(U \cap V, E)$ nelle coordinate (U, x) , e^V è la base nelle coordinate (V, y) e $C_U^V : U \cap V \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ è il cociclo del fibrato (possiamo considerare le componenti C_i^j di questa matrice come funzioni differenziabili su $U \cap V$). In termini di componenti:

$$e_i^V = C_i^j e_j^U$$

Allora

$$\begin{aligned} G_V^{ij}(f)e_j^V &= \{f, e_i^V\} = \{f, C_i^j e_j^U\} = C_i^j \{f, e_j^U\} + \{f, C_i^j\} e_j^U \\ &= C_i^j G_U^{jk}(f)e_k^U + \{f, C_i^j\} e_j^U \end{aligned}$$

cioè

$$G_V^{ij}(f)C_j^k e_k^U = C_i^j G_U^{jk}(f)e_k^U + \{f, C_i^j\} e_j^U$$

In termini matriciali ($C_U^V = (C_V^U)^{-1}$), sicché abbiamo dimostrato la

Proposizione 4.2.6 $G_V(f) = C_U^V G_U(f) C_V^U + \{f, C_U^V\} C_V^U$.

Dunque la formula di trasformazione della matrice G non è tensoriale, per la presenza del secondo addendo (in effetti se si potesse ridurre il gruppo strutturale del fibrato in modo che i coefficienti delle matrici del cociclo fossero funzioni di Casimir avremmo un comportamento tensoriale delle $G(f)$). Tuttavia poiché il termine che impedisce la tensorialità di G non dipende che dal cociclo otteniamo

Corollario 4.2.7 *La differenza di due strutture di modulo di Poisson è un endomorfismo del fibrato E .*

Notiamo che, in generale, queste “costanti di struttura per l’azione di modulo di Poisson potranno essere operatori \mathbb{R} -lineari qualsiasi (soddisfacenti alla condizione 4.2.1) del tipo

$$G^{ij} : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$$

Un caso particolare è ad esempio $G^{ij} \in \text{Can}(U)$ (campi di vettori canonici): allora, per la proposizione 4.2.1 l'unica condizione da imporre alla matrice G affinché definisca una struttura di modulo di Poisson è la

$$[G(f), G(g)] = 0$$

e, dato che gli operatori G^{ij} sono derivazioni, la struttura di modulo è necessariamente moltiplicativa.

Notiamo che possiamo scrivere una più specializzata matrice di funzioni valutando le G^{ij} nelle funzioni coordinate x_k e ottenendo in tal modo le n^3 funzioni

$$G_k^{ij} = G^{ij}(x_k)$$

in termini delle quali la condizione 4.2.1 diviene

$$G^{ij}(\pi_{rs}) = [G_s, G_r]^{ij} + \pi_{rk} \frac{\partial G_s^{ij}}{\partial x_k} + \pi_{sk} \frac{\partial G_r^{ij}}{\partial x_k}$$

In ogni caso queste non sono le componenti di alcun tensore: ciò si vede dagli esempi precedenti 2.3. e 2.5: nel primo esempio $E = TM$ troviamo facilmente che

$$G^{ij}(f) = -\frac{\partial \pi_{rj}}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_r} - \pi_{rj} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_r}$$

dove π_{ij} sono le componenti del tensore di Poisson nelle coordinate locali fissate, e quindi

$$G_k^{ij} = -\frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_k}$$

In particolare, se M è regolare, possiamo sempre trovare delle coordinate locali nelle quali $G_k^{ij} = 0$; in generale la matrice G_k si decomporrà in somma diretta di una matrice nulla e di una matrice qualsiasi soddisfacente alla condizione scritta, secondo il teorema di spezzamento di Weinstein.

Nel secondo esempio $E = T^*M$ di nuovo otteniamo le derivate delle componenti del tensore di Poisson

$$G_k^{ij} = \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_k}$$

Consideriamo ora una rappresentazione di Poisson definita sul modulo E : ricordiamo che una rappresentazione è una struttura $[\]$ di $\Omega^1(M)$ -modulo di Lie su $\Gamma(E)$ tale che

$$[\omega, ae] = a[\omega, e] - i_{X_a} \omega e$$

Localmente scriviamo

$$[\omega, e_i] = H^{ij}(\omega) e_j$$

ove $H^{ij} : \Omega^1(U) \longrightarrow C^\infty(U)$. La definizione di rappresentazione diviene quindi

$$H^{ij}(\{\omega, \varphi\}) = [H(\varphi), H(\omega)]^{ij} + i_{X_{H^{ij}(\omega)}}\varphi - i_{X_{H^{ij}(\varphi)}}\omega$$

cioè, valutando sulle forme esatte $\{dx_i\}$ che localmente generano i differenziali:

$$\begin{aligned} H^{ij}(d\pi_{rs}) &= [H_s, H_r]^{ij} + \{H_r^{ij}, x_s\} + \{x_r, H_s^{ij}\} \\ &= [H_s, H_r]^{ij} + \pi_{ks} \frac{\partial H_r^{ij}}{\partial x_k} + \pi_{rk} \frac{\partial H_s^{ij}}{\partial x_k} \end{aligned}$$

ove $H_k^{ij} = H^{ij}(dx_k)$.

Come già sappiamo una rappresentazione induce un modulo, e confrontando questa equazione con quella data per le G_k^{ij} troviamo che il legame fra la rappresentazione ed il modulo di Poisson da essa indotto è semplicemente

$$G^{ij} = H^{ij} \circ d$$

Inoltre è evidente che la rappresentazione è moltiplicativa se e solo se le $H^{ij} : \Omega(U) \longrightarrow C^\infty(U)$ sono $C^\infty(U)$ -lineari, ed in questo caso anche le G^{ij} indotte dalle H^{ij} danno luogo ad un modulo moltiplicativo:

$$\begin{aligned} G^{ij}(fg) &= H^{ij}(d(fg)) = H^{ij}(fdg) + H^{ij}(gdf) = fH^{ij}(dg) + gH^{ij}(df) \\ &= fG^{ij}(g) + gG^{ij}(f) \end{aligned}$$

Anche per le rappresentazioni possiamo scrivere una formula del cambiamento di coordinate in termini del cociclo del fibrato vettoriale, che ribadisce il carattere non tensoriale degli operatori H^{ij} : di nuovo si procede considerando due carte locali (U, x) e (V, y) che banalizzino il fibrato e i cui supporti abbiano intersezione non vuota, e le relative basi del modulo delle sezioni e^U ed e^V nelle carte scelte. Allora

$$\begin{aligned} H_V^{ij}(\omega)e_j^V &= [\omega, e_i^V] = [\omega, C_i^j e_j^U] = C_i^j [\omega, e_j^U] - i_{X_{C_i^j}} \omega e_j^U \\ &= C_i^j H_U^{jk}(\omega)e_k - i_{X_{C_i^j}} \omega e_j^U \end{aligned}$$

da cui

$$H_V(\omega) = C_U^V H_U(\omega) C_V^U - i_{X_{C_V^U}} \omega C_V^U$$

Ora supponiamo che la nostra rappresentazione di Poisson sul fibrato $E \longrightarrow M$ sia moltiplicativa:

$$[a\omega, e] = a[\omega, e]$$

il che, localmente, significa che le mappe $H^{ij} : \Omega^1(U) \longrightarrow C^\infty(U)$ sono $C^\infty(U)$ -lineari; dunque corrispondono a campi di vettori X^{ij} in U e quindi la rappresentazione è localmente determinata da una matrice di campi di vettori che soddisfano l'equazione

$$i_{X^{ij}}\{\omega, \varphi\} = [X(\varphi), V(\omega)]^{ij} + i_{\pi^\#\omega} di_{X^{ij}}\varphi - i_{\pi^\#\varphi} di_{X^{ij}}\omega$$

Quindi la rappresentazione di Poisson moltiplicativa equivale alla scelta in ogni sistema di coordinate di una matrice di campi di vettori che soddisfi l'equazione precedente: se consideriamo allora le funzioni

$$X_k^{ij} = X^{ij}(x_k)$$

(che poi corrispondono alle G_k^{ij} indotte dalle H_k^{ij}) possiamo definire per mezzo di esse un operatore

$$\nabla e_i = X_k^{ij} dx_k \otimes e_j$$

La formula di trasformazione di coordinate per questo oggetto segue da quella per le H^{ij} ed è la seguente

$$X_V = C_V^U X_U C_U^V - (\pi^\# dC_V^U) C_U^V$$

Teorema 4.2.8 X_k^{ij} sono i simboli di Christoffel di una connessione hamiltoniana.

L'idea della dimostrazione è ovviamente di confrontare le formule da noi ottenute con quelle note che caratterizzano i simboli di Christoffel di una connessione (cfr. e.g. [53, Vol.I, §III-7.3]). In effetti una connessione hamiltoniana è un operatore

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \mathfrak{S}(M) \otimes \Gamma(E)$$

tale che ($f \in C^\infty(M)$, $e \in \Gamma(E)$)

$$\nabla(fe) = f\nabla e + X_f \otimes e$$

Localmente una tale connessione si scrive come

$$\nabla e_i = \Gamma_{ij}^k X_{x_k} \otimes e_j$$

Se ora consideriamo due banalizzazioni $(U; x)$ e $(V; y)$ del fibrato E i cui supporti abbiano intersezione non vuota $U \cap V$ possiamo scrivere la formula di cambiamento di coordinate per i simboli di Christoffel applicando l'equazione che pone in relazione due basi di sezioni nelle coordinate scelte

$$e_i^V = C_i^j e_j^U$$

Ora effettuiamo questo cambiamento di base nella connessione hamiltoniana

$$\nabla e_i^V = C_i^j \nabla e_j^U + X_{C_i^j} e_j^U = C_i^j \Gamma_{jk}^l X_{x_l} \otimes e_k^U + X_{C_i^j} \otimes e_j^U$$

e quindi, se $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ sono i simboli di Christoffel nelle coordinate (V, y) abbiamo

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k C_j^l X_{x_k} \otimes e_l^U = C_i^h \Gamma_{hl}^k X_{x_k} \otimes e_l^U + X_{C_i^l} \otimes e_l^U$$

cioè

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = C_i^h \Gamma_{hl}^k C_l^j + X_{C_i^l} C_l^j$$

In una forma matriciale, priva di indici:

$$\Gamma^V = C_V^U \Gamma^U C_U^V + (\pi^\# dC_V^U) C_U^V$$

Questa è la formula del cambiamento di coordinate dei simboli di Christoffel di una connessione hamiltoniana: visibilmente è la stessa formula che verificano le funzioni X_k^{ij} associate alla rappresentazione di Poisson moltiplicativa.

Abbiamo cioè una caratterizzazione delle rappresentazioni indotte da connessioni hamiltoniane:

Teorema 4.2.9 *Una rappresentazione di Poisson è indotta da una connessione hamiltoniana se e solo se è regolare e moltiplicativa.*

Infatti in tal caso le funzioni H^{ij} sono determinate dalle H_k^{ij} come

$$H^{ij} \left(\sum_k a_k dx_k \right) = \sum_k a_k H_k^{ij}$$

come segue dalla moltiplicatività della rappresentazione.

Ora consideriamo una connessione in E , cioè un operatore

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M) \otimes \Gamma(E)$$

che soddisfi all'identità di Leibniz

$$\nabla(fe) = f\nabla e + df \otimes e$$

Localmente, fissata una base del modulo delle sezioni, possiamo scrivere i simboli di Christoffel di questa connessione come

$$\nabla e_i = \Gamma_{ij}^k dx_k \otimes e_j$$

e la sua curvatura è il tensore (cfr. §II-3)

$$\begin{aligned}\nabla^2 e_i &= \nabla \Gamma_{ij}^k dx_k \otimes e_j = \Gamma_{ij}^k dx_k \wedge \nabla e_j - d(\Gamma_{ij}^k dx_k) \otimes e_j \\ &= \Gamma_{ij}^k dx_k \wedge \Gamma_{jr}^s dx_s \otimes e_r - d\Gamma_{ir}^k \wedge dx_k \otimes e_r\end{aligned}$$

Se ∇ è una tale connessione, possiamo utilizzare il morfismo di moduli

$$\pi^\# : \Omega^1(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

per definire

$$\Delta : \Gamma(E) \longrightarrow \mathfrak{X}(M) \otimes \Gamma(E)$$

come (\mathbf{I} è l'identità $\Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$)

$$\Delta = \pi^\# \otimes \mathbf{I} \circ \nabla$$

Si noti che, essendo $\pi^\#$ definito anche per le potenze esterne di questi moduli (cfr. §II-4), ha senso considerare anche la mappa $\Delta^2 = \pi^\# \otimes \mathbf{I} \circ \nabla^2$, che, usando l'equazione di struttura locale appena richiamata, si scrive localmente come

$$\begin{aligned}\Delta^2 e_i &= \pi^\# (\Gamma_{ij}^k dx_k \wedge \Gamma_{jr}^s dx_s - d\Gamma_{ir}^k \wedge dx_k) \otimes e_r \\ &= (\Gamma_{ij}^k X_{x_k} \wedge \Gamma_{jr}^s X_{x_s} - X_{\Gamma_{ir}^k} \wedge X_{x_k}) \otimes e_r\end{aligned}$$

La Δ è una connessione hamiltoniana, dato che

$$\Delta a e = \pi^\# \otimes \mathbf{I}(a \nabla e) + \pi^\# \otimes \mathbf{I}(da \otimes e) = a \pi^\# \otimes \mathbf{I} \nabla e + X_a \otimes e = a \Delta e + X_a \otimes e$$

Abbiamo cioè un modo canonico per costruire connessioni hamiltoniane (e quindi rappresentazioni e moduli di Poisson) a partire dalle usuali connessioni nel fibrato E .

Consideriamo viceversa una connessione hamiltoniana $\Delta : \Gamma(E) \longrightarrow \mathfrak{S}(M) \otimes \Gamma(E)$: se

$$\sigma : \mathfrak{S}(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$$

è inversa sinistra della mappa $\pi^\#$ (cioè $\sigma \pi^\# = \text{identità}$) allora

$$\nabla := \sigma \otimes \mathbf{I} \circ \Delta$$

è una connessione: infatti

$$\nabla a e = \sigma \otimes \mathbf{I}(a \Delta e) + \sigma \otimes \mathbf{I}(X_a \otimes e) = a \nabla e + \sigma \pi^\# da \otimes e = a \nabla e + da \otimes e$$

Ovviamente se la connessione hamiltoniana è della forma $\pi^\# \otimes \mathbf{I} \nabla$ allora la sua connessione associata è ∇ stessa, sicché una stessa connessione può dar luogo

a più connessioni hamiltoniane, e l'insieme di tali connessioni hamiltoniane è parametrizzato dalle inverse sinistre del morfismo di moduli $\pi^\#$.

Poiché si tratta di una mappa di moduli, σ è determinata completamente sui campi hamiltoniani, come

$$\sigma X_f = \sigma \pi^\# df = df$$

Cioè è un morfismo di moduli differenziali, secondo la definizione del §II-2. Inoltre

$$\sigma[X_f, X_g] = \sigma X_{\{f,g\}} = d\{f, g\} = \{df, dg\}$$

dunque

Teorema 4.2.10 *Esiste una mappa biunivoca*

$$\{\text{Connessioni Hamiltoniane}\} \longleftrightarrow \frac{\{\text{Connessioni}\}}{\left\{ \begin{array}{l} \sigma : \mathfrak{S}(M) \longrightarrow \Omega(M) \text{ inverse destre di } \pi^\# \\ \text{e morfismi di moduli differenziali} \end{array} \right\}}$$

4.3 Il modulo delle distribuzioni

Sia M una varietà di Poisson e $A = C^\infty(M)$ la sua algebra di Poisson: questa contiene un ideale di Poisson ben noto, vale a dire le funzioni a supporto compatto $C_c^\infty(M)$. Che si tratti di un ideale per la struttura associativa è ovvio dato che $\text{supp } fg \subset \text{supp } f \cap \text{supp } g$; ma l'identità di Leibniz per le parentesi di Poisson implica la medesima conclusione per la struttura di Lie:

$$\text{supp}\{f, g\} \subset \text{supp } f \cap \text{supp } g$$

Notiamo che l'algebra $C_c^\infty(M)$ è un "sotto-oggetto di $C^\infty(M)$ dal punto di vista algebrico ma non da quello topologico, dato che non è un sottospazio chiuso (è denso!); tuttavia si tratta dello spazio giusto nel quale considerare le funzioni "test per le distribuzioni (cfr. [89, §I-2]) delle quali richiamiamo la definizione

Definizione 4.3.1 *Una distribuzione su una varietà differenziabile M è un funzionale lineare e continuo sullo spazio vettoriale topologico $C_c^\infty(M)$. L'insieme delle distribuzioni si denota² con $\mathcal{D}(M)'$ o semplicemente \mathcal{D}' .*

²Usiamo la notazione di L. Schwartz.

Come ben noto si tratta di uno spazio di Fréchet, del pari degli spazi $C^\infty(M)$ e $C_c^\infty(M)$ con le rispettive topologie localmente convesse (cfr. [89, §III] per la definizione di queste topologie e le sue proprietà fondamentali). È inoltre un modulo sull'algebra associativa $C^\infty(M)$ rispetto all'azione coaggiunta: dunque sembra naturale, nel nostro contesto, definire la parentesi di Poisson fra una funzione $f \in C^\infty(M)$ e una distribuzione $T \in \mathcal{D}(M)'$ come la distribuzione

$$\{f, T\}(\varphi) = T\{f, \varphi\}$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(M)$.

In questo modo otteniamo ancora una distribuzione, dato che è un funzionale lineare (per bilinearità di $\{ \}$) e continuo (per continuità degli operatori differenziali rispetto alla topologia di $C^\infty(M)$, cfr. [89, §III-5]); è inoltre ben definita, dato che se $\varphi \in \mathcal{D}(M)$ e $f \in \mathcal{E}(M)$ allora $\{f, \varphi\} \in \mathcal{D}(M)$ (identità di Leibniz), e quindi $\{T, f\} \in \mathcal{D}'$.

Proposizione 4.3.2 *Se M è una varietà di Poisson $\mathcal{D}(M)'$ è un modulo di Poisson moltiplicativo rispetto all'azione coaggiunta.*

DIMOSTRAZIONE: la struttura di modulo associativo e di Lie è data dalle azioni

$$(fT)(\varphi) = T(f\varphi) \quad \{f, T\}(\varphi) = T(\{\varphi, f\})$$

($T \in \mathcal{D}(M)'$, $f \in C^\infty(M)$ e $\varphi \in C_c^\infty(M)$). Notiamo che queste sono azioni ben poste di $C^\infty(M)$ su $\mathcal{D}(M)'$ (per quanto sopra detto a proposito dei supporti delle funzioni); inoltre, dato che differenziazione e moltiplicazione sono continue nella topologia di $C_c^\infty(M)$, $\{f, T\}$ è effettivamente un elemento di $\mathcal{D}(M)'$ se $f \in C^\infty(M)$ e $T \in \mathcal{D}(M)'$.

Che $\mathcal{D}(M)'$ sia un modulo sull'algebra associativa $C^\infty(M)$ è ben noto (cfr. [89, §V]); mostriamo che si tratta di un modulo di Poisson. Intanto

$$\begin{aligned} \{\{f, g\}, T\}(\varphi) &= T\{\varphi, \{f, g\}\} = T\{\{\varphi, f\}, g\} - T\{\{\varphi, g\}, f\} \\ &= \{g, T\}(\{\varphi, f\}) - \{f, T\}(\{\varphi, g\}) \\ &= (\{f, \{g, T\}\} - \{g, \{f, T\}\})(\varphi) \end{aligned}$$

e quindi è un modulo di Lie; le identità di Leibniz si verificano anch'esse in modo ovvio:

$$\begin{aligned} (\{f, g\}T)(\varphi) &= T(\{f, g\}\varphi) = T(\{f\varphi, g\} - \{\varphi, g\}f) \\ &= \{g, T\}(f\varphi) - (fT)(\{\varphi, g\}) \\ &= (f\{g, T\} - \{g, fT\})(\varphi) \end{aligned}$$

La moltiplicatività anche si riduce ad un semplice calcolo che sfrutta il precedente: infatti si ha

$$\begin{aligned}\{fg, T\}(\varphi) &= T(\{\varphi, fg\}) = T(f\{\varphi, g\}) + T(g\{\varphi, f\}) \\ &= \{g, fT\}(\varphi) + \{f, gT\}(\varphi)\end{aligned}$$

e dunque, per la precedente identità di Leibniz

$$\begin{aligned}\{fg, T\} &= \{g, fT\} + \{f, gT\} = f\{g, T\} - \{f, g\}T + g\{f, T\} - \{g, f\}T \\ &= f\{g, T\} + g\{f, T\}\end{aligned}$$

cioè l'identità moltiplicativa per il modulo di Poisson $\mathcal{D}(M)'$.

QED

Notiamo che ha anche senso scrivere una "identità antisimmetrica sul modulo \mathcal{D}' ":

$$\{f, T\}(\varphi) + \{\varphi, T\}(f) = 0$$

Inoltre si osservi che \mathcal{D}' contiene come sottospazio denso lo spazio delle distribuzioni a supporto compatto (cfr. [89, §III-7]) che sono precisamente gli elementi del duale topologico $C^\infty(M)'$, classicamente denotato con $\mathcal{E}(M)'$ o semplicemente \mathcal{E}' .

Su una varietà di Poisson orientata, non solo abbiamo la distribuzione regolare (cfr. [89, §I])

$$T_f(\varphi) = \int_M \varphi f$$

indotta da $f \in \mathcal{E}(M)$, ma anche una distribuzione "hamiltoniana

$$X_f(\varphi) = \int_M \{f, \varphi\}$$

tale che

$$\{f, T_g\} + \{g, T_f\} = X_{fg}$$

come segue dall'identità di Leibniz per le funzioni. Inoltre

$$X_{\{f, g\}} = \{g, X_f\} - \{f, X_g\}$$

per l'identità di Jacobi per le funzioni, e queste due distribuzioni sono legate dalla

$$\begin{aligned}T_{\{f, g\}}(\varphi) &= \int_M \{f, g\}\varphi = \int_M \{f, g\varphi\} - \int_M \{f, \varphi\}g \\ &= X_f(g\varphi) - T_g\{f, \varphi\} = (gX_f - \{f, T_g\})(\varphi)\end{aligned}$$

sicché, avendosi $T_{\{f,g\}} + T_{\{g,f\}} = 0$, si trova

$$\begin{aligned} fX_g + gX_f &= T_{\{g,f\}} + \{T_f, g\} + T_{\{f,g\}} + \{T_g, f\} = X_{fg} \\ &= \{f, T_g\} + \{g, T_f\} \end{aligned}$$

Si noti che, se M è симплетtica, l'elemento di volume è la massima potenza esterna della forma симплетtica ω (a meno di normalizzazioni, cfr. [?, §5.1]), e abbiamo, per il teorema di Stokes, che

$$\begin{aligned} X_f(\varphi) &= \int_M \{f, \varphi\} \omega^n = \int_M \operatorname{div}(\varphi X_f) \omega^n \\ &= \int_M \mathcal{L}_{\varphi X_f} \omega^n = \int_M di_{\varphi X_f} \omega^n \\ &= \int_{\partial M} \varphi i_{X_f} \omega^n \end{aligned}$$

(dato che $d\omega = 0$ e $\mathcal{L}_{X_f}\omega = 0$ perché X_f è hamiltoniano e *a fortiori* canonico).
Dunque

Proposizione 4.3.3 *Se la varietà симплетtica è senza bordo la distribuzione X_f è identicamente nulla.*

Questo risultato va interpretato come una condizione di invarianza rispetto alle parentesi di Poisson del prodotto scalare dello spazio di Hilbert $L^2(M, \omega^n)$; il non annullarsi di queste distribuzioni è dunque una misura della non симпpleticità della varietà di Poisson (orientata e senza bordo) M . Questo, in effetti, sembra un buon momento per evidenziare una analogia fra varietà di Poisson e algebre di Lie, e che riassumiamo nel seguente schema:

Varietà di Poisson	Algebre di Lie
Varietà симпpletliche connesse	Algebre semplici
Varietà симпpletliche	Algebre semisemplici
Varietà di Poisson regolari	Algebre riduttive
Varietà di Poisson nulle	Algebre abeliane

Come esempio di questa analogia osserviamo che le varietà симпpletliche posseggono una “forma di Killing non degenera che è esattamente il prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle = \int_M fg$$

sulle funzioni a supporto compatto: infatti l'identità di Leibniz e la proposizione precedente implicano

$$\langle \{f, g\}, h \rangle = \int_M \{f, g\}h = \int_M \{fh, g\} - \int_M \{h, g\}f = \langle f, \{g, h\} \rangle$$

Sempre in vista di questa analogia osserviamo che una varietà simplettica è unione delle sue componenti connesse così come un'algebra semisemplice è somma diretta di algebre semplici.

La struttura di modulo di Poisson su \mathcal{D}' si può anche scrivere in termini dell'azione di un operatore differenziale D sulle distribuzioni,

$$(DT)(\varphi) = (-1)^d T(D\varphi)$$

ove d è l'ordine dell'operatore differenziale, considerando $D = X_f$ (campo hamiltoniano di hamiltoniana f):

$$\{f, T\} = X_f T$$

Notiamo inoltre che non è possibile definire una struttura di Lie su \mathcal{D}' per gli stessi motivi per i quali non è possibile definirne una associativa (cfr. [89, §V-1]).

Vogliamo ora considerare un notevole sottomodulo di \mathcal{D}' i cui elementi possiamo definire come segue:

Definizione 4.3.4 *Una distribuzione di Casimir su una varietà di Poisson M è una distribuzione $T \in \mathcal{D}(M)'$ tale che*

$$\forall f \in C^\infty(M) \quad \{f, T\} = 0$$

Lo spazio delle distribuzioni di Casimir si denota con $\mathcal{C}(M)'$.

Dunque una distribuzione T è di Casimir se $T\{\varphi, f\} = 0$ per ogni $f \in C^\infty(M)$ e per ogni $\varphi \in C_c^\infty(M)$. Abbiamo usato questa terminologia guidati dal seguente esempio: se la varietà di Poisson M è orientata³ (ad esempio se è simplettica) esiste una immersione (con immagine densa)

$$T : C^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{D}(M)'$$

che alla funzione $f \in C^\infty(M)$ associa la distribuzione

$$T_f(\varphi) = \int_M f\varphi$$

Allora

³In realtà questo non è indispensabile, se si ricorre al concetto di forma (e corrente) pari e dispari: per una discussione di questi dettagli tecnici cfr. [88, §1] e [89, §IX-2].

Proposizione 4.3.5 *Se $c \in \text{Cas } M$ è una funzione di Casimir allora $T_c \in \mathcal{C}(M)'$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $c \in \text{Cas } M$: scelte arbitrariamente $f \in C^\infty(M)$ e $\varphi \in C_c^\infty(M)$ abbiamo che

$$\{f, T_c\}(\varphi) = \int_M c\{\varphi, f\} = \int_M \{\varphi, cf\}$$

Vogliamo mostrare che la distribuzione $\{f, T_c\}$ è nulla, e basta farlo localmente in ciascun intorno U (per il principio di localizzazione, cfr. [89, §III-8]); dato che siamo su una varietà di Poisson possiamo assumere che l'intorno sia del tipo $U = S \times N$ con S simplettica; allora

$$\int_U \{\varphi, cf\} = \int_N \int_S \{\varphi|_S, cf|_S\}|_S$$

per il teorema di Fubini, che è lecito applicare in quanto $\{\varphi, cf\} \in C_c^\infty(U)$ (la misura che consideriamo su S è ovviamente quella data dalla forma simplettica); rammentiamo inoltre che il valore della parentesi di Poisson in un punto x di due funzioni è esattamente il valore della parentesi di Poisson simplettica sulla foglia S_x passante per x delle funzioni ristrette a tale foglia. Ma

$$\int_S \{\varphi|_S, cf|_S\} = 0$$

perché l'integrale su una varietà simplettica dell'immagine di un campo hamiltoniano di hamiltoniana a supporto compatto è zero (proposizione 4.3.3).

QED

La struttura del modulo delle distribuzioni di Casimir è tanto più complessa quanto più la struttura di Poisson si allontana dall'essere simplettica: ad esempio nel caso limite (seppur banale) di una varietà di Poisson nulla, $\mathcal{C}' = \mathcal{D}'$ (ogni distribuzione è di Casimir).

Proposizione 4.3.6 *Se M è simplettica allora $\mathcal{C}(M)'$ è lo spazio delle distribuzioni localmente costanti.*

DIMOSTRAZIONE: Poiché M è simplettica possiamo globalmente definire l'immersione densa $f \mapsto T_f$ di $C^\infty(M)$ in $\mathcal{D}(M)'$, per mezzo dell'integrale rispetto alla misura di Liouville (cfr. [?, §5.1]) indotta dalla forma simplettica⁴ su M .

⁴Solitamente, se ω è la forma simplettica, si normalizza tale misura a $(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} \omega^n / n!$ ove $2n$ è la dimensione della varietà.

Dunque ha senso parlare di distribuzioni localmente costanti, come di quelle associate a funzioni localmente costanti su M : per semplicità supporremo M connessa. Ora sia $T \in \mathcal{C}(M)'$ una distribuzione di Casimir: vogliamo dimostrare che è della forma T_k per qualche costante $k \in \mathbb{R}$. Di nuovo usiamo il principio di localizzazione per le distribuzioni: per dimostrare che due distribuzioni coincidono basta ragionare localmente; possiamo dunque supporre che $M = \mathbb{R}^{2n}$ con la struttura simplettica canonica e quindi coordinate $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$. Allora

$$0 = \{f, T\}(\varphi) = \sum_{i=1}^n T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) - \sum_{i=1}^n T \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \right)$$

per ogni $f \in C^\infty(M)$ e $\varphi \in C_c^\infty(M)$. Se ne deduce, ad esempio ponendo $f = q_1, \dots, p_n$, che, per ogni $\varphi \in C_c^\infty(M)$:

$$T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \right) = T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_j} \right) = 0$$

per $i, j = 1, \dots, n$. Ma allora la distribuzione T è costante (cfr. [89, §II-6]) e quindi della forma

$$T(\varphi) = k \int \varphi$$

QED

Si noti che una qualsiasi costante dà luogo ad una distribuzione di Casimir, dato che (proposizione 4.3.3)

$$\int \{ \varphi, f \} = 0$$

su una varietà simplettica, se $\varphi \in C_c^\infty(M)$ e $f \in C^\infty(M)$ (integrando rispetto alla misura indotta dalla forma simplettica).

Dunque le distribuzioni di Casimir, sulle varietà simplettiche, non forniscono nulla di nuovo rispetto alle funzioni di Casimir: non è così sulle varietà di Poisson qualsiasi.

Esempio 4.3.7 Consideriamo il piano simplettico “puntato \mathbb{R}_0^2 con le parentesi

$$\{f, g\}_0(x, y) = (x^2 + y^2)\{f, g\}$$

(ove $\{f, g\} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \right)$ sono le usuali parentesi simplettiche). Ovviamente le funzioni di Casimir si riducono alle costanti, esattamente come nel caso del piano simplettico; tuttavia, mentre $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)' = \mathbb{R}$, esistono delle distribuzioni di Casimir non costanti su \mathbb{R}_0^2 : è infatti evidente che una distribuzione con supporto nel

punto singolare sarà un buon candidato. Ad esempio la distribuzione di Dirac δ_0 concentrata nell'origine è di Casimir, dato che⁵

$$\delta(\{\varphi, f\}_0) = \{\varphi, f\}_0(0) = 0$$

Anche le sue derivate prime sono distribuzioni di Casimir: ad esempio

$$\frac{\partial \delta_0}{\partial x}(\{\varphi, f\}_0) = - \left(2x\{\varphi, f\} + (x^2 + y^2) \frac{\partial \{\varphi, f\}}{\partial x} \right) \Big|_0 = 0$$

come pure la sua derivata mista $\partial^2 \delta_0 / \partial x \partial y$. Notiamo tuttavia che

$$\frac{\partial^2 \delta_0}{\partial x^2}(\{\varphi, f\}_0) = \left(2\{\varphi, f\} + 2xF(x, y) + (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 \{\varphi, f\}}{\partial x^2} \right) \Big|_0 = 2\{\varphi, f\}(0)$$

che non è zero in generale. In definitiva $\mathcal{C}(M)' = \mathbb{R}^5$ ha per generatori $1, \delta_0, (\delta_0)_x, (\delta_0)_y, (\delta_0)_{xy}$.

Ovviamente la struttura di \mathcal{C}' dipende pesantemente dal tensore di Poisson: se consideriamo su \mathbb{R}^2 una struttura di Poisson

$$\{f, g\}_\pi(x, y) = \pi(x, y)\{f, g\}$$

ove $\pi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ è nulla nell'origine otteniamo una varietà di Poisson con le stesse foglie simplettiche di \mathbb{R}_0^2 ma che può avere anche infinite distribuzioni di Casimir indipendenti: ad esempio basterà considerare una funzione nel nucleo di Borel, con tutte le derivate nulle in 0 per avere che l'intero spazio delle distribuzioni con supporto nell'origine⁶ è contenuto in \mathcal{C}' .

In generale lo studio delle distribuzioni di Casimir per le strutture di Poisson nel piano dovrebbe essere collegato alla classificazione stessa di queste strutture: infatti le foglie simplettiche per una tale struttura possono solo essere singoli punti oppure insiemi aperti connessi, e gli unici punti singolari per la struttura di Poisson, cioè quelli intorno ai quali il rango può crescere, saltare cioè da zero a due, sono esattamente quelli in cui la struttura di Poisson si annulla; le distribuzioni di Casimir, che riescono a “vedere questi punti altrimenti invisibili usando solo le funzioni, dovrebbero dunque fornire gli invarianti necessari ad una classificazione delle strutture di Poisson nel piano: una simile classificazione sostanzialmente esiste ed è dovuta ad Arnol'd⁷.

Vogliamo considerare qualche altro esempio di distribuzione di Casimir:

⁵Rammentiamo che $(DT)(\varphi) = (-1)^d T(D\varphi)$ ove D è un operatore differenziale di ordine d .

⁶Lo spazio di tali distribuzioni è lo spazio vettoriale generato da δ_0 e da tutte le sue derivate, cfr. [89, §III-10].

⁷Viene enunciata in appendice ad [5], sebbene una dimostrazione completa non sia stata pubblicata se non in certe irripetibili dispense.

Teorema 4.3.8 *Se M e N sono varietà di Poisson allora*

$$\mathcal{C}(M \times N)' \cong \mathcal{C}(M)' \otimes \mathcal{C}(N)'$$

(prodotto tensoriale topologico fra spazi nucleari)

DIMOSTRAZIONE: Per prima cosa notiamo che l'enunciato ha perfettamente senso: infatti lo spazio $\mathcal{C}(M)'$ è un sottospazio di $\mathcal{D}(M)'$, dunque si tratta di uno spazio vettoriale topologico nucleare (cfr. [89, §IV-4]) e il prodotto tensoriale ha senso e in modo unico.

Conviene qui ragionare a livello di algebre di Fréchet, visto che per esse il prodotto tensoriale è univocamente definito: la struttura di Poisson sull'algebra $C^\infty(M \times N) \cong C^\infty(M) \otimes C^\infty(N)$ (cfr. [101, p.531]) è data dalle parentesi

$$\{f_1 \otimes g_1, f_2 \otimes g_2\} = \{f_1, f_2\}_M \otimes g_1 g_2 + f_1 f_2 \otimes \{g_1, g_2\}_N$$

Per il teorema del nucleo di Schwartz (cfr. [101, p.531]), $\mathcal{D}(M \times N)' \cong \mathcal{D}(M)' \otimes \mathcal{D}(N)'$, e

$$\begin{aligned} \{T \otimes S, f \otimes g\}(\varphi \otimes \psi) &= T \otimes S\{f \otimes g, \varphi \otimes \psi\} \\ &= T \otimes S(\{f, \varphi\}_M \otimes g\psi + f\varphi \otimes \{g, \psi\}_N) \\ &= T(\{f, \varphi\}_M)S(g\psi) + T(f\varphi)S(\{g, \psi\}_N) \\ &= (\{T, f\}_M \otimes gS)(\varphi \otimes \psi) + (fT \otimes \{S, g\}_N)(\varphi \otimes \psi) \end{aligned}$$

Questo significa che se $C \in \mathcal{C}(M)'$ e $D \in \mathcal{C}(N)'$ allora $C \otimes D \in \mathcal{C}(M \times N)'$; viceversa, sia $C \in \mathcal{C}(M \times N)'$: per il già ricordato teorema del nucleo questa distribuzione è combinazione lineare di elementi della forma $T_i \otimes S_i$, sicché, per ogni f, g, φ, ψ (negli opportuni spazi):

$$\begin{aligned} 0 &= \{C, f \otimes g\}(\varphi \otimes \psi) = C\{f \otimes g, \varphi \otimes \psi\} \\ &= \sum_i a_i T_i \{f, \varphi\}_M S_i(g\psi) + \sum_i a_i T_i(f\varphi) S_i\{g, \psi\}_N \end{aligned}$$

Le funzioni in queste equazioni sono arbitrariamente scelte, dunque (ad esempio considerando f costante):

$$0 = \sum_i a_i f T_i(\varphi) S_i\{g, \psi\}_N$$

Quindi, per arbitrarietà di φ , $\{S_i, g\}_N = 0$. Analogamente si ottiene $\{T_i, f\}_M = 0$, e dunque $C \in \mathcal{C}(M)' \otimes \mathcal{C}(N)'$.

QED

Esempio 4.3.9 Se S è simplettica (e connessa): $\mathcal{C}(S \times N)' \cong \mathcal{C}(N)'$; in particolare, se N è una varietà di Poisson nulla, abbiamo che $\mathcal{C}(S \times N)' \cong \mathcal{D}(N)'$ e se N è compatta $\mathcal{C}(S \times N)' \cong \mathcal{E}(N)$ è il duale topologico dello spazio $\text{Cas}(S \times N)$.

Quando la struttura di Poisson è regolare, una funzione di Casimir c è, in un intorno locale di Darboux–Weinstein $U = S \times N$, costante lungo il fattore S , e quindi se X è un campo vettoriale tangente a S abbiamo $Xc = 0$ (le parentesi su N sono identicamente nulle per regolarità); dunque possiamo identificare questa distribuzione con una funzione su $C^\infty(N)$:

Teorema 4.3.10 *Se M è una varietà di Poisson regolare allora $\mathcal{C}(M)' \cong \text{Cas}(M)'$ (duale topologico dello spazio delle distribuzioni di Casimir).*

DIMOSTRAZIONE: Se M è regolare e $T \in \mathcal{C}(M)'$, cioè $\{T, f\} = 0$ per ogni $f \in \mathcal{D}(M)$, allora, in ciascuna carta locale U , abbiamo $\{T, f\}|_U = 0$, vale a dire

$$0 = \{T, f\}(\varphi) = \sum_{i=1}^r T \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \right) - \sum_{i=1}^r T \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \right)$$

ove $r \leq n$ è il rango della varietà M : questo segue dal teorema di spezzamento di Weinstein (cfr. §I-3.2) che, nel caso regolare, afferma che la struttura di Poisson è, localmente, prodotto di una struttura simplettica e di una struttura nulla. Per conseguenza una distribuzione di Casimir è, in una qualsiasi carta di Darboux–Weinstein $U = S \times N$, una distribuzione della forma $k_S \otimes T_N$ ove k_S è una costante e $T_N \in \mathcal{D}(N)'$. Se $c \in \text{Cas}(M)$ allora possiamo calcolarvi un funzionale \tilde{T} come

$$\tilde{T}(c) = \sum_U T(\psi_U c) = \sum_{U=S \times N} k_S T_N(c|_N)$$

ove $\{\psi_U\}$ è una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U = S \times N\}$, essendo $c|_N$ una funzione che dipende soltanto dalle coordinate del fattore N . Abbiamo quindi una mappa $\tilde{\cdot} : \mathcal{C}(M)' \rightarrow \text{Cas}(M)'$ che è iniettiva dato che $\tilde{T} = 0$ se e solo se ogni T_N è zero, sicché T è zero, e suriettiva poiché un funzionale $\gamma \in \text{Cas}(M)'$ è indotto da una distribuzione che localmente è definita come $T_U = 1 \otimes \gamma|_U$ (la restrizione $\gamma|_U$ definisce una distribuzione su N in quanto $\text{Cas}(U) = C^\infty(N)$).

QED

Esempio 4.3.11 Si consideri la varietà di Poisson $M = \mathfrak{so}(3)^* \setminus \{0\}$, cioè la varietà di Lie–Poisson dell’algebra di Lie $\mathfrak{so}(3)$ privata dell’origine; si tratta di una varietà di Poisson regolare le cui foglie sono le sfere concentriche S_r di raggio $r > 0$ e centro nell’origine. Una distribuzione di Casimir è una distribuzione $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \setminus 0)$ tale che

$$0 = T\{f, \varphi\} = T(\nabla f \wedge \nabla \varphi)$$

ove ∇ denota il gradiente e \wedge il prodotto vettoriale. Più precisamente, in coordinate cartesiane:

$$T\{f, \varphi\} = T(x(f_y \varphi_z - f_z \varphi_y) + y(f_z \varphi_x - f_x \varphi_z) + z(f_x \varphi_y - f_y \varphi_x))$$

($f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ e così via) sicché la condizione $T\{f, \varphi\} = 0$ implica

$$\begin{cases} x \frac{\partial T}{\partial y} = y \frac{\partial T}{\partial x} \\ y \frac{\partial T}{\partial z} = z \frac{\partial T}{\partial y} \\ z \frac{\partial T}{\partial x} = x \frac{\partial T}{\partial z} \end{cases}$$

Ma dato che $(x, y, z) \neq 0$, una distribuzione di Casimir è determinata non appena una delle sue derivate parziali non identicamente nulle sia data (se tutte le derivate parziali fossero nulle la distribuzione sarebbe l’integrale per una funzione costante). Ciò significa che lo spazio di tali distribuzioni è lo spazio delle distribuzioni le cui derivate nelle direzioni tangenti alle foglie siano zero: si tratterà dunque dei funzionali lineari e continui su uno spazio di dimensione uno (dipendente da un parametro che non è altri se non la distanza dall’origine nelle coordinate polari di \mathbb{R}^3), e che infatti si può identificare con $C^\infty(\mathbb{R}_+)'$, il duale dello spazio delle funzioni di Casimir, in accordo col teorema precedente.

Si noti che, considerando l’intera varietà di Lie–Poisson $\mathfrak{so}(3)^*$ avremmo almeno una distribuzione che non proviene da alcun funzionale sullo spazio delle funzioni di Casimir: la misura di Dirac concentrata nell’origine (non a caso punto singolare della varietà di Poisson in questione). Dunque, in questo caso, ogni funzione di Casimir induce una distribuzione di Casimir ma non è vero il viceversa (di nuovo in accordo col teorema).

In generale, una distribuzione il cui supporto sia un punto singolare di rango nullo è di Casimir; ad esempio si consideri una struttura di Poisson nel piano \mathbb{R}_π^2 con parentesi

$$\{f, g\}(x, y) = \pi(x, y)\{f, g\}_S(x, y)$$

ove $\{ \}_S$ sono le usuali parentesi simplettiche e π è una funzione differenziabile. Allora una distribuzione di Casimir T è tale che

$$\forall f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \quad 0 = T(\pi\{f, \varphi\}_S) = (\pi T)\{f, \varphi\}_S$$

e quindi πT è costante. È questo il caso, ad esempio, se $\text{supp } \pi \cap \text{supp } T = \emptyset$, come, in particolare, per $T = \delta_0$ e $\pi(0, 0) = 0$; si noti che non ogni distribuzione con supporto nell'origine è di Casimir, a meno che π non appartenga al nucleo di Borel, cioè tutte le sue derivate nell'origine siano nulle.

Esempio 4.3.12 Consideriamo \mathbb{R}^2 con le parentesi indotte dalla funzione $\pi = y^2$: allora non solo le misure di Dirac concentrate nei punti singolari (cioè quelli della retta $\{y = 0\}$) sono delle distribuzioni di Casimir (così come le loro derivate rispetto alla x di ordine arbitrariamente elevato), ma se consideriamo una qualsiasi distribuzione $R \in \mathcal{D}(\mathbb{R})'$ sulla retta $\{y = 0\}$ e la estendiamo a \mathbb{R}^2 come $T(\varphi) = R(\varphi \circ i)$ (con $i(x) = (x, 0)$) allora ovviamente $T \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)'$, sicché abbiamo una inclusione $\mathcal{D}(\mathbb{R})' \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)'$.

Esempio 4.3.13 Una varietà di Lie–Poisson \mathfrak{g}^* possiede almeno un punto di rango nullo, vale a dire l'origine: dunque ammette certamente delle distribuzioni di Casimir, che avranno supporto in 0. Se scriviamo in coordinate la struttura di Lie–Poisson come

$$\pi = \sum_{i,j} \sum_k c_{ij}^k x_k \partial_i \wedge \partial_j$$

Allora una distribuzione T è di Casimir se e solo se

$$\sum_{i,j,k} T(c_{ij}^k x_k \partial_i f \partial_j \varphi) = 0$$

per ogni $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dunque

$$0 = \sum_{i,j,k} c_{ij}^k x_k T(\partial_i f \partial_j \varphi)$$

Ovviamente la δ_0 è di Casimir: non lo sono invece le sue derivate prime

$$\partial_h \delta_0 \{f, \varphi\} = \partial_h \{f, \varphi\}(0) = \sum_{i,j} c_{ij}^h \partial_i f(0) \partial_j \varphi(0)$$

né, *a fortiori*, quelle successive.