Saggio sulla Geometria delle Parentesi di Poisson

Paolo Caressa

Tesi di Dottorato, A.A. 2000/2001
Università di Firenze, Dip. di Matematica *U.Dini*

O segredo da Busca é que não se acha

F. Pessoa

Introduzione

La più notevole differenza fra la prima e la seconda edizione della *Mécanique Analytique* di Lagrange, licenziate alle stampe rispettivamente nel 1788 e 1811, è l'aggiunta della teoria della variazione della costante arbitraria, frutto delle ricerche senili del grande matematico torinese, riassunte nei suoi ultimi lavori scientifici[1] : la forma che, per mezzo di queste nuove ricerche, Lagrange diede alle equazioni del moto di un sistema meccanico generalizzato è sostanzialmente quella che Hamilton avrebbe dato un quarto di secolo appresso nelle sue ricerche di ottica: sono infatti introdotte la funzione lagrangiana, la funzione hamiltoniana e, *in nuce*, il formalismo canonico. Come osservato esplicitamente da Jean-Marie Souriau[2] in quelle pagine si trova la prima descrizione di una varietà simplettica, cioè di una varietà differenziabile (che per Lagrange è una superficie i cui parametri sono proprio le costanti arbitrarie con la loro legge di cambiamento delle coordinate) con un tensore antisimmetrico, utilizzato da Lagrange per scrivere le sue parentesi scalari (cfr. [1, §3.3] e anche [73, §8.1] per una discussione tecnica del contributo di Lagrange alla Geometria Simplettica): queste erano poste in corrispondenza da Lagrange con lo studio degli integrali primi del sistema, anche se fu il suo allievo Simeon-Denis Poisson ad introdurre (cfr. [82]) la parentesi che porta il suo nome e che permette di definire, a partire da integrali primi, nuovi integrali primi del sistema di equazioni del moto.

Poisson definì la seguente classica operazione (che oggi si denota con le parentesi graffe) fra funzioni definite nello spazio delle fasi $\mathbb{R}^{2n}$ dotato delle coordinate canoniche $(q_1, ..., q_n; p_1, ..., p_n)$:

$$(F, G) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right)$$

Un integrale primo I del sistema canonico di hamiltoniana H è caratterizzato dalla $(I, H) = 0$ e Poisson dimostrò un teorema secondo il quale se I_1 e I_2 sono integrali primi anche (I_1, I_2) lo è; fu Jacobi (1821) a trovare una dimostrazione

[1]cfr. *Mémoire sur la Théorie des variations des élements des planètes* Mem. Cl. Sci. Math. Phys. Inst. France (1808), 1–72; *Second Mémoire sur la Théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans les Problèmes de la Mécanique* Mem. Cl. Sci. Math. Phys. Inst. France (1809), 343-352.

[2]cfr. *La structure symplectique de la Mécanique décrite par Lagrange en 1811*, Mathématique et Sciences humaines, 1986.

immediata di questo teorema poggiando su un lemma [46] che ora porta il suo nome:

$$((F,G),H)+((G,H),F)+((H,F),G)=0$$

Il metodo di Poisson per produrre integrali primi non è comunque la soluzione generale al problema dell'integrazione del sistema canonico, ma solo sotto opportune condizioni chiarite da Liouville (esistenza delle variabili azione-angolo).

Il formalismo di Poisson e Jacobi parve un semplice algoritmo della Meccanica Celeste, finché Marius Sophus Lie non si rese conto che presentava analogie (e infatti profondi legami) con le costruzioni della Geometria Differenziale delle superficie; il punto di partenza di Lie fu sostanzialmente quello di Poisson (e di ogni altro matematico del secolo XIX): l'integrazione di equazioni alle derivate parziali. Dotato di profondo intuito geometrico e grande capacità algebrica (che in quegli anni voleva dire computazionale) Lie cercò di aprire nuove strade nell'integrazione delle equazioni differenziali, ispirandosi al lavoro di Galois sulle equazioni algebriche; il suo obiettivo era infatti determinare le condizioni di integrabilità di un sistema differenziale studiando il gruppo delle simmetrie delle sue soluzioni. Nel caso delle equazioni algebriche questo era un gruppo di permutazioni (delle radici), mentre nel caso delle equazioni differenziali si trattava di un *gruppo continuo*, cioè non finito ma parametrizzato da un numero finito di indeterminate. Con questo Lie giunse alla teoria dei gruppi che portano il suo nome e che resta il suo grande contributo alla Matematica più che la teoria galoisiana delle equazioni differenziali che andava erigendo[3]: questo spiega l'inconcepibile lasso di tempo passato fra la pubblicazione dei *Trasformationsgruppen* di Lie e il riemergere delle teorie ivi sviluppate sulla geometria delle equazioni differenziali; la teoria della simmetria di queste equazioni (ad esempio la teoria delle trasformazioni di contatto) fu completamente fondata da Lie che diede anche molti esempi di applicazioni (cfr. ad esempio *Gesammelte Abhandlungen* Vol.5, Teubner, Leipzig, 1924, pp.240–310).

Lie introdusse, in particolare, un metodo di linearizzazione per lo studio delle simmetrie delle equazioni differenziali, che consiste essenzialmente nel passaggio dal gruppo all'algebra di Lie e nella successiva possibilità di ricostruire il gruppo locale a partire dall'algebra (terzo teorema di Lie): nello studio di questo problema, in particolare nella dimostrazione dell'inverso del

[3]Quest'ultima fu, in un certo senso, completata da Kolchin e Ritt che la inquadrarono nella teoria dei gruppi algebrici; comunque Lie riuscì a dimostrare l'analogo del teorema di Galois per le equazioni differenziali, mostrando che un sistema è integrabile per quadrature se e solo se il suo gruppo di Lie di simmetrie è risolubile (teorema di Lie–Bianchi). Per una esposizione moderna ma nello spirito di Lie della teoria della simmetria delle equazioni differenziali cfr. [80], [59].

terzo teorema, fu condotto alla considerazione di certe parentesi ausiliarie (cfr. [65, Kap 17]), che oggi si chiamano *parentesi di Lie–Poisson*, definite a partire dalla rappresentazione coaggiunta di un gruppo di Lie (cfr. [65, Cap. 19] che si intitola *Die dualistische der adjungirten Gruppe*). Le parentesi di Lie–Poisson soddisfano alla stessa identità di Jacobi delle parentesi di Poisson, pur essendo oggetti essenzialmente diversi (lineari questi e costanti quelle), e Lie investigò le origini di questa analogia, giungendo a definire in generale il concetto di *struttura di Poisson* [65, Cap. 8 e Cap.13, §62, Satz.2] e stabilendo l'analogo dell'identità di Jacobi per questi oggetti più generali [65, Cap.13, §62, p.235 equazione 6]. Il suo lavoro in questo senso, forse perché ausiliario alla teoria dei gruppi e delle algebre di Lie, fu sostanzialmente ignorato dai suoi epigoni e dimenticato; lo stesso Élie Cartan pur approfondendo e completando molti aspetti dell'opera del matematico norvegese sembrò ignorare del tutto gli sviluppi che il concetto di struttura di Poisson poteva avere sulla Geometria a sulla Meccanica.

Nel frattempo la teoria geometrica delle equazioni differenziali aveva subito una sistemazione da parte di Gaston Darboux[4] e Georg Ferdinand Frobenius[5], che, usando il concetto di sistema pfaffiano e il formalismo del calcolo differenziale esterno che allora andava delineandosi, diedero al problema dell'integrazione veste geometrica, usando metodi non discosti da quelli di Lie. Questo formalismo geometrico sfociò anche nella Geometria Simplettica e di Contatto, che vennero riconosciuti come gli ambienti naturali nei quali formulare il formalismo hamiltoniano e la teoria di Hamilton–Jacobi (cfr. [1], [**?**], [63], [73] e [96] per una discussione approfondita della geometria di queste teorie meccaniche).

Quando il concetto di simmetria fu reintrodotto in Geometria Simplettica (sostanzialmente la sua formulazione meccanica risale al celebre lavoro di Emmy Noether[6]) e fu formulata la teoria dell'applicazione momento (un altro concetto chiaramente espresso in [65, Capp. 17–19], in particolare cfr. p. 300 sgg.) le strutture di Lie–Poisson vennero riscoperte, in modo sostanzialmente indipendente, da Berezin [7], Kirillov [51], Konstant [55] e Souriau [96]. In particolare Kirillov e Konstant stabilirono il legame fra Geometria Simplettica e Teoria delle Rappresentazioni da un lato e Geometria Simplettica e Quantizzazione dall'altro chiarendo che le orbite dell'azione coaggiunta di un gruppo di Lie sullo spazio duale alla sua algebra sono simplettiche rispetto alla restrizione delle parentesi di Lie–Poisson, e che queste ultime possono

[4] *Sur le problème de Pfaff*, Bull. Sci. Math. **6** (1882), 14–36, 49–68.

[5] *Über das Pfaffsche Probleme*, J. Reine Angew. Math. **82** (1877), 230–315.

[6] *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. König. Gesell. Wissen. Göttingen, Math. Phys. Kl. (1918), 235–257.

anche vedersi come la riduzione delle parentesi simplettiche sul fibrato cotangente del gruppo di Lie: di questi due approcci solo il primo pare essere già presente nell'opera di Lie.

Le parentesi simplettiche, che generalizzano secondo le linee del formalismo di Darboux e Frobenius le parentesi introdotte da Poisson, e quelle di Lie–Poisson consentirono immediatamente di formulare alcuni problemi meccanici in modo invariante e generale; questo diede l'impulso ad un loro più approfondito studio nell'ambito della meccanica sia classica che quantistica: la prima generalizzazione la diede Dirac (cfr. [31], [32]) che stabilì, in vista dei procedimenti di quantizzazione, un formalismo hamiltoniano generalizzato che consentisse la considerazione di sistemi vincolati, definendo in questo modo esempi di varietà di Poisson regolari non simplettiche. Queste furono uno dei punti di partenza per lo studio geometrico che André Lichnerowicz [64] fece delle algebre di Lie dei campi di vettori e delle funzioni sulle varietà differenziabili nel 1977; un secolo dopo Lie troviamo qui per la prima volta definite le varietà di Poisson (solo quelle regolari, in verità, escludendo dunque il caso delle strutture di Lie–Poisson). Contemporaneamente A.A. Kirillov [52] introdusse un concetto più generale di struttura di Poisson (che oggi si chiama *varietà di Jacobi*) avendo in mente la teoria delle rappresentazioni. Fu Alan Weinstein nel 1983 [104] a definire in piena generalità il concetto di varietà di Poisson (più generale di quello di Lichnerowicz e Lie e più particolare di quello di Kirillov) determinando al contempo l'analogo del Teorema di Darboux, cioè la struttura locale, per queste varietà, e riconoscendo anche per la prima volta che i prodromi e parte della teoria si trovavano già nel lavoro di Lie.

Contemporaneamente alla pubblicazione del lavoro di Weinstein [104] ove troviamo la prima teoria generale delle varietà di Poisson, V.G. Drinfel'd pubblicava una breve nota [35] nella quale sintetizzava gli aspetti geometrici del formalismo delle equazioni di Yang–Baxter, oggetto di profondi studi da parte dei ricercatori sovietici in quegli ultimi anni[7], mostrando come la struttura soggiacente a quel formalismo fosse la geometria di Poisson di certe parentesi non lineari compatibili con una struttura di gruppo di Lie: Drinfel'd era interessato a questi oggetti in quanto limiti semi-classici dei suoi gruppi quantici, cui avrebbe dedicato profonde ricerche in quegli anni. Tuttavia le strutture di Poisson da lui identificate e legate alle soluzioni dell'equazione di Yang–Baxter classica sulle algebre di Lie semplici furono i primi esempi di *gruppi di Poisson–Lie*, poi estensivamente studiati da Semenov-Tijan-Šanskij

[7] In particolare cfr. E.K. Slyanin *The quantum inverse scattering method*, J. of Soviet Math. **19** (1982) no.5 e A.A. Belavin, V.G. Drinfel'd *On the solutions of the classical Yang–Baxter equations for simple algebras*, Funct. An. Appl. **17** (1983), 159–180.

[90]–[93], Lu e Weinstein [70]. Questi fornirono nuovi esempi di varietà di Poisson assai importanti perché non ammettevano analoghi nel "mondo simplettico e costituivano quindi un nuovo filone di ricerca. Lo studio di queste strutture, e il loro legame alle questioni di quantizzazione sia geometrica che per deformazione, diede un forte impulso alla geometria di Poisson e alle sue generalizzazioni: lo stesso Drinfel'd affrontò la questione della classificazione degli spazi di Poisson omogenei, che legò alla teoria delle algebre di Hopf.

Verso l'inizio degli anni '90 la Geometria di Poisson aveva acquisito un carattere indipendente, non più legato alla Geometria Simplettica né al problema della quantizzazione. I frutti dei primi quindici anni di ricerca furono raccolti nella monografia di I. Vaisman [102] che resta l'unico lavoro interamente dedicato all'argomento (capitoli sulle varietà di Poisson si trovano in [63], [49], [80] e [73]); il tentativo di mostrare che la teoria aveva un contenuto eminentemente geometrico differenziale è il filo conduttore di quel volume, che pure sintetizza gli aspetti contemporanei della ricerca in questo settore: ad esempio il concetto di gruppoide simplettico, introdotto sostanzialmente da Karasaev [49] e Weinstein [108] (cfr. [29]). Diverse generalizzazioni di sapore geometrico sono emerse in anni recenti, in particolare il concetto di *algebroide di Lie* (cfr. [71], [17]), *algebroide di Courant* (cfr. [28]) e *struttura di Dirac generalizzata* (cfr. [27]): lo studio di questi oggetti può ben dirsi l'unico capitolo puramente geometrico differenziale della teoria delle varietà di Poisson ed è l'argomento sul quale vertono le ricerche contemporanee, specie da parte di Weinstein e dei suoi collaboratori.

* * *

Il lavoro che qui si presenta racchiude le ricerche da me svolte col sostegno della borsa di studio di Dottorato di Ricerca presso il Dipartimento di Matematica *U. Dini* dell'Università di Firenze. Si tratta di una indagine che è possibile riassumere secondo tre linee principali: l'applicazione dei concetti classici della Geometria Differenziale alle varietà di Poisson; l'introduzione di nuovi invarianti analitici per queste varietà e le loro generalizzazioni algebriche; l'estensione del calcolo integrale alle varietà di Poisson.

Il *primum movens* di queste ricerche fu l'idea di introdurre in modo sistematico le tecniche della Geometria Differenziale nell'àmbito della Geometria di Poisson, prima fra tutte la teoria delle connessioni. Una semplice combinazione del concetto di connessione con quello di struttura di Poisson porta rapidamente a risultati negativi: una varietà di Poisson non ammette, se non nel caso regolare (cioè poco più che simplettico), connessioni compatibili con la struttura di Poisson; l'idea iniziale fu quindi di adattare la nozione di connessione al nostro contesto: per farlo si è cercato in primo luogo di algebrizzare (cioè semplificare) il problema, il che ha condotto al concetto di modulo di Poisson; la necessità poi di rendere effettivi i metodi algebrici ha spinto alla ricerca di metodi analitici di approssimazione, ciò che ha motivato l'idea di introdurre il concetto di distribuzione (o funzione generalizzata) sulle varietà di Poisson; poiché, classicamente, le distribuzioni si presentano quasi sempre come integrali di funzioni sommabili, è stato naturale cercare questa presentazione anche nel caso in esame, il che ha condotto alla constatazione dell'assenza di una teoria dell'integrazione sulle varietà di Poisson e al tentativo di colmare questa lacuna.

Il primo capitolo è essenzialmente introduttivo e serve a familiarizzare il lettore con i vari aspetti della Geometria di Poisson: tutti i concetti di base della teoria, a partire dalla definizione di varietà di Poisson, ma anche i vari teoremi di struttura per queste varietà, il calcolo differenziale e la coomologia, sono qui introdotti per mezzo di esempi; poiché si tratta sostanzialmente di una organizzazione di materiale già esistente in letteratura le dimostrazioni non banali sono sostituite da riferimenti bibliografici. Particolare ènfasi è posta sul caso simplettico e lineare (strutture di Lie–Poisson) che sono gli esempi fondamentali; in particolare le strutture di Lie–Poisson costituiscono una forte motivazione allo studio delle varietà di Poisson non simplettiche e in esse si manifestano già tutti i caratteri essenziali della teoria generale.

Il secondo capitolo fornisce una trattazione generale del formalismo delle parentesi di Poisson nell'ambiente più astratto, vale a dire quello delle algebre associative: si introducono gli elementi della teoria in modo assolutamente generale, imponendo costantemente l'ipotesi di commutatività dell'algebra, limitandosi cioè alla Geometria Classica (escludendo la Geometria Non Commutativa) o, in termini fisici, alla Meccanica Classica (escludendo i procedimenti di quantizzazione). Si introduce il calcolo differenziale di Cartan e di Ricci[8] in questo contesto utilizzando il concetto di *modulo differenziale* e si sviluppa la teoria delle connessioni (senza approfondire comunque gli aspetti relativi alla K-teoria). Infine si utilizzano queste nozioni per formalizzare il calcolo differenziale di Poisson, generalmente introdotto sulle varietà, trattando il formalismo delle parentesi di Schouten, l'esistenza di una struttura di Lie sul modulo dei differenziali e la coomologia di Poisson. La nostra trattazione delle algebre di Poisson non aggiunge elementi realmente nuovi a quanto già noto ma ha, riteniamo, il merito della chiarezza (si confronti ad esempio l'approccio di Huebschmann in [44] che ricorre al formalismo di Rineheart).

Nel terzo capitolo definiamo dei nuovi oggetti, i *moduli di Poisson*, ne

[8]Una trattazione puramente algebrica di questi concetti fa parte del folklore matematico da parecchio tempo: cfr. [18].

diamo molti esempi, il che costituisce una forte motivazione alla loro considerazione, e ne discutiamo la teoria algebrica e le sue possibili ramificazioni. Il concetto di modulo di Poisson è, riteniamo, estremamente naturale, ma si presenta immediatamente assieme a tutte le difficoltà che l'ambiente astratto impone: la teoria di questi moduli, che dovrebbe costituire una "teoria delle rappresentazioni delle algebre di Poisson, non si affronta facilmente a meno di imporre ipotesi restrittive, che però noi non possiamo permetterci: poiché i nostri esempi sono geometrici, le algebre che trattiamo sono di dimensione infinita e per di più non posseggono strutture topologiche ricche (non sono algebre di Banach, ad esempio). Un concetto legato a quello di modulo di Poisson che si è imposto nella trattazione della coomologia di Poisson (che qui è sviluppata in modo puramente algebrico pur senza ricorrere all'algebra omologica coma fa Huebschmann, cfr. [44]) è quello di *rappresentazione di Poisson*: queste sono in un certo senso la linearizzazione dei moduli di Poisson e la coomologia che è possibile associare ad essi ha come caso particolare l'usuale coomologia di Poisson. Gli esempi più interessanti di queste rappresentazioni hanno natura geometrica e sono legate alla teoria delle connessioni (o meglio della sua generalizzazione datane nel capitolo precedente).

Nel quarto capitolo consideriamo gli esempi geometrici della teoria sviluppata nel capitolo precedente: i moduli e le rappresentazioni sono in questo caso le sezioni di fibrati sulla varietà di Poisson. Il modulo che gioca il ruolo principale è quello generato dai campi hamiltoniani, i cui elementi chiamiamo qui *tensori simplettici*[9] del quale diamo alcune caratterizzazioni geometriche; discutiamo anche brevemente il concetto di connessione di Poisson e proponiamo una generalizzazione. Utilizzando il calcolo tensoriale nei fibrati diamo poi delle caratterizzazioni geometriche delle differenze esistenti fra i vari concetti algebrici introdotti nel capitolo precedente. Infine trattiamo quello che a nostro avviso è un importante esempio di modulo di Poisson, vale a dire il modulo delle distribuzioni della varietà di Poisson stessa: mostriamo come questo modulo contenga più informazioni dell'algebra di Poisson; in particolare una classe di distribuzioni, che chiamiamo *distribuzioni di Casimir*, sembra giocare un ruolo centrale nella teoria locale.

Nel quinto capitolo diamo la versione algebrica di una delle coomologie introdotte per le algebre di Poisson nel terzo capitolo: si tratta della coomologia del modulo di Poisson dei campi simplettici (e più in generale dei tensori simplettici); esiste una teoria coomologica per le varietà di Poisson che risale a Lichnerowicz (cfr. [64]) ed il cui calcolo è proibitivo anche nei casi più semplici:

[9] Ci è stato fatto rilevare che questa terminologia collide con quella talora adottata per denotare i campi localmente hamiltoniani: tuttavia questo nostro abuso lessicale non induce reali ambiguità, visto che i campi localmente hamiltoniani sono generalizzati, in geometria di Poisson, da quelli che noi chiamiamo *canonici*.

la coomologia qui proposta è più restrittiva, perché trascura le informazioni trasversali alle foglie simplettiche della varietà di Poisson, ma ha il pregio della funtorialità. Il complesso che la calcola può vedersi come un complesso di "forme differenziali anche se è composto da campi di vettori; a riprova di ciò è possibile integrare un tensore simplettico lungo certe catene singolari che fanno parte di una omologia legata sempre allo spazio delle foglie. Tuttavia la coomologia da noi definita non è duale di questa omologia, e la ricerca di una tale dualità non ha ancora dato èsiti soddisfacenti. Da ultimo diamo una breve trattazione della teoria astratta della misura che sembra soggiacere al concetto di integrale qui definito: si tratta di una teoria della misura non commutativa, che possiamo definire con minori difficoltà tecniche della usuale teoria di Connes (cfr. [24]); la nostra speranza è costruire un funtore dalla categoria delle varietà di Poisson alla categoria delle algebre di von Neumann che soddisfi alcune proprietà essenziali ispirate dal concetto di "quantizzazione per come è conosciuto dalla fisica contemporanea. La costruzione che qui diamo è un frammento di questa teoria ancora da edificare.

* * *

Questo lavoro è stato composto e redatto per una lettura il più possibile gradevole e chiara: ho cercato di scrivere in tutti i dettagli, ove questo non pregiudicasse la continuità espositiva, sia le dimostrazioni che, sopra ogni cosa, gli esempi, e di spiegare sempre le motivazioni e le finalità di quanto andavo scrivendo. Per ogni risultato, anche già noto, ho cercato di fornire mie dimostrazioni: quando, tuttavia, una dimostrazione è stata ripresa dalla letteratura ne ho sempre fatto esplicita menzione indicando la fonte; analogamente ho cercato di attribuire i risultati principali risalendo ove possibile, nel citarli, alle fonti primarie. Per non rendere disagevole la lettura il lavoro è stato suddiviso in capitoli e ciascun capitolo in paragrafi, ed è stato aggiunto un indice analitico; la bibliografia si limita alle opere consultate per la stesura del lavoro e non ha alcuna pretesa di completezza in materia.

La lingua utilizzata è l'italiano (o una sua approssimazione): questo ha comportato qualche problema lessicale, in particolare sulla scelta dei vocaboli con i quali tradurre termini tecnici coniati in inglese; talvolta, per chiarezza, si è lasciato il termine inglese, come nel caso della locuzione *pull-back*, altrove si è tradotto talora con qualche difficoltà: ad esempio il termine *foliation*, usualmente reso con *foliazione*, corrisponde qui a *fogliazione*: si tratta infatti di un vocabolo che all'inglese viene dal latino *folium* e i derivati, in italiano, di questo termine palatalizzano, rendendo più realistica la mia traduzione; inoltre *fogliazione* è un termine già presente nel lessico italiano[10] (anche il termine

[10] Il *Dizionario Enciclopedico Treccani* riporta la voce **fogliazione** <-*zz*-> s. f.- In bo-

simplettico, coniato e introdotto in Matematica da H. Weyl[11], appartiene alle scienze naturali, trattandosi dell'osso di particolari specie di pesci).

tanica, sbocciamento delle gemme ed espansione delle foglie: si dice particolarmente degli alberi.

[11]cfr. il suo capolavoro *The Classical Groups. Their Invariants and Representations*, Princeton U.P., 1939, la nota a pag. 165.