Capitolo 5

Integrazione sulle varietà di Poisson

Il calcolo differenziale sulle varietà di Poisson, da noi delineato per le algebre nel capitolo II, fornisce invarianti analoghi a quelli usuali (differenziali, derivate di Lie, coomologie) per lo studio delle strutture di Poisson; una notevole differenza, tuttavia, col caso del calcolo differenziale usuale è la mancanza di una teoria dell'integrazione: ci proponiamo qui di colmare questa lacuna introducendo i concetti necessari ad un "calcolo integrale di Poisson, compatibilmente col calcolo differenziale fin qui sviluppato. Per cominciare introduciamo la coomologia simplettica come coomologia di Poisson del modulo dei tensori simplettici; poi consideriamo una teoria simplettica dell'omologia singolare e, per mezzo di questa, diamo la definizione di integrale simplettico; infine gettiamo le fondamenta della teoria astratta della misura soggiacente al nostro concetto di integrale.

5.1 Coomologia simplettica

Abbiamo fin qui considerato i moduli di Poisson $\mathcal{C}(M)' \subset \mathcal{D}(M)'$ su una varietà di Poisson M: su una varietà orientata molte (in un certo senso quasi tutte) distribuzioni sono regolari, vale a dire si ottengono per integrazione come

$$\varphi \mapsto \int_M \varphi d\nu$$

ove $d\nu$ è una densità positiva (ad esempio una forma di volume nel caso orientabile). Se la varietà M è simplettica abbiamo un modo naturale (che dipende solo dalla struttura di Poisson) per definire queste distribuzioni, a partire dalla forma di volume indotta dalla forma simplettica; in generale questo non è possibile coi metodi usuali: vogliamo ora introdurre un concetto di integrale sulle varietà di Poisson che estenda l'usuale integrazione di forme su una varietà orientabile, e che ci consenta di esprimere in modo completo questi importanti esempi di distribuzioni.

Osserviamo che $\mathfrak{S}(M)$ non solo è un'algebra associativa graduata (rispetto alle usuali operazioni vettoriali e al prodotto $\wedge$ di tensori antisimmetrici) ma una DG algebra rispetto al differenziale usuale per i tensori controvarianti su una varietà di Poisson introdotto da Lichnerowicz (cfr. [64]) e da noi definito nel §II-4 direttamente sulle algebre di Poisson; poiché è definito in termini delle parentesi di Schouten dobbiamo preliminarmente verificare la compatibilità di questa operazione con la simpletticità dei tensori da noi considerati.

Proposizione 5.1.1 *Se* $P \in \mathfrak{S}^p(M)$ *e* $Q \in \mathfrak{S}^q(M)$ *allora* $[P,Q] \in \mathfrak{S}^{p+q-1}(M)$ *(parentesi di Schouten).*

DIMOSTRAZIONE: Utilizziamo la formula di Nijenhuis (che avevamo dimostrato nel §II-4) per le parentesi di Schouten: precisamente

$$(*) \qquad i_{[P,Q]}\alpha = (-1)^{q(p+1)} i_P d i_Q \alpha + (-1)^p i_Q d i_P \alpha - i_{P\wedge Q}\alpha$$

Ora, per ipotesi e per il lemma §4.1.6, P e Q sono tali che $i_S^*\alpha = 0$ se allora $i_P\alpha = i_Q\alpha = 0$ (ove $i_S : S \longrightarrow M$ è una foglia simplettica fissata e $\alpha \in \Omega^1(M)$ una forma differenziale). Per avere la nostra tesi basterà mostrare che anche $i_{[P,Q]}\alpha = 0$. Ma

$$i_P d i_Q \alpha = 0 \qquad \text{e} \qquad i_Q d i_P \alpha = 0$$

Inoltre

$$i_{P\wedge Q}\alpha = i_P i_Q \alpha = 0$$

e quindi, per la (*), $i_{[P,Q]}\alpha = 0$.

QED

In particolare, per il lemma §4.1.5, $[\pi, P]$ è ancora un tensore simplettico, se lo è P. Allora, per l'identità di Jacobi graduata relativa alle parentesi di Schouten, la mappa

$$d_\pi P = -[\pi, P]$$

definisce un differenziale nell'algebra graduata dei tensori simplettici. Abbiamo cioè un complesso

$$0 \longrightarrow C^\infty(M) \xrightarrow{d_\pi} \mathfrak{S}(M) \xrightarrow{d_\pi} \mathfrak{S}^2(M) \xrightarrow{d_\pi} \cdots \xrightarrow{d_\pi} \mathfrak{S}^n(M) \longrightarrow 0$$

sulla varietà di Poisson M.

Ovviamente questo complesso non è l'usuale complesso che calcola la coomologia di Poisson della varietà, ma solo un suo sotto-complesso: la sua coomologia, che denoteremo con $H_S(M)$ verrà detta *coomologia simplettica* della varietà di Poisson M; naturalmente se P è un cociclo simplettico dà anche luogo ad una classe di coomologia di Poisson e quindi abbiamo una mappa

$$H_S(M) \longrightarrow H_\pi(M)$$

dove, seguendo la notazione usuale, abbiamo denotato con H_π la coomologia di Poisson della varietà. Questa mappa in generale non è iniettiva: infatti possono esistere cocicli simplettici (che in particolare sono cocicli per la coomologia di Poisson) che danno luogo a classi di coomologia non banali in $H_S(M)$ ma per i quali esistono cobordi di Poisson che banalizzano i corrispondenti elementi di $H_\pi(M)$. Inoltre, dato che un cociclo di Poisson può non essere simplettico come tensore, questo morfismo di algebre (differenziali graduate) non è in generale nemmeno suriettivo.

Scriviamo esplicitamente il differenziale d_π calcolandone il valore su un tensore simplettico P contratto su una forma differenziale $\omega_0 \wedge ... \wedge \omega_p$, utilizzando la formula data al §II-4.

$$\begin{aligned}\langle d_\pi P, \omega_0 \wedge ... \wedge \omega_p\rangle = &\sum_{i=0}^{p}(-1)^i \pi(\omega_i, di_P\omega_1 \wedge ... \wedge \widehat{\omega_i} \wedge ... \wedge \omega_p) + \\ &+ \sum_{i<j}^{0...p}(-1)^{i+j}\langle P, \{\omega_i, \omega_j\} \wedge ... \wedge \widehat{\omega_i} \wedge ... \widehat{\omega_j} \wedge ... \wedge \omega_p\rangle\end{aligned}$$

Esempio. $H_S^0(M)$ di una varietà di Poisson è esattamente lo spazio delle funzioni di Casimir: infatti si tratta delle funzioni $f \in C^\infty(M)$ tali che $0 = d_\pi f = -[\pi, f] = -X_f$ che equivale a $f \in \operatorname{Cas} M$.

Esempio. $H_S^1(M)$ di una varietà di Poisson è l'algebra di Lie quoziente dell'algebra dei campi simplettici canonici modulo quelli hamiltoniani:

$$H_S^1(M) = \frac{(\operatorname{Can} M \cap \mathfrak{S}(M))}{\operatorname{Ham} M}$$

Infatti è per definizione il quoziente degli 1-cicli, cioè dei campi simplettici tali che $[\pi, X] = 0$ modulo i campi simplettici della forma $Y = -[\pi, f] = -X_f$, vale a dire dei campi hamiltoniani. Resta solo da osservare che $[\pi, X] = 0$ equivale alla canonicità, il che è ovvio:

$$\langle[\pi, X], \omega_0 \wedge \omega_1\rangle = \pi(\omega_0, i_X\omega_1) - \pi(\omega_1, i_X\omega_0) - i_X\{\omega_0, \omega_1\} = 0$$

implica

$$X\{f, g\} = i_X\pi(df, dg) = \pi(df, i_X dg) - \pi(dg, i_X df) = \{f, Xg\} + \{Xf, g\}$$

cioè la canonicità di X.

Si noti che $H_S^1(M)$ è in generale diverso da $H_\pi^1(M)$, perché, come abbiamo osservato, ossono esistere campi canonici non simplettici; il solito esempio della varietà nulla ci offre $H_S^1(M) = 0$ ma $H_\pi^1(M) = \mathfrak{X}(M)$: questo rende conto in modo evidentissimo della diversità fra la coomologia di Poisson e quella simplettica.

Esempio. Dato che $[\pi, \pi] = 0$ (per definizione di tensore di Poisson) π induce una classe di coomologia $[\pi] \in H_S^2(M)$.

In generale la coomologia di Poisson non è funtoriale, nel senso che una mappa di Poisson non induce una mappa in coomologia, se non sotto ipotesi restrittive:

Proposizione 5.1.2 *Una mappa di Poisson $F : M \longrightarrow N$ che sia un diffeomorfismo locale induce un morfismo $F^* : H_\pi(N) \longrightarrow H_\pi(M)$ in coomologia di Poisson.*

DIMOSTRAZIONE: Infatti se F è localmente un diffeomorfismo, la sua mappa tangente in ciascun punto è un isomorfismo di spazi vettoriali, e quindi possiamo assegnare alla classe di coomologia di Poisson $[P] \in H_\pi^p(N)$ la classe generata dal tensore F^*P definito come

$$dF \circ P \circ F : M \longrightarrow \bigwedge^p TM$$

Che questo tensore sia un cociclo per la coomologia di Poisson è facile a vedersi:

$$[\pi^M, F^*P] = [F^*\pi^N, F^*P] = F^*[\pi^N, P] = 0$$

perché $F \in P^\infty(M, N)$ e quindi $dF\pi^M = \pi^N \circ F$ come segue dalla

$$F^*\{f, g\} = \{F^*f, F^*g\}$$

QED

In generale non è possibile effettuare il *push-forward* di un tensore se non con un tensore ad esso relazionato. Secondo la nostra interpretazione, il motivo di ciò ha la sua radice nel poter essere la mappa

$$\pi^\# : \Omega^1(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

non suriettiva: se lo fosse potremmo infatti (a meno di alcune verifiche di buona definizione) chiudere il diagramma

$$\begin{tikzcd} \Omega^1(N) \arrow[r, "F^*"] \arrow[d, "\pi^\#"] & \Omega^1(M) \arrow[d, "\pi^\#"'] \\ \mathfrak{X}(N) & \mathfrak{X}(M) \end{tikzcd}$$

Limitandoci a considerare i tensori simplettici questa possibilità non ci è più preclusa.

Avevamo osservato con degli esempi nel §I-1, che le mappe di Poisson "tendono ad essere sottoimmersioni (mentre quelle simplettiche tendono ad essere immersioni): questa è una ipotesi che include come caso particolare i diffeomorfismi locali e che permette di generalizzare, una volta che si passi dalla coomologia di Poisson alla coomologia simplettica da noi considerata, la proposizione precedente.

Dunque consideriamo la categoria i cui oggetti sono le varietà di Poisson ed i cui morfismi le sottoimmersioni di Poisson fra varietà di Poisson; vogliamo costruire un funtore da questa categoria alla categoria delle algebre differenziali graduate, o più precisamente, alla categoria di algebre differenziali graduate formata dai complessi dei tensori simplettici su una varietà di Poisson.

Consideriamo una varietà di Poisson M: per definizione l'algebra $\mathcal{E} = C^\infty(M)$ è un'algebra di Poisson; anche la sottoalgebra $\mathcal{D} = C_c^\infty(M)$ delle funzioni a supporto compatto è un'algebra di Poisson, infatti è un ideale per la struttura associativa, dato che $\operatorname{supp} fg \subset \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g$; ma l'identità di Leibniz per le parentesi di Poisson implica la medesima conclusione per la struttura di Lie:

$$\operatorname{supp}\{f, g\} \subset \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g$$

Dunque $\mathcal{D}$ è pure un'algebra di Poisson.

Consideriamo ora due varietà di Poisson M e N, e lo spazio $P^\infty(M, N) \subset C^\infty(M, N)$ delle funzioni differenziabili di Poisson, cioè delle $F : M \longrightarrow N$ tali che

$$\{F^*f, F^*g\}_M = F^*\{f, g\}_N$$

Le seguenti proprietà sono immediate:

Proposizione 5.1.3 *Se $F \in P^\infty(M, N)$ e $G \in P^\infty(N, P)$ allora $G \circ F \in P^\infty(M, P)$. Se $F \in P^\infty(M, N)$ è suriettiva e $G \circ F \in P^\infty(M, P)$ allora $G \in P^\infty(N, P)$.*

Notiamo tuttavia che, sebbene $F \in P^\infty(M, N)$ preservi le parentesi di Poisson la sua immagine $\operatorname{im} F \subset N$ non è in generale una unione di foglie simplettiche (un *insieme saturo* come si dice in teoria delle fogliazioni, cfr. [85]). In effetti una foglia simplettica è un insieme di punti connessi per cammini da una curva il cui campo tangente, a tratti, sia hamiltoniano; se dunque $F(x) \in \operatorname{im} F$ e $y \in S_{F(x)}$ appartiene alla foglia passante per $F(x)$ possiamo certamente trovare un cammino (per semplicità supponiamo che consista di un sol tratto) il cui campo tangente sia X_h; certamente possiamo sollevare il campo X_h al campo X_{F^*h} su M intorno a x, ma in generale quest'ultimo non sarà un campo completo, nemmeno se X_h lo è, sicché non potremo sollevare l'intera curva da

N a M e quindi non avremo alcuna garanzia che il punto y sia nell'immagine di F.

Questo medesimo ragionamento mostra tuttavia che im F è unione di sottoinsiemi aperti in foglie simplettiche. Ad esempio se consideriamo l'inclusione $U \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ di un aperto nella varietà simplettica $\mathbb{R}^{2n}$ campi vettoriali completi in $\mathbb{R}^{2n}$ non si solleveranno in generale a campi completi in U.

Queste osservazioni, dovute ad A. Weinstein, ci inducono a formulare la definizione seguente, pure dovutagli (cfr. [17])

Definizione 5.1.4 *Una mappa di Poisson $F : M \longrightarrow N$ è* completa *se per ogni $h \in C^\infty(N)$ l'essere il campo vettoriale X_h completo implica che lo sia anche X_{F^*h}.*

Chiaramente se una mappa è completa possiamo integrare i flussi dei campi hamiltoniani sollevati a M e quindi comporli per ottenere un cammino che congiunga i punti le cui immagini appartengono ad una medesima foglia nell'immagine di N: dunque (rammentando che una foglia è l'insieme dei punti fra loro congiungibili con cammini hamiltoniani a tratti, cfr. I-3.5)

Proposizione 5.1.5 *L'immagine di una mappa di Poisson completa è unione di foglie simplettiche.*

Esempio. Se $F : M \longrightarrow N$ è di Poisson e se il morfismo di algebre associative $F^* : C^\infty(N) \longrightarrow C^\infty(M)$ porta funzioni a supporto compatto in funzioni a supporto compatto allora F è completa.

Esempio. $F : M \longrightarrow \mathbb{R}$ allora è completa se e solo se lo è il campo X_F. Infatti se F è completa allora il campo X_i ove $i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è l'identità, è banale (la struttura di Poisson su $\mathbb{R}$ è l'unica possibile, cioè quella nulla), quindi completo, dunque $X_{F^*i} = X_F$ è completo. Se invece X_F è completo allora, per ogni $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ abbiamo

$$X_{F^*h} = X_{h \circ F} = \pi^\# d(h \circ F) = \pi^\# \left(\frac{dh}{dx} dF \right) = \frac{dh}{dx} X_F$$

Ma la derivata di h composta con F è costante lungo le traiettorie di X_F, sicché X_{F^*h} è un multiplo del campo completo X_F, dunque è completo anch'esso.

Notiamo inoltre che una mappa di Poisson $F \in P^\infty(M, N)$ non preserva le foglie simplettiche: ad esempio se consideriamo la proiezione $\mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dalla varietà simplettica $\mathbb{R}^{2n}$ alla varietà nulla $\mathbb{R}^n$ abbiamo una mappa di Poisson che "diffonde l'unica foglia simplettica di $\mathbb{R}^{2n}$ nelle foglie simplettiche di $\mathbb{R}^n$, vale a dire nei suoi punti.

Definizione 5.1.6 *Una funzione $F \in C^\infty(M,N)$ si dice* funzione simplettica *se l'immagine di una foglia simplettica di S per tramite di F è contenuta in una foglia simplettica di N. Denotiamo con $S^\infty(M,N)$ lo spazio delle funzioni simplettiche.*

Ad esempio, se S è simplettica e M è qualsiasi allora $S^\infty(S,M)$ è l'insieme delle funzioni costanti, cioè si identifica con M, mentre $S^\infty(M,S) = C^\infty(M,S)$; se invece M è qualsiasi e N è nulla, $S^\infty(N,M) = C^\infty(N,M)$, mentre $S^\infty(M,N)$ è costituito dalle funzioni che sono costanti sulle foglie simplettiche: in particolare

Proposizione 5.1.7 *$S^\infty(M,\mathbb{R}) = \operatorname{Cas} M$.*

Questo mostra come la classe delle funzioni simplettiche è assai più ristretta della classe delle funzioni di Poisson: per rimediare all'assenza di funtorialità della coomologia di Poisson avremmo teoricamente due vie possibili: cambiare l'anello delle funzioni, ad esempio restringerci a quelle simplettiche, o cambiare il complesso di cocatene che calcola la coomologia di Poisson: scegliamo qui un compromesso fra queste due possibilità.

Consideriamo di nuovo una funzione di Poisson $F \in P^\infty(M,N)$ fra due varietà di Poisson M e N:

$$\{F^*f, F^*g\}_M = F^*\{f,g\}_N$$

Abbiamo visto che in generale non preserva le foglie simplettiche: comunque preserva i loro spazi tangenti, che è quel che ci basta, perché qui ci interessano i campi simplettici.

In effetti possiamo parafrasare questa relazione in termini di campi hamiltoniani: per ogni $f \in C^\infty(N)$ i campi X_f e X_{F^*f} sono in F-relazione

$$X_f = F^* X_{F^*f}$$

ovvero in termini dell'operatore $\pi^\# : T^*M \longrightarrow TM$ come

$$\pi^{N\#}_{F(x)} = (dF)_x \pi^{M\#}_x F^*_{F(x)}$$

In particolare

Lemma 5.1.8 *Se $x \in M$ allora lo spazio H_xM (immagine della distribuzione singolare dei campi hamiltoniani) ha come immagine, per tramite di $dF : TM \longrightarrow TN$, un sottospazio di $H_{F(x)}N$.*

In altre parole i vettori generati dai vettori hamiltoniani in un punto sono mandati in vettori hamiltoniani nell'immagine di quel punto.

Corollario 5.1.9 *Se $F \in P^\infty(M,N)$ allora*

$$\mathrm{rango}_x M \geq \mathrm{rango}_{F(x)} N$$

ove $\mathrm{rango}_x M$ *è il rango del punto* $x \in M$*.*

DIMOSTRAZIONE: Basta osservare che l'immagine di T_xS_x per tramite della mappa dF coincide con $T_{F(x)}S_{F(x)}$; che sia contenuta segue dal lemma. Inoltre se $X_{F(x)} \in T_{F(x)}S_{F(x)}$ allora è ovvio che esiste un $X_x \in T_xS$ tale che $dFX_x = X_{F(x)}$, dato che possiamo estendere $X_{F(x)}$ ad un campo hamiltoniano intorno a $F(x)$, e quindi ad una immagine, per tramite di dF di un campo hamiltoniano intorno a x.

QED

Ad esempio se il rango di N è massimo:

Corollario 5.1.10 *Se $F \in P^\infty(M,S)$ ove S è simplettica allora F è una sotto-immersione.*

Notiamo infine che

Corollario 5.1.11 *Se $F \in P^\infty(M,N)$ è una sottoimmersione allora lo spazio $H_{F(x)}N$ ($x \in M$) è l'immagine di H_xM.*

Questi ultimi due risultati ci spingono a restringere la classe dei morfismi nella nostra categoria alle sottoimmersioni di Poisson, che denotiamo $P_S^\infty(M,N)$.

Sia $F \in P_S^\infty(M,N)$ di Poisson: possiamo, per mezzo di essa, ovviamente effettuare il *pull-back* di un campo hamiltoniano[1] su N di hamiltoniana $h \in C^\infty(N)$:

$$F^*X_h := X_{F^*h}$$

ove $F^*h = h \circ F$ è il *pull-back* della 0-forma h. Estendiamo questa operazione ai campi simplettici per $C^\infty(N)$-linearità come

$$F^*(fX_h) := (F^*f)X_{F^*h}$$

Otteniamo in questo modo una mappa di moduli

$$F^* : \mathfrak{S}(N) \longrightarrow \mathfrak{S}(M)$$

Notiamo che sui campi hamiltoniani abbiamo

$$F^*X_f = X_{F^*f} = \pi^{M\#}dF^*f = \pi^{M\#}F^*df = \pi^{M\#}F^*(\pi^{N\#})^{-1}X_f$$

da cui

[1]Questo è vero per qualsiasi mappa di Poisson.

Proposizione 5.1.12 $F^*X = \pi^{M\#}F^*(\pi^{N\#})^{-1}X$

Usando questa proposizione possiamo dimostrare che la mappa $F^* : \mathfrak{S}(N) \longrightarrow \mathfrak{S}(M)$ è ben definita: in effetti il suo valore su un campo $X \in \operatorname{im}\pi^\#$ si può definire come

$$F^*X = \pi^{M\#}F^*\omega$$

ove $\omega \in \Omega(M)$ è tale che $\pi^{N\#}\omega = X$; ovviamente questo potrebbe dipendere dalla scelta di ω: un'altra forma che si proietti in X è necessariamente del tipo $\omega + \gamma$ ove $\gamma \in \ker \pi^{N\#}$, e quindi basta verificare che

$$\pi^{M\#}F^*\gamma = 0$$

Per vedere se un campo vettoriale è nullo, possiamo provare a mostrare che si annulla su ogni funzione (interpretandolo come derivazione nell'algebra delle funzioni differenziabili): calcoliamo cioè

$$\pi^{M\#}F^*\gamma(f)$$

ove $f \in C^\infty(M)$; allora

$$\begin{aligned}\pi^{M\#}F^*\gamma(f) &= \langle \pi^{M\#}F^*\gamma, df\rangle = -\langle F^*\gamma, \pi^{M\#}df\rangle \\ &= -\langle F^*\gamma, X_f^M\rangle = -\langle \gamma, dF(X_f^M)\rangle\end{aligned}$$

Ora rammentiamo che la mappa F è di Poisson, col che

$$dF\pi^{M\#}F^* = \pi^{N\#}$$

Ma F è una sottoimmersione, quindi possiamo supporre che $f = F^*\varphi$ sia il *pull-back* di una funzione $\varphi \in C^\infty(N)$: abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\pi^\# F^*\gamma(f) &= -\langle \gamma, dF(X_f)\rangle = -\langle \gamma, dF(\pi^\# df)\rangle \\ &= -\langle \gamma, dF(\pi^\# dF^*\varphi)\rangle = -\langle \gamma, dF(\pi^\# F^* d\varphi)\rangle \\ &= -\langle \gamma, \pi^\# d\varphi\rangle = \langle \pi^\#\gamma, d\varphi\rangle = 0\end{aligned}$$

Quindi F^*P è ben definita.

Proposizione 5.1.13 *Se $F \in P_S^\infty(M,N)$ allora $F^* : \mathfrak{S}(N) \longrightarrow \mathfrak{S}(M)$ è un morfismo di moduli differenziali.*

DIMOSTRAZIONE: Che si tratti di un morfismo segue dal fatto che una mappa di Poisson induce un morfismo di algebre di Poisson:

$$\begin{aligned}F^*(fX) &= F^*\left(f\sum_i f_i X_{h_i}\right) = \sum_i F^*(ff_i)X_{F^*h_i} \\ &= \sum_i F^*(f)F^*(f_i)X_{F^*h_i} = F^*(f)F^*(X)\end{aligned}$$

Inoltre la $F^*X_f = X_{F^*f}$ significa esattamente che il diagramma

$$\begin{tikzcd} C^\infty(N) \arrow[r, "F^*"] \arrow[d, "d_\pi"] & C^\infty(M) \arrow[d, "d_\pi"'] \\ \mathfrak{S}(N) \arrow[r, "F^*"] & \mathfrak{S}(M) \end{tikzcd}$$

è commutativo.

QED

Definizione 5.1.14 *Il morfismo di moduli $F^* : \mathfrak{S}(N) \longrightarrow \mathfrak{S}(M)$ indotto da una mappa di Poisson si dice* pull-back.

Il motivo di questa terminologia sta nel seguente

Teorema 5.1.15 *Se $X \in \mathfrak{S}(N)$ e $F \in P_S^\infty(M,N)$ allora*

$$dF \circ F^*X = X \circ F$$

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo che $X = \sum_i f_i X_{h_i}$ con $f_i, h_i \in C^\infty(N)$:

$$dF \circ F^*X = \sum_i dF \circ f_i X_{h_i} = \sum_i (f_i \circ F) F^* X_{h_i} = \sum_i (f_i \circ F) X_{F^*h_i} = X \circ F$$

QED

Poiché lo spazio dei tensori simplettici è l'algebra esterna sul modulo dei campi simplettici, ponendo

$$F^*(P \wedge Q) := F^*P \wedge F^*Q$$

possiamo estendere il *pull-back* ad una mappa di DG algebre

$$F^* : \mathfrak{S}^\bullet(N) \longrightarrow \mathfrak{S}^\bullet(M)$$

Corollario 5.1.16 *Se P è un tensore simplettico su una varietà di Poisson N e se $F : M \longrightarrow N$ è una mappa di Poisson allora esiste un unico* pull-back *F^*P simplettico su M.*

Mostriamo ora che $\mathfrak{S}$ è un funtore controvariante dalla categoria delle varietà di Poisson alla categoria delle DG algebre.

Proposizione 5.1.17 *Se $F \in P_S^\infty(M,N)$ e $G \in P_S^\infty(N,P)$ allora*

(1) $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$.

(2) *Se* $F = Id : M \longrightarrow M$ *allora* $F^* = Id : \mathfrak{S}(M) \longrightarrow \mathfrak{S}(M)$.

Dimostrazione: La (1) è facile a mostrarsi sui campi hamiltoniani

$$(GF)^* X_h = X_{(GF)^* h} = X_{F^* G^* h} = F^* X_{G^* h} = F^* G^* X_h$$

e, per linearità, sui campi simplettici

$$(GF)^*(fX_h) = (GF)^* f (GF)^* X_h = (F^* G^* f)(F^* G^* X_h) = F^* G^* (fX_h)$$

Se F è l'identità allora $F^* X_h = X_h$ e $F^*(fX_h) = fX_h$ col che F^* pure è l'identità. In ambedue i casi l'estensione ai tensori simplettici qualsiasi segue dalla definizione.

QED

Teorema 5.1.18 *Se* $P \in \mathfrak{S}^p(N)$, $Q \in \mathfrak{S}^q(N)$ *allora*

$$F^*[P, Q] = [F^* P, F^* Q]$$

ove [ ] *sono le parentesi di Schouten.*

Dimostrazione: Per $p = 1$ e $q = 0$ abbiamo

$$F^*[gX_h, f] = F^*(gX_h f) = F^*(g\{f, h\}) = F^* g \{F^* f, F^* h\} = [F^*(gX_h), F^* f]$$

Passiamo ora al caso $p = q = 1$: ovviamente il commutatore di campi hamiltoniani soddisfa la tesi del teorema:

$$\begin{aligned} F^*[X_f, F_g] &= F^* X_{\{f,g\}} = X_{F^*\{f,g\}} \\ &= X_{\{F^* f, F^* g\}} = [X_{F^* f}, X_{F^* g}] \\ &= [F^* X_f, F^* X_g] \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} F^*[fX_h, X_g] &= F^*(f[X_h, X_g] + \{f, g\} X_h) \\ &= F^* f [F^* X_h, F^* X_g] + F^*\{f, g\} F^* X_h \\ &= F^* f [F^* X_h, F^* X_g] + \{F^* f, F^* g\} F^* X_h \\ &= [F^* f F^* X_h, F^* X_g] \end{aligned}$$

In modo analogo per l'altra variabile, col che la tesi è dimostrata per $p = q = 1$.

Procediamo ora per induzione su q nel caso $p = 1$: per prima cosa rammentiamo la formula (§II-4)

$$[P, R \wedge X] = [P, R] \wedge X + (-1)^{r(p+1)} R \wedge [P, X]$$

quindi decomponiamo Q in $R \wedge X$ (per semplicità supponiamo un solo addendo) con $X \in \mathfrak{S}^1(N)$; allora, per ipotesi induttiva e il caso di grado uno:

$$\begin{aligned} F^*[P, Q] &= F^*[P, R] \wedge F^*X + (-1)^{r(p+1)} F^*R \wedge F^*[P, X] \\ &= [F^*P, F^*R] \wedge F^*X + (-1)^{r(p+1)} F^*R \wedge [F^*P, F^*X] \\ &= [F^*P, F^*R \wedge F^*X] = [F^*P, F^*Q] \end{aligned}$$

Si noti che questo ragionamento funziona per p qualsiasi e quindi il teorema è dimostrato per ogni p, q.

QED

Esempio. Se $F \in P^\infty(M, N)$ e π^M e π^N sono i tensori di Poisson su queste varietà allora $F^*\pi^N = \pi^M$. Infatti abbiamo già notato come

$$\pi^{N\#}_{F(x)} = (dF)_x \pi^{M\#}_x F^*_{F(x)}$$

e questo equivale a $F^*\pi^N = \pi^M$.

La $F^*X_f = X_{F^*f}$ si generalizza nel

Lemma 5.1.19 *Il* pull-back *commuta con il differenziale hamiltoniano.*

DIMOSTRAZIONE: Per definizione dell'operatore d_π, se $P \in \mathfrak{S}^p(N)$:

$$F^* d_{\pi^N} P = -F^*[\pi^N, P] = -[F^*\pi^N, F^*P] = -[\pi^M, F^*P] = d_{\pi^M} F^*P$$

in virtù del teorema e dell'esempio precedenti.

QED

Torniamo ora a considerare la coomologia simplettica:

Teorema 5.1.20 *Una sottoimmersione differenziabile di Poisson $F : M \longrightarrow N$ induce un omomorfismo $F^* : H_S(N) \longrightarrow H_S(M)$.*

DIMOSTRAZIONE: Naturalmente si pone

$$F^*[P] = [F^*P]$$

utilizzando il *pull-back* appena definito; questa definizione è effettivamente ben posta per il lemma, e induce un morfismo di algebre, dato che

$$F^*(P \wedge Q) = F^*P \wedge F^*Q$$

per definizione

QED

Corollario 5.1.21 *Se $F : M \longrightarrow N$ è un diffeomorfismo di Poisson allora $H_S(M) \cong H_S(N)$.*

DIMOSTRAZIONE: Basta comporre F^* con F^{*-1} per ottenere l'isomorfismo voluto.

QED

Osserviamo che una qualsiasi forma differenziale $\alpha \in \Omega(M)$ induce un tensore su M come $\pi^\# \alpha$, che è sempre simplettico, dato che appartiene all'immagine di $\pi^\#$: se la forma α è chiusa allora $d_\pi \pi^\# \alpha = -\pi^\# d\alpha = 0$ (cfr. §II-4.7) sicché il tensore corrispondente genera una classe di coomologia simplettica; abbiamo quindi definito un morfismo di algebre differenziali graduate

$$\pi^\# : H_{dR}(M) \longrightarrow H_S(M)$$

dalla coomologia di de Rham a quella della varietà. In particolare, dato che se M è simplettica allora $\pi^\#$ è un isomorfismo ne deduciamo che

Proposizione 5.1.22 *Se M è una varietà simplettica allora $H_{dR}(M) \cong H_S(M)$.*

Notiamo che la coomologia simplettica contiene ovviamente meno informazioni della coomologia di Poisson usuale: ad esempio il grado massimo di una classe di coomologia è il *rango generico* della varietà di Poisson: ricordiamo che i punti regolari di una varietà di Poisson formano un insieme denso, sul quale il rango è costante: questa costante è precisamente il rango generico della varietà (se si vuole è semplicemente il massimo valore che il rango può assumere).

Ovviamente se M ha rango generico $2r$ nessun tensore $P \in \bigwedge^p TM$ con $p > 2r$ potrà essere simplettico, perché nessuna foglia simplettica "ha abbastanza dimensioni per ospitarne la restrizione; dunque

Proposizione 5.1.23 *Se $2r$ è il rango generico di una varietà di Poisson M allora $H^k_S(M) = 0$ per ogni $k > 2r$.*

Il rango generico va così considerato come la "dimensione di Poisson della varietà, almeno dal punto di vista coomologico.

5.2 Integrazione su catene simplettiche

Vogliamo ora costruire gli oggetti "lungo i quali integrare i tensori simplettici: l'approccio che seguiremo è sulla falsa riga della teoria omologica singolare; precisamente, consideriamo gli spazi $S_p(M)$ delle catene singolari di dimensione p sulla varietà M.

Definizione 5.2.1 *Un* simplesso simplettico *di ordine p è un p-simplesso singolare la cui immagine sia contenuta in una singola foglia simplettica di M; una* catena simplettica *di ordine n è una combinazione lineare*

$$\sum_i a_i c_i$$

di simplessi simplettici a coefficienti reali.

Dunque restringiamo la nostra attenzione non già a tutte le catene singolari, ma solo a quelle le cui immagini siano contenute interamente in una singola foglia simplettica: otteniamo in questo modo un sottocomplesso del complesso singolare su M. Notiamo ora che il bordo di una catena simplettica è ancora una catena simplettica, e quindi possiamo considerare l'*omologia singolare delle foglie*, i cui gruppi denotiamo con $H_n^L(M)$, semplicemente passando all'omologia del complesso delle catene simplettiche rispetto al bordo usuale.

Si noti che *l'omologia delle foglie non è l'omologia relativa rispetto alle foglie simplettiche*: infatti una catena simplettica localizzata in una foglia $S \subset M$ è certamente una catena relativa in (M, S), tuttavia una catena relativa non è necessariamente simplettica, dato che solo il suo bordo deve essere contenuto in S, mentre una catena simplettica deve essere essa stessa interamente contenuta nella foglia S.

Esempio. Se M è simplettica allora le foglie sono esattamente le componenti connesse e quindi i simplessi e le catene simplettiche sono esattamente i simplessi e le catene singolari sullo spazio topologico M: l'omologia delle foglie coincide in questo caso con l'omologia singolare.

Di contro si noti che se la struttura simplettica è nulla allora non vi sono catene simplettiche di ordine positivo (a parte quella nulla) e che le 0-catene coincidono con i singoli punti della varietà: l'omologia delle foglie è quindi nulla in grado positivo, mentre $H_0^L(M)$ è lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^M$ generato dai punti di M.

Teorema 5.2.2 *L'omologia singolare delle foglie $H^L(M)$ coincide con l'omologia singolare (ordinaria) dell'insieme M dotato della topologia generata dagli insiemi $A \cap S$ ove A è un aperto della topologia di M indotta dalla struttura di varietà e S è una foglia simplettica.*

DIMOSTRAZIONE: La topologia descritta nell'enunciato è la *topologia delle foglie* nota in teoria delle fogliazioni: la tesi dell'enunciato è immediata non appena si sia notato che le uniche catene che restano continue rispetto a questa nuova topologia sono esattamente quelle simplettiche: infatti se $s : \Delta^p \longrightarrow M$ è un simplesso simplettico[2] allora $s^{-1}(A \cap S)$ è aperto solo se $\operatorname{im} s \subset S$ perciò $s^{-1}(A \cap S) = s^{-1}(A)$ che è aperto per continuità di s nella topologia di M indotta dalla struttura di varietà.

QED

Notiamo in particolare che nella topologia delle foglie ciascuna foglia è una componente connessa, quindi possiamo scrivere

$$H^L(M) = \oplus_{S \in \tilde{M}} H(S)$$

come somma diretta sull'insieme delle foglie simplettiche di M delle omologie singolari delle singole foglie.

Corollario 5.2.3 *Il numero di Betti* $\dim H_0^L(M)$ *è la cardinalità dell'insieme delle foglie simplettiche.*

Dato che l'omologia delle foglie è esattamente l'omologia singolare rispetto ad una nuova topologia su M, le proprietà funtoriali usuali restano valide, avendo l'accortezza di intendere la continuità nel senso della nuova topologia: ad esempio

Teorema 5.2.4 *Se M e N sono varietà di Poisson, una funzione $F \in P^\infty(M, N)$ induce un omomorfismo $F_* : H^L(M) \longrightarrow H^L(N)$ in omologia; se F è un diffeomorfismo di Poisson allora i gruppi di omologia delle foglie sono isomorfi.*

Notiamo che, così come avevamo osservato per la coomologia simplettica, anche l'omologia delle foglie svanisce in grado superiore al rango generico della varietà di Poisson: in effetti la dimensione dell'insieme M dotato della topologia delle foglie non è costante, a meno che la varietà di Poisson M non sia regolare, e quindi componenti connesse diverse (cioè foglie simplettiche) per questa topologia possono avere dimensioni diverse; il valore massimo di questa dimensione è proprio il rango simplettico della varietà.

Vogliamo ora mostrare come sia possibile integrare un tensore simplettico lungo una catena simplettica. Consideriamo il caso di un simplesso simplettico, potendosi questo estendere al caso generale semplicemente per linearità: sia dunque $c \in S^p(M)$ un simplesso simplettico di ordine p e sia $P \in \mathfrak{S}^p(M)$ un tensore simplettico pure di ordine p; per definizione, l'immagine di c sta in una singola foglia simplettica S, e la restrizione di P ad un qualsiasi punto di

[2] Δ^p rappresenta il simplesso geometrico standard in $\mathbb{R}^p$: a seconda delle definizioni di omologia singolare può considerarsi come un tetraedro, un cubo o un poliedro: questa distinzione è irrilevante ai nostri fini.

S fornisce un elemento di $\mathfrak{X}^p(S)$. Ma S è simplettica rispetto alla restrizione σ della struttura di Poisson di M, per cui possiamo considerare l'isomorfismo $\sigma^\flat : TS \longrightarrow T^*S$ e usarlo per trasformare il tensore $P|_S$ in una forma differenziale di ordine p su S, che possiamo quindi integrare lungo c:

$$\int_c P = \int_c \sigma^\flat(P|_S)$$

Proposizione 5.2.5 *Se $i_S : S \longrightarrow M$ è l'immersione della foglia nella varietà allora*

$$\int_c P = \int_c i_S^* \alpha$$

ove α è una forma differenziale tale che $\pi^\# \alpha = P$.

DIMOSTRAZIONE: Per prima cosa notiamo che una tale α deve esistere per il teorema §4.1.7: si noti che abbiamo esteso la mappa $\pi^\# : T^*M \longrightarrow TM$ ad una mappa $\bigwedge^p T^*M \longrightarrow \bigwedge^p TM$ tenendo conto del segno come

$$\langle \pi^\# \alpha, \omega_1 \wedge ... \wedge \omega_p \rangle = (-1)^p \langle \alpha, \pi^\# \omega_1 \wedge ... \wedge \pi^\# \omega_p \rangle$$

ove $\omega_i \in \Omega^1(M)$.

Per definizione, $\pi^\# \alpha = P$ sicché (per la commutatività del diagramma tracciato nella dimostrazione del teorema §4.1.7)

$$\sigma^\flat((\pi^\# \alpha)|_S) = i_S^* \alpha$$

da cui

$$\int_c P = \int_c \sigma^\flat(P|_S) = \int_c i_S^* \alpha$$

Resta da vedere che questo numero non dipende dalla forma α scelta nell'insieme $\pi^{\#-1}(P)$, il che è ovvio, dato che l'integrale dipende solo dalla restrizione di P e dall'isomorfismo $\sigma^\flat$:

$$\sigma^\flat((\pi^\# \beta)|_S) = \sigma^\flat((\pi^\# \alpha)|_S)$$

QED

Ad esempio, se $X_f = \pi^\# df$ è un campo hamiltoniano in M e $c \subset S$ una 1-catena simplettica allora

$$\int_c X_f = \int_c \sigma^\flat(X_f|_S) = \int_c df|_S = \int_{\partial c} f|_S = f(x_1) - f(x_0)$$

se $\partial c = x_0 + x_1$.

In generale possiamo dare una versione simplettica del teorema di Stokes, che però sarà affetta dall'antisimmetricità tipica dell'ambiente simplettico:

Teorema 5.2.6 $\int_c d_\pi P + \int_{\partial c} P = 0$

DIMOSTRAZIONE: È una semplice applicazione del teorema di Stokes in omologia singolare:

$$\int_c d_\pi P = \int_c \sigma^\flat d_\pi P|_S = -\int_c d\sigma^\flat P|_S = -\int_{\partial c} \sigma^\flat P|_S = -\int_{\partial c} P$$

QED

Questa antisimmetricità non è eliminabile cambiando le scelte degli isomorfismi locali (ad esempio considerando $-\sigma^\flat$ in luogo di $\sigma^\flat$).

Ovviamente una prima conseguenza del teorema di Stokes è che la mappa

$$\int : S_k^L(M) \times \mathfrak{S}_{sc}^k(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

passa in omologia, inducendo una mappa bilineare

$$B : H_k^L(M) \times H_S^k(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

come

$$B([c],[P]) = \int_c P$$

che è ben definita, dato che se $P' \in [P]$ e $c' \in [c]$:

$$\begin{aligned} B([c'],[P']) &= \int_{c'} P' = \int_{c+\partial b} (P + d_\pi Q) \\ &= \int_c P + \int_c d_\pi Q + \int_{\partial b} P + \int_{\partial b} d_\pi Q \\ &= B([c],[P]) + \int_c d_\pi (Q - P) - \int_b d_\pi^2 Q \\ &= B([c],[P]) \end{aligned}$$

($d_\pi P = d_\pi Q = 0$ e $d_\pi^2 = 0$).

Consideriamo ora un tensore simplettico P su M di grado massimo (dunque $P \in \mathfrak{S}^{2r}(M)$ ove $2r$ è il rango generico della varietà): in ciascuna foglia $S \subset M$ la forma differenziale $\omega = \sigma^\flat P_S$ è nulla (se $\dim S < 2r$) ovvero ha grado massimo; naturalmente la foglia S può non essere compatta (anche se M lo è) e quindi non è detto che sia possibile integrare ω su S.

Definizione 5.2.7 *Un sottoinsieme $N \subset M$ di una varietà di Poisson è* sezionalmente compatto *se per ogni foglia simplettica $S \subset M$ l'intersezione $S \cap N$ è compatta in N.*

Naturalmente su una varietà simplettica compattezza e compattezza sezionale coincidono, mentre su una varietà nulla ogni insieme è sezionalmente compatto.

Si noti che un insieme sezionalmente compatto può non essere compatto e che un insieme compatto può non essere sezionalmente compatto. Ad esempio se consideriamo la struttura di Lie–Poisson su $\mathfrak{so}(3)^*$, le cui foglie sono sfere concentriche di centro l'origine in $\mathbb{R}^3$, una retta per l'origine è un insieme sezionalmente compatto, dato che interseca ciascuna foglia in solo due punti antipodali. Viceversa se consideriamo la struttura di Poisson su $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ indotta dalla fogliazione ergodica, e consideriamo l'insieme N ottenuto proiettando il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$\{(x,y,z)\,|\,0 \leq x \leq \frac{1}{2},\, 0 \leq x \leq \frac{1}{2},\, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$$

Ovviamente N è compatto in quanto immagine di un compatto, ma la sua intersezione con una foglia S_φ (che è proiezione di un piano passante per l'asse $\{y = z = 0\}$ di $\mathbb{R}^3$ e formante un angolo φ irrazionale con il piano $\{z = 0\}$) è un insieme illimitato sul cilindro S_φ. Questo esempio dipende dal fatto che la topologia su una foglia non è quella indotta da quella di M:

Proposizione 5.2.8 *Se tutte le foglie simplettiche di una varietà di Poisson hanno la topologia indotta allora ogni insieme compatto è sezionalmente compatto.*

La dimostrazione è ovvia: se gli aperti di una qualsiasi foglia S sono esattemente le intersezioni degli aperti di M con S, un ricoprimento di $K \subset M$ induce un ricoprimento di $K \cap S$.

Evidentemente un tensore simplettico è sempre integrabile se il suo supporto è sezionalmente compatto: si noti che *la compattezza sezionale non coincide con la compattezza nella topologia delle foglie*; infatti un insieme con un numero infinito di componenti connesse non può essere compatto e quindi se l'insieme delle foglie non è finito è ben possibile che un insieme sezionalmente compatto non sia compatto nella topologia delle foglie perché, per quanto le sue componenti connesse siano compatte, ne possiede infinite. Invece, come è ovvio, ogni insieme compatto nella topologia delle foglie è sezionalmente compatto.

Notazione 5.2.9 *Denoteremo con $\mathfrak{S}^p_{sc}(M)$ lo spazio dei tensori di ordine p a supporto sezionalmente compatto e con $C^\infty_{sc}(M)$ lo spazio delle funzioni $\mathfrak{S}^0_{sc}(M)$.*

Notiamo ad esempio che un elemento di $C^{\infty 0}_{sc}(M)$ è una funzione $f \in C^\infty(M)$ tale che, per ogni foglia simplettica $S \subset M$, $\operatorname{supp} f \cap S$ sia compatto in S; per la proposizione precedente, su una varietà le cui foglie abbiano la topologia indotta, una funzione a supporto compatto è di questo tipo, ma non è vero il viceversa: se consideriamo su $\mathbb{R}^3$ la struttura di Poisson prodotto $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$ di una varietà simplettica e una nulla, la funzione $f(x, y, z) = \rho(x, y)$ (ove ρ è una funzione a supporto compatto in $\mathbb{R}^2$) non ha supporto compatto, dato che $\operatorname{supp} f = \operatorname{supp} \rho \times \mathbb{R}^1$, ma la sua restrizione a ciascuna foglia simplettica (cioè a ciascun piano parallelo al piano $\{z = 0\}$) ha supporto compatto, quindi f è a supporto sezionalmente compatto.

Ora possiamo chiaramente integrare un tensore simplettico a supporto sezionalmente compatto su una qualsiasi foglia simplettica, così come potevamo integrare un tensore simplettico lungo una catena singolare simplettica: ovviamente un tensore simplettico a supporto sezionalmente compatto può essere integrato anche su una catena singolare "infinita, cioè su una serie formale nell'insieme dei simplessi singolari simplettici.

Notiamo che le nostre varietà sono senza bordo, in particolare lo sono le foglie simplettiche: se $P \in \mathfrak{S}^{2r}_{cs}(M)$ e S è una foglia simplettica di dimensione $2r$ allora

$$\int_S d_\pi P = 0$$

Questo rende sempre sensata l'integrazione, lungo le foglie simplettiche, dei tensori a supporto sezionalmente compatto e anzi dimostra che l'integrale $\int_S P$ non dipende da P ma solo dalla sua classe di coomologia.

Consideriamo ora lo spazio $\tilde{M}$ delle foglie della varietà, cioè l'insieme $\tilde{M} = \{S_x\}_{x \in M}$ delle sue foglie simplettiche (che chiamiamo "spazio senza una reale giustificazione) e la proiezione canonica

$$M \longrightarrow \tilde{M}$$

Se ora $P \in \mathfrak{S}^{2r}_{sc}(M)$ possiamo definire una funzione $I : \tilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ come

$$I_P(S) = \int_S P$$

Otteniamo cioè una mappa che ad un tensore associa una funzione su $\tilde{M}$, una mappa lineare come è ovvio.

Teorema 5.2.10 *Se una varietà di Poisson M non è nulla, lo spazio vettoriale delle funzioni integrali della forma I_P si identifica con l'algebra* $\operatorname{Cas} M$ *delle funzioni di Casimir.*

DIMOSTRAZIONE: Se $P \in \mathfrak{S}_{sc}(M)$ allora $I_P : \tilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ è tale che, se $p : M \longrightarrow \tilde{M}$ è la proiezione, la funzione $I_P \circ p$ appartiene a $C^\infty(M)$, dato che P è un tensore e quindi una sezione differenziabile di un fibrato; ora la tesi segue immediatamente dal fatto che $I_P \circ p$ è costante sulle foglie simplettiche.

QED

Notiamo che se M è nulla allora l'unico tensore simplettico è 0 e quindi l'unica funzione integrale è la funzione nulla; viceversa le funzioni di Casimir su M sono tutte le funzioni differenziabili. Questa eccezionalità dipende dal fatto che le nostre costruzioni basate sui tensori simplettici non riescono a distinguere una varietà nulla da una varietà ridotta ad un sol punto.

La parentesi di Schouten di due elementi $P \in \mathfrak{S}^p_{sc}(M)$ e $Q \in \mathfrak{S}^q_{sc}(M)$ è un elemento di $\mathfrak{S}^{p+q-1}_{sc}(M)$: infatti la formula di Nijenhuis implica chiaramente che $\operatorname{supp}[P, Q] \subset \operatorname{supp} P \cap \operatorname{supp} Q$. Dunque il differenziale d_π rende gli spazi $\mathfrak{S}^p_{sc}(M)$ un complesso la cui coomologia è la *coomologia a supporto sezionalmente compatto* di M e si denota $H^p_{sc}(M)$.

Questa coomologia coincide con quella simplettica solo se ogni foglia della varietà è compatta: chiamiamo una varietà di Poisson siffatta *massimale*, mentre chiamiamo *minimale* una varietà di Poisson in cui tutte le foglie siano dense, come è il caso del $\mathbb{T}^3$ ergodico.

Notiamo che $\mathfrak{S}_{sc}$ non definisce un funtore, a differenza di $\mathfrak{S}$, perché il *pull-back* di tensori simplettici a supporto sezionalmente compatto non è ha in generale supporto sezionalmente compatto: ovviamente, restringendo i morfismi di varietà di Poisson alle funzioni "sezionalmente proprie otterremmo un funtore controvariante; notiamo comunque che $\mathfrak{S}_{sc}$ è da considerarsi un funtore covariante rispetto alle inclusioni di insiemi aperti $U \subset M$: infatti se $i_U : U \longrightarrow M$ è una tale inclusione, la mappa che a $P \in \mathfrak{S}_{sc}(U)$ associa il tensore simplettico ottenuto estendendo[3] P a zero esternamente a U definisce un morfismo di algebre $\mathfrak{S}_{sc}(U) \longrightarrow \mathfrak{S}_{sc}(M)$.

5.3 Omologia simplettica

Abbiamo già rilevato che l'omologia delle foglie è l'omologia singolare rispetto ad una certa topologia su M; vediamo quindi come le proprietà essenziali del funtore di omologia si inquadrano nel nostro contesto particolare.

La prima domanda che è naturale porsi è se esista una nozione di "invarianza omotopica per questa omologia: ovviamente, dato che nella topologia

[3] Precisamente, dato $P \in \mathfrak{S}_{sc}(M)$, basta estendere a zero ogni sua restrizione $P|_{U \cap S}$ dalle foglie di U a quelle di M.

delle foglie la varietà va supposta sconnessa (se è connessa è certamente simplettica) non ha senso parlare di omotopia se non sulle singole foglie (che sono connesse per archi). Possiamo comunque considerare la seguente

Definizione 5.3.1 *Una* omotopia simplettica *fra due funzioni* $f, g : M \longrightarrow N$ *differenziabili di Poisson è una funzione differenziabile*

$$h : M \times I \longrightarrow N$$

tale che per ogni $t \in I = [0, 1]$ *la funzione* $x \mapsto h(x, t)$ *sia di Poisson e*

$$h(x, 0) = f(x) \qquad e \qquad h(x, 1) = g(x)$$

per ogni $x \in M$.

Dunque una omotopia simplettica è un cammino in

$$P^\infty(M, N) = \{F \in C^\infty(M, N) \,|\, F \text{ è di Poisson}\}$$

da f a g. Ad esempio consideriamo $M = N$ nulle: allora $P^\infty(M, N) = C^\infty(M, N)$ e il concetto che otteniamo è semplicemente quello di omotopia differenziabile; se M è simplettica e N è nulla allora $P^\infty(M, N)$ contiene solo le funzioni costanti e quindi, se N è connesso per archi, basta considerare un cammino $c : I \longrightarrow M$ fra $\operatorname{im} F = \{x_F\}$ e $\operatorname{im} G = \{x_g\}$, per avere una omotopia simplettica $h(x, t) = c(t)$. Viceversa, sia M nulla e N simplettica: allora una funzione $F : M \longrightarrow N$ appartiene a $P^\infty(M, N)$ se e solo se, per ogni $f, g \in C^\infty(N)$:

$$0 = \{f \circ F, g \circ F\} = \omega(X_{f\circ F}, X_{g\circ F})$$

ove ω è la forma simplettica su N; dunque F deve essere costante, essendo ω non degenere, sicché, se N è connessa per archi, di nuovo troviamo che ogni applicazione è simpletticamente omotopa.

Osserviamo che l'omotopia simplettica è un concetto molto più forte della normale omotopia (anche differenziabile): ad esempio, se $M = \mathbb{R}^2$ è il piano simplettico, l'identità $F = id_{\mathbb{R}^2}$ è ovviamente una mappa di Poisson, mentre una mappa costante drammaticamente non lo è (una mappa di Poisson deve preservare la forma simplettica, quindi le aree!); in particolare non possono essere simpletticamente omotope.

Teorema (INVARIANZA PER OMOTOPIA) **5.3.2** *Se* $F, G \in P^\infty(M, N)$ *sono simpletticamente omotope allora inducono lo stesso morfismo* $F_* = G_*$ *in omologia.*

DIMOSTRAZIONE: Ovviamente la dimostrazione consiste nella costruzione di un morfismo di complessi $K : (S^L(M), \partial) \longrightarrow (S^L(N), \partial)$ che sia “omotopico, cioè tale che

$$G_* - F_* = \partial \circ K + K \circ \partial$$

Infatti, in questo caso, la tesi segue come al solito: se $[c] \in H^L(M)$ allora $\partial c = 0$ e quindi $F_*[c] = [G_* c - \partial K c] = G_*[c]$.

Anche la costruzione di K non presenta novità rispetto ai casi comuni in algebra omologica: vogliamo, per ogni $i \geq 0$, costruire dei morfismi di complessi $K_i : S_i^L(M) \longrightarrow S_i^L(N)$ e possiamo farlo sui simplessi ed estendere poi per linearità; per semplicità supporremo che i simplessi siano cubici $c : I^i \longrightarrow M$, e quindi che l'operatore di bordo sia della forma

$$\partial c = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j (R_j c - F_j c)$$

ove F_i e R_i sono le facce “fronte e “retro del cubo singolare:

$$\begin{aligned} F_j(c)(t_1, ..., t_{i-1}) &= c(t_1, ..., t_{k-1}, 1, t_k, ..., t_{i-1}) \\ R_j(c)(t_1, ..., t_{i-1}) &= c(t_1, ..., t_{k-1}, 0, t_k, ..., t_{i-1}) \end{aligned}$$

($t_k \in I$). Ora consideriamo una omotopia simplettica $h : M \times I \longrightarrow N$ fra F e G (che esiste per ipotesi) e poniamo

$$K_i(c)(t_1, ..., t_{i+1}) = h(c(t_2, ..., t_{i+1}), t_1)$$

Ovviamente

$$F_1 K_i = F_*, \qquad R_1 K_i = G_*, \qquad F_j K_i = K_{i-1} F_{j-1}, \qquad R_j K_i = K_{i-1} R_{j-1}$$

(con $1 < j < i + 1$). Dunque

$$\begin{aligned} \partial K_i = \sum_{j=1}^{i+1} (-1)^j (R_j K_i - F_j K_i) &= (G_* - F_*) + \sum_{j=2}^{i+1} (-1)^j (R_j K_i - F_j K_i) \\ &= (G_* - F_*) + \sum_{j=2}^{i+1} (-1)^j (K_{i-1} R_{j-1} - K_{i-1} F_{j-1}) \\ &= (G_* - F_*) - K_{i-1} \sum_{j=1}^{i} (-1)^j (R_j - F_j) \\ &= (G_* - F_*) - K_{i-1} \circ \partial \end{aligned}$$

QED

Consideriamo ora l'omologia relativa: sia M una varietà di Poisson e N una sottovarietà di Poisson; questo vuol dire che l'immersione $i : N \longrightarrow M$ è una mappa di Poisson e che la topologia di N è quella indotta da M. In particolare, le foglie di N sono le intersezioni con N delle foglie di M. Possiamo quindi considerare le catene simplettiche $S(N)$ in N, che costituiscono un sotto-complesso di $S(M)$, e il modulo quoziente $S(M)/S(N)$. Ovviamente il diagramma

$$\begin{array}{ccc} S_q(M) & \longrightarrow & S_q(M)/S_q(N) \\ \downarrow{\scriptstyle \partial} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\partial}} \\ S_{q-1}(M) & \longrightarrow & S_{q-1}(M)/S_{q-1}(N) \end{array}$$

commuta se $\overline{\partial}[c] = [\partial c]$. Possiamo quindi considerare i gruppi di omologia delle foglie relativa $H^L(M, N)$ come quelli del complesso quoziente $S(M)/S(N)$. Evidentemente, un simplesso simplettico s è relativo a N se e solo se il supporto del suo bordo è contenuto in N.

Il teorema fondamentale sull'omologia relativa non presenta alcuna differenza con quello usuale, quindi verrà solo enunciato:

Teorema (SUCCESSIONE ESATTA DELLA COPPIA) **5.3.3** *Se $N \subset M$ è una sottovarietà di Poisson con la topologia indotta allora esiste una successione esatta*

$$\ldots \longrightarrow H_i^L(N) \longrightarrow H_i^L(M) \longrightarrow H_i^L(M, N) \longrightarrow H_{i-1}^L(N) \longrightarrow \ldots$$

indotta dall'inclusione $N \subset M$ e dalla proiezione $S(M) \longrightarrow S(M, N)$.

Anche il teorema di escissione sussiste inalterato, avendo l'accortezza di intendere il termine *interno* rispetto alla topologia delle foglie.

Teorema (ESCISSIONE) **5.3.4** *Se $N \subset M$ è una sottovarietà di Poisson con la topologia indotta e $X \subset N$ un sottoinsieme la cui chiusura (nella topologia delle foglie) sia contenuta nell'interno di X. Allora sussistono gli isomorfismi*

$$H_i^L(M \setminus X, N \setminus X) \cong H_i^L(M, N)$$

indotti dall'inclusione di coppie $(N, X) \subset (M, N)$.

L'omologia che abbiamo fin qui introdotto è estremamente naturale, dato che dipende solo dalla struttura di Poisson, ma proprio per questo si rivela troppo semplice per essere realmente utile: in fondo non fa altro che sommare le singole omologie delle foglie. Ad esempio consideriamo $\mathbb{R}^3$ con coordinate cartesiane (x, y, z) e la varietà M ottenuta eliminando da $\mathbb{R}^3$ l'asse $\{x = y = 0\}$; su questa varietà esiste una struttura di Poisson regolare ottenuta per *pull-back* della forma simplettica sul piano "bucato $M \cap \{z = 0\}$ rispetto alla proiezione ortogonale $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Evidentemente l'omologia delle foglie di questa varietà, le cui foglie sono le intersezioni di M con i piani paralleli a $\{z = 0\}$, è

$$H^L(M) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \oplus \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

perché si tratta di sommare le omologie dei singoli piani bucati, che sono $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$. Abbiamo così un'algebra di dimensione infinita (continua) che non contiene nessuna informazione in più della singola omologia di ciascuna foglia.

Per trovare un invariante più raffinato, escogitiamo un metodo per "cancellare le informazioni superflue dall'omologia delle foglie: ad esempio, nel caso $\mathbb{R}^3$ precedente, è ovviamente possibile "schiacciare tutte le foglie su una sola senza alterare l'informazione omologica in esse contenuta; l'idea è che in questo caso M è un fibrato su $\tilde{M}$ con fibra $\mathbb{R}^2 \setminus 0$.

Consideriamo invece, sempre su $\mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$, la struttura di Poisson data dalle parentesi

$$\{f, g\}(x, y, z) = \rho(z) \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} \right)$$

ove ρ è una funzione a supporto compatto $[-1, 1]$. Si tratta di una struttura non regolare, che possiede le seguenti foglie simplettiche: i piani "bucati $\{z = r\} \setminus \{(0, 0, r)\}$ per $1 \leq r \leq 1$ e i punti $\{(x, y, z)\}$ per $|z| > 1$. Evidentemente i piani $\{z = \pm 1\} \setminus \{0, 0, \pm 1)\}$ sono composti da punti singolari.

Ora è chiaro che le foglie bidimensionali contengono più informazioni che quelle di dimensione zero: in effetti lo spazio delle foglie è della forma

$$\begin{aligned}\tilde{M} = \{\{(x, y, z)\} \,|\, z < 1 \text{ e } x^2 + y^2 \neq 0\} \cup \\ \cup\ [-1, 1] \cup \{\{(x, y, z)\} \,|\, z > 1 \text{ e } x^2 + y^2 \neq 0\}\end{aligned}$$

cioè due semispazî privati di una semiretta congiunti da un intervallo.

Vogliamo ora definire una omologia più significativa per una varietà di Poisson, che in qualche modo "riassuma il contributo omologico di ciascuna foglia simplettica in modo più restrittivo di quanto non faccia l'omologia delle foglie.

Come primo passo notiamo una interpretazione "funzionale dell'omologia delle foglie: possiamo pensare una catena totale come una funzione

$$\varphi : \tilde{M} \longrightarrow \bigcup_{S \in \tilde{M}} C(S)$$

(ove $C(S)$ è lo spazio delle catene singolari nella foglia S) che sia una "sezione, cioè tale che

$$(I) \qquad \varphi(S) \in C(S)$$

per ogni $S \in \tilde{M}$. Ovviamente una catena simplettica, essendo combinazione lineare di catene nelle singole foglie, può pensarsi come una funzione di questo tipo non nulla solo per un numero finito di foglie.

Per restringere il nostro campo d'azione, proviamo quindi ad imporre qualche altra condizione alle sezioni φ.

Per farlo vogliamo definire funzioni C^∞ dallo spazio delle foglie allo spazio di tutte le possibili omologie delle foglie stesse, che siano "sezioni rispetto al "fibrato che, su ogni foglia, mette lo spazio vettoriale della sua omologia singolare.

Precisamente consideriamo l'insieme delle funzioni

$$\varphi : \tilde{M} \longrightarrow \bigcup_{S \in \tilde{M}} C(S)$$

ove $C(S)$ è lo spazio vettoriale delle catene singolari sulla varietà simplettica, tali che

$$\varphi(S) \in C(S)$$

Si tratta cioè delle funzioni su $\tilde{M}$ che a ciascuna foglia associano una catena singolare (cioè una combinazione lineare di simplessi $s : \Delta^k \longrightarrow S$) di quella foglia. Selezioniamo, fra tutte queste funzioni, quelle "differenziabili, cioè tali che per ogni tensore simplettico P su M la funzione

$$\varphi_P(S) = \int_{\varphi(S)} P$$

sia differenziabile su $\tilde{M}$, cioè tale che la funzione $M \setminus \Sigma M \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(II) \qquad x \mapsto \varphi_P(S_x) = \int_{\varphi(S_x)} P$$

sia differenziabile, ove ΣM è il luogo singolare della varietà di Poissone S_x è la foglia simplettica passante per x: evidentemente si tratta di una funzione costante sulle foglie, cioè di una funzione di Casimir (si noti che l'immagine di $M \setminus \Sigma M$ in $\tilde{M}$ è l'insieme delle foglie di dimensione pari al rango generico della varietà).

La restrizione a $M \setminus \Sigma M$ è necessaria in quanto vogliamo che le nostre funzioni siano "genuinamente differenziabili rispetto alla struttura di Poisson, e quindi dobbiamo ignorare le singolarità rispetto a questa struttura. In effetti ignorando il comportamento di φ sulle foglie singolari non perdiamo il controllo della funzione $M \longrightarrow \mathbb{R}$ risultante, perché, come sappiamo, l'insieme ΣM è "piccolo sotto ogni punto di vista, essendo raro e di misura nulla: dato che la nostra condizione (II) coinvolge l'integrazione è del tutto naturale escludere il contributo di insiemi di misura nulla (rispetto alla misura su M).

Dunque stiamo considerando delle funzioni che scelgono per ciascuna foglia una catena in modo che l'integrazione su questa catena sia *al variare della foglia* una funzione differenziabile. Si rammenti che l'integrale

$$\int_c P$$

di un tensore simplettico lungo una catena contenuta in una singola foglia è definito in termini della forma cui, sulla foglia stessa, il tensore è identificabile per mezzo dell'isomorfismo indotto dalla struttura di Poisson: in particolare se la catena ha grado p l'unica componente della forma (e quindi del tensore) che contribuisce all'integrale è quella di grado p.

Denoteremo con $\mathcal{C}(M)$ l'insieme delle funzioni φ soddisfacenti alle (I) e (II) e ci riferiremo ai suoi elementi come alle *sezioni singolari* della varietà di Poisson M.

Esempio. Se M è simplettica (e connessa) allora $\tilde{M} = \{M\}$ e le mappe

$$\varphi : \{M\} \longrightarrow C(M)$$

sono le costanti, cioè le scelte di una catena in M. La differenziabilità è sempre verificata, dato che le funzioni di Casimir sono solo le costanti, dunque $\mathcal{C}(M) = C(M)$.

Esempio. Nel caso di una varietà di Poisson nulla, possiamo identificare $\tilde{M}$ con M e $\bigcup_{x\in M} C(\{x\})$ con $\mathbb{R}$, sicché le sezioni singolari sono funzioni $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che la valutazione di un 0-tensore simplettico (cioè di una funzione differenziabile) sia una funzione di Casimir (cioè una qualsiasi funzione differenziabile). Dunque $\mathcal{C}(M) = C^\infty(M)$ (si rammenti: $\Sigma M = \emptyset$).

Definiamo nel modo più ovvio le operazioni vettoriali come

$$(a\varphi + b\psi)(S) = a\varphi(S) + b\psi(S)$$

Evidentemente questo rende $\mathcal{C}(M)$ uno spazio vettoriale reale; possiamo anche renderlo un'algebra con la struttura indotta, foglia per foglia, dal prodotto "cap di catene singolari, che è definito in termini della dualità con la coomologia:

$$\varphi \cap \psi(S) = \varphi(S) \cap \psi(S)$$

Esiste una relazione fra le sezioni singolari e le catene simplettiche: precisamente, se consideriamo le catene simplettiche infinite $C^{S\infty}(M)$, cioè le serie formali a coefficienti reali di simplessi simplettici su M, abbiamo una mappa

$$\mathcal{C}(M) \longrightarrow C^{S\infty}(M)$$

che alla sezione φ associa la catena

$$\sum_{S \in \tilde{M}} \varphi(S)$$

Ora vogliamo mostrare che $\mathcal{C}(M)$ è un $\mathrm{Cas}(M)$-modulo: cioè possiamo moltiplicare una sezione φ per una funzione di Casimir c come

$$(c\varphi)(S) = c(S)\varphi(S)$$

(dato che c è di Casimir è una costante su S). Dimostriamo che questa è ancora una sezione: per prima cosa è ovvio che

$$(c\varphi)(S) \in C(S)$$

Inoltre, per ogni $P \in \mathfrak{S}(M)$, la funzione

$$(c\varphi)_P(x) = \int_{c(S_x)\varphi(S_x)} P = c(S_x) \int_{\varphi(S_x)} P$$

è di Casimir: infatti è il prodotto di due funzioni di Casimir.

Anche $\mathfrak{S}(M)$ è un modulo sulle funzioni di Casimir: se $P \in \mathfrak{S}(M)$ e $c \in \mathrm{Cas}\, M$, sia

$$(cP)(x) = c(x)P(x)$$

Esiste una dualità naturale fra i moduli $\mathcal{C}(M)$ e $\mathfrak{S}(M)$:

$$\langle , \rangle : \mathcal{C}(M) \times \mathfrak{S}(M) \longrightarrow \mathrm{Cas}\, M$$

definita per mezzo dell'integrale

$$\langle \varphi, P \rangle(x) = \int_{\varphi(S_x)} P$$

Infatti, che sia $\mathbb{R}$-bilineare è ovvio, e, se $c \in \mathrm{Cas}\, M$:

$$\langle c\varphi, P \rangle(x) = \int_{c\varphi(S_x)} P = c(x) \int_{\varphi(S_x)} P = \int_{\varphi(S_x)} cP = \langle \varphi, cP \rangle$$

Ovviamente l'algebra $\mathcal{C}(M)$ è graduata, e possiamo definire un bordo che rispetti il grado usando il solito bordo di catene singolari:

$$\partial\varphi(S) = \partial(\varphi(S))$$

Allora $\partial\partial = 0$ e quindi $\mathcal{C}(M)$ è un complesso di catene, del quale possiamo considerare l'omologia $\mathcal{H}(M)$: chiamiamo *omologia simplettica* questa omologia singolare.

Ad esempio l'omologia simplettica di una varietà simplettica è precisamente l'omologia singolare a coefficienti reali.

Teorema 5.3.5 *Lo spazio $\mathcal{H}_k(M)$ è esattamente lo spazio vettoriale delle sezioni differenziabili*

$$\chi : \tilde{M} \longrightarrow \bigcup_{S\in\tilde{M}} H_k(S)$$

a valori negli spazi di omologia singolare di grado k.

DIMOSTRAZIONE: Per definizione un elemento di $\mathcal{H}_k$ è una classe di k-cociclo modulo k-cobordi: se $[\varphi]$ è una tale classe allora

$$\partial(\varphi(S)) = (\partial\varphi)(S) = 0$$

cioè le immagini di φ sono cocicli singolari nelle foglie, e analogamente $\psi \in [\varphi]$ se $\varphi - \psi$ è il bordo di qualche $k+1$-sezione singolare.

QED

Ad esempio, dato che l'omologia in grado zero conta le componenti connesse e che ciascuna foglia è connessa, le classi di coomologia simplettica si identificano alle funzioni differenziabili sullo spazio delle foglie, cioè

Corollario 5.3.6 $\mathcal{H}_0(M) = \operatorname{Cas} M \oplus \mathbb{R}^{\Sigma\tilde{M}}$ *ove $\Sigma\tilde{M}$ è lo spazio delle foglie singolari.*

Esempio. Se torniamo al nostro esempio $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$, ricordando che $\tilde{M}$ era l'unione di due semispazî bucati α_1 e α_2 con un segmento I, otteniamo che:

$$\mathcal{H}_0(M) = \operatorname{Cas} M$$

è lo spazio delle funzioni $f(x, y, z)$ che, per $|z| \leq 1$ dipendono solo dalla variabile z. Gli elementi di $\mathcal{H}_1(M)$ sono le sezioni del tipo

$$\varphi : \alpha_1 \cup I \cup \alpha_2 \longrightarrow \bigcup_{t\in I} \mathbb{R}$$

dato che $H_1(S)$ è zero per $S \in \alpha_i$ (trattandosi di un punto), ed è unidimensionale per $S \in I$; si tratta cioè di funzioni reali tali che, per ogni P:

$$(x,y,z) \mapsto \int_{\varphi(S_{(x,y,z)})} P$$

è una funzione di Casimir: ma, per $S \in \alpha_i$ abbiamo $\varphi(S) = 0$, e per $S \in I$ abbiamo $\varphi(S) \in \mathbb{R}$, quindi la funzione precedente diviene

$$(x,y,z) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } |z| > 1 \\ \int_{\mathbb{R}^2\setminus 0} P & \text{se } |z| \leq 1 \end{cases}$$

L'integrazione che abbiamo definito sulle foglie può suggestivamente essere descritta come segue:

$$\int P = \int_{\tilde{M}} \int_S P|_S dS$$

cioè come un integrale doppio sullo spazio misurabile $M \times \tilde{M}$: in effetti se P è un tensore simplettico possiamo definire la funzione

$$\Pi(S) = \int_S P$$

che a sua volta possiamo integrare sullo spazio delle foglie. Tuttavia la classe di misura di Lebesgue sullo spazio delle foglie può essere banale, nel senso che le uniche funzioni misurabili possono rivelarsi le costanti.

Esiste un metodo per aggirare questo ostacolo, che consiste nel considerare la teoria dell'integrazione non commutativa (cfr. [24]). Questa ha luogo sulle varietà che posseggano una fogliazione, ma qui, sfruttando la presenza di una struttura simplettica sulle foglie, riusciamo comunque ad associare un'algebra di von Neumann ad ogni varietà di Poisson, seguendo sostanzialmente il procedimento che von Neumann e Murray utilizzarono nel definire esempi di fattori usando le azioni libere di gruppi discreti su spazi di misura, e che ha suggerito a Connes il caso delle fogliazioni regolari. Il risultato qui ottenuto è un funtore dalla categoria delle varietà di Poisson alla categoria delle algebre di von Neumann, diverso da quello considerato da Weinstein e altri in quanto non coinvolge direttamente la considerazione del gruppoide simplettico associato alla varietà di Poisson ed è una costruzione uniforme e perfettamente generale.

5.4 L'algebra di von Neumann di una varietà di Poisson.

Consideriamo una varietà di Poisson M del tutto arbitraria: vogliamo costruire un'algebra di "funzioni misurabili non commutativa (in sostituzione dell'algebra delle funzioni essenzialmente limitate sullo spazio delle foglie) e, per farlo, ci ispiriamo direttamente alla teoria degli *operateurs aleatoires* di Connes (cfr. [23]–[26]).

Per prima cosa notiamo che a ciascuna foglia $S \subset M$ possiamo associare uno spazio di Hilbert separabile $L^2(S, d\sigma^r)$ ove σ è la forma simplettica indotta dalla struttura di Poisson di M e $\dim S = 2r$; possiamo anche immaginare questa corrispondenza come un "fibrato di spazi di Hilbert sullo spazio delle foglie $\tilde{M}$. L'idea è generalizzare questa costruzione ad una varietà di Poisson qualsiasi riconducendoci a questo caso per mezzo della decomposizione in foglie simplettiche: piuttosto che usare le semi-densità sulle foglie e i relativi fibrati, cosa che nel nostro contesto con singolarità potrebbe non avere senso, e quindi gli operatori aleatori, come dètta il procedimento di Connes, proviamo a definire prima uno spazio di Hilbert e poi gli operatori su di esso, il che darà il non trascurabile vantaggio di fornire esplicitamente l'azione dell'algebra di operatori che costruiremo su un ben determinato spazio di Hilbert, e per farlo ci appelliamo ad una costruzione universale dovuta a von Neumann: l'integrale diretto.

Avremo bisogno di considerare M e $\tilde{M}$ come spazi misurabili; per prima cosa ricordiamo che una qualsiasi varietà (anche solo topologica, purché pura) ammette una misura di Lebesgue (cfr. [33, §XVI-22]) essenzialmente unica:

Teorema 5.4.1 *Se M è una varietà di dimensione n allora esiste una misura positiva μ su M tale che per ogni carta locale $(U; \varphi)$ l'immagine $\varphi_*\mu|_U$ di μ rispetto al diffeomorfismo φ è una derivata di Radon–Nikodym differenziabile della misura di Lebesgue in $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Se ν è un'altra misura su M con la stessa proprietà allora μ e ν sono equivalenti e la derivata di Radon–Nikodym dell'una rispetto all'altra è una funzione differenziabile.*

È conveniente interpretare le misure come funzionali lineari e continui sullo spazio delle funzioni a supporto compatto: allora la misura di Lebesgue μ su M si proietta nella misura di Lebesgue su $\tilde{M}$ come

$$\tilde{\mu}(f) = \mu(f \circ p)$$

se $p : M \longrightarrow \tilde{M}$ è la proiezione canonica. Guardando alle misure come funzioni insiemistiche, per E misurabile:

$$\tilde{\mu}(E) = \int_{\tilde{M}} \chi_E d\tilde{\mu} = \int_M \chi_{p^{-1}(E)} d\mu = \mu(p^{-1}(E))$$

In particolare se un insieme $X \subset \tilde{M}$ è immagine di un insieme di misura nulla allora ha misura nulla.

Ad esempio, su una varietà simplettica l'unica misura che si ottiene sull'insieme $\tilde{M} = \{M\}$ ridotto ad un solo punto è la misura di Dirac concentrata in quel punto, cioè la valutazione $\tilde{\mu}(f) = f(\{M\})$, che, insiemisticamente, assegna a $\{M\}$ la costante[4] $\mu(M)$, ove μ è la misura su M indotta dalla forma di volume simplettica. All'estremo opposto abbiamo le varietà nulle, per le quali $\tilde{M} \cong M$, e quindi, dato che p è la mappa identità, $\tilde{\mu}$ è esattamente μ.

D'ora in poi supporremo che μ sia la misura di Lebesgue su M e $\tilde{\mu}$ la misura di Lebesgue su $\tilde{M}$ immagine di μ.

A ciascun elemento di $\tilde{M}$ possiamo far corrispondere uno spazio di Hilbert usando la struttura di Poisson su M: basta infatti considerare, per $S \in \tilde{M}$, lo spazio $L^2(S, \sigma^r)$ ove σ è la misura indotta dalla forma simplettica su S, che si ottiene restringendo ad essa il tensore di Poisson e $2r = \dim S$.

Vogliamo ora sommare tutti i contributi di questi spazi di Hilbert tenendo conto della misura su $\tilde{M}$:

Definizione 5.4.2 *Se M è una varietà di Poisson definiamo il suo* spazio di Hilbert associato *come l'integrale diretto*

$$\mathcal{H}_M = \int_{\tilde{M}}^{\oplus} L^2(S, \sigma^r) d\tilde{\mu}(S)$$

($r = \frac{1}{2}\dim S$) esteso all'intero insieme $\tilde{M}$ rispetto alla misura $\tilde{\mu}$.

Ricordiamo brevemente la proprietà universale che caratterizza gli integrali diretti di spazi di Hilbert (cfr. [79], [33], [48]: questa nozione è stata introdotta da von Neumann per ridurre la teoria delle algebre di operatori che ora portano il suo nome alla teoria dei fattori): non ci poniamo nella maggior generalità possibile ma, dato che i nostri spazi saranno sempre spazi di funzioni a quadrato integrabile su varietà, supporremo di considerare spazi di Hilbert separabili e quindi di integrarli su spazi σ-compatti[5] localmente compatti.

Definizione 5.4.3 *Se X è uno spazio topologico localmente compatto e σ-compatto, μ il completamento di una misura boreliana su X e $\{\mathcal{H}_x\}_{x\in X}$ una famiglia di spazi di Hilbert separabili (con prodotti hilbertiani $\langle\rangle_x$) indicizzata dai punti di X, allora uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ è l'*integrale diretto *della famiglia $\{\mathcal{H}_x\}$ esteso allo spazio X se ad ogni suo elemento v corrisponde una funzione $f_v : X \longrightarrow \bigcup_x \mathcal{H}_x$ tale che*

[4] Come al solito in teoria della misura, consideriamo come costanti positive tutti i valori dell'intervallo chiuso $[0, \infty]$.

[5] Che siano cioè unione numerabile di insiemi compatti il che, nel caso delle varietà, equivale alla paracompattezza e non comporta dunque una ipotesi eccessivamente restrittiva (ma anzi assai conveniente).

(ID1) *La funzione reale* $x \mapsto \langle f_v(x), f_w(x)\rangle_x$ *sia integrabile su* X *per ogni* $v, w \in \mathcal{H}$, *e il prodotto scalare in* $\mathcal{H}$ *è*

$$\langle v, w\rangle = \int_X \langle f_v(x), f_w(x)\rangle_x d\mu(x)$$

(ID2) *Se* $\{v_x\}$ *è una famiglia di vettori* $v_x \in \mathcal{H}_x$ *e se per ogni* $w \in \mathcal{H}$ *la funzione* $x \mapsto \langle v_x, f_w(x)\rangle_x$ *è integrabile su* X *allora esiste un vettore* $v \in \mathcal{H}$ *tale che* $f_v(x) = v_x$ *per quasi ogni* $x \in X$.

Questa definizione descrive la proprietà universale dell'integrale diretto, che ovviamente lo caratterizza a meno di isometrie unitarie di spazi di Hilbert: fornisce anche un suggerimento per la costruzione effettiva dell'integrale, che vogliamo esplicitamente riportare. Infatti la nozione di integrale diretto è applicata generalmente per riconoscere se uno spazio di Hilbert è integrale diretto (il che corrisponde alla nozione di somma diretta interna), mentre noi qui abbiamo bisogno di costruire esplicitamente uno spazio di Hilbert con questa proprietà: ovviamente questo non è difficile, in astratto, perché basta ispirarsi alla definizione. Il nostro procedimento è una variante di quello di Dixmier [33]: si consideri la famiglia $\{\mathcal{H}_x\}$ parametrizzata dai punti di X e si definisca $\mathcal{H}$ come l'insieme delle funzioni $f : X \longrightarrow \bigcup_{x\in X} \mathcal{H}_x$ tali che $f(x) \in \mathcal{H}_x$ per ogni $x \in X$ e che la funzione $x \mapsto ||f(x)||_x^2$ sia misurabile e l'integrale

$$\int_X ||f(x)||_x^2 d\mu(x)$$

sia finito. Definiamo allora per gli elementi di $\mathcal{H}$ la norma

$$||f|| = \sqrt{\int_X ||f(x)||_x^2 d\mu(x)}$$

al solito modo.

Evidentemente $\mathcal{H}$ è uno spazio di Banach, dato che se $f, g \in \mathcal{H}$ $a, b \in \mathbb{C}$ possiamo definire $(af + bg)(x) = af(x) + bg(x)$ ottenendo ancora una funzione che soddisfa le proprietà di appartenenza a $\mathcal{F}$: in particolare

$$||af + bg|| \leq |a|\, ||f|| + |b|\, ||g||$$

per la disuguaglianza di Minkowski. Inoltre si osservi che

$$\langle f, g\rangle = \int_X \langle f(x), g(x)\rangle_x dx$$

definisce un prodotto scalare di Hilbert: infatti vale l'identità di polarizzazione

$$||f + g|| - ||f - g|| + i||f + ig|| - i||f - ig|| = 4\langle f, g\rangle$$

usando l'identità di polarizzazione (nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}_x$) su ciascun integrando. Notiamo infine che se $\{v_x\}$ è una famiglia di elementi in $\mathcal{H}_x$ allora se per ogni $f \in \mathcal{H}$ si ha che

$$\int_X \langle f(x), v_x \rangle_x d\mu(x) < \infty$$

possiamo definire la funzione $g(x) = v_x$ che, a meno di insiemi di misura nulla, apparterrà a $\mathcal{H}$.

Dunque

Teorema 5.4.4 *Se X è uno spazio topologico localmente compatto e σ-compatto, μ il completamento di una misura boreliana su X e $\{\mathcal{H}_x\}_{x \in X}$ una famiglia di spazi di Hilbert separabili (con prodotti hilbertiani $\langle\rangle_x$) indicizzata dai punti di X, allora esiste un unico spazio di Hilbert integrale diretto della famiglia $\{\mathcal{H}_x\}$ esteso allo spazio misurabile (X, μ).*

Usualmente si scrive

$$\mathcal{H} = \int_X^{\oplus} \mathcal{H}_x d\mu(x)$$

ma noi ometteremo il segno di somma diretta in apice all'integrale. Notiamo che se $f_v = f_w$ quasi ovunque allora

$$||v - w||^2 = \int_X ||f_v(x) - f_v(x)||_x^2 d\mu(x) = 0$$

da cui

Proposizione 5.4.5 *Se $f_v = f_w$ quasi ovunque allora $v = w$.*

Esempio. Consideriamo una varietà simplettica M: allora $\tilde{M} = \{M\}$ e quindi l'integrale diretto si riduce semplicemente allo spazio $\mathcal{H}_M = L^2(M)$ stesso: infatti la misura μ sullo spazio costituito da un solo punto è, a meno di fattori moltiplicativi non nulli, la valutazione nel punto.

Esempio. Se M è una varietà di Poisson nulla allora

$$\mathcal{H}_M = \int_M^{\oplus} L^2(\{x\}) d\mu(x) = \int_M^{\oplus} \mathbb{C} d\mu(x) = L^2(M, \mu)$$

L'ultimo passaggio, che identifica l'integrale diretto con lo spazio $L^2(M)$, segue dal teorema precedente: infatti se $v \in L^2(M, \mu)$ allora basta porre $f_v(x) = v(x)$ per avere

$$\int_X \langle f_v(x), f_v(x) \rangle_x d\mu(x) = \int_X v(x)\overline{v(x)} d\mu(x) < \infty$$

per definizione di funzione L^2, e, per ogni famiglia di numeri complessi $\{c_x\}$ (cioè per ogni funzione $c : X \longrightarrow \mathbb{C}$) tale che per ogni $w \in L^2(M, \mu)$ si abbia

$$\int_X c(x)\overline{w(x)} < \infty$$

allora $c \in L^2(M, \mu)$ (si rammenti che gli elementi di L^2 vanno in realtà considerati come classi di equivalenza modulo uguaglianza quasi-ovunque); è infatti ben noto dalla teoria dell'integrazione che

$$\forall g \in L^2(X, \mu) \qquad fg \in L^1(X, \mu) \implies f \in L^2(X, \mu)$$

(basta notare che l'operatore $M_f : L^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ definito come $M_f(g) = \int fg$ è continuo, che sia lineare è ovvio, e che quindi $M_f \in (L^2)^*$ cioè, in virtù del teorema di Riesz, $f \in L^2$: questo segue sostanzialmente dalla disuguaglianza di Minkowski e dal fatto che possiamo assumere $f \in L^\infty$).

Esempio. Se $M = \mathbb{R}^2_0$ allora l'integrale diretto si riduce ad una somma diretta

$$\mathcal{H}_M = L^2(\mathbb{R}^2 \setminus 0) \oplus \mathbb{C}$$

Teorema 5.4.6 *Se $M = N \times P$ è il prodotto di Poisson delle varietà di Poisson N e P allora $\mathcal{H}_M = \mathcal{H}_N \otimes \mathcal{H}_P$.*

DIMOSTRAZIONE: Cominciamo con l'osservare che le foglie simplettiche di M sono prodotti di foglie di N per foglie di P: ad esempio se (x_N, x_P) e (y_N, y_P) appartengono a M allora sono congiunti da una curva hamiltoniana a tratti $c : I \longrightarrow N \times M$ se e solo se le curve $c_N : I \longrightarrow N$ e $c_P : I \longrightarrow P$ che determinano c sono hamiltoniane a tratti in N e M. Dunque, se S è una foglia simplettica in M allora possiamo sempre decomporla come $S = S_N \times S_P$.

Ora consideriamo $\mathcal{H}_N \otimes \mathcal{H}_P$: vogliamo dimostrare che si tratta dell'integrale diretto

$$\int_M^\oplus L^2(S) d\mu(S)$$

Notiamo che la misura di Lebesgue su M è il prodotto delle misure di Lebesgue su N e P; ora se $v \otimes w \in \mathcal{H}_N \otimes \mathcal{H}_P$ possiamo definire la funzione

$$f_{v \otimes w}(S) = f_v(S_N) \otimes f_w(S_P)$$

ove $S = S_N \times S_P$ è la decomposizione indotta dal prodotto. Si noti che $f_{v \otimes w}(S)$ appartiene allo spazio

$$L^2(S_N) \otimes L^2(P) \cong L^2(N \otimes P) = L^2(M)$$

Dato che, per definizione di prodotto scalare nel prodotto tensoriale:

$$\begin{aligned}\langle f_{v\otimes w}(S), f_{v'\otimes w'}(S)\rangle_S &= \langle f_v(S_N)\otimes f_w(S_P), f_{v'}(S_N)\otimes f_{w'}(S_P)\rangle_S\\ &= \langle f_v(S_N), f_{v'}(S_N)\rangle_{S_N}\langle f_w(S_P), f_{w'}(S_P)\rangle_{S_P}\end{aligned}$$

la funzione $x \mapsto \langle f_{v\otimes w}(S), f_{v'\otimes w'}(S)\rangle_S$ è integrabile e quindi, per il teorema di Fubini:

$$\begin{aligned}&\int_{\tilde{M}}\langle f_{v\otimes w}(S), f_{v'\otimes w'}(S)\rangle_S d\tilde{\mu}(S) =\\ &\qquad= \int_{\tilde{N}}\int_{\tilde{P}}\langle f_v(S_N), f_{v'}(S_N)\rangle_{S_N}\langle f_w(S_P), f_{w'}(S_P)\rangle_{S_P} d\tilde{\nu}(S_N)d\tilde{\pi}(S_P)\\ &\qquad= \langle v, v'\rangle_N\langle w, w'\rangle_P = \langle v\otimes w, v'\otimes w'\rangle_M\end{aligned}$$

Dunque la (ID1) è verificata. Per verificare anche la (ID2) bisogna mostrare che per ogni famiglia di vettori $\{v_S\}$ in $L^2(S)$ se la funzione $S \mapsto \langle v_S, f_{v\otimes w}(S)\rangle$ è integrabile per ogni $v\otimes w$ allora $f_{v\otimes w}(S) = v_S$; per farlo basta osservare che la fattorizzazione $S = S_N \times S_P$ induce un isomorfismo $L^2(S) \cong L^2(S_N)\otimes L^2)S_P)$ e che la definizione di $f_{v\otimes w}$ implica

$$\begin{aligned}||f_{v\otimes w} - v||^2 &= \int_{\tilde{M}} ||f_{v\otimes w}(S) - v(S)||_S^2\\ &= \iint ||f_v(S_N)\otimes f_w(S_P) - v_N(S_N)\otimes v_P(S_P)||_S^2\\ &= \iint ||f_v(S_N)||_{S_N}^2 ||f_w(S_P)||_{S_P}^2 dS_N dS_P -\\ &\quad - \iint \langle f_v(S_N), v_N(S_N)\rangle_{S_N}\langle f_w(S_P), v_P(S_P)\rangle_{S_P} dS_N dS_P -\\ &\quad - \iint \langle v_N(S_N), f_v(S_N)\rangle_{S_N}\langle v_P(S_P), f_w(S_P)\rangle_{S_P} dS_N dS_P +\\ &\quad + \iint ||v_N(S_N)||_{S_N}^2 ||v_P(S_P)||_{S_P}^2 dS_N dS_P\end{aligned}$$

(ove gli integrali doppî sono su $\tilde{N}$ e $\tilde{P}$). Ma, dato che $\mathcal{H}_N$ e $\mathcal{H}_P$ sono integrali diretti, per le (ID2) relative a questi integrali, $f_v(S_N) = v_N(S_N)$ per quasi ogni S_N, e analogamente per S_P, dunque l'espressione precedente è nulla, e troviamo che $f_{v\otimes w} = v$ quasi ovunque.

QED

Lo spazio $\mathcal{H}_M$ è un invariante che dipende solo dalla struttura di Poisson su M: ad esempio se $F : M \longrightarrow N$ è un diffeomorfismo di Poisson allora possiamo considerare la mappa indotta

$$\tilde{F} : \tilde{M} \longrightarrow \tilde{N}$$

definita come segue: se $S \in \tilde{M}$ allora $\tilde{F}(S)$ è l'unica foglia simplettica di N che contiene l'insieme $F(S)$ (questo ha senso dato che F manda foglie in foglie). Se consideriamo $\mathcal{H}_M$ e $\mathcal{H}_N$ possiamo definire una funzione

$$U_F : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathcal{H}_M$$

come (ricordando che possiamo far corrispondere gli elementi $v \in \mathcal{H}_N$ a funzioni f_v che soddisfino le condizioni della definizione 5.4.3)

$$U_F(v)(S) = f_v(\tilde{F}(S))$$

per quasi ogni $S \in \tilde{M}$.

Teorema 5.4.7 *L'operatore U_F è unitario da $\mathcal{H}_N$ in $\mathcal{H}_M$: in particolare $\mathcal{H}_N \cong \mathcal{H}_M$.*

DIMOSTRAZIONE: Intanto notiamo che

$$U_F(v+w)(S) = f_{v+w} \circ \tilde{F} = (f_v + f_w) \circ \tilde{F} = f_v \circ \tilde{F} + f_w \circ \tilde{F}$$

Ovviamente anche $U_F(av) = aU_F(v)$. Ora si tratta di mostrare che l'operatore U_F è unitario, cioè che $||U_F(v)|| = ||v||$ (le norme vanno intese come le norme relative ai prodotti hilbertiani nei relativi spazi associati alle varietà). Intanto si noti che

$$||U_F(v)||_{\mathcal{H}_M} = \int_{\tilde{M}} ||f_v(\tilde{F}(S))||_S d\tilde{\mu}(S) = \int_{\tilde{N}} ||f_v(S)||_S d\tilde{\nu}(S)$$

(dato che F è un diffeomorfismo che preserva le foglie, e quindi induce isomorfismi fra le misure su S e su $\tilde{F}(S)$). Ma nell'integrale a destra, l'integrando è una funzione misurabile limitata, perché $f_v(S)$ è un operatore continuo in $L^2(S)$ il cui integrale converge a $||v||_{\mathcal{H}_N}$ per definizione di integrale diretto:

$$||U_F(v)||_{\mathcal{H}_M} = ||v||_{\mathcal{H}_N}$$

Questo dimostra che l'operatore U_F è unitario.

QED

Ora vogliamo definire una generalizzazione della nozione di funzione misurabile su $\tilde{M}$: anziché fare assumere valori nello spazio di Hilbert $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ alle nostre funzioni, faremo loro assumere valori nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}_M$. Vogliamo cioè definire degli "operatori aleatori, secondo la definizione di Alain Connes (cfr. [23]–[26]). La nozione della quale abbiamo bisogno è stata già definita da von Neumann nel contesto della teoria dei fattori: la terminologia che qui usiamo è quella di Dixmier [33] che usa il termine "operatore decomponibile mentre von Neumann in [79] usa il termine "operatore generalizzato.

Definizione 5.4.8 *Un* operatore decomponibile A *su una varietà di Poisson* M *è un operatore lineare e continuo in* $\mathcal{H}_M$ *tale che esista una funzione* $f_A : \tilde{M} \longrightarrow \bigcup_{S\in\tilde{M}} \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ *tale che* $f_A(S) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ *e*

$$\forall v \in \mathcal{H}_M \qquad \text{per quasi ogni } S \in \tilde{M} \qquad f_A(S)f_v(S) = f_{Av}(S)$$

La funzione f_A *si dice* decomposizione dell'operatore A*.*

Esempio. Se $X \in \mathfrak{S}(M)$ è un campo vettoriale simplettico sulla varietà di Poisson M e se supponiamo che sia integrabile (ad esempio se ha supporto compatto) allora possiamo, in ciascun punto $x \in M$ considerare il suo flusso φ_t^x; poiché il campo è simplettico, questo flusso definisce un diffeomorfismo di ciascuna foglia S in se stessa, e quindi, per il teorema precedente, induce una famiglia $\{U_S\}_{S\in\tilde{M}}$ di operatori unitarî in $\mathcal{H}_S = L^2(S)$. Ora, se $v \in \mathcal{H}$, e quindi $f_v(S) = v_S \in L^2(S)$ per quasi ogni S:

$$U_S f_v(S) = U_S v_S = f_{Uv}(S)$$

Cioè U è un operatore decomponibile (unitario) su $\mathcal{H}$. Notiamo ad esempio che, se U_X è l'operatore indotto da un campo simplettico completo allora

$$U_{[X,Y]} = U_X U_Y - U_Y U_X$$

Infatti il commutatore di campi corrisponde a quello di flussi.

Esempio. Gli operatori decomponibili, sulle varietà nulle, sono esattamente le funzioni essenzialmente misurabili su $\tilde{M} \cong M$, viste come operatori di moltiplicazione. In generale, se $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ è una funzione essenzialmente misurabile allora definisce un operatore di moltiplicazione in $\mathcal{H}_M$ che è decomponibile: infatti per ogni foglia S poniamo

$$M_f(S)f_v(S) = f(S)f_v(S) = f_{f(S)v}(S)$$

il che fornisce un operatore decomponibile di moltiplicazione: vedremo fra poco che questi operatori di moltiplicazione generano il centro dell'algebra di von Neumann che stiamo per definire.

Il seguente fatto è una proprietà generale degli integrali diretti (cfr. [48, p.1001]):

Lemma 5.4.9 *Se $\{v_\alpha\}$ è un insieme di generatori di $\mathcal{H}_M$ allora $\mathcal{H}_S = \mathcal{H}_S^0$ per quasi ogni $S \in \tilde{M}$, ove $\mathcal{H}_S^0$ è il sottospazio chiuso generato da $\{v_\alpha(S)\}$.*

e consente di dimostrare facilmente la

Proposizione 5.4.10 *Se A è decomponibile allora f_A è unica a meno di insiemi di misura nulla.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\{v_n\}$ un insieme numerabile di generatori di $\mathcal{H}_M$: se f è un'altra funzione che decompone l'operatore A allora

$$f_A(S)f_{v_n}(S) = A(v(S)) = f(S)f_{v_n}(S)$$

quasi ovunque, e quindi, per il lemma, gli operatori $f_A(S)$ e $f(S)$ coincidono a meno di unioni numerabili di insiemi di misura nulla. Se invece A e B sono operatori che ammettono la medesima decomposizione f allora, per ogni $v, w \in \mathcal{H}_M$:

$$\begin{aligned}\langle Av, w\rangle &= \int_{\tilde{M}} \langle f_{Av}(S), f_w(S)\rangle_S dS = \int_{\tilde{M}} \langle f(S)f_v(S), f_w(S)\rangle_S dS \\ &= \int_{\tilde{M}} \langle f_{Bv}(S), f_w(S)\rangle_S dS = \langle Bv, w\rangle\end{aligned}$$

e, per arbitrarietà di v, w: $A = B$ quasi ovunque.

QED

Le seguenti verifiche sono immediate dalla definizione:

Proposizione 5.4.11 *Se A e B sono operatori decomponibili allora anche $aA + bB$, A^*, AB e I lo sono ($a, b \in \mathbb{C}$ e I operatore identico), e le seguenti equazioni sono valide quasi ovunque in $\tilde{M}$:*

(1) $f_{aA+bB} = af_A + bf_B$

(2) $f_{AB} = f_A f_B$

(3) $f_{A^*} = f_A^*$

(4) $f_I(S) = I_S$

In altri termini:

Teorema 5.4.12 *L'insieme degli operatori decomponibili è una sotto-algebra associativa involutiva con identità dell'algebra degli operatori limitati $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

Meno evidente è il seguente lemma, la cui dimostrazione è del tutto generale per qualsiasi integrale diretto, e per la quale rimandiamo a [48, p.1004-1005]:

Lemma 5.4.13 *La funzione $S \mapsto ||f_A(S)||$ è essenzialmente limitata, e il suo estremo superiore essenziale è $||A||_{\mathcal{H}_M}$.*

Ricordiamo che un'algebra di von Neumann $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una sotto-algebra auto-aggiunta fortemente chiusa in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$: il fondamentale teorema del doppio centralizzatore di von Neumann asserisce che un'algebra di von Neumann è caratterizzata dalla condizione algebrica $\mathcal{R} = \mathcal{R}''$ ove, se $X \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è un sottoinsieme, il suo centralizzatore è

$$X' = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \,|\, \forall B \in X \quad AB = BA\}$$

Il risultato centrale per noi è il seguente teorema di von Neumann, la cui dimostrazione è valida per qualsiasi decomposizione in integrale diretto di spazi di Hilbert, e per la quale pure rimandiamo a [48]:

Teorema 5.4.14 *Se M è una varietà di Poisson allora lo spazio degli operatori decomponibili è un'algebra di von Neumann $\mathcal{V}(M)$.*

L'esempio più elementare di operatore decomponibile si ha nel caso di una varietà nulla: in questo caso ciascuno spazio $\mathcal{H}_S$ è una copia di $\mathbb{C}$, e quindi un operatore decomponibile è semplicemente una famiglia di numeri complessi (visti come operatori di moltiplicazione) con associata una funzione di decomposizione che possiamo identificare con una funzione $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ essenzialmente limitata. Ovviamente l'azione dell'operatore su un elemento dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}_M = L^2(M)$ è la moltiplicazione e quindi l'algebra di von Neumann è abeliana in questo caso ed è precisamente $\mathcal{V}(M) = L^\infty(M)$.

All'estremo opposto abbiamo il caso di una varietà simplettica M: dato che $\tilde{M} = \{M\}$ e che $\mathcal{H}_M = L^2(M)$ otteniamo che un operatore decomponibile è esattamente un operatore limitato $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$; cioè $\mathcal{V}(M)$ è in questo caso l'algebra completa degli operatori limitati su uno spazio di Hilbert separabile. Si noti che è un fattore di tipo I_∞.

In generale possiamo dare un criterio geometrico per stabilire quando questa costruzione dà luogo a fattori:

Teorema 5.4.15 *Il centro di $\mathcal{V}(M)$ è la sotto-algebra degli operatori decomponibili diagonalizzabili, cioè degli operatori decomponibili A tali che $f_A(S) = f(S)I_S$ per qualche funzione essenzialmente limitata f e dove I_S è l'operatore identità in $L^2(S)$.*

(cfr. [48, pp.1005–1007]).

Corollario 5.4.16 *$\mathcal{V}(M)$ è un fattore se e solo se M è minimale (cioè ogni sua foglia è densa).*

DIMOSTRAZIONE: Si tratta di osservare che le uniche funzioni essenzialmente limitate su $\tilde{M}$ sono le costanti nel caso di una fogliazione minimale: allora un operatore diagonalizzabile è sempre il multiplo di una costante, e quindi il centro dell'algebra di von Neumann $\mathcal{V}(M)$ è ridotto alle sole costanti.

QED

Abbiamo già visto come le varietà simplettiche diano luogo a fattori, tutti di tipo I_∞: altri esempi sono le varietà di Poisson regolari $\mathbb{T}^3_\varphi$ con $\varphi \notin \mathbb{Q}$.