Capitolo 11

ALGEBRE DI VON NEUMANN

Nella nostra esposizione della teoria spettrale ci eravamo imbattuti nella definizione di algebra di von Neumann: queste sono le sottoalgebre di operatori che soddisfano la proprietà del doppio commutante $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$, analoga a quella delle algebre di matrici nel caso di dimensione finita. Per queste algebre esiste una grandiosa teoria, dovuta a Murray e von Neumann, che generalizza quella classica delle algebre semisemplici di dimensione finita, làmbita nel capitolo **??**. Diamo qui alcuni frammenti di questa teoria.

11.1 Misure e Rappresentazioni

11.1.1 Definizione *Una* rappresentazione di una C*-algebra $\mathcal{A}$ *è un morfismo di C*-algebre*

$$\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

ove $\mathcal{H}$ *è lo* spazio (di Hilbert) della rappresentazione *tale che* $\pi(I_{\mathcal{A}}) = I$*.*

Si noti che, per definizione: $||\pi(A)|| \leq ||A||$.

Ricordiamo le definizioni che abbiamo dato nello studio degli operatori normali:

11.1.2 Definizione *Se* $\mathcal{A}$ *è una C*-algebra, due sue rappresentazioni* $\pi_1 : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ *e* $\pi_2 : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ *si dicono* unitariamente equivalenti *e si scrive* $\pi_1 \cong \pi_2$ *se esiste un operatore unitario* $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ *tale che*

$$U\pi_1(f) = \pi_2(f)U$$

Si definisce

$$(\pi_1, \pi_2) := \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid \forall f \in C_o(\mathbb{C})\ T\pi_1(f) = \pi_2(f)T\}$$

e gli elementi di questo insieme si dicono *operatori di allacciamento*.

Ci occuperemo in questo capitolo, delle rappresentazioni $\pi : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (tali che $\pi(1) = I$). La teoria (commutativa) della molteplicità spettrale è lo studio delle rappresentazioni di $C(X)$ ove X è uno spazio compatto di Hausdorff: vedremo che questo è legato alla teoria della misura sui boreliani di X.

Ricordiamo che, per $x, y \in \mathcal{H}$, la mappa

$$f \longmapsto (x, \pi(f)y)$$

è un funzionale lineare su $C(X)$, continuo in virtù della

$$|(x, \pi(f)y)| \leq ||x|| \; ||y|| \; ||\pi(f)|| \leq ||x|| \; ||y|| \; ||f||$$

Allora, per il teorema di Riesz–Markov 9.2.2:

$$F \in C(X)^* \iff F(f) = \int_X f(t) d\mu(t)$$

ove μ è una misura boreliana complessa regolare e limitata (cioè è una combinazione lineare finita di misure regolari di probabilità).

Quindi

$$(x, \pi(f)y) = \int_X f(t) d\mu_{x,y}(t)$$

11.1.3 Definizione *Gli elementi della famiglia*

$$\{\mu_{x,y}\}_{x,y \in \mathcal{H}}$$

si dicono misure spettrali *associate alla rappresentazione* π.

11.1.4 Definizione *Una misura regolare di probabilità* μ *su* X *si dice* basica *per una rappresentazione* $\pi : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *se*

- *Per ogni* $x \in \mathcal{H}$, $\mu_{x,x} \ll \mu$.
- *Se* μ' *è una misura che soddisfa la (1) allora* $\mu \ll \mu'$.

11.1.5 Teorema *Se* $\mathcal{H}$ *è separabile allora esiste* $\xi \in \mathcal{H}$ *tale che per ogni* $x \in \mathcal{H}$:

$$\mu_{x,x} \ll \mu_{\xi,\xi}$$

Cioè esiste una misura basica per la rappresentazione π.

DIMOSTRAZIONE: Se X è compatto di Hausdorff e μ è una misura regolare di probabilità su X allora $\nu \ll \mu$ se e solo se $d\nu(s) = f(s)d\mu(s)$ ove f è la derivata di Radon–Nikodym (teorema di Radon–Nikodym 6.3.6), che è una funzione integrabile rispetto a ν e non negativa; si noti che se $\nu_n \xrightarrow{||\cdot||} \nu$ allora

$$\frac{d\nu_n}{d\mu} \xrightarrow{L^1} \frac{d\nu}{d\mu}$$

e $\nu \ll \mu$. Ora, dato che $\mathcal{H}$ è separabile, esiste una successione $\{\xi_n\}$ densa in $\mathcal{H}_1$ (gli elementi di norma 1) e se $\{c_n\}$ è una successione numerica tale che

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 1$$

la misura

$$\mu := \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mu_{\xi_n,\xi_n}$$

è basica.

QED

11.1.6 Definizione *Se $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una rappresentazione di una C^*-algebra $\mathcal{A}$, un vettore $x \in \mathcal{H}$ si dice* ciclico *per π se*

$$\overline{\pi(\mathcal{A})x} = \mathcal{H}$$

(lo spazio degli elementi ottenuti da x operando tramite π è denso in $\mathcal{H}$.)

Il nostro obiettivo è dimostrare che se $\pi : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una rappresentazione ed il vettore $\xi \in \mathcal{H}$ è ciclico per $\pi(C(X))'$ (commutante di $\pi(C(X))$ in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ allora $\mu_{\xi,\xi}$ è basica: dedurremo questo teorema da un risultato già di per sé interessante, e cioè l'esistenza di un vettore ciclico per ogni rappresentazione di $C(X)$ su uno spazio separabile.

Per dimostrare questi risultati servono alcuni preliminari.

11.1.7 Definizione *Se $\mathcal{A}$ è una C^*-algebra e*

$$\{\pi_\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\alpha)\}_{\alpha\in A}$$

è una famiglia di rappresentazioni di $\mathcal{A}$ allora lo spazio

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{\alpha\in A} \mathcal{H}_\alpha$$

è lo spazio di una rappresentazione $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *definita come*

$$(\pi(A)x)(\alpha) := \pi_\alpha(A)x_\alpha$$

(si rammenti la definizione di prodotto di una famiglia di insiemi) che si dice somma diretta delle rappresentazioni $\{\pi_\alpha\}$.

Osserviamo che questa definizione ha perfettamente senso:

$$\left|\left|\sum_{\alpha\in A}(\pi(A)x)\alpha\right|\right|^2 \leq ||A||^2\left|\left|\sum_{\alpha\in A}x_\alpha\right|\right|^2 = ||A||^2\ ||x||^2$$

da cui $||\pi(A)x|_{\mathcal{H}} \leq ||A||\ ||x||$ e quindi $\pi(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Se $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è una famiglia di sottospazi vettoriali chiusi in $\mathcal{H}$ a due a due ortogonali che generino $\mathcal{H}$:

$$\overline{\sum_{\alpha\in A} M_\alpha} = \mathcal{H}$$

e se $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una rappresentazione tale che, per ogni $\alpha \in A$: $\pi(\mathcal{A})M_\alpha \subset M_\alpha$ allora le rappresentazioni $\pi|_\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(M_\alpha)$ ottenute per restrizione sono tali che

$$\pi = \bigoplus_{\alpha\in A} \pi_\alpha$$

11.1.8 Definizione *Una rappresentazione* $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *si dice* non degenere *se la *-sottoalgebra* $\pi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *è non degenere, nel senso che*

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad \pi(\mathcal{A})x = 0 \Rightarrow x = 0$$

11.1.9 Proposizione *Se* $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *è una rappresentazione di una C*-algebra* $\mathcal{A}$ *allora sono equivalenti le*

- π *è non degenere;*
- $\overline{\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}} = \mathcal{H}$*;*
- *Per ogni* $x \in \mathcal{H}$, $x \in \overline{\pi(\mathcal{A})x}$.

DIMOSTRAZIONE: Poniamo per brevità $\mathcal{B} := \pi(\mathcal{A})$.

(1)⇒(2): se $y \perp \mathcal{B}\mathcal{H}$ allora, per ogni $B \in \mathcal{B}$ e $y \in \mathcal{H}$:

$$0 = (y, Bx) = (B^*y, x) \Rightarrow B^*y = 0 \Rightarrow By = 0 \Rightarrow y = 0$$

(perché $\mathcal{B}$ è una *-algebra e vale la (1)).

(2)⇒(1): Se $(\mathcal{BH})^\perp = 0$ allora $\mathcal{B}x = 0$ per ogni $x \in \mathcal{H}$, i.e. $x = 0$.

(3) $\iff$ (2): La (3) implica che $\mathcal{H} \subset \overline{\mathcal{BH}} \subset \mathcal{H}$ e quindi la (2); se vale (2), consideriamo $x \in \mathcal{H}$ e $\overline{\mathcal{B}x}$, che deve essere $\mathcal{B}$-invariante:

$$Bx \in \mathcal{BH} \Rightarrow \forall B' \in \mathcal{B} \quad B'Bx = (B'B)x \in \mathcal{B}x$$

Per la continuità degli operatori in $\mathcal{B}$ si ha anche $\overline{\mathcal{B}x}$ è $\mathcal{B}$-stabile[1]. Posto $M = \overline{\mathcal{B}x}$ e $E = E_M$:

$$x \in \overline{\mathcal{BH}} \iff x = Ex$$

Ma $\mathcal{B}(x - Ex) = 0$: infatti

$$B(x - Ex) = Bx - BEx = Bx - EBx = Bx - Bx = 0$$

(dato che $Bx \in M \Rightarrow EBx = Bx$). Quindi se $\mathcal{B}$ è non degenere, $x = Ex$.

QED

11.1.10 Teorema *Una rappresentazione non degenere di una C^*-algebra è somma diretta di rappresentazioni cicliche.*

Dimostrazione: Al solito sia $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ la rappresentazione e $\mathcal{B} = \pi(\mathcal{A})$; consideriamo, per $\xi \in \mathcal{H}$, i sottospazi chiusi

$$M_\xi := \overline{\pi(\mathcal{A})\xi}$$

Per definizione sono spazi invarianti per π ed evidentemente $\pi|_{M_\xi}$ è una rappresentazione ciclica (infatti $\xi \in \pi_{M_\xi}(\mathcal{A})$ se π è non degenere per la (3) della proposizione precedente). Ora dimostriamo che

$$M \text{ è } \pi\text{-stabile} \iff M^\perp \text{ è } \pi\text{-stabile}$$

In effetti se per ogni $B \in \mathcal{B}$: $BM \subset M$ allora, se $x \in M^\perp$:

$$\forall y \in M \quad (Bx, y) = (x, B^*y) = 0$$

cioè $BM \subset M$ e quindi $BM^\perp \subset M^\perp$. Il viceversa è ovvio.

Quindi (per ogni *-sottoalgebra $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$), se M è un sottospazio $\mathcal{B}$-stabile si ha

$$\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$$

[1] Osserviamo che *se $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una *-sottoalgebra e M è chiuso in $\mathcal{H}$, M è $\mathcal{B}$-stabile se e solo se $E_M \in \mathcal{B}'$*. Infatti $BE = EBE$ e $EB^* = EB^*E = B^*E$ (E è autoaggiunto).

Ogni elemento $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si rappresenta nella forma

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

con

$$A_1 := E_M B E_M \qquad A_2 := E_{M^\perp} B E_M$$
$$A_3 := E_M B E_{M^\perp} \qquad A_4 := E_{M^\perp} B E_{M^\perp}$$

e, se $\mathcal{B}$ è una *-sottoalgebra (come nel nostro caso $\mathcal{B} = \pi(\mathcal{A})$) e M è $\mathcal{B}$-stabile:

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

Se ora consideriamo $\xi \in M^\perp \setminus \{0\}$ $(M \neq \mathcal{H})$ allora $\overline{\mathcal{B}\xi} =: M_\xi$ è tale che

$$M_\xi \subset M^\perp$$

Quindi un sottospazio M stabile, chiuso (e proprio) induce una rappresentazione sul sottospazio ortogonale.

Se $\mathcal{S}$ è l'insieme delle famiglie $\mathfrak{M}$ di sottospazi vettoriali chiusi $\mathcal{B}$-stabili a due a due ortogonali su $\mathcal{H}$ e tali che $\pi|_M$ sia ciclica per ogni $M \in \mathfrak{M}$ allora l'inclusione $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$ è una relazione di ordine parziale su $\mathcal{S}$: se $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ è un sottoinsieme totalmente ordinato e

$$\mathfrak{M}' := \bigcup_{\mathfrak{M} \in \mathcal{S}'} \mathfrak{M}$$

evidentemente $\mathfrak{M}' \in \mathcal{S}$ è un maggiorante del sottoinsieme $\mathcal{S}'$; quindi l'insieme parzialmente ordinato $(\mathcal{S}, \subset)$ soddisfa alle ipotesi del lemma di Zorn, che implica l'esistenza di una famiglia massimale $\mathfrak{M}_0$ in $\mathcal{S}$. Il sottospazio di $\mathcal{H}$ generato dagli elementi densi di $\mathfrak{M}_0$ esaurisce tutto $\mathcal{H}$:

$$N := \sum_{\substack{M \in \mathfrak{M}_0 \\ \overline{M} = \mathcal{H}}} M = \mathcal{H}$$

Infatti se esistesse $\xi \in N^\perp \setminus \{0\}$ avremmo $\overline{\mathcal{B}\xi} = N_\xi$ con $N_\xi \subset N^\perp$, il che darebbe luogo ad una rappresentazione ciclica: ma allora $\mathfrak{M}_0 \cup \{N_\xi\}$ sarebbe un elemento di $\mathcal{S}$ contenente $\mathfrak{M}_0$, il che ne contraddirebbe la massimalità. Quindi $N = \mathcal{H}$.

Dunque π si esprime come somma di rappresentazioni cicliche.

QED

Se la rappresentazione π è degenere, il sottospazio

$$M_0 := \{x \in \mathcal{H} \mid \forall A \in \mathcal{A} \quad \pi(A)x = 0\}$$

è $\mathcal{B}$-stabile, quindi lo è pure $M := M_0^\perp$ e $\pi|_M$ è non degenere. Cioè

$$\pi = 0 \oplus \pi|_M = 0 \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in A} \pi_\alpha \right)$$

con le π_α cicliche.

Osserviamo che se $\mathcal{H}$ è separabile, la famiglia A nella somma

$$\pi = \bigoplus_{\alpha \in A} \pi_\alpha$$

è numerabile ed ogni M_α è del tipo $E_n\mathcal{H}$ (con $E_n \in \mathcal{B}$).

11.1.11 Teorema *Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una *-sottoalgebra commutativa e se $\mathcal{H}$ è separabile allora esiste un vettore ciclico per $\mathcal{A}$.*

Dimostrazione: Consideriamo la rappresentazione identica

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ A &\longmapsto A \end{aligned}$$

Per il teorema precedente

$$\pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n$$

(con le π_n cicliche) e $\pi|_{M_n} = \pi_n$. Se ξ_n è il vettore ciclico di π_n si ha $\overline{\mathcal{A}\xi} = \mathcal{H}$; possiamo scegliere ξ_n in modo che

$$||\xi_n|| = 1$$

Allora consideriamo $c \in l^2(\mathbb{N})$ con $||c|| = 1$; allora, se

$$\xi := \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \xi_n$$

si ha $||\xi||^2 = ||c||^2_{l^2} = 1$. Dimostriamo che ξ è un vettore ciclico per $\mathcal{A}'$: in effetti $E_n \in \mathcal{A}'$ e $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ (per commutatività di $\mathcal{A}$), quindi

$$\mathcal{A}'\xi \supset \mathcal{A}E_n\xi$$

cioè $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}' \subset \overline{\mathcal{A}E_n\xi}$ che, essendo $E_n\xi = c_n\xi_n$, è uguale a

$$\overline{c_n\mathcal{A}\xi_n} = \overline{\mathcal{A}\xi_n} = M_n$$

QED

Possiamo finalmente dimostrare il teorema che abbiamo enunciato in precedenza:

11.1.12 Teorema *Se $\pi : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una rappresentazione ed il vettore $\xi\in\mathcal{H}$ è ciclico per $\mathcal{A}'$ (commutante di $\mathcal{A} = \pi(C(X))$ in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ allora $\mu_{\xi,\xi}$ è basica.*

DIMOSTRAZIONE: Basta dimostrare che $\mu_{x,x} < \mu_{\xi,\xi}$. Ma se $(x_n) \subset \mathcal{H}$ converge in norma a x allora

$$\mu_{x_n,x_n} \longrightarrow \mu_{x,x}$$

e quindi per densità di $\mathcal{A}'\xi$ basta far vedere che

$$(*) \qquad \forall T \in \mathcal{A}' \quad \mu_{T\xi,T\xi} < \mu_{\xi,\xi}$$

Per dimostrare la (*) notiamo che[2]

$$\begin{aligned}\int f(s)d\mu_{T\xi,T\xi}(s) &= (T\xi, \pi(f)T\xi) = (Tf, \pi(g)^*\pi(g)T\xi)\\ &= (T\pi(g)\xi, T\pi(g)\xi) = ||T\pi(g)\xi||^2\\ &\leq ||T|^2||\pi(g)\xi||^2 = ||T||^2(\xi, \pi(f)\xi)\\ &= ||T||^2 \int f(s)d\mu_{\xi,\xi}\end{aligned}$$

Quindi

$$\mu_{T\xi,T\xi} \leq ||T||^2\mu_{\xi,\xi}$$

Ma allora per ogni insieme Δ $\mu_{\xi,\xi}$-misurabile si ha

$$\mu_{T\xi,T\xi}(\Delta) \leq ||T||^2\mu_{\xi,\xi}(\Delta)$$

sicché $\mu_{T\xi,T\xi}$ è dominata da $\mu_{\xi,\xi}$ e, *a fortiori*, si trova la (*). Da questa, per densità di $\mathcal{A}'\xi$ deduciamo che $\mu_{x,x} < \mu_{\xi,\xi}$.

QED

11.1.13 Teorema *Se π è una rappresentazione dell'algebra $C(X)$ delle funzioni continue su uno spazio compatto metrizzabile in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ separabile, allora π è ciclica se e solo se esiste una misura regolare μ di probabilità su X tale che*

$$\pi \cong \pi_\mu$$

ove $\pi_\mu(f)$ è la moltiplicazione per f nello spazio di funzioni $L^2(X, \mu)$ e tale che μ sia equivalente[3] ad una misura basica di π. Infine, se π_1 e π_2 sono rappresentazioni cicliche, allora $\pi_1 \cong \pi_2$ se e solo se le classi di equivalenza delle loro misure basiche coincidono.

[2]Usiamo il fatto che se f è positiva allora esiste g in modo che $f = g^*g$

[3]Si rammenti che due misure sono equivalenti se assolutamente continue l'una rispetto all'altra.

Dimostrazione: Supponiamo che ξ sia un vettore ciclico per $\mathcal{A} = \pi(C(X)) \subset \mathcal{A}'$; per il teorema precedente la misura $\mu := \mu_{\xi,\xi}$ è basica.

Consideriamo poi in $L^2(X,\mu)$ l'operatore

$$M_f \in \mathcal{B}(L^2(X,\mu))$$

definito, per $x \in L^2(X,\mu)$, come

$$(M_f x)(s) := f(s)x(s)$$

Osserviamo che

$$\int_X |f(s)x(s)|^2 d\mu(s) \leq ||f||^2 \int_X |x(s)|^2 d\mu(s) = ||f||^2\ ||x||^2$$

e quindi M_f manda effettivamente $L^2(X,\mu)$ in sé: dato che è lineare e continuo la mappa

$$f \longmapsto M_f$$

è una rappresentazione di C*-algebre, che è ciclica.

Infatti X è uno spazio compatto e μ una misura finita, quindi la funzione identicamente 1 appartiene a $C(X)$ ed è in $L^2(X,\mu)$. Pertanto

$$M_f 1 = f$$

è una immersione $C(X) \hookrightarrow L^2(X,\mu)$ e, come noto, $\overline{C(X)}^{||\cdot||_{L^2}} = L^2(X,\mu)$. Quindi 1 è un vettore ciclico per la rappresentazione M_f.

Ora consideriamo l'operatore $U : \mathcal{H} \longrightarrow K^2(X,\mu)$ definito come

$$U\pi(f)\xi := M_f 1$$

Vogliamo dimostrare che è unitario e di allacciamento fra π e M_f.

Per dimostrare che è unitario, dato che $C(X)$ è denso in $L^2(X,\mu)$, basta far vedere che è isometrico (nella norma L^2); ed infatti

$$\begin{aligned} ||\pi(f)\xi||^2 &= (\pi(f)\xi, \pi(f)\xi) = (\xi, \pi(f^* f)\xi) \\ &= \int_X (f^* f)(s) d\mu(s) = \int_X |f(s)|^2 d\mu(s) = ||f||^2_{L^2} \end{aligned}$$

Vediamo ora che si tratta di una equivalenza unitaria fra le rappresentazioni π e M_f. Intanto

$$U\pi(f)\xi = \pi_\mu(f)1$$

cioè

$$U\pi(fg)\xi = \pi_\mu(fg)1 \Rightarrow U\pi(f)\pi(g)\xi = \pi_m u(f)\pi_\mu(g)1 = \pi_\mu(f)U\pi(g)\xi$$

Ma $\pi(g)\xi$ è un generico vettore in un sottoinsieme denso di $\mathcal{H}$ e quindi, passando al limite nell'equazione precedente, si ottengono due operatori $U\pi(f)$ e $\pi_\mu(f)U$ che coincidono su un sottoinsieme denso, sicché

$$U\pi(f) = \pi_\mu(f)U$$

Questo conclude la dimostrazione della necessità della condizione.

Vediamo ora che la condizione del teorema è pure sufficiente per la ciclicità della rappresentazione π; infatti è quasi ovvio: se $\pi \cong \pi_1$ e $\pi_1(\mathcal{A})\xi = \mathcal{H}_{\pi_1}$ allora esiste un operatore unitario U di allacciamento fra π_1 e π_2 ed il vettore

$$\xi := U\xi_1$$

è ciclico per π:

$$U\pi_1(\mathcal{A})\xi_1 = \pi(\mathcal{A})U\xi_1 = \pi(\mathcal{A})\xi$$

(si rammenti che $U \in (\pi_1, \pi_2) \Rightarrow U^* \in (\pi_2, \pi_1)$.

Dimostriamo infine la seconda parte del teorema. Consideriamo cioè due misure regolari μ_1 e μ_2 di probabilità equivalenti:

$$\mu_1 = \frac{d\mu_1}{d\mu_2}\mu_2 \qquad \text{e} \qquad \mu_2 = \frac{d\mu_2}{d\mu_1}\mu_1$$

Definiamo poi un operatore

$$V : L^2(X, \mu_1) \longrightarrow L^2(X, \mu_2)$$

nel modo seguente: per ogni $x \in L^2(X, \mu_1)$

$$(Vx)(s) := \sqrt{\frac{d\mu_1}{d\mu_2}(s)}\, x(s)$$

Per dimostrare che $Vx \in L^2(X, \mu_2)$ osserviamo che

$$|(Vx)(s)|^2 = \frac{d\mu_1}{d\mu_2}(s)|x(s)|^2$$

(la derivata di Radon–Nikodym $d\mu_1/d\mu_2$ appartiene a $L^2(X, \mu_2)$) e quindi

$$\int_X |(Vx)(s)|^2 d\mu_2(s) = \int_X |x(s)|^2 d\mu_1(s)$$

cioè V è una isometria lineare $L^2(X, \mu_1) \longrightarrow L^2(X, \mu_2)$ che deve essere unitaria, in quanto, se

$$(V'x)(s) := \sqrt{\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(s)}\, x(s)$$

allora (allo stesso modo di V) V' è una isometria lineare ed è tale che

$$VV' = I \qquad \text{e} \qquad V'V = I$$

(dato che le misure sono equivalenti, le derivate di Radon–Nikodym dell'una rispetto all'altra sono l'una la funzione reciproca dell'altra.)

Dunque, per ogni s:

$$\begin{aligned}(V\pi_{\mu_1}(f)x)(s) &= \sqrt{\frac{d\mu_1}{d\mu_2}(s)}(\pi_{\mu_1}(f)x(s) = \sqrt{\frac{d\mu_1}{d\mu_2}(s)}f(s)x(s)\\ &= f(s)\sqrt{\frac{d\mu_1}{d\mu_2}(s)}x(s) = f(s)(Vx)(s) =: (\pi_{\mu_2}(f)(Vx))(s)\end{aligned}$$

e quindi

$$\forall x \in L^2(X,\mu_1) \quad V\pi_{\mu_1}(f)x = \pi_{\mu_2}(f)Vx$$

ovvero

$$V\pi_{\mu_1}(f) = \pi_{\mu_2}(f)V$$

Viceversa, se V è un operatore unitario di allacciamento fra π_{μ_1} e π_{μ_2} allora, se 1 è la funzione identicamente 1 in $L^2(X,\mu_1)$:

$$V\pi_{\mu_1}(f)1 = \pi_{\mu_2}(f)V1 =: \xi \in L^2(X,\mu_2)$$

Definendo

$$(\xi, V\pi_{\mu_1}(f)1) := (V1, V\pi_{\mu_1}(f)1)$$

si ottiene

$$\begin{aligned}(\xi, V\pi_{\mu_1}(f)1) &= (1, \pi_{\mu_1}(f)1) = \int_X f(s)d\mu_1(s)\\ &= \int_X \overline{\xi(s)}\xi(s)f(s)d\mu_2(s) = \int_X \overline{\xi(s)}(\pi_{\mu_2}(f)\xi)(s)d\mu_2(s)\end{aligned}$$

Dunque

$$\forall f \in C(X) \quad \int_X f(s)|\xi(s)|^2 d\mu_2(s) = \int_X f(s)d\mu_1(s)$$

e, per il teorema di Riesz–Markov,

$$\mu_1 = |\xi|^2\mu_2$$

cioè $\mu_1 \ll \mu_2$. In modo analogo si trova $\mu_2 \ll \mu_1$.

QED

11.2 Sottoalgebre commutative massimali in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

Consideriamo un operatore normale A: il suo spettro è puntuale se i suoi autovettori formano un sistema totale cioè

$$Ae_i = \lambda_i e_i$$

Se ora $U : \mathcal{H} \longrightarrow l^2(\mathbb{N})$ è l'operatore unitario determinato dalla scelta della base $\{e_n\}$ di $\mathcal{H}$, allora l'operatore UAU^{-1} è diagonale ed i suoi elementi diagonali sono la successione degli autovalori, ripetuti ciascuno tante volte quanta è la sua molteplicità. Quindi

$$l^2(\mathbb{N}) = L^2(\sigma(A), \mu)$$

ove μ è una misura di probabilità *totalmente atomica* nel senso che è concentrata nei singoli punti dello spettro. Ad esempio

$$\mu = \sum c_n \delta_{\lambda_n}$$

con $c_n > 0$, $\sum c_n = 1$ e δ_λ misura di Dirac concentrata in λ; allora $f(A)$ diviene, per tramite di U, la moltiplicazione per f:

$$Uf(A) = \pi_\mu(f)U$$

ove, per $x \in L^2(\sigma(A), \mu)$:

$$(\pi_\mu(f)x)(s) := f(s)x(s)$$

In questo caso è

$$x = \sum_n x_n e_n$$

con $x_n \in l^2(\mathbb{N})$ e quindi $Uf(A)U^{-1}$ è diagonale con autovalori dati dalla successione $\{f(\lambda_n)\}$.

11.2.1 Teorema *Se X è uno spazio compatto metrizzabile e π una rappresentazione non degenere ($\pi(1) = I$) di $\mathcal{A} = C(X)$ nello spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$ allora (l'indice f denota che la chiusura è nella topologia forte)*

$$\overline{\pi(\mathcal{A})}^f = \mathcal{R} := \pi(\mathcal{A})''$$

(si noti che $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$ essendo commutativa).

DIMOSTRAZIONE: Intanto notiamo che se π è ciclica allora $\mathcal{R} = \mathcal{R}' = \widetilde{\pi}(L^\infty(X,\mu))$ ove $\widetilde{\pi}$ è la rappresentazione

$$\widetilde{\pi} : \beta(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

dell'algebra delle funzioni boreliane limitate definita da

$$(x, \widetilde{\pi}(f)y) := \int_X f(s) d\mu_{x,y}(s)$$

Infatti, se f è μ-misurabile e limitata

$$\mu_{x,y} = \sum_{i=1}^n c_i \mu_{x_i,y_i}$$

(per polarizzazione). Ora

$$\ker \widetilde{\pi} = \{f \mid f = 0 \ \mu\text{-q.o.}\}$$

Infatti che il nucleo di $\widetilde{\pi}$ contenga questo insieme è ovvio; se poi $f \in \ker \widetilde{\pi}$ allora, dato che

$$\mu_{\pi(g_1)x,\pi(g_2)x}(s) = \overline{g_1(s)} g_2(s) \mu_{\xi,\xi}(s)$$

per un vettore ξ ciclico per π allora

$$\forall g \in C(X) \qquad \int_X f(s) g(s) d\mu = 0$$

e quindi, per il teorema di Lusin 4.6.7, $f = 0$ μ-q.o.

Quindi se $f \in L^\infty(X,\mu)$ allora $\widetilde{\pi}(f) = 0$ implica $f = 0$ (come elemento di $L^\infty(X,\mu)$, i.e. a meno di equivalenza q.o.) e quindi la rappresentazione $\widetilde{\pi}$ è fedele (cioè iniettiva). Allora, come *-algebre

$$L^\infty(X,\mu) \cong \pi(\mathcal{A})$$

Quello che vogliamo dimostrare è che $\widetilde{\pi}(L^\infty(X,\mu)) = \mathcal{R} = \mathcal{R}'$. Che sia

$$\widetilde{\pi}(L^\infty(X,\mu)) \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$$

è ovvio. Quindi basta provare che $\mathcal{R}' \subset \widetilde{\pi}(L^\infty(X,\mu))$; ora, essendo π ciclica, per una misura basica μ si ha

$$\pi = \pi_\mu$$

e quindi[4]

$$\widetilde{\pi}_\mu(L^\infty(X,\mu)) \subset \pi_\mu\left(\overline{C(X)}^{\mathrm{f}}\right) \subset (\pi_f(C(X))')'$$

[4]Osserviamo che se $S \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_1$ è unitario e $USU^{-1} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ allora $U\overline{S}^f U^{-1} = \overline{USU^{-1}}^f$ e $US'U^{-1} = (USU^{-1})'$.

Se dimostriamo che l'ultimo termine è incluso in $\widetilde{\pi}_\mu(L^\infty(X,\mu))$ abbiamo finito.

Consideriamo quindi $T \in \pi_f(C(X))'$:

$$f_T := T1 \in L^2(X,\mu)$$

(1 è la funzione identicamente 1 in $L^2(X,\mu)$) sicché

$$T\pi_\mu(f)I = \pi_\mu(f)T1 = f_T f$$

cioè $T1 = f_T$. Osserviamo che, se $f_T \in L^\infty(X,\mu)$ allora

$$T\pi_\mu(f)I = ff_T = \widetilde{\pi}(f_T)f = \widetilde{\pi}(f_T)\pi(f)I$$

e, per densità:

$$T = \widetilde{\pi}(f_T) \in \widetilde{\pi}(L^\infty(X,\mu))$$

Quindi ci siamo ridotti a dover dimostrare la $f_T \in L^\infty(X,\mu)$.

Per questo notiamo che

$$T \in \pi_\mu(C(X))' \Rightarrow T \in \widetilde{\pi}_\mu(L^\infty(X,\mu))'$$

(Infatti $\overline{S}^{||\cdot||} \subset \overline{S}^{\text{f}} \subset \overline{S}^{\text{debole}}$ (ovvio) e se $S \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ allora $(\overline{S}^{\text{debole}})' = S'$: intanto $S \subset \overline{S}^{\text{debole}}$ e $S_1 \subset S_2 \Rightarrow S_2' \subset S_1'$ implicano che $(\overline{S}^{\text{debole}})' \subset S'$; inoltre se $B \in S'$ allora per ogni $A \in S$: $AB = BA$ i,e, $ABx = BAx$ per ogni $x \in \mathcal{H}$ e, per ogni $y \in \mathcal{H}$: $(y, ABx) = (y, BAx)$ col che $B \in (\overline{S}^{\text{debole}})'$).

Dunque

$$\Delta := \{s \in X \mid |f_T(s)| > ||T||\}$$

è misurabile (lo è f_T) e quindi la sua funzione caratteristica χ_Δ è essenzialmente limitata; ma $L^\infty(X,\mu) \subset L^2(X,\mu)$ (dato che la misura dello spazio è finita) sicché

$$\begin{array}{c} ||\chi_\Delta f_T||^2_{L^2} \leq ||T||^2 ||\chi_\Delta||^2_{L^2} \\ || \\ ||T||^2 \int_\Delta d\mu(s) < \int_\Delta |f_T(s)|^2 d\mu(s) \leq ||T||^2 \int_\Delta d\mu(s) \end{array}$$

il che è assurdo a meno che la misura di $\{s \in X \mid |f_T(s)| > ||T||\}$ non sia zero. Quindi

$$|f_T| \leq ||T|| \quad \mu\text{-q.o.}$$

e ne concludiamo che $f_T \in L^\infty(X,\mu)$.

QED

Se $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert allora l'insieme delle *-sottoalgebre commutative di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ è parzialmente ordinato dalla relazione di inclusione; dato che verifica le ipotesi del lemma di Zorn se ne deduce che esistono sempre sottoalgebre massimali commutative di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

11.2.2 Definizione *Una sottoalgebra massimale commutativa di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ la chiameremo MASA (*maximal abelian subalgebras*).*

Ovviamente, per massimalità, una MASA è *-debolmente chiusa, quindi è una sottoalgebra di von Neumann.

11.2.3 Teorema *Se $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert separabile e $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una *-sottoalgebra commutativa allora sono equivalenti le*

- *$\mathcal{R}$ è MASA.*
- *$\mathcal{R} = \mathcal{R}'$.*
- *$\mathcal{R}$ è di von Neumann e possiede un vettore ciclico.*

Dimostrazione:

(1) $\Leftrightarrow$ (2): Se $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$ allora $\mathcal{R}$ è abeliana (ovvio: $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$) ed è massimale poiché, se $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_1'$, allora $\mathcal{R}_1'' \subset \mathcal{R}_1' \subset \mathcal{R}'$ e quindi, per ogni $\mathcal{R}_1$ contenente $\mathcal{R}$: $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1$. Viceversa, se $\mathcal{R}$ è MASA e $\mathcal{R} \subsetneq \mathcal{R}'$ allora esiste $T \in \mathcal{R}' \setminus \mathcal{R}$, quindi, dato che $\mathcal{R}'$ è una *-algebra, $T = T_1 + iT_2$ (T_1, T_2 autoaggiunti) e quindi o $T_1 \notin \mathcal{R}$ oppure $T_1 \notin \mathcal{R}$, i.e. esiste un autoaggiunto T non appartenente a $\mathcal{R}$. Questo autoaggiunto T genera un'algebra commutativa che commuta con $\mathcal{R}$, (vi commuta T: $T \in \mathcal{R}'$) e quindi l'algebra generata da $\mathcal{R}$ e T contiene $\mathcal{R}$ ed è commutativa, il che contraddice la massimalità di $\mathcal{R}$.

(3) $\Rightarrow$ (2) segue dal teorema di densità di von Neumann che dimostreremo in sèguito.

(2) $\Rightarrow$ (3) segue dall'esistenza di un vettore ciclico per $\mathcal{R}'$ che abbiamo già dimostrato.

QED

Abbiamo visto fin qui che se $\pi : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una rappresentazione non degenere dell'algebra delle funzioni continue di uno spazio compatto metrizzabile in uno spazio di Hilbert separabile allora esiste un vettore ξ ciclico per $\pi(C(X))'$ ed una misura $\mu = \mu_{\xi,\xi}$ basica; inoltre, considerando l'estensione

$$\widetilde{\pi} : L^\infty(X, \mu) \longrightarrow \mathcal{R} = \pi(C(X))''$$

abbiamo visto che $\widetilde{\pi}$ è un *-isomorfismo isometrico in $\mathcal{R}$.

11.2.4 Definizione *Se $T \in \mathcal{A}'$ è un elemento del commutante di una C*-algebra, si dice che* separa i punti *se $T\xi = 0 \Rightarrow T = 0$; si dice che ξ è separante per $\mathcal{A}'$.*

11.2.5 Teorema *$\widetilde{\pi}$ è suriettivo ed è un omeomorfismo se su $L^\infty(X,\mu)$ consideriamo la topologia *-debole e su $\mathcal{R}$ la topologia debole degli operatori.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo

$$\mathcal{H}_\xi := \overline{\pi(C(X))\xi}$$

Evidentemente $\pi_\xi := \pi|_{\mathcal{H}_\xi}$ è ciclica (per definizione!) con vettore ciclico ξ, sicché

$$\pi_\xi(C(X))'' = \widetilde{\pi}_\xi(L^\infty(X,\mu))$$

Inoltre

$$\widetilde{\pi_{\mathcal{H}_\xi}} = (\widetilde{\pi})|_{\mathcal{H}_\xi} \tag{1}$$

e, se $T \in \mathcal{R} = \overline{\pi(C(X))}^f$ allora $T\mathcal{H}_\xi \subset \mathcal{H}_\xi$; infatti se $f \in C(X)$:

$$\forall x \in \mathcal{H}_\xi \quad \pi(f)(x) \in \mathcal{H}_\xi$$

Più in generale: se $\mathcal{A}$ è una *-algebra e M un sottospazio chiuso di $\mathcal{H}$ tale che $\mathcal{A}M \subset M$ allora $\overline{\mathcal{A}}M \subset M$ (infatti questa condizione equivale alla $E_M \in \mathcal{A}' = (\overline{\mathcal{A}})'$). Dunque, dato che

$$Tx = \lim_\alpha \pi(f_\alpha)x = \lim_\alpha \pi_\xi(f_\alpha)x \in \overline{\pi_\xi(C(X))}^{\mathrm{f}}$$

si trova

$$T|_{\mathcal{H}_\xi} \in \overline{\pi_\xi(C(X))}^{\mathrm{f}} \tag{2}$$

Infine

$$\xi \text{ ciclico per } \mathcal{R}' \Rightarrow \xi \text{ separante per } \mathcal{A}' \tag{3}$$

Infatti se $T\xi = 0$ allora per ogni $B \in \mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$: $BT\xi = 0$ e quindi $TB\xi = 0$ ($T \in \mathcal{A}'$); ma $\overline{\mathcal{A}\xi} = \mathcal{H}$ e quindi T è continuo e nullo su un sottospazio denso, dunque $T = 0$.

Possiamo cioè affermare che la mappa

$$T \longrightarrow T|_{\mathcal{H}_\xi}$$

è uno *-isomorfismo, e la (1) implica che

$$\overline{\pi_\xi(C(X))}^{\mathrm{f}} = \widetilde{\pi}(L^\infty(X,\mu))|_{\mathcal{H}_\xi}$$

Quindi, per la (2):

$$C(X) \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \mathcal{R} \xrightarrow{\text{restrizione}} \mathcal{R}|_{\mathcal{H}_\xi} \subset \overline{\pi_\xi(C(X))}^f = \widetilde{\pi}_\xi(L^\infty(X,\mu)) = \widetilde{\pi}(L^\infty(X,\mu))|_{\mathcal{H}_\xi}$$

In altri termini, per ogni $T \in \mathcal{R}$ esiste $f_T \in L^\infty(X,\mu)$ tale che $T|_{\mathcal{H}_\xi} = \pi(f_T)|_{\mathcal{H}_\xi}$; ma allora, per la (3):

$$T = \widetilde{\pi}(f_T)$$

e quindi $\widetilde{\pi}$ è suriettiva. Ribadiamo che è un isomorfismo:

$$||f||_{L^\infty} = ||\widetilde{\pi}(f)|_{\mathcal{H}_\xi}|| \leq ||\widetilde{\pi}(f)|| \leq ||f||_{L^\infty}$$

Dimostriamo che si tratta di un omeomorfismo: per $g \in L^1(X,\mu)$ consideriamo le seminorme

$$p_g(f) := \int_X f(s)g(s)d\mu(s)$$

Ogni funzione in $L^1(X,\mu)$ è il prodotto di due funzioni in $L^2(X,\mu)$, ad esempio

$$g(s) = (\sqrt{|g(s)|}z(s))(\sqrt{|g(s)|})$$

ove $z(s)$ è la fase di $g(s)$ (funzione di modulo 1). Scriviamo cioè

$$g = \overline{x_1}x_2$$

Quindi

$$p_g(f) = \left| \int_X \overline{x_1(s)}x_2(s)f(s)d\mu(s) \right| = |(x_1, M_f x_2)|$$

Ma esiste un operatore unitario $U : L^2(X,\mu) \longrightarrow \mathcal{H}_\xi$ tale che

$$UM_f = \widetilde{\pi}_\xi(f) = \widetilde{\pi}(f)|_{\mathcal{H}_\xi}$$

pertanto

$$p_g(f) = |(Ux_!, UM_f x_2)| = |(\xi_1, UM_f U^{-1}\xi_2)| = |(\xi_1, \pi(f)\xi_2)|$$

che è la seminorma che definisce la topologia debole in $\mathcal{R}$.

Viceversa, per $x, y \in \mathcal{H}$ e $f \in L^\infty(X,\mu)$:

$$(x, \widetilde{\pi}(f)y) = \left| \int_X f(s)d\mu_{x,y}(s) \right|$$

Ma, per il teorema di Radon–Nikodym 6.3.6

$$\mu_{x,y} = g(s)\mu$$

e quindi

$$(x, \widetilde{\pi}(f)y) = \left| \int_X f(s)g(s)d\mu(s) \right|$$

QED

Questo teorema è definitivo per la teoria delle algebre di von Neumann commutative, ed è l'analogo del teorema di Gel'fand–Najmark: ogni algebra di von Neumann commutativa è generata dalle moltiplicazioni per le funzioni L^∞ su un certo spazio di misura regolare: questi spazi di misura sono sostanzialmente gli spazi $[0,1]$ con la misura di Lebesgue con al più una quantità numerabile di "atomi", cioè punti di misura positiva, che corrispondono a proiezioni minimali in $\mathcal{R}$.

Ora consideriamo una famiglia $\{A_n\}$ di operatori autoaggiunti che commutino a due a due, ed il loro spettro congiunto

$$X := j\sigma(A_1, A_2, ...) \subset \prod_{n\in\mathbb{N}} \sigma(A_n)$$

Sappiamo che

$$f \longmapsto f(A_1, A_2, ...)$$

è uno *-isomorfismo fra $C(X)$ è la C*-algebra $\mathbf{A}$ generata dall'identità e dalla famiglia $\{A_n\}$; possiamo quindi estendere questa rappresentazione (calcolo funzionale continuo) ad una rappresentazione

$$\begin{aligned} L^\infty(X) &\longrightarrow \mathcal{R} := \mathbf{A}'' \\ f &\longmapsto f(A_1, A_2, ...) \end{aligned}$$

ottenendo, in virtù del teorema precedente, uno *-isomorfismo isometrico suriettivo. Quindi per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ che commutati con qualsiasi A esiste f tale che $B = f(A_1, A_2, ...)$.

11.2.6 Definizione *Un insieme* $\{A_n\}$ *è* completo *se per ogni* $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *che commuti con ogni* A_n *si ha per una opportuna* f*:*

$$B = f(A_1, A_2, ...)$$

Per i sistemi completi di operatori autoaggiunti a due a due permutabili abbiamo che

$$\forall B \in \mathcal{R}' \quad B \in \mathcal{R}$$

i.e. $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$. Ma $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$ e quindi

$$\{A_n\} \text{ completo} \iff \mathcal{R} = \mathcal{R}'$$

cioè se e solo se $\mathcal{R}$ è MASA.

Questo dimostra il

11.2.7 Teorema *Se $\{A_n\}$ è un sistema completo di operatori autoaggiunti a due a due permutabili su uno spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$ allora esiste un operatore unitario $U : \mathcal{H} \longrightarrow L^2(X, \mu)$ (X è lo spettro congiunto degli operatori) tale che*

$$\forall f \in L^\infty(X, \mu) \quad Uf(A_1, A_2, ...)U^{-1} = M_f$$

Se $\mathcal{R} = \mathcal{R}'' \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ allora esiste una C*-algebra separabile (in norma) tale che $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}$ tale che $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$.

Questo è vero, in realtà, per ogni algebra $\mathcal{A}$ di von Neumann e per l'insieme $\mathcal{B}(\mathcal{H})_1$ (palla unitaria) con la topologia debole (rispetto alla quale è un compatto metrizzabile); in altri termini: per ogni $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, l'algebra

$$\mathcal{R}_1 := \mathcal{R} \cap \mathcal{B}(\mathcal{H})_1$$

è separabile (X è compatto, quindi metrizzabile se e solo se soddisfa il primo assioma di numerabilità) essendolo la palla unitaria in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Se $\{T_n\} \subset \mathcal{R}_1$ è una successione debolmente densa allora, denotando con $\mathbf{A}$ la C*-algebra generata dall'identità e dagli elementi $\{T_n\}$, abbiamo che

$$\mathcal{R} \subset \overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{d}} \subset \mathcal{R}$$

($\mathcal{R}$ è debolmente chiusa), cioè

$$\mathcal{R} = \overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{d}}$$

Basta quindi, per separabilità, considerare famiglie totali numerabili; ad esempio i monomi nelle T_n e nei loro aggiunti, i.e. la successione

$$A_1 := T_1 \quad A_2 = T_1^* \quad A_3 = T_2 \quad ...$$

e considerare le funzioni f a supporto compatto definite su $\mathbb{N}$ a valori in $\mathbb{N}$:

$$A_1^{f(1)}, \quad A_2^{f(2)}, ...$$

il che fornisce una successione totale nel caso commutativo. Nel caso non commutativo bisogna considerare i "monomi non commutativi", cioè le parole che si possono formare con le "lettere " $\{A_n\}$.

Infine, $\mathcal{B}(\mathcal{H})_1$ è compatto metrizzabile per il teorema di Alaoglu 8.2.12; vogliamo ora dimostrare che

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathfrak{M}_0^* = \mathfrak{M}^*$$

ove $\mathfrak{M}_0^*$ è uno spazio normato tale che

$$\mathfrak{M}_0 \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})^*$$

e $\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{M}_0}^{||\cdot||}$ ne è il completamento; definiamo $\mathfrak{M}_0$ come il sottospazio di $\mathcal{B}(\mathcal{H})^*$ generato dai funzionali

$$\begin{aligned} f_{x,y} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ A &\longmapsto (x, Ay) \end{aligned}$$

(per $x, y \in \mathcal{H}$). Ovviamente

$$||f_{x,y}|| \leq ||x|| \; ||y||$$

(essendo $|f_{x,y}(A)| \leq ||A|| \; ||x|| \; ||y||$) e

$$\forall f \in \mathfrak{M}_0 \quad f(A) = 0 \Rightarrow A = 0$$

Quindi basta osservare che

$$\forall F \in \mathfrak{M}_0^* \; \exists A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad F(f_{x,y}) = f_{x,y}(A)$$

come segue immediatamente dal teorema di rappresentazione di Riesz.

Notiamo inoltre che la topologia debole su $\mathcal{B}(\mathcal{H})_1$ è quella definita da $\mathfrak{M}_0$, i.e. è la topologia debole degli operatori, nella quale $\mathcal{B}(\mathcal{H})_1$ risulta dunque essere compatto; infatti, in generale, se X è uno spazio normato con la $\sigma(X^*, X)$-topologia, su X_1 è

$$\sigma(X_1^*, X) = \sigma(X_1^*, \mathcal{N})$$

ove $\mathcal{N}$ è denso in X, il che si dimostra osservando che, per ogni $\varepsilon > 0$ ed $x \in X$ esiste x_ε tale che $||x - x_\varepsilon|| < \varepsilon$ per il quale

$$\forall f \in X_1^* \quad |f(x - x_\varepsilon)| < \varepsilon$$

cioè

$$|p_x(f) - p_{x_\varepsilon}(f)| < \varepsilon$$

uniformemente sulle f.

Se $\mathcal{H}$ è separabile al posto di $\mathfrak{M}_0$ basta considerare le combinazioni lineari a supporto finito e coefficienti in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$

$$\sum_{i,j} q_{ij} f_{x_i, y_j}$$

ove $\{x_i\}$ è una successione densa. Quindi la topologia debole degli operatori su $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ è in questo caso definita dalla famiglia (numerabile) di seminorme

$$p_k(A) := \left| \sum_{i+j=k} q_{ij} f_{x_i, x_j}(A) \right|$$

Da questo segue immediatamente che $\mathcal{B}(\mathcal{H})_1$ è metrizzabile rispetto alla distanza

$$d(A,B) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{p_k(A-B)}{1+p_k(A-B)}$$

(ove $c_n > 0$ e $\sum_n c_n = 1$), che induce la topologia debole degli operatori.

Abbiamo cioè dimostrato che $\mathcal{B}(\mathcal{H})_1$ è compatto e metrizzabile (il che è equivalente a dire che è compatto e verifica il secondo assioma di numerabilità, ovvero che è compatto e separabile).

Osserviamo che se $\{A_n\}$ è una successione di autoaggiunti e $f \in L^\infty(X,\mu)$ allora, per il teorema di Stone–Weierstrass, se

$$p_n(s) := s_n \in \sigma(A_n)$$

(si ricordi che $X \subset \prod \sigma(A_n)$) un insieme totale in $C(X)$ è

$$\{f(s) := s_1^{n_1} s_2^{n_2} ...\}$$

Per calcolare

$$\int_X f(s) d\mu(s)$$

su qualsiasi funzione continua f basta quindi conoscere i valori

$$\int_X s_1^{n_1} s_2^{n_2} ... d\mu(s) := (\xi, A_1^{n_1} A_2^{n_2} ... \xi)$$

che, mediando il linguaggio probabilistico, si dicono *momenti* della misura μ.

11.3 Topologie ultradeboli e ultraforti.

Abbiamo considerato sull'insieme $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ degli operatori continui di uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ (non necessariamente separabile) alcune topologie: la topologia della norma, la topologia debole e la topologia forte. Vogliamo introdurne altre due, la ultradebole e la ultraforte.

Introdurremo queste topologie per mezzo di seminorme: intanto osserviamo che la topologia debole e la topologia forte sono pure indotte da seminorme:

$$p_{x,y}(A) := |(x, Ay)|$$

nel caso debole e

$$p_x(A) := ||Ax||$$

nel caso forte.

Ricordiamo che la topologia forte è effettivamente più fine della topologia debole, avendosi

$$p_{x,y}(A) \leq ||x|| \, ||Ay|| \leq ||x|| p_y(A)$$

e che certamente queste topologie non coincidono (a meno che $\dim \mathcal{H} < \infty$). Ad esempio, il morfismo

$$* : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

di passaggio all'aggiunto è un omeomorfismo per la topologia debole:

$$p_{x,y}(A) = |(x, Ay)| = |\overline{(x, Ay)}| = |\overline{(A^*x, y)}| = |(y, A^*x)| = p_{y,x}(A^*)$$

mentre per la topologia forte non è nemmeno una funzione continua: per vederlo basti considerare l'operatore di *shift*

$$Se_n := e_{n+1}$$

(lo abbiamo scritto su una base ortonormale) che, per ogni $k \geq 1$ dà luogo ad una isometria S^k:

$$||S^k x|| = ||x||$$

Quindi S^k non può convergere a zero fortemente (perché la successione numerica delle sue norme è costantemente $1 \neq 0$), mentre

$$||S^{*k}x||^2 = (x, S^k S^{k*} x) = \sum_{m=k+1}^{\infty} |(e_m, x)|^2 \longrightarrow 0$$

(si noti infatti che $S^k S^{k*} = E_{\{e_1,\dots,e_k\}^\perp}$); quindi, per

$$A_n := S^{*n}$$

otteniamo una successione fortemente infinitesima ma tale che A_n^* non converga fortemente a zero.

Tornando alle considerazioni precedenti, ricordiamo che la topologia debole è la $(\sigma(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathfrak{M}_0)$-topologia, e quindi se $x = \{x_n\}$ e $y = \{y_n\}$ sono successioni a quadrato sommabile

$$||x||_{l^2} = \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||^2 < \infty \qquad ||y||_{l^2} = \sum_{n=1}^{\infty} ||y_n||^2 < \infty$$

allora

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (x_n, Ay_n) \right|$$

converge assolutamente per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, dato che

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(x_n, Ay_n)\right| \leq ||A|| \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||\ ||y_n|| \leq ||A||\ ||x||_{l^2}||y||_{l^2}$$

(abbiamo usato la disuguaglianza di Schwartz in l^2); quindi, se

$$f(A) := \sum_{n=1}^{\infty}(x_n, Ay_n) \qquad \text{e} \qquad f_n(A) := \sum_{i=1}^{\infty}(x_i, Ay_i)$$

si trova che

$$|(f - f_n)(A)| \leq ||A||$$

e quindi

$$||f - f_n|| \leq \sum_{i=n}^{\infty} ||x_i||\ ||y_i||@ \gg > 0$$

cioè $f \in \mathfrak{M} := \overline{\mathfrak{M}_0}$.

11.3.1 Definizione *La* topologia ultradebole *è la topologia definita dalle seminorme*

$$p_{\{x_n\},\{y_n\}}(A) := \left|\sum_{i=1}^{\infty}(x_i, Ay_i)\right|$$

ove $\{x_n\}, \{y_n\} \in \bigoplus_i \mathcal{H}$.

Consideriamo ora

$$\widetilde{\mathcal{H}} := \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}$$

Evidentemente possiamo considerare su $\widetilde{\mathcal{H}}$ la somma diretta delle rappresentazione identica $\pi_n : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $(\pi(A) = A)$:

$$\pi = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \pi_n$$

In altri termini $\pi(A)$ opera su $x = \{x_n\}$ come

$$\pi(A)(x) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} Ax_n$$

Dunque

$$f(A) = (x, \pi(A)y)$$

e

$$p_{\{x_n\},\{y_n\}}(A) = |(x, \pi(A)y)|$$

11.3.2 Definizione *La* topologia ultraforte *è quella indotta dalle seminorme*

$$p_x(A) := ||\pi(A)x|| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} ||Ax_n||^2}$$

ove $\sum_n ||x_n||^2 < \infty$.

Ovviamente la topologia ultradebole è (strettamente) più fine della topologia debole e la topologia ultraforte è strettamente più fine della topologia ultradebole.

Ad esempio, se $\mathcal{B}(\mathcal{H})_N$ è la palla di centro l'origine e raggio N in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ allora su $\mathcal{B}(\mathcal{H})_N$ la topologia debole coincide con quella ultradebole e la topologia forte coincide con quella ultraforte. Infatti se $||A|| \leq N$ si ha

$$\sum_{i=n}^{\infty} ||Ax_i||^2 \leq N^2 \sum_{i=n}^{\infty} ||x_i||^2$$

cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un n_ε tale che per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_N$ il modulo delle differenze delle seminorme forti ed ultraforti sia minore di ε. Un enunciato analogo vale nel caso ultradebole.

Ora ricordiamo che, per la proposizione 8.2.3 un funzionale lineare su uno spazio normato X è continuo nella $\sigma(X,Y)$-topologia se è della forma $y \longmapsto \langle x, y\rangle$ per un fissato $x \in X$; nel nostro caso otteniamo

$$\mathcal{B}(\mathcal{H})^* = \{f \longmapsto \langle f, A\rangle\}_{f\in\mathfrak{M}_0}$$

11.3.3 Proposizione *I funzionali lineari su $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ continui nella topologia ultradebole (ultraforte) e debole (forte) coincidono.*

DIMOSTRAZIONE: Basta dimostrare che un funzionale lineare ultrafortemente continuo è anche ultradebolmente continuo.

Se f è ultrafortemente continuo allora esiste una seminorma ultraforte p tale che

$$|f(A)| \leq p(A) = ||\pi(A)x||$$

per qualche $x \in \bigoplus \mathcal{H}$. Se

$$\mathfrak{M} := \overline{\pi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))x} \subset \bigoplus \mathcal{H}$$

allora, per il teorema di rappresentazione di Riesz, esiste un unico g continuo tale che

$$g(z) = (z_1, z)$$

(per un fissato z_1) e quindi

$$\langle f, A\rangle = g(\pi(A)x) = z_1, \pi(A)x)$$

Analogamente si procede nel caso ultradebole.

QED

Ricordiamo ora che, per il teorema di Hahn–Banach, due topologie su uno spazio vettoriale hanno gli stessi funzionali lineari e continui se e solo se hanno gli stessi insiemi chiusi e convessi, e che in uno spazio vettoriale topologico un chiuso convesso contenente l'origine è intersezione di semispazi della forma

$$\{x \mid \operatorname{Re} < f, x > \leq 1\}$$

11.3.4 Proposizione *Con le notazioni precedenti:*

$$\mathfrak{M}_0 \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})^* \subset \mathfrak{M}$$

(la continuità dei funzionali è intesa essere quella debole).

DIMOSTRAZIONE: Sia f un funzionale lineare debolmente continuo:

$$f = \sum f_{x_i, y_i}$$

cioè tale che

$$\langle f, f\rangle = \sum_i (x_i, Ay_i)$$

con

$$(x, Ay) = \operatorname{tr}(AT_{x,y})$$

(il rango di $T_{x,y}$ è 1). ove

$$T_{x,y}z = y(x, z) = |y\rangle\langle x|z$$

Sugli operatori B a rango finito $\operatorname{tr} B = \sum_\alpha (e_\alpha, Be_\alpha)$ (ed è indipendente dalla scelta della base (e_α)), quindi

$$\operatorname{tr}(AT_{x,y}) = \sum_\alpha (e_\alpha, Ay)(x, e_\alpha) = \sum_\alpha (x, e_\alpha)(e_\alpha, Ay) = (x, Ay)$$

da cui, se $T = \sum_i T_{x_i, y_i}$:

$$\sum_i f_{x_i, y_i} = \operatorname{tr}(AT)$$

cioè

$$(\dagger) \qquad f \in \mathfrak{M}_0 \iff \langle f, A\rangle = \mathrm{tr}(AT) = \mathrm{tr}(TA) \quad (\mathrm{rk}\, T < \infty)$$

Applicando a T la decomposizione polare $T = V|T|$ (dato che $\mathrm{rk}\, T < \infty$ anche $\mathrm{rk}\, V, \mathrm{rk}\, |T| < \infty$):

$$T = V|T| = \sum_i \lambda_i T_{f_i, e_i}$$

dunque (per $A = V^*$ nella ($\dagger$))

$$||f|| = \mathrm{tr}\, |T| = \sum_i \lambda_i$$

Ma $\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{M}_0}$ e quindi gli elementi di $\mathfrak{M}$ sono serie assolutamente convergenti negli elementi di $\mathfrak{M}_0$:

$$\forall f \in \mathfrak{M} \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

con $f_n \in \mathfrak{M}_0$ e $\sum_n ||f_n|| < \infty$. Ma

$$f_n(A) = \mathrm{tr}(T_n A)$$

(al solito $T_n = V_n|T_n| = \sum_i \lambda_i^{(n)} T_{f_i^{(n)}, e_i^{(n)}}$) e

$$\sum_{i,n} \lambda_i^{(n)} < \infty$$

Dunque considerando le successioni

$$x_k := \sqrt{\lambda_i} e_i^{(n)} \qquad \mathrm{e} y_k := \sqrt{\lambda_i} f_i^{(n)}$$

si ottiene

$$\sum_k ||y_k||^2 = \sum_k ||x_k||^2 = \sum_{i,n} \lambda_i^{(n)} < \infty$$

sicché

$$f = \sum_n f_n = \sum_k f_{x_k, y_k}$$

è un funzionale ultradebolmente continuo.

QED

Osserviamo che la

$$(A) \qquad \forall (e_\alpha), (f_\alpha) \text{ basi ortonormali } \sum_\alpha |(e_\alpha, Bf_\alpha)| < \infty$$

è equivalente a

$$\sum_\alpha |(e_\alpha, Be_\alpha)| < \infty$$

(cioè per tali B ha senso calcolare la traccia di $|B|$) che pure è equivalente all'essere B compatto e

$$\sum_{\lambda \in \sigma(|B|)} \lambda \nu(\lambda) < \infty$$

Quindi, se B verifica la (A) allora, per ogni base ortonormale (e_α):

$$\operatorname{tr} B = \sum_\alpha (e_\alpha, Be_\alpha)$$

La totalità degli operatori che soddisfano questa condizione definisce un ideale bilatero che è uno spazio di Banach rispetto alla norma

$$||B||_1 := \operatorname{tr} |B|$$

e che si denota $L^1(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Quindi

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \; \forall T \in L^1(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \quad \operatorname{tr}(TB) = \operatorname{tr}(BT)$$

e

$$f \in \mathfrak{M} \iff \exists T \in L^1(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \quad \langle f, A \rangle = \operatorname{tr}(AT) \quad \text{e} \quad ||f|| = ||T||_1$$

da cui segue che $\mathfrak{M} \cong L^1(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ come spazi di Banach.

Ora consideriamo un sottospazio $\mathfrak{N} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ultradebolmente chiuso: si ha, per il teorema di Hahn–Banach:

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^{\perp\perp}$$

(osserviamo che se $\mathfrak{N}$ è un sottospazio si ha sempre $\mathfrak{N}^o = \mathfrak{N}^\perp$) e, dato che $\mathfrak{N}^\perp \subset \mathfrak{M}$ allora

$$\mathfrak{N}^{\perp\perp} = \left(\mathfrak{M}/\mathfrak{N}^\perp\right)^*$$

Inoltre osserviamo che come spazi di Banach:

$$\mathfrak{M}/\mathfrak{N}^\perp \cong \mathfrak{M}/\mathfrak{N}$$

e quindi che

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^{\perp\perp} = (\mathfrak{M}/\mathfrak{N})^*$$

Dunque, definendo il *preduale* di $\mathfrak{N}$ come

$$\mathfrak{N}_* := \{\text{funzionali lineari ultradebolmente continui su } \mathfrak{N}\}$$

di trova che $\mathfrak{N} \cong (\mathfrak{N}_*)^*$ in modo canonico.

11.4 Teoremi di Densità

Le topologie che abbiamo considerato sullo spazio degli operatori sono cinque:

$$\text{norma} > \text{ultraforte} > \begin{matrix}\text{ultradebole}\\ \text{forte}\end{matrix} > \text{debole}$$

Osserviamo che l'operatore $*$ nella C*-algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *non* è continuo rispetto alla topologia ultraforte: si definisce comunque la topologia *-(ultra)forte con le seminorme

$$p(A) + p(A^*)$$

al variare di p nelle seminorme che definiscono la topologia (ultra)forte. Così la convergenza *-forte è caratterizzata da

$$A_n \longrightarrow 0 \iff A_n x_n \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad A_n^* x \longrightarrow 0$$

e la convergenza *-ultraforte da

$$A_n \longrightarrow 0 \iff \pi(A_n) x_n \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad \pi(A_n^*) x \longrightarrow 0$$

Dimostriamo ora un risultato fondamentale più volte citato ed utilizzato:

11.4.1 Teorema di Densità (von Neumann) *Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una *-sottoalgebra non degenere di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ allora*

$$\overline{\mathcal{A}}^{uf} = \mathcal{A}''$$

Dimostrazione: Dobbiamo solo verificare che

$$T \in \mathcal{A}'' \Rightarrow T \in \overline{\mathcal{A}}^{uf}$$

cioè che se $T \in \mathcal{A}''$ allora per ogni seminorma ultraforte p esiste un $A \in \mathcal{A}$ tale che

$$p(T - A) < 1$$

Ma la più generale seminorma ultraforte è

$$p(B) = ||\pi(B)x||$$

e quindi dobbiamo dimostrare che

$$(tesi) \qquad \forall T \in \mathcal{A}''\ \forall x \in \widetilde{\mathcal{H}}\ \exists A \in \mathcal{A} \quad ||\pi(T)x - \pi(A)x|| < 1$$

Ovvero che $\pi(T)x \in \overline{\pi(\mathcal{A})x}$.

Usiamo ora un

Lemma A. *$\mathcal{A}$ è non degenere se e solo se $\pi(A)$ è non degenere.*

per dedurre che $\pi(\mathcal{A})$ è non degenere. Quindi $x \in \overline{\pi(\mathcal{A})x}$ (sappiamo già che non degenere vuol dire che per ogni $x \in \mathcal{H}$ $x \in \overline{\mathcal{A}x}$). Consideriamo allora l'operatore di proiezione

$$E = E_{\overline{\pi(\mathcal{A})x}}$$

Il sottospazio $\overline{\pi(\mathcal{A})x}$ è ciclico, quindi $E \in \pi(\mathcal{A})'$.

Quindi, se $B \in \pi(\mathcal{A})''$ allora $BE = EB$: ora usiamo un altro

Lemma B. $\pi(\mathcal{A}'') = \pi(\mathcal{A})''$.

per dedurre che $B \in \pi(\mathcal{A}'')$; in particolare $\pi(T)E = E\pi(T)$. Ma allora, dato che $Ex = x$ essendo $x \in \overline{\pi(\mathcal{A})x}$:

$$\pi(T)x = \pi(T)Ex = E\pi(T)x \in \overline{\pi(\mathcal{A})x}$$

il che conclude la dimostrazione.

QED

Ora dimostriamo i due lemmi.

Dimostrazione: (A) $\pi(\mathcal{A})$ è non degenere se e solo se $(\pi(\mathcal{A})x = 0 \iff x = 0)$. Ma

$$\pi(\mathcal{A})x = \{Ax_1 \oplus Ax_2 \oplus ... \,|\, A \in \mathcal{A} \text{ e } x_1 \oplus x_2 \oplus ... = x\}$$

e quindi

$$\pi(\mathcal{A})x = 0 \iff \forall i \quad \mathcal{A}x_i = 0$$

QED

Dimostrazione: (B) Se

$$x := \bigoplus_{i=1}^{\infty} x_i$$

e se

$$E_n x := 0 \oplus 0 \oplus ... \oplus 0 \oplus x_n \oplus 0 \oplus ...$$

(proiezione sull'n-simo elemento) allora

$$E_n \widetilde{\mathcal{H}} \cong \mathcal{H}$$

Ma $\sum_n E_n = I$, quindi

$$\forall x = \sum_n E_n x \;\forall T \in \mathcal{B}(\widetilde{\mathcal{H}}) \quad Tx = T\sum_n E_n x = \sum_m E_m T x = \sum_{n,m} E_m T E_n x$$

(per continuità di T), cioè

$$(Tx)_m = \sum_n E_m T E_n x_n$$

Dunque associamo a T una matrice infinita $(T_{nm})_{n,m\in\mathbb{N}}$ ove

$$T_{nm} = E_n T E_m : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

Il che vuol dire che

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \implies Tx = ((T_{nm})) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Ma $T \in \pi(\mathcal{A})' \iff \forall A \in \mathcal{A}\ T\pi(A) = \pi(A)T$, e, a livello di matrici:

$$T = ITI = \left(\sum_n E_n\right) T \left(\sum_m E_m\right) = \text{s-lim} \sum_{n,m} E_n T E_m$$

da cui $T = 0 \iff \forall n, m \in \mathbb{N} \quad T_{nm} = 0$.

Dunque la $T\pi(A) = \pi(A)T$ diviene

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad E_n T\pi(A) E_m = E_n \pi(A) T E_m$$

Ma $\pi(A)E_n = AE_n$, cioè

$$\pi(A)(0 \oplus ... \oplus 0 \oplus x_n \oplus 0 \oplus ...) = (0 \oplus ... \oplus 0 \oplus Ax_n \oplus 0 \oplus ...)$$

e quindi $E_n\pi(A) = E_n A$. Dato che, per definizione di $\pi(A)$, $E_n \in \pi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, troviamo

$$E_n T E_n A = E_n T \pi(A) E_n \Rightarrow E_n T E_m A = A E_n T E_m$$

Dunque $T \in \pi(\mathcal{A})' \iff T_{nm} \in \mathcal{A}'$ e

$$\pi(\mathcal{A})'' = \{R \in \mathcal{B}(\widetilde{\mathcal{H}}) \,|\, T_{nm} \in \mathcal{A}' \Rightarrow RT = TR\}$$

Ma $\pi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))' \subset \pi(\mathcal{A})'$ (infatti $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$) e quindi

$$R \in \pi(\mathcal{A})'' \Rightarrow RE_n = E_n R$$

per cui, se $R_n := R_{nn}$ sono gli elementi diagonali, si trova

$$R \bigoplus_{i=1}^{\infty} x_i = \bigoplus_{i=1}^{\infty} R_i x_i$$

e quindi R è diagonale. Se

$$\left(V_{nm} \bigoplus_{i=1}^{\infty} x_i\right)_j := \delta_{jn} x_n$$

allora V_{nn} è un'isometria parziale tale che ($V_{nm}^* = V_{mn}$)

$$V_{nm}^* V_{mn} = E_m$$

cioè $E_n = V_{nn}$. Le V_{nm} sono le *unità matriciali*, i.e. matrici che hanno 1 all'incrocio fra n-sima riga e m-sima colonna e 0 altrove. Ogni operatore è quindi della forma

$$\sum_{n,m} T_{nm} V_{nm}$$

(con $T_{nm} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$) e $V_{m'n'} V_{nm} = V_{m'm} \delta_{n'n}$.

Tornando alla dimostrazione del lemma, abbiamo trovato che

$$V_{nm} \in \pi(\mathcal{B}(\mathcal{H}))'$$

(dato che $\pi(A) V_{nm} \oplus_i x_i = \pi(A)(\oplus_j \delta_{jn} x_m)$) e quindi $R \in \pi(\mathcal{A})''$, cioè R commuta con V_{nm} e pertanto i suoi elementi diagonali coincidono:

$$R_1 = R_2 = ...$$

Infatti, per ogni $y \in \mathcal{H}$

$$R_n y = R V_{nm} E_n y = V_{nm} R E_n y = R_m y \in E_n \widetilde{\mathcal{H}}$$

dunque $R_n = R_m$, e quindi

$$\pi(\mathcal{A})'' = \pi(\mathcal{B}) = \left\{ \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & R_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & R_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \right\}$$

ove $\pi(\mathcal{A}') \subset \pi(\mathcal{A})$, dato che da $B \in \mathcal{A}'$ e $A \in \mathcal{A}$ segue $BA = AB$ e quindi $\pi(A)\pi(B) = \pi(AB) = \pi(BA) = \pi(B)\pi(A)$. Dunque

$$\pi(\mathcal{B}) \subset \pi(\mathcal{A}')'$$

Ma $T \in \pi(\mathcal{A}')$ se e solo se $E_n \pi(R_1) T E_m = E_n T \pi(R_1) E_m$ i.e. $R_1 E_n T E_m = E_n T E_m$.

Ne segue che per ogni $B \in \mathcal{A}'$ si ha $T = V_{nm} B$ e quindi R_1 commuta con ogni elemento di $\mathcal{A}'$, sicché

$$\pi(\mathcal{A})'' = \pi(\mathcal{A}'')$$

QED

Dal teorema di von Neumann segue che le seguenti inclusioni sono tutte uguaglianze:

$$\overline{\mathcal{A}}^{uf} \subset \frac{\overline{\mathcal{A}}^{f}}{\overline{\mathcal{A}}^{ud}} \subset (\overline{\mathcal{A}}^{d})'' = \mathcal{A}''$$

11.4.2 Teorema di Densità (KAPLANSKI) *Se $\mathcal{A}$ è una *-sottoalgebra di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e se $\mathcal{R} := \overline{\mathcal{A}}^f$ allora*

$$\mathcal{R}_1 = \overline{\mathcal{A}_1}^f$$

cioè $(\overline{\mathcal{A}}^f)_1 = \overline{\mathcal{A}_1}^f$.

DIMOSTRAZIONE: Si tratta di dimostrare, per una *-sottoalgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, che

$$(\overline{\mathcal{A}}^f)_1 = \overline{\mathcal{A}_1}^f$$

Iniziamo con la seguente osservazione: se $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è un insieme convesso allora $\overline{\mathcal{S}}^f = \overline{\mathcal{S}}^d$; in particolare, se $\mathcal{A}$ è una *-sottoalgebra di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ consideriamo $\mathcal{A}_{aa}$ (la sua parte autoaggiunta), $\mathcal{A}_1$ (i suoi elementi di norma 1) e l'intersezione $\mathcal{A}_{aa} \cap \mathcal{A}_1$: si tratta di insiemi convessi, quindi per ognuno di essi le chiusure nelle topologie forti e deboli coincidono.

Ora, nella topologia debole l'operazione * è un omeomorfismo, quindi, se $\mathcal{A}$ è convessa:

$$\left(\overline{\mathcal{A}}^d\right)_{aa} = \overline{\mathcal{A}_{aa}}^d$$

Pertanto, malgrado $A \longmapsto A^*$ *non* sia fortemente continua, si ha:

$$\begin{array}{ccc} \left(\overline{\mathcal{A}}^d\right)_{aa} & = & \left(\overline{\mathcal{A}}^f\right)_{aa} \\ || & & || \\ \overline{\mathcal{A}_{aa}}^d & = & \overline{\mathcal{A}_{aa}}^f \end{array}$$

Consideriamo dunque la topologia uniforme (la topologia della norma): allora

$$B \in (\overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||})_1 \iff ||B|| \leq 1 \qquad \text{e} \qquad \exists (A_n) \subset \mathcal{A} \qquad B = \lim A_n$$

(ove il limite è nella topologia uniforme). A meno di moltiplicare gli elementi A_n per numeri reali di modulo minore o uguale a 1 possiamo supporre che sia $||B|| = 1$ e $||A_n|| \longrightarrow 1$, cioè

$$||A_n||^{-1} A_n \xrightarrow{||\cdot||} B$$

ovvero

$$(\overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||})_1 = \overline{\mathcal{A}_1}^{||\cdot||}$$

Ma $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||} \subset \overline{\mathcal{A}}^f$ e quindi basta dimostrare il teorema per la chiusura uniforme di $\mathcal{A}$.

Definiamo $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ e

$$\widetilde{\mathcal{A}} = M_2(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \middle| A_{ij} \in \mathcal{A} \right\}$$

Allora, per $\mathcal{R} = \overline{\mathcal{A}}^f$ e $\widetilde{\mathcal{R}} = M_2(\mathcal{R})$, si ha

$$\widetilde{\mathcal{R}} = \overline{\widetilde{\mathcal{A}}}^f$$

(infatti una successione $(A_n) \subset \widetilde{\mathcal{A}}$ converge fortemente a T se e solo se $E_i A_n E_j$ converge a $E_i T E_j$ per $i, j \in \{1, 2\}$).

Ora quello che vogliamo dimostrare è che, per ogni $T \in \mathcal{R}_1$:

$$T = \operatorname*{s-lim}_{\alpha} A_\alpha$$

con $A_\alpha \in \mathcal{A}_1$. Ma se

$$\widetilde{T} = \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathcal{R}}$$

allora

$$||\widetilde{T}|| = \sup_{||x_1 \oplus x_2||=1} ||Tx_2 \oplus T^* x_1|| = ||T|| \cdot 1$$

Ora usiamo il

11.4.3 Lemma $\overline{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_{aa}}^f = (\overline{\mathcal{A}}^f)_1 \cap (\overline{\mathcal{A}}^f)_{aa}$.

per dedurre che

$$\widetilde{T} = \operatorname*{s-lim}_{\alpha} \widetilde{A}_\alpha$$

(con $\widetilde{A}_\alpha \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_{aa}$). e quindi

$$\operatorname*{s-lim}_{\alpha} (\widetilde{A}_\alpha)_{12} = T = E_1 \widetilde{T} E_2 = \text{s-lim}\, E_1 \widetilde{A}_\alpha E_2$$

e quindi $(\widetilde{A}_\alpha)_{12} \in \mathcal{A}_1$ il che conclude la dimostrazione.

Resta da provare il lemma: basta trovare una funzione

$$f : \mathcal{R}_{aa} \longrightarrow \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{A}_{aa}$$

tale che

- f è suriettiva;
- f è fortemente continua;
- $f(\mathcal{A}_{aa}) \subset \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_{aa}$;
- la restrizione $f|_{\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_{aa}}$ è biunivoca.

In effetti, se questo è vero allora $T \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_{aa}$ è limite forte di $A_\alpha \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_{aa}$, dato che $T = f(S)$ con $S \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_{aa} \subset \mathcal{R}_{aa}$; ma

$$\mathcal{R}_{aa} = (\overline{\mathcal{A}}^f)_{aa} = \overline{\mathcal{A}_{aa}}^f$$

(la seconda uguaglianza è un risultato noto). Quindi esistono $B_\alpha \in \mathcal{A}_{aa}$ tali che

$$S = \operatorname*{s-lim}_\alpha B_\alpha$$

e dunque

$$f(S) = \operatorname*{s-lim}_\alpha fBA_\alpha)$$

(per la (2)); ma $f(B_\alpha) \in \mathcal{A}_1$ (per la (3)) e quindi S è limite forte di $A_\alpha \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_{aa}$ (per la (4) dimostrare il risultato per S o T è la stessa cosa).

Non resta quindi che trovare una funzione con le proprietà (1)–(4). Se

$$f(t) := \frac{2t}{1+t^2} t \in \mathbb{R}$$

allora $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ è una funzione continua tale che $f(0) = 0$ e, ristretta all'intervallo $[-1, 1]$ è un omeomorfismo, cioè esiste una funzione g tale che

$$f|_{[-1,1]} = g$$

Se ora A è autoaggiunto allora $f(A) = f(A)^*$ e $||f(A)|| \leq 1$ (teorema spettrale), sicché $f(A) \in \overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||}$. Ma, ricordando che

$$\overline{\mathcal{A}_1}^{||\cdot||} = (\overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||})_1$$

possiamo assumere $f(A) \in \mathcal{A}_1$, ed analogamente per $\mathcal{R}$, quindi la funzione soddisfa le (1), (3) e (4). Dimostriamo per essa anche la (2).

Dobbiamo cioè far vedere che per ogni seminorma p della topologia forte esiste una seminorma p' (della topologia forte) tale che, se $p(T_s) < 1$ allora $p(f(T) - f(S)) < 1$.

Basta per questo prendere p in una sottobase di seminorme:

$$\begin{aligned} f(T) - f(S) &= (I + T^2)^{-1} 2T - (I + S^2)^{-1} 2S \\ &= (I + T^2)^{-1} 2T(I + S^2)(I + S^2)^{-1} \\ &\qquad - (I + T^2)^{-1}(I + T^2) 2S(I + S^2)^{-1} \\ &= 2(I + T^2)^{-1} \big(T(I + S^2) - (I + T^2)S\big) (I + S^2)^{-1} \end{aligned}$$

(si rammenti che S, T commutano col loro calcolo funzionale). Ma

$$(T(I + S^2) - (I + T^2)S) = T - S + T(S - T)S$$

e quindi, dato che $||f(T)|| \le 1$ e $||(I+T^2)^{-1}|| \le 1$ (essendo T autoaggiunto):

$$||(f(T) - f(S))x|| \le 2||(T-S)z_1|| + ||(S-T)z_2||$$

(con $z_1 = (I+S^2)^{-1}x$ e $z_2 = 2S(I+S^2)^{-1}x$). Questo conclude la dimostrazione del lemma, e quindi del teorema.

QED

Traiamo ora qualche conseguenza dai teoremi di densità appena dimostrati. Sia $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una sottoalgebra degenere e si consideri la proiezione

$$E_0 = E_{\overline{\mathcal{A}\mathcal{H}}}$$

Allora $\mathcal{A}|_{E_0\mathcal{H}}$ è non degenere e

$$\mathcal{A}|(I-E_0)\mathcal{H} = 0$$

Infatti se $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}|E_0\mathcal{H}$, dato che $\mathcal{H} = E_0\mathcal{H} \oplus (I-E_0)\mathcal{H}$ allora $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_0 \end{pmatrix}$.

Applicando il teorema di densità di von Neumann: $\mathcal{A}_0'' = \overline{\mathcal{A}_0}$ otteniamo

$$\overline{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{\mathcal{A}_0} \end{pmatrix} \Longrightarrow \overline{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_0'' \end{pmatrix} = \mathcal{A}_0'' \oplus 0$$

come segue dalla decomposizione $\mathcal{H} = E_0\mathcal{H} \oplus (I-E_0)\mathcal{H}$.

Dunque per ogni *-sottoalgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ le chiusure nelle topologie debole, forte, ultraforte, ultradebole e uniforme coincidono:

$$\overline{\mathcal{A}}^f = \overline{\mathcal{A}}^d = \overline{\mathcal{A}}^{uf} = \overline{\mathcal{A}}^{ud} = \overline{\mathcal{A}}^{||\cdot||}$$

Scriviamo quindi semplicemente $\overline{\mathcal{A}}$.

Inoltre $\mathcal{A}'' = \mathbb{C} \cdot I \oplus \mathcal{A}_0''$ e quindi $0 \oplus I = E_0 \in \overline{\mathcal{A}}$, da cui segue che $\overline{\mathcal{A}} \subsetneq \mathcal{A}''$ (strettamente) se $\mathcal{A}$ è degenere e $\overline{\mathcal{A}}$ contiene una identità E_0 *che non è* I.

11.4.4 Corollario *Se $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è un'algebra di von Neumann e J un suo ideale bilatero chiuso*[5] *e se $E_0 = E_{\overline{J\mathcal{H}}}$ allora $E_0 \in J$ ne è l'identità. In particolare*

$$J \text{ è proprio} \iff J \text{ è degenere}$$

(altrimenti $E_0 = I \in \mathcal{R}$).

[5] Abbiamo osservato che le chiusure nelle varie topologie coincidono, quindi non è necessario specificare quale.

11.4.5 Proposizione *Se $J \subset \mathcal{R}$ è uno *-ideale bilatero chiuso nell'algebra di Von Neumann $\mathcal{R}$ allora esiste un idempotente autoaggiunto $E_0 \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}' =: \mathcal{Z}(\mathcal{R})$ (centro dell'algebra di von Neumann) tale che $J = \mathcal{R}E_0$.*

DIMOSTRAZIONE: Sappiamo per il corollario che E_0 è l'identità di J e quindi $E_0 A = AE_0$ per ogni $A \in J$; dunque, se $A \in \mathcal{R}$:

$$\left.\begin{array}{r} AE_0 \in J \\ E_0 A \in J \end{array}\right\} \Rightarrow E_0 A E_0 = AE_0 \Rightarrow E_0 A = AE_0$$

Dunque $\mathcal{R}E_0 \subset J \subset \mathcal{R}E_0$ (dato che $A = AE_0$).

QED

11.4.6 Corollario *Se $\mathcal{R}$ ha centro* banale[6]*, cioè $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}' = \mathbb{C} \cdot I$ allora $\mathcal{R}$ è una C*-algebra* semplice*, i.e. non possiede ideali bilateri ultradebolmente chiusi propri).*

11.5 Cenni sulla teoria dei fattori

Le algebre di von Neumann con centro banale si dicono *fattori* e sono di fondamentale importanza nella teoria: infatti già nei lavori che gettarono le basi della teoria, von Neumann e Murray dimostrarono che ogni algebra di von Neumann si spezza in (integrale diretto di) fattori, che quindi costituiscono "i mattoni" con i quali ogni algebra di Von Neumann può essere costruita, e stabilirono una classificazione parziale di questi fattori, la cui struttura è governata in una certa misura dagli operatori di proiezione che contengono; non possiamo soffermarci su questa teoria vasta quanto affascinante: ci limitiamo a citare i risultati fondamentali senza dimostrazione.

Consideriamo le algebre di von Neumann rappresentate come algebre di operatori limitati $\mathcal{R}$ autoaggiunte ($\mathcal{R} \subset \mathcal{R}^*$) debolmente chiuse in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e contenenti l'identità.

Prima di procedere alla discussione dei fattori vediamo perché basta limitarsi a questo caso; se $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert separabile e $\mathfrak{F}$ è l'insieme di tutti i fattori in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ allora esiste su $\mathfrak{F}$ una σ-algebra boreliana; se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di probabilità (che immaginiamo come insieme di indici) e $x \longmapsto \mathfrak{M}(x)$ una funzione boreliana da X a $\mathfrak{F}$, possiamo definire una C*-algebra i cui elementi siano le mappe boreliane essenzialmente limitate $m : x \longmapsto m(x) \in \mathfrak{M}(x)$.

[6] Un'algebra di von Neumann contiene sempre almeno $\mathbb{C}$ dato che contiene l'identità.

Questa C*-algebra è in realtà un'algebra di von Neumann che si dice *integrale diretto* della famiglia $\{\mathfrak{M}(x)\}_{x\in X}$ rispetto alla misura μ,e si scrive

$$M = \int_X \mathfrak{M}(x)d\mu(x)$$

von Neumann ha dimostrato il seguente

11.5.1 Teorema *Ogni algebra di von Neumann M su uno spazio di Hilbert separabile è algebricamente isomorfa a un integrale diretto di fattori.*

Con questo von Neumann mostrò che la teoria dei fattori (da lui sviluppata con Murray) bastava alla descrizione delle algebre di Von Neumann.

Ricordiamo che se E è una proiezione (in uno spazio di Hilbert) allora è minimale in un'algebra di von Neumann $\mathcal{R}$ di operatori di $\mathcal{H}$ se $E \neq 0$ e per ogni $F \in \mathcal{R}$ proiezione, da $F \leq E$ (i.e. $FE = F$) segue che $F = E$ oppure $F = 0$.

Se E, F sono proiezioni in $\mathcal{R}$, le diciamo equivalenti se esiste qualche $V \in \mathcal{R}$ tale che $VV^* = E$ e $V^*V = F$, e scriviamo $E \sim F$. Se E è equivalente ad una proiezione $F \leq G$ si scrive $E \precsim G$.

11.5.2 Definizione *Una proiezione E in un'algebra di von Neumann si dice* infinita *se è equivalente ad una proiezione $F < E$; altrimenti si dice* finita.

Se $\mathcal{R}$ è un fattore, ogni proiezione non nulla ha una sottoproiezione equivalente non nulla: in altri termini, in un fattore, due proiezioni E, F soddisfano una "dicotomia": o $E \precsim F$ oppure $F \prec E$.

Il primo risultato fondamentale è il seguente

11.5.3 Teorema *Se un fattore $\mathfrak{M}$ contiene una proiezione minimale allora è isomorfo all'algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ di un certo spazio di Hilbert $\mathcal{H}_0$ la cui dimensione hilbertiana è il numero di proiezioni minimali di $\mathfrak{M}$ contenute in una famiglia ortogonale massimale di proiezioni minimali.*

Se $\mathfrak{M}$ è un fattore e $E_0 \in \mathfrak{M}$ è una proiezione finita non nulla (ammesso che esista) possiamo assegnare alla classe di equivalenza delle proiezioni a lei equivalenti "dimensione 1": confrontata con questa proiezione, ogni altra proiezione del fattore possiede una *dimensione* $d(E) \in [0, \infty]$.

11.5.4 Definizione *Sia $\mathfrak{M}$ un fattore:*

- *Se $\mathfrak{M}$ possiede, come nel teorema precedente, una proiezione minimale E_0, assegnamole dimensione 1: quindi, per ogni altra proiezione E abbiamo che $d(E) \in \{0, 1, 2, 3, ..., n\}$ (ove $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$); in questo caso $\mathfrak{M}$ si dice un* fattore di tipo I_n.

- *Se $\mathfrak{M}$ non possiede proiezioni minimali e l'elemento I è finito (non è equivalente ad una proiezione $E < I$), poniamo $d(I) = 1$: quindi, per ogni altra proiezione E abbiamo che $d(E) \in [0, 1]$ e $\mathfrak{M}$ si dice un* fattore di tipo II_1.
- *Se $\mathfrak{M}$ non possiede proiezioni minimali e l'elemento I è infinito allora per ogni proiezione E abbiamo che $d(E) \in [0, \infty]$ e $\mathfrak{M}$ si dice un* fattore di tipo II_∞.
- *Se $\mathfrak{M}$ non possiede proiezioni finite non nulle si pone, per ogni $E \neq 0$: $d(E) = \infty$ e $\mathfrak{M}$ si dice un* fattore di tipo III.

11.5.5 Esempio

- *Un fattore di tipo I_n ($n < \infty$) è l'algebra delle matrici $\mathfrak{M} = M_n(\mathbb{C})$.*
- *Un fattore di tipo I_∞ è $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (spazio di Hilbert separabile). Quest'ultimo dovrebbe essere l'analogo di dimensione infinita di un fattore di tipo I_n; tuttavia esiste una forte analogia fra i fattori I_n e II_1, che manca con quelli di tipo I_∞: l'esistenza di una traccia.*

Se $\mathfrak{M}$ è di tipo I_n e $A \in \mathfrak{M}$ allora possiamo considerare la sua decomposizione spettrale e definire la sua *traccia* come

$$\tau(A) = \int_{-||A||}^{||A||} \lambda d(dE(\lambda))$$

(ove $d(E)$ è la dimensione della proiezione: $d(I) = 1$). Si tratta di un funzionale lineare su $\mathfrak{M}$ ed il nome si giustifica per via della

$$\tau(A) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A)$$

Se $\mathfrak{M}$ è di tipo II_1 possiamo definire allo stesso modo la traccia ed otteniamo di nuovo un funzionale lineare: la sua additività è tuttavia non banale da dimostrare (Teorema di Murray).

11.5.6 Teorema (MURRAY–VON NEUMANN) *Se $\mathfrak{M}$ è un fattore di tipo II_1 allora esiste un unico funzionale $\tau \in \mathfrak{M}^*$ tale che*

- $\tau(I) = 1$
- $\tau(AB) = \tau(BA)$
- $\tau(A^*A) \geq 0$

11.5.7 Esempio [7] *Se G è un gruppo (discreto) di ordine numerabile e $\mathcal{H} = l^2(G)$ allora*

$$L_g\varphi(h) = \varphi(g^{-1}h)$$

è un operatore unitario in $l^2(G)$.

Consideriamo la chiusura forte $\mathfrak{L}$ della sottoalgebra di $\mathcal{B}(l^2(\mathcal{H}))$ generata dalla famiglia $\{L_g\}_{g\in G}$: vige il seguente

11.5.8 Teorema *$\mathfrak{L}$ è un fattore se e solo se tutte le classi coniugate (a parte $\{e\}$) del gruppo G sono insiemi infiniti. In questo caso $\mathfrak{L}$ è di tipo II_1.*

11.5.9 Esempio *Il gruppo $S_{(\infty)}$ delle applicazioni biunivoche di $\mathbb{N}$ in sé che spostano solo un numero finito di elementi è un fattore di tipo II_1.*

Diamo ora un esempio di fattore di tipo II_∞: partiamo da un fattore $\mathfrak{M}$ di tipo II_1 e supponiamo che $\mathfrak{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$; se $\widetilde{\mathcal{H}}$ è la somma diretta numerabile di copie di $\mathcal{H}$, allora possiamo far agire una matrice infinita

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots \\ A_{21} & A_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ove $A_{ij} \in \mathfrak{M}$, per moltiplicazione a sinistra sui "vettori infiniti" ad elementi in $\mathcal{H}$. Denotiamo con $\mathfrak{M} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K})$ le matrici di questo tipo che sono operatori limitati su $\widetilde{\mathcal{H}}$.

11.5.10 Teorema *$\mathfrak{M} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K})$ è un fattore di tipo II_∞ e viceversa ogni fattore di tipo II_∞ è di questa forma.*

I fattori di tipo *III*, che sono sfuggiti per molto tempo alla comprensione degli studiosi, sono più ardui a costruirsi.

Per i fattori esiste una teoria della molteplicità spettrale, che conduce a risultati di isomorfismo: ne diamo un esempio.

Se $\mathcal{R}$ agisce su $\mathcal{H}$ (separabile!) e $x \in \mathcal{H}$, le proiezioni E'_x e E_x con immagini $\overline{\langle \mathcal{R}x\rangle} \subset \mathcal{R}'$ e $\overline{\langle \mathcal{R}'x\rangle} \subset \mathcal{R}$ ($\mathcal{R}'$ è il commutante: si rammenti il teorema di densità $\mathcal{R}'' = \mathcal{R}$).

[7] von Neumann, oltre alle motivazioni legate ai fondamenti della Meccanica Quantistica, gettò le basi della teoria dei fattori per affrontare lo studio delle algebre di gruppo dei gruppi discreti.

11.5.11 Teorema (MURRAY–VON NEUMANN) *Se* $\mathfrak{M}$ *è un fattore di tipo* II_1*, il numero*

$$c(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}') := \frac{d(E_x)}{d'(E'_x)}$$

non dipende da x*.*

Questa costante si dice *costante di accoppiamento*; se $\mathfrak{M}$ è di tipo I_n e $\mathfrak{M}'$ di tipo I_m allora il teorema vale ed afferma che

$$c = \frac{m}{n}$$

Se $\mathfrak{M}'$ è di tipo II_∞, d' ha senso solo a meno di un multiplo positivo e quindi $c(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ è indefinito.

11.5.12 Teorema *Due fattori di tipo* II_1 *che agiscano su uno stesso spazio di Hilbert separabile sono unitariamente equivalenti se e solo se hanno la stessa costante di accoppiamento oppure se ambedue i commutanti sono di tipo* II_∞*.*

Questi risultati sono solo la punta dell'*iceberg*: per una immersione più approfondita nella teoria si può ad esempio consultare [12].