Applicazioni epistemologiche della teoria dei gruppi

Paolo Caressa

Con quest'anno ne sono passati cento senza Henri Poincaré: infatti il 17 luglio 1912 si spegneva a cinquantotto anni quello che molti hanno definito l'ultimo matematico universale della storia, una qualifica che forse potremmo anche ascrivere a Hermann Weyl. L'impronta di Poincaré sulla matematica del Novecento, e anche sulla matematica contemporanea, è ancora viva e profonda: alla sua celebre congettura è stata data risposta soltanto nel 2003 e non è eccessivo dire che cento anni di topologia sono stati influenzati profondamente dal tentativo di risolverla. I suoi lavori sul problema dei tre corpi hanno rivoluzionato la meccanica celeste e gettato nuova luce su questi studi, in particolare introducendo per la prima volta nella storia del pensiero scientifico il concetto di caos. Molti ritengono anche Poincaré un precursore della relatività einsteiniana.

Ma Poincaré è stato anche un pensatore che guardava al di là del pur sconfinato universo matematico nel quale si muoveva con strabiliante agilità: in particolare si è occupato di filosofia e filosofia della scienza, lasciando nei suoi ultimi anni alcuni interessanti contributi in proposito, che hanno avuto una influenza notevole su molti altri pensatori.

E infatti, piuttosto che imbarcarci nell'ardua se non impossibile impresa di passare in rassegna la monumentale attività del grande matematico, ci piace ricordare questi cento anni che ci separano dalla sua scomparsa facendo proprio riferimento ad alcune sue osservazioni che potremmo definire epistemologiche ma che utilizzano comunque idee e concetti matematici.

1. L'ubiquità dei gruppi

Il concetto di *gruppo* è una delle idee fondamentali e portanti della matematica moderna: la teoria dei gruppi si ramifica infatti in tutte le branche della matematica, dall'algebra, alla geometria all'analisi, alla matematica applicata. L'idea in sé origina nel campo dell'algebra, e precisamente nei lavori di Giuseppe Luigi Lagrange della fine del Settecento e soprattutto di Evariste Galois dell'inizio dell'Ottocento, nei quali si pose fine alla questione della ricerca delle formule risolutive, con le quattro operazioni e le estrazioni di radice, delle equazioni algebriche. Associando a una equazione algebrica il gruppo di permutazioni delle sue radici e legando le proprietà della struttura di questo gruppo alla risolubilità o meno dell'equazione fu chiaro che una equazione algebrica di grado maggiore o uguale a cinque non può essere in generale risolta per radicali.

Per molto tempo i gruppi rimasero confinati in quest'ambito, cioè identificati con i gruppi di permutazioni, fino a che, nella seconda metà dell'Ottocento, non si scoprirono esempi di gruppi con infiniti elementi, i cosiddetti gruppi di Lie, che compaiono in tutti i rami delle scienze a governare fenomeni fondamentali: dalla struttura delle particelle elementari, alla geometria degli elementi chimici, alle simmetrie dell'universo su vasta scala.

Ma cos'è esattamente un gruppo?

La definizione è semplice ma nasconde una teoria profonda: un gruppo è un insieme G di elementi qualsiasi, che contiene almeno un elemento e (chiamato *elemento neutro*) in modo che sugli elementi di G si possa operare con una operazione * che goda delle seguenti proprietà:

1) $a * (b * c) = (a * b) * c$, per ogni a, b, c in G.
2) $a * e = e * a$, per ogni a in G.
3) Per ogni a in G esiste sempre un b in G tale che $a * b = b * a = e$.

Diciamo pertanto che l'operazione che permette di combinare due elementi qualsiasi di un gruppo per fornirne un altro è *associativa*, possiede un *elemento neutro* e ogni elemento possiede un *inverso* per essa.

Esempi di gruppi sono dati dai sistemi numerici: per esempio i numeri interi {0, 1, –1, 2, –2, ...} formano un gruppo rispetto alla somma, con elemento neutro dato dallo zero e inverso dato dalla negazione, cioè prediamo nella 3) b pari a $-a$. Invece, rispetto alla moltiplicazione gli interi non formano un gruppo, dato che l'inverso di a in questo caso sarebbe $1/a$ che non è un intero a meno che $a = \pm 1$. Ma questo stesso esempio ci fornisce un gruppo {1, –1} con due elementi, dei quali 1 è l'elemento neutro, che è un gruppo rispetto alla moltiplicazione fra numeri.

I numeri reali formano invece ovviamente un gruppo rispetto all'addizione, con elemento neutro lo zero e inverso la negazione. I numeri reali positivi formano invece un gruppo rispetto alla moltiplicazione, con elemento neutro uno e inverso il reciproco $1/x$ di un numero $x > 0$. Si noti che la funzione esponenziale $x \to \exp x = e^x$ trasforma ciascun numero reale in un numero reale positivo e ha la peculiarità di trasformare la somma nel prodotto: $\exp(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = \exp(x) \exp(y)$, dunque trasforma il gruppo additivo di tutti i numeri reali nel gruppo moltiplicativo dei numeri reali positivi: poiché si tratta di una funzione biunivoca è quello che si chiama un *isomorfismo*, cioè consente di identificare due gruppi in modo completo.

Tuttavia le due classi di gruppi più importanti sono senza dubbio i gruppi finiti di permutazioni e i gruppi di trasformazioni, e a ben vedere i primi sono un caso particolare dei secondi.

2. Permutazioni e trasformazioni

Un gruppo di permutazioni è un insieme di permutazioni di n elementi che si combinano per composizione: dati n oggetti, per fissare le idee consideriamo 1, 2, 3, ..., n, una *permutazione* è un riordinamento della successione (1, 2, 3, ..., n). Per esempio (2,1,3) è una permutazione sui tre oggetti 1,2,3, mentre (1,2,2) non lo è in quanto il 3 non vi compare: in effetti in una permutazione tutti gli oggetti devono comparire, e comparire una sola volta.

L'operazione * fra due permutazioni è la composizione: se p e q sono due permutazioni su n oggetti, il prodotto $p * q$ è la permutazione che si ottiene applicando al risultato della permutazione q la permutazione p. Per esempio, sempre ragionando su tre oggetti, la permutazione $p = (2,1,3)$ porta il primo oggetto 1 nel secondo, il secondo 2 nel primo e lascia il terzo oggetto 3 al suo posto. La permutazione $q = (3,2,1)$ porta il primo oggetto nel terzo, il terzo nel primo e lascia invariato il secondo. La composizione $p * q$ porta il primo oggetto nel terzo, il secondo nel primo e il terzo nel secondo: infatti applicando prima q a (1,2,3) troviamo (3,2,1), e applicando p a questa troviamo (2,3,1), dato che p porta il primo oggetto (che in questo caso è 3) nel secondo, il secondo (in questo caso 2) nel primo e lascia invariato il terzo (in questo caso 1).

La permutazione che fornisce l'elemento neutro è quindi quella identica, cioè (1,2, ..., n) che lascia ogni oggetto invariato. Un semplice esercizio per chi legge potrebbe essere capire qual è la permutazione inversa di una permutazione data: per esempio l'inversa di p = (2,3,1) è p^{-1} = (3,1,2).

Notiamo che il gruppo delle permutazioni *non è commutativo*, cioè non è detto che $p * q = q * p$, come invece accade per addizione e moltiplicazione fra numeri: usando l'esempio precedente, abbiamo visto come $p * q$ = (2,3,1), ma analogamente è facile rendersi conto che $q * p$ = (3,1,2).

Le permutazioni possono essere viste come le trasformazioni biunivoche dell'insieme $\{1, 2, ..., n\}$ in se stesso, cioè funzioni f: $\{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$ tali che per ogni i fra 1 e n ci sia esattamente un j fra 1 e n tale che $i = f(j)$.

In generale possiamo considerare le trasformazioni biunivoche su un qualsiasi insieme: una classe particolarmente interessante sono le trasformazioni lineari, che agiscono sullo spazio cartesiano. Un esempio nel piano potrà chiarire perché sono un gruppo.

Consideriamo il piano cartesiano, cioè l'insieme $\mathbf{R}^2$ delle coppie (x,y) di numeri reali. Una trasformazione lineare sposta una coppia di punti (x,y) in un'altra coppia di punti (x',y') in modo che fra le coordinate del punto di partenza e del punto di arrivo sussista una relazione lineare del tipo

$$\begin{cases} x' = ax + by + s \\ y' = cx + dy + t \end{cases}$$

La composizione di due trasformazioni di questo tipo si ottiene applicando prima l'una e poi l'altra a una coppia di punti: se $g(x,y) = (x',y')$ e $f(x',y') = (x'',y'')$ allora la composizione $f * g$ è la trasformazione che porta (x,y) in (x'',y''). Di nuovo otteniamo in questo modo un gruppo che non è commutativo.

Non è difficile dimostrare (sapendo cosa vuol dire...) che questa trasformazione è biunivoca se e soltanto se il determinante $ad - bc$ della matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ non è nullo. Se poi questa matrice è *ortogonale*, vale a dire soddisfa l'equazione $AA^T = I$ che si traduce nel sistema di equazioni

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

allora la trasformazione preserva la distanza fra i punti, cioè la distanza euclidea fra due punti trasformati è la stessa che fra i punti prima della trasformazione: per questo motivo queste trasformazioni si chiamano *isometrie*. Con un po' di trigonometria non è difficile capire che queste matrici sono del tipo $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ oppure del tipo $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$: le prime corrispondono a una *rotazione* di un angolo α, le seconde a una *riflessione* rispetto alla retta inclinata di un angolo $\alpha/2$. Nel caso particolare in cui $A = I$, cioè $a = d = 1$ e $b = c = 0$, la trasformazione si riduce a una semplice *traslazione* in quanto in questo caso l'effetto è di sommare s e t a x e y, e quindi di spostare il punto senza ruotarlo in alcun modo.

Ovviamente esistono infinite trasformazioni isometriche, tuttavia ne abbiamo in qualche modo legato la struttura a soli tre parametri: l'angolo α della rotazione o riflessione, e i due valori s e t che determinano la traslazione. In effetti si dice che il gruppo delle isometrie del piano ha dimensione tre, in un senso che potrebbe essere reso preciso.

Ragionando nello spazio cartesiano $\mathbf{R}^3$ delle terne di numeri reali troviamo in modo analogo il gruppo delle isometrie dello spazio euclideo, che risulta avere sei dimensioni, cioè dipendere da tre parametri: tre servono a determinare una matrice ortogonale 3×3, tre servono a determinare una traslazione nello spazio tridimensionale. E naturalmente, si possono anche definire i gruppi delle isometrie degli spazi euclidei di dimensione qualsiasi, anche infinita.

3. I gruppi di trasformazioni e l'estetica trascendentale

In alcuni suoi scritti, come il celebre libro *La Science et l'Hypothèse* (1902) e in diversi articoli apparsi su riviste come la *Revue de Méthaphysique et de Morale* e *The Monist*, Poincaré si è fatto la seguente domanda: quando diciamo che lo spazio ha tre dimensioni, che vogliamo dire?

Dal punto di vista strettamente matematico sembra banale rispondere: vogliamo dire che la descrizione dello spazio fisico nel quale viviamo è perfettamente coerente con il modello tridimensionale della geometria euclidea, o se si vuole che possiamo identificare il nostro spazio circostante con lo spazio cartesiano tridimensionale della geometria analitica. La fisica del mondo che ci circonda e che è alla nostra portata sembra infatti codificata nella geometria euclidea, come esplicitamente affermò Immanuel Kant nel capitolo della sua *Critica della ragione pura* dedicato all'*estetica trascendentale*, ovvero alla teoria della nostra percezione del mondo: ovviamente oggi sappiamo che se ci spostiamo su dimensioni macroscopiche, più che planetarie, o microscopiche, meno che atomiche, le cose cambiano e la descrizione euclidea diviene erronea o semplicemente svanisce.

E tuttavia questa risposta non sembra soddisfacente: il fatto che riusciamo a descrivere il mondo della nostra percezione con un modello tridimensionale non implica che il mondo lo sia veramente; l'argomentazione è in questo caso *a posteriori*. Quello che interessa Poincaré è invece se non sia possibile dedurre il numero di dimensioni dello spazio a partire dalla natura delle percezioni: è bene tenere presente che Poincaré considerava la geometria euclidea come una teoria completamente svincolata dall'esperienza, e quindi dal mondo che solitamente viene descritto per mezzo di essa. In termini kantiani, la geometria euclidea era per lui data *a priori*.

Ovviamente Poincaré riconosce che la geometria che abbiamo concepito è influenzata dall'esperienza, cioè dalla nostra percezione dello spazio, ma nega il fatto che la geometria sia una scienza sperimentale: è invece una pura astrazione della quale le percezioni del mondo fisico costituiscono una motivazione, un modello imperfetto da idealizzare.

Poincaré parte da considerazioni, per così dire, fisiologiche: la nostra percezione dello spazio è fornita da una molteplicità di stimoli sensoriali che vengono composti dal cervello in una sensazione unica: la vista e il tatto per esempio concorrono a definire una singola percezione, per esempio una superficie liscia come quella di un tavolo sul quale passiamo il palmo della mano mentre lo ispezioniamo con la vista.

Nel passare da una posizione all'altra del nostro corpo, diciamo da una posizione A a una posizione B, sperimentiamo una successione S di sensazioni muscolari che in qualche modo determinano B a partire da A. Più successioni di sensazioni muscolari possono condurre da A a B. Fra queste successioni Poincaré individua una classe importante che sono gli *spostamenti*, vale a dire quelle che servono a compensare un cambiamento esterno, cioè al di fuori del nostro corpo.

Gli spostamenti formano un gruppo, e questo gruppo è il gruppo euclideo, non per motivi intrinseci alla realtà delle nostre percezioni, ma piuttosto perché meglio descrive queste percezioni stesse: come scrive lo stesso Poincaré ne *La Science et l'Hypothèse*, (cap. 3):

> *"L'oggetto della geometria è lo studio di un particolare gruppo; ma il concetto generale di gruppo preesiste nel nostro spirito, almeno in potenza, e si impone a noi non come forma della nostra percezione, ma come forma del nostro intendimento. Fra tutti i gruppi possibili bisogna scegliere quello che sarà per così dire un termine di paragone col quale confronteremo i fenomeni naturali. L'esperienza non ci impone, ma ci guida in questa scelta; essa non ci fa riconoscere quale geometria è più vera, ma quale è più comoda."*

Notiamo l'eco kantiana di queste parole: la differenza sta nel fatto che Kant identificava le forme a priori della percezione nella geometria euclidea, Poincaré nella teoria dei gruppi...

Il gruppo degli spostamenti euclideo, cioè il gruppo delle isometrie dello spazio, che come abbiamo visto sono trasformazioni ottenute combinando per composizione le traslazioni e le rotazioni, possiede come sei gradi di libertà, poiché le traslazioni si possono identificare con i vettori dello spazio applicati in un punto, che formano quindi uno spazio di dimensione tre, mentre le rotazioni, rappresentabili con matrici 3×3 ortogonali, pure dipendono da tre parametri reali.

In effetti il gruppo euclideo è un gruppo di Lie, come si dice, cioè un gruppo che ha anche le caratteristiche di uno spazio, in particolare di uno spazio di dimensione sei.

Ma Poincaré non vuole dedurre la dimensione del gruppo da quella dello spazio, bensì procede in maniera inversa: l'esperienza ci induce a ritenere che il gruppo degli spostamenti che descrivono la realtà percepita dalle nostre sensazioni tattili e visive è il gruppo euclideo. Da questo segue che la geometria del mondo fisico si può schematizzare con la geometria tridimensionale euclidea, fermo restando che lo spazio euclideo è una pura astrazione matematica a priori.

Per chiudere il ragionamento, Poincaré si sofferma sul concetto di punto nello spazio fisico, in particolare legando la nozione di punto a quella di posizione.

Le posizioni sono determinate secondo Poincaré da sensazioni tattili: l'unico modo per verificare se un oggetto B occupa lo stesso punto precedentemente occupato da A è di tenere un dito fermo e sperimentare la sensazione di toccare prima A e poi B.

Dunque a ogni mia posizione corrisponde un punto, e possiamo considerare i cambiamenti di posizione del nostro corpo che tengono tuttavia fisso il dito su quel punto: l'unico modo per discernere questi cambiamenti dagli altri è che in questi persiste il contatto del nostro dito con l'oggetto che occupa quel punto.

In questo modo i punti dello spazio sono identificati con delle classi di spostamenti del nostro corpo, che corrispondono quindi a sensazioni muscolari: dunque, conclude Poincaré, quando affermiamo che lo spazio ha tre dimensioni, stiamo in realtà affermando che le classi di questi spostamenti che "fissano un punto" per mezzo di un dito formano i punti di uno spazio tridimensionale ("continuo tridimensionale" è l'espressione di Poincaré).

Naturalmente questa conclusione del matematico francese non vuol dire che abbiamo dedotto dall'esperienza che lo spazio ha tre dimensioni: infatti l'esperienza ci ha solo fatto dedurre qualcosa sui nostri corpi e sui loro rapporti con gli oggetti che sono in grado di toccare, non con lo spazio in sé. Come suggestivamente scrive Poincaré a proposito del gruppo euclideo: *l'esperienza ci ha guidato nel mostrarci quale scelta s'adatta meglio alle proprietà dei nostri corpi, ma il suo ruolo si arresta lì.* [...] *la geometria non è vera: è vantaggiosa.*

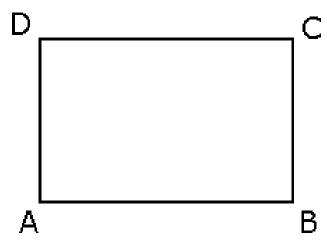
Una conseguenza interessante della teoria di Poincaré è che specie extraterrestri senzienti probabilmente, in base alla conformazione dei loro corpi, potrebbero scegliere un gruppo diverso per descrivere gli spostamenti, le posizioni e quindi i punti dello spazio che percepiscono come loro circostante, magari trovando un numero diverso di dimensioni: un buon tema per un racconto di fantascienza (ed effettivamente in alcuni racconti di H.P. Lovecraft creature aliene ed abominevoli sembrano seguire geometrie non euclidee).

4. Il gruppo di Klein e la psicologia cognitiva

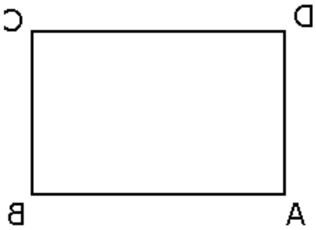
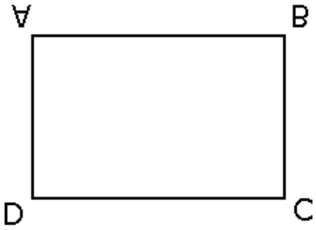
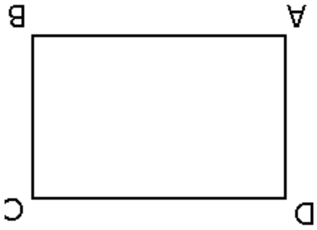
Se Poincaré considerava i gruppi come enti puramente astratti dati a priori alla nostra intuizione sensibile, c'è chi li ha anche utilizzati per descrivere i processi dello sviluppo cognitivo nel bambino: si tratta del grande pedagogista svizzero Jean Piaget, dal cui agile e brillante trattato *L'épistémologie génétique* riprendiamo un'altra applicazione epistemologica della teoria dei gruppi.

Piaget, che pur essendosi occupato di pedagogia, psicologia e filosofia era uno scienziato, individuò nel gruppo di Klein, che prontamente descriveremo, la struttura matematica che presiede nel bambino di 11/12 anni lo sviluppo della capacità di formulare ipotesi e ragionare su di esse, ciò che Piaget chiama "operazioni formali".

Per caratterizzare ed esprimere queste nuove capacità cognitive, Piaget utilizza il gruppo di Klein, o anche *gruppo dei quattro*, un gruppo commutativo con quattro elementi. Ci sono molti modi di rappresentarlo: una maniera semplice è vederlo come il gruppo delle simmetrie di un rettangolo (che non sia un quadrato), cioè delle trasformazioni che lasciano invariato un rettangolo.



Ci sono solo quattro trasformazioni siffatte: l'identità *e* (che non muove nulla), la riflessione *a* lungo la retta verticale passante per il centro, la riflessione *b* lungo la retta orizzontale passante per il centro e la rotazione *c* di 180°: queste ultime tre sono rappresentate rispettivamente nelle figure seguenti:

Non è difficile rendersi conto che non ci sono altre trasformazioni che lasciano invariato il rettangolo: intanto queste devono per forza essere isometrie; non possono essere traslazioni dato che vogliamo che il rettangolo rimanga nello stesso posto, dunque si tratta di rotazioni o riflessioni, e sappiamo che ce ne sono infinite parametrizzate da un angolo. Ma l'unica rotazione che lascia invariato il rettangolo è quella di 180 gradi (che corrisponde a $\alpha = \pi$ nella matrice $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ che abbiamo considerato in precedenza) mentre le uniche riflessioni che lasciano invariato il rettangolo sono quelle corrispondenti a $\alpha = 0$ e $\alpha = \pi$ nella matrice $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$: otteniamo in questo modo *c*, *b* e *a* rispettivamente.

Dunque i quattro elementi del gruppo di Klein possono identificarsi con le rotazioni e riflessioni corrispondenti agli angoli $\alpha = 0$ e $\alpha = \pi$ (la rotazione di angolo 0 è l'identità). Questo gruppo risulta commutativo, e ciascun suo elemento è l'inverso di se stesso.

Notiamo anche che ciascuna delle quattro figure precedenti può associarsi a una permutazione delle lettere ABCD, leggendole in senso antiorario dal vertice in basso a sinistra del rettangolo: abbiamo quindi le quattro permutazioni (A,B,C,D), (B,A,D,C), (D,C,B,A) e (C,D,A,B) il che ci dice che il gruppo di Klein è (isomorfo a) un sottogruppo con quattro elementi del gruppo delle permutazioni su quattro lettere (quest'ultimo ha 4!=24 elementi): questa circostanza è fra l'altro all'origine del fatto che l'equazione di quarto grado è risolubile per radicali.

Torniamo ora alla teoria di Piaget: la sua osservazione è che verso gli undici anni il bambino diviene capace di formulare ipotesi, deduzioni e inferenze rappresentandole nella propria mente senza necessariamente l'ausilio di oggetti o istanze concrete. In definitiva si forma la sua capacità di astrarre logicamente dal contesto e formulare ipotesi, che possono avere per oggetto non soltanto gli elementi della realtà percepita, ma a loro volta concetti e idee astratte.

Piaget identifica quattro meccanismi di base nella manipolazione dei concetti: considerando l'implicazione $p \Longrightarrow q$ fra due proposizioni, intesa come equivalente alla proposizione "p è falsa oppure q è vera" (secondo le regole della logica proposizionale), Piaget le associa la proposizione inversa N: "p è vera e q è falsa", la reciproca R: $q \Longrightarrow p$ e la correlativa C: "p è falsa e q è vera".

Notando che la correlativa è l'inversa della reciproca, cioè NR = C, CR = N, NRC = I, possiamo identificare le nostre quattro forme proposizionali {NRC, N, R, C} con il gruppo di Klein.

Le simmetrie di questo gruppo esprimono dunque per Piaget le capacità che il bambino acquisisce nella manipolazione delle ipotesi e delle loro conclusioni: in particolare la capacità di formulare la negazione di una ipotesi e di risalire dagli effetti alle cause, che sembrano maturare in questa fase dello sviluppo cognitivo, corrisponderebbero a un uso inconsapevole del gruppo di Klein nel ribaltare le situazioni. È in effetti suggestivo pensare all’interpretazione geometrica, guardando al rettangolo come una ipotesi $p \implies q$ che lega due concetti in una relazione “causale”, e considerando le simmetrie del rettangolo come ai possibili ribaltamenti di questa ipotesi.

Ma a noi pare ancora più suggestivo pensare che un oggetto matematico astratto, che fu esplicitamente definito da Felix Klein nel 1894 in un libro dedicato alla non risolubilità dell’equazione di quinto grado, possa avere trovato applicazione, anche solo come metafora, nel lontano campo delle scienze cognitive sperimentali. Di tutti gli usi che Klein avrebbe potuto immaginare per il suo gruppo, quello di Piaget rimane sicuramente il più remoto e affascinante.